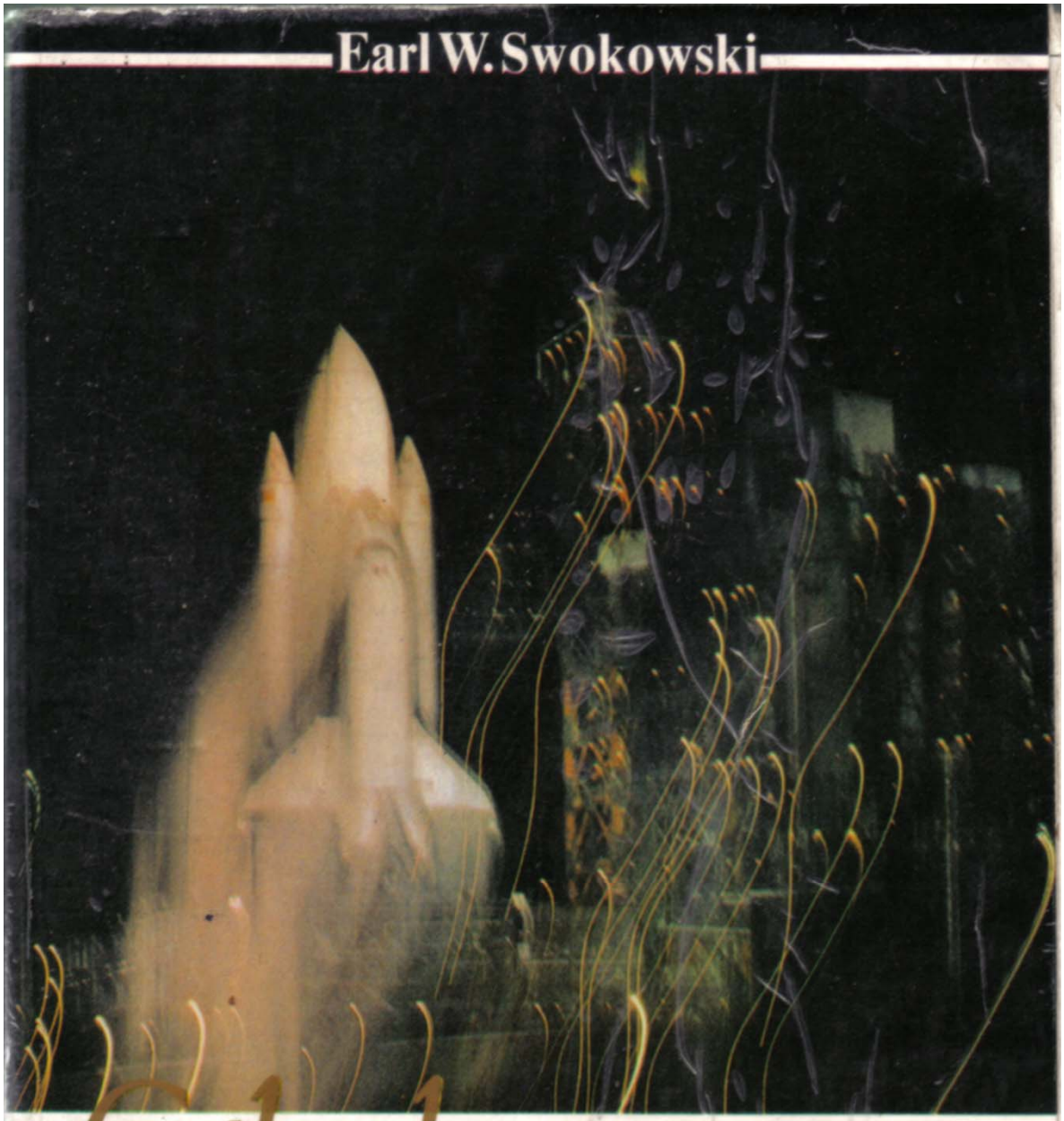
Earl W. Swokowski



Cálculo

con Geometría Analítica

Segunda Edición

Otros libros de Grupo Editorial Iberoamérica

Álgebra lineal - 2/e.
Stanley I. Grossman

Aplicaciones de álgebra lineal
Stanley I. Grossman

Introducción al cálculo con geometría analítica
Earl W. Swokowski

Álgebra y trigonometría con geometría analítica - 2/e.
Earl W. Swokowski

Cálculo con geometría analítica - 2/e.
Dennis G. Zill

Ecuaciones diferenciales con aplicaciones - 2/e.
Dennis G. Zill

Variable compleja con aplicaciones
William R. Derrick

Álgebra abstracta
I. N. Herstein

Álgebra Lineal
I. N. Herstein / David J. Winter

Ecuaciones en diferencia
Takeshito Takahasi

Grupo Editorial Iberoamérica
Wadsworth Internacional/Iberoamérica

ISBN 968-7270-43-8

ÁLGEBRA

EXPONENTES Y RADICALES

$a^m a^n = a^{m+n}$ $\qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

$(ab)^n = a^n b^n$ $\qquad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

VALOR ABSOLUTO ($d > 0$)

$|x| < d$ si y sólo si $-d < x < d$

$|x| > d$ si y sólo si $x > d$ o bien $x < -d$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$-|a| \leq a \leq |a|$

DESIGUALDADES

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

LOGARITMOS

$y = \log_a x$ significa $a^y = x$ $\qquad \log_a 1 = 0$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\qquad \log_a a = 1$

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\qquad \log x = \log_{10} x$

$\log_a x^r = r \log_a x$ $\qquad \ln x = \log_e x$

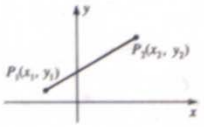
FÓRMULA DEL BINOMIO

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + y^n,$$

con $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

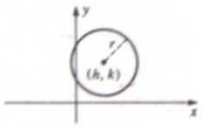
GEOMETRÍA ANALÍTICA

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



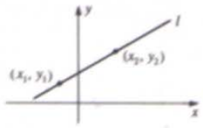
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

CIRCUNFERENCIA



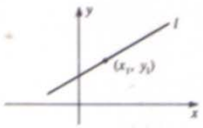
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

PENDIENTE m DE UNA RECTA



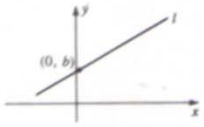
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

FORMA PUNTO-PENDIENTE



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

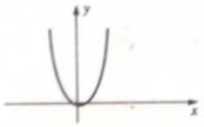
FORMA PENDIENTE-INTERCEPCIÓN



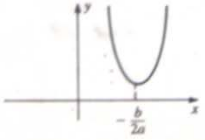
$$y = mx + b$$

GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

$y = ax^2$, $a > 0$



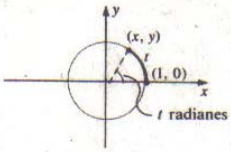
$y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$



TRIGONOMETRÍA

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

DE NÚMEROS REALES

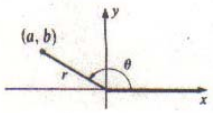


$$\operatorname{sen} t = y \qquad \csc t = \frac{1}{y}$$

$$\cos t = x \qquad \sec t = \frac{1}{x}$$

$$\tan t = \frac{y}{x} \qquad \cot t = \frac{x}{y}$$

DE ÁNGULOS ARBITRARIOS

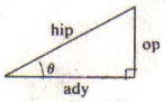


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

DE ÁNGULOS AGUDOS

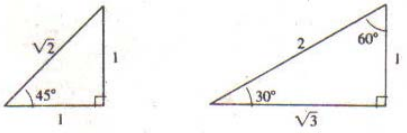


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{adj}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

TRIÁNGULOS ESPECIALES



VALORES ESPECIALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

θ (grados)	θ (radianes)	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0°	0	0	1	0	—	1	—
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$
90°	$\pi/2$	1	0	—	0	—	1

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t \qquad \cos(-t) = \cos t$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\operatorname{sen}(u-v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1$$

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$$

$$\left|\operatorname{sen}\frac{u}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} \qquad \left|\cos\frac{u}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u}$$

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2} \qquad \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

$$2 \operatorname{sen} u \cos v = \operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)$$

$$2 \cos u \operatorname{sen} v = \operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)$$

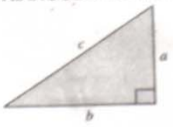
$$2 \cos u \cos v = \cos(u+v) + \cos(u-v)$$

$$2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$$

GEOMETRÍA

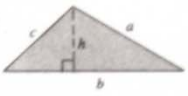
Área A: perímetro C; volumen V; área lateral o de superficie curva S.

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



$A = \frac{1}{2}bh$ $\quad C = a + b + c$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



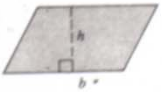
$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$ $\quad A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

RECTÁNGULO



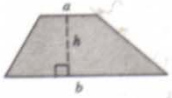
$A = lw$ $\quad C = 2l + 2w$

PARALELOGRAMO



$A = bh$

TRAPECIO



$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

CÍRCULO



$A = \pi r^2$ $\quad C = 2\pi r$

SECTOR CIRCULAR



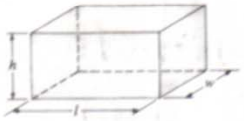
$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ $\quad s = r\theta$

CORONA CIRCULAR



$A = \pi(R^2 - r^2)$

PRISMA RECTANGULAR



$= lwh$ $\quad S = 2(hl + lw + hw)$

ESFERA



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad S = 4\pi r^2$

CILINDRO CIRCULAR RECTO



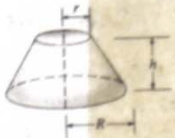
$V = \pi r^2 h$ $\quad S = 2\pi rh$

NO CIRCULAR RECTO



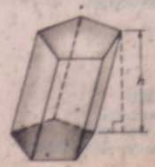
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\quad S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

TRONCO DE CONO



$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$

PRISMA OBLICUO (SECCIÓN CUALQUIERA)



$V = Bh$, siendo B = área de la base

LIBRERIA SIGLO XX
CUENCA
LUIS CORDERO 6-85
TELF.: 825-207

CÁLCULO
CON
GEOMETRÍA ANALÍTICA

CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA

Segunda Edición

Earl W. Swokowski
Marquette University

Traductores:

José Luis Abreu (PhD, MIT)
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
México, D.F., México

Martha Oliveró (M. en C.)
Universidad Complutense
Madrid, España
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
México, D.F., México

Revisores Técnicos:

Miguel Moreno Moreno
Universidad Autónoma de Barcelona
Barcelona, España

Iván Castro Chadid
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia

Rosa María Farfán
Ricardo Cantoral
Instituto Politécnico Nacional
CINVESTAV
México, D.F., México

Eugene Francis
Universidad de Puerto Rico
Campus Río Piedras
San Juan, Puerto Rico

Revisor Editorial:

Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
México, D.F., México
Miembro de la U.S. Metric Association (USMA)

Grupo Editorial Iberoamérica
Río Ganges No. 64-06500 México D.F. · Tels. 5112517, 2087741

A Maureen

CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA
Segunda Edición

Versión en español de la obra
Calculus With Analytic Geometry — 4th Edition
por Earl W. Swokowski.
Edición original en inglés publicada por PWS Publishers,
Copyright © 1988, en Estados Unidos de América.
ISBN 0-87150-007-8

D.R. © 1989 por Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. y/o
Wadsworth Internacional/Iberoamérica, Belmont, California 94002.
Ninguna parte de este libro puede ser reproducida, archivada o transmitida
en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico,
de fotorreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro,
sin el previo y expreso permiso por escrito de Grupo Editorial Iberoamérica y/o
Wadsworth Internacional/Iberoamérica, división de Wadsworth, Inc.

ISBN 968-7270-43-8
Impreso en México

Editor: Nicolás Grepe P.
Productor: Oswaldo Ortiz R.
Fotografía de cubierta: René Burri / Magnum Photos, Inc.

Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Río Ganges No. 64 - Col. Cuauhtémoc - 06500 México, D.F.
Apdo. 5-192 - Tels. 5112517, 5530798
Reg. CNIEM 1382

PRÓLOGO

Esta nueva versión de *Cálculo con Geometría Analítica* constituye una revisión detallada de la anterior edición de la obra. Una de mis metas fue mantener la solidez matemática de la versión que antecedió a ésta, pero con un lenguaje menos formal, reelaborando el texto y poniendo más énfasis en las gráficas y las figuras. Otro de los objetivos fue destacar la utilidad del Cálculo a través de una variedad de nuevos ejemplos y ejercicios de aplicación de muchas disciplinas diferentes. Por último, las sugerencias que recibí de los profesores me llevaron a modificar el orden de presentación de algunos temas.

Para esta edición mucho del material que se tenía fue escrito de nuevo, se reorganizó y se preparó nuevo material de manera que una lista en detalle de los cambios resultaría demasiado larga. Los siguientes comentarios solamente señalan los cambios principales con respecto a la edición anterior.

CARACTERÍSTICAS DE ESTA EDICIÓN

- En el repaso de gráficas de funciones del Capítulo 1 se incluyen desplazamientos horizontales y verticales, ampliaciones y reflexiones. Muchos de los ejercicios de aplicación fueron diseñados a fin de preparar a los estudiantes para su trabajo posterior con máximos y mínimos y rapideces de variación relacionadas.
- En el Capítulo 2 se motiva informalmente el concepto de límite antes de la presentación rigurosa que se da en la Sección 2.3. Como ayuda para motivar a los estudiantes en esta etapa temprana del Cálculo se incluyen ejemplos y ejercicios referentes a aplicaciones poco frecuentes, tales como gases comprimidos, óptica, aceleraciones experimentadas por los astronautas, dosis adecuadas de los medicamentos y teoría de la relatividad.
- El concepto de tasa de variación o razón de cambio (anteriormente incluido en el Capítulo 4) se presenta en la Sección 3.3 para ofrecer desde el principio una mayor variedad de aplicaciones de la derivada. Las rapideces de variación relacionadas se presentan en la Sección 3.9.
- El Capítulo 4 contiene los conceptos relacionados con los máximos y mínimos, la graficación y las antiderivadas. Las aplicaciones a la economía (que anteriormente constituían una sección aparte) se colocaron donde resultaba apropiado en éste y en otros capítulos.
- Las propiedades de la integral definida y la definición de valor medio de una función se presentan en una sección del Capítulo 5. La

integración numérica y el uso de datos aproximados se consideran al final del mismo, y las aplicaciones se discuten en el Capítulo 6.

- Los conceptos de longitud de arco y superficies de revolución se presentan en la Sección 6.5, de manera que las aplicaciones matemáticas de la integral definida se consideran en la primera mitad del Capítulo 6. Las aplicaciones a la física que se presentan en la segunda mitad del capítulo son independientes entre sí y se pueden estudiar en cualquier orden (o bien pueden omitirse), según los objetivos del curso. Los momentos y el centro de masa de una lámina se discuten en la Sección 6.8. En la última sección se dan varias aplicaciones a otras áreas.
- El Capítulo 7 comprende un gran número de ejemplos y ejercicios sobre aplicaciones a diversos campos de las funciones logaritmo natural y exponencial natural.
- Al principio del Capítulo 8 se da un repaso de las funciones trigonométricas (que anteriormente aparecía en un apéndice). Se incluyen las gráficas de las seis funciones trigonométricas.
- El Capítulo 9 se limita a presentar los métodos de integración, y las aplicaciones de capítulos anteriores que requieren métodos avanzados de integración se vuelven a considerar en los ejercicios.
- El Capítulo 10 contiene muchos ejemplos y ejercicios nuevos de aplicación de las formas indeterminadas y las integrales impropias.
- La presentación de las sucesiones infinitas en el Capítulo 11 proporciona una motivación geométrica de los conceptos de convergencia y divergencia. El criterio de la razón para series de términos positivos se presenta antes, y las series alternantes se discuten junto con la convergencia absoluta en una misma sección. Hay una tabla nueva que resume todos los criterios discutidos en el capítulo.
- En el Capítulo 12 se destaca el concepto de excentricidad de las secciones cónicas. Hay aplicaciones a la navegación con el sistema *loran* y a las órbitas de planetas y cometas.
- Las rectas tangentes, la longitud de arco y las superficies de revolución, temas relacionados con las curvas paramétricas, se agrupan en una sección del Capítulo 13. Las ecuaciones polares de las cónicas se presentan en la última sección.
- El Capítulo 14 se organizó mejor de manera que los vectores en tres dimensiones están inmediatamente después de los vectores en dos dimensiones. Las rectas y los planos se discuten en una sección, y los cilindros y las superficies cuádricas en otra.
- En el Capítulo 15 se acentúa el significado geométrico de las funciones vectoriales con ayuda de muchas figuras, ejemplos y ejercicios.
- El Capítulo 16 contiene cincuenta nuevas figuras (incluyendo gráficas por computadora) en la exposición y en los ejercicios. Se introducen los diagramas de árbol o arboriformes como ayuda para visualizar la regla de la cadena. Se da atención especial al concepto del gradiente en las secciones posteriores del capítulo.
- Las integrales dobles en coordenadas polares y el concepto de área de una superficie aparecen antes en el Capítulo 17. Los momentos y el centro de masa de un sólido no homogéneo se discuten casi al final del capítulo. El teorema general sobre el cambio de variables en integrales múltiples (que antes se encontraba en la Sección 18.9) se presenta en la Sección 17.9.
- En el Capítulo 18 hay una definición y un teorema de evaluación que unifican los tres tipos de integrales de línea en dos dimensiones. Se hace énfasis en los campos vectoriales conservativos. Las fórmulas de evaluación de integrales de superficie se dan en un teorema. La divergencia y el rotacional de un campo vectorial se motivan a través de ejemplos.
- El Capítulo 19 contiene una discusión de las ecuaciones diferenciales lineales de primero y segundo órdenes con aplicaciones.

CARACTERÍSTICAS DEL LIBRO

APLICACIONES Todo libro de Cálculo tiene problemas con aplicaciones a ingeniería, física, química, biología y economía. Esta revisión incluye también ejercicios para campos especializados como fisiología, sociología, psicología,

ecología, oceanografía, meteorología, radioterapia, astronáutica y transportación.

EJEMPLOS Cada sección contiene ejemplos cuidadosamente elegidos para ayudar a los estudiantes a entender y asimilar los nuevos conceptos. Siempre que es posible se incluyen aplicaciones para mostrar la utilidad de un tema.

EJERCICIOS Los conjuntos de ejercicios comienzan con problemas rutinarios y van aumentando paulatinamente su grado de dificultad. Los problemas de aplicaciones aparecen generalmente hacia el final del conjunto para permitir a los estudiantes adquirir confianza en las operaciones y las nuevas ideas, antes de tratar cuestiones que requieren el análisis de situaciones prácticas.

Se incluyen más de 300 ejercicios nuevos de aplicaciones para hacer énfasis en la flexibilidad y en el poder del Cálculo. Muchas de las aplicaciones son novedosas y difieren mucho de las aplicaciones tradicionalmente expuestas en los libros de Cálculo.

Hay una sección de repaso al final de cada capítulo que consta de una lista de temas importantes y ejercicios pertinentes.

Al final del libro se dan las respuestas a los ejercicios de número impar.

CALCULADORAS Se hace referencia a las calculadoras en los lugares apropiados. La mayoría de los ejercicios se pueden resolver sin utilizar calculadora pero los profesores pueden fomentar su uso para los cálculos con base en datos aproximados.

DISEÑO INTERIOR Se han usado colores para ayudar a seguir los razonamientos y subrayar los conceptos más importantes. Se trazaron de nuevo todas las figuras para esta edición y, cuando fue posible, se colocaron en el margen al lado del texto correspondiente. En general, todas las gráficas tienen los rótulos necesarios y en ellas se usan colores para hacer más claras las figuras complicadas. A muchos conjuntos de ejercicios se les añadieron croquis y dibujos para ayudar a visualizar los problemas aplicados.

FLEXIBILIDAD La variedad de programas y planes de estudios de las escuelas que han usado las ediciones anteriores es prueba de la flexibilidad del libro. Las secciones y los capítulos se pueden ordenar de diversas maneras, dependiendo de los objetivos y la duración del curso.

AYUDAS PARA EL PROFESOR

Pueden obtenerse con la editorial las siguientes ayudas (en inglés) para la enseñanza:

Complete Solutions Manual, vols. I y II, por Jeff Cole, de Anoka-Ramsey Community College, y Gary Rockswold, de Mankato State University.

Soluciones para los ejercicios de número par.

Generador de exámenes computadorizado (para computadoras personales IBM y compatibles).

Banco de exámenes impresos.

AYUDAS PARA EL ESTUDIANTE

Se pueden obtener con la editorial los siguientes elementos de ayuda (en inglés):

Student Supplement, vols. I y II, por Thomas A. Bronikowski, de Marquette University, que contiene la solución a cada tercer problema de ejercicio del texto.

Programmed Study Guide, por Roy A. Dobyns, de Carson-Newman College, que cubre los primeros nueve capítulos del texto.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a Michael R. Cullen de Loyola Marymount University por haber proporcionado la mayoría de los nuevos ejercicios de aplicaciones. Esta gran variedad de problemas aporta una fuerte motivación para los conceptos matemáticos que se exponen en el libro. El profesor Cullen también proporcionó las gráficas por computadora que acompañan a algunos de estos ejercicios. Christian C. Braunschweiger de

Marquette University contribuyó con muchas sugerencias que mejoraron la exposición.

También quiero agradecer a las siguientes personas que revisaron el manuscrito:

H.S. Butts, *Louisiana State University*
Dawson Carr, *Sandhills Community College*
Mark P. Hale, Jr., *University of Florida*
Dale T. Hoffman, *Bellevue Community College*
Joseph E. Hyman, *El Camino College*
G. Philip Johnson, *Oakland University*
Elgin Johnston, *Iowa State University*
Herbert M. Kamowitz, *University of Massachusetts-Boston*
James T. Loats, *Metropolitan State College*
Robert H. Lohman, *Kent State University*
Stanley M. Lukawecki, *Clemson University*
Francis E. Masat, *Glassboro State College*
Judith R. McKinney, *California State Polytechnic University-Pomona*
J. Osterburg, *University of Cincinnati*
Neal C. Raber, *University of Akron*
Dennis Ryan, *Wright State University*
Nancy M. Thompson, *Metropolitan State College*
John R. Unbehaun, *University of Wisconsin-La Crosse*
R. Voronka, *New Jersey Institute of Technology*
Alan Wiederhold, *San Jacinto College*
Dennis H. Wortman, *University of Massachusetts-Boston*

y a los profesores de matemáticas que se reunieron conmigo y con los representantes de PWS-KENT durante varios días en el verano de 1986 y que posteriormente revisaron algunas partes del manuscrito:

Cliff Clarridge, *Santa Monica College*
Jeff Cole, *Anoka-Ramsey Community College*
Michael Cullen, *Loyola Marymount University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
Michael Schneider, *Belleville Area College*

Sus comentarios sobre didáctica y pedagogía general y sus recomendaciones específicas acerca del contenido de los cursos de Cálculo fueron una gran ayuda para mejorar este libro.

Expreso mi gratitud por la excelente cooperación que recibí del personal de PWS-KENT. Hay dos personas de esta editorial que merecen un reconocimiento especial. La supervisora editorial de producción Kathi Townes realizó un trabajo verdaderamente excepcional en el diseño del libro y cuidando un gran número de detalles relacionados con la elaboración gráfica. No puedo agradecerle suficientemente su ayuda. El director de ediciones Dave Geggis supervisó el proyecto, se comunicó con muchos revisores y usuarios de mis libros y fue una fuente continua de información y consejos.

Además de a todas las personas mencionadas, quiero expresar mi sincero aprecio a los muchos estudiantes y profesores no mencionados que me han ayudado a conformar mi perspectiva de cómo se debe exponer el Cálculo en el salón de clase.

EARL W. SWOKOWSKI

AL ESTUDIANTE

El Cálculo se inventó en el siglo XVII como un medio para estudiar los problemas en que intervenía el movimiento. El álgebra y la trigonometría pueden servir para estudiar los objetos que se mueven con velocidad constante a lo largo de una trayectoria rectilínea o circular, pero si la velocidad es variable o la trayectoria es irregular, se necesita el Cálculo. Una descripción rigurosa del movimiento requiere definiciones precisas de *velocidad* (la rapidez con la que varía la distancia respecto al tiempo) y de *aceleración* (la rapidez de cambio de la velocidad). Estas definiciones pueden darse usando uno de los conceptos fundamentales del Cálculo: la *derivada*.

Aunque el Cálculo se desarrolló para resolver problemas de física, su poder y flexibilidad lo han hecho útil en muchos campos de estudio. Las aplicaciones modernas de la derivada incluyen las investigaciones sobre la rapidez o tasa de crecimiento de un cultivo de bacterias, la predicción del resultado de una reacción química, la medición de los cambios instantáneos de una corriente eléctrica, la descripción del comportamiento de las partículas atómicas, la estimación de la reducción de los tumores con la radioterapia, la predicción de las ganancias y las pérdidas económicas y el análisis de las vibraciones de un sistema mecánico.

La derivada también es útil para resolver problemas de máximos y mínimos, tales como el de la fabricación de la caja rectangular más barata que ha de tener un volumen dado, el cálculo de la mayor distancia que un cohete puede recorrer, la determinación de la máxima circulación que debe permitirse al tránsito sobre un puente largo, la determinación del número de pozos que hay que perforar en un campo de petróleo para lograr la producción más eficiente, la determinación del punto entre dos fuentes de luz en el que la iluminación será mayor y la maximización del ingreso de una compañía industrial o comercial debido a un producto determinado. Los matemáticos aplican las derivadas a menudo para encontrar rectas tangentes a curvas y como ayuda para analizar las gráficas de funciones complicadas.

Otro de los conceptos fundamentales del Cálculo —la *integral definida*— tiene su origen en el problema de evaluar el área de una región con frontera curva. Las integra-

les definidas se utilizan tan extensamente y en campos tan diversos como las derivadas. Algunas de sus aplicaciones son localizar el centro de masa o el momento de inercia de un sólido, determinar el trabajo requerido para enviar una nave espacial a otro planeta, calcular el flujo sanguíneo a través de una arteriola, estimar la depreciación del equipo de una fábrica e interpretar la magnitud de la dilución de un tinte en las pruebas fisiológicas que se hacen con métodos de rastreo. También se pueden usar las integrales definidas para investigar conceptos matemáticos tales como el área de una superficie curva, el volumen de un sólido geométrico o la longitud de una curva.

Los conceptos de la derivada y la integral definida se definen por medio de límites. La noción de *límite* es la primera noción que separa al Cálculo de las matemáticas comunes. Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) descubrieron independientemente uno del otro la relación entre las derivadas y las integrales, y se atribuye a ambos la invención del Cálculo. Muchos otros matemáticos han contribuido de manera importante a su desarrollo durante los últimos 300 años.

Las aplicaciones del Cálculo mencionadas anteriormente representan solamente algunas de las muchas que se consideran en este libro. No podríamos describir todas las aplicaciones del Cálculo, que con cada avance en la tecnología se desarrollan más. Cualquiera que sea el campo de interés del lector, probablemente usará el Cálculo en algunas de sus investigaciones puras o aplicadas. Quizás el propio lector descubra una nueva aplicación en alguna rama de la ciencia.

CONTENIDO

PRÓLOGO v
AL ESTUDIANTE ix

1 LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS 1

1.1 Los números reales 2
1.2 Sistemas de coordenadas en dos dimensiones 11
1.3 La recta 20
1.4 La definición de función 29
1.5 Operaciones con las funciones 40
1.6 Repaso 48

2 LÍMITES DE FUNCIONES 51

2.1 Introducción al Cálculo 52
2.2 Definición informal de límite 59
2.3 Definición formal de límite 67
2.4 Métodos para calcular límites 73
2.5 Funciones continuas 82
2.6 Repaso 91

3 LA DERIVADA 93

3.1 Definición de la derivada 94
3.2 Algunas reglas para determinar derivadas 101
3.3 La derivada como tasa de variación (o razón de cambio) 111
3.4 Incrementos y diferenciales 121
3.5 La Regla de la Cadena 129
3.6 Derivación implícita 136
3.7 Potencias y derivadas de orden superior 141
3.8 Rapideces de variación relacionadas 147
3.9 El Método de Newton 153
3.10 Repaso 156

4 VALORES EXTREMOS Y ANTIDERIVADAS 161

4.1 Máximos y mínimos locales de las funciones 162
4.2 Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio 169
4.3 Criterio de la primera derivada 175
4.4 Concavidad y criterio de la segunda derivada 183
4.5 Aplicaciones de los máximos y mínimos 194
4.6 Límites al infinito y límites infinitos 205
4.7 Antiderivadas 218
4.8 Repaso 226

5 LA INTEGRAL DEFINIDA 229

5.1 Determinación del área 230
5.2 La integral definida 238
5.3 Propiedades de la integral definida 245
5.4 Teorema Fundamental del Cálculo 251
5.5 Integral indefinida y cambio de variable 260
5.6 Integración numérica 267
5.7 Repaso 275

6 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA 279

6.1 Área 280
6.2 Sólidos de revolución 289
6.3 Determinación de volúmenes mediante envolventes cilíndricas 297
6.4 Determinación de volúmenes por cortes transversales 301
6.5 Longitud de arco y superficies de revolución 304
6.6 Trabajo 313
6.7 Fuerza ejercida por un líquido 319
6.8 Momentos y centros de masa de una lámina 324
6.9 Otras aplicaciones 332
6.10 Repaso 341

7 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS 345

7.1 Funciones inversas 346
7.2 Función logaritmo natural 350
7.3 Función exponencial natural 359
7.4 Derivación e integración 368
7.5 Funciones logarítmicas y exponenciales generales 374
7.6 Leyes de crecimiento y decrecimiento 382
7.7 Derivadas de las funciones inversas 389
7.8 Repaso 393

8 OTRAS FUNCIONES TRASCENDENTES 395

8.1 Funciones trigonométricas 396
8.2 Límites de las funciones trigonométricas 409
8.3 Derivadas de las funciones trigonométricas 414
8.4 Integrales de las funciones trigonométricas 426
8.5 Funciones trigonométricas inversas 432
8.6 Derivadas e integrales 438
8.7 Funciones hiperbólicas 445
8.8 Funciones hiperbólicas inversas 451
8.9 Repaso 455

9 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN 459

9.1 Integración por partes 460
9.2 Integrales trigonométricas 466
9.3 Sustitución trigonométrica 471
9.4 Integrales de las funciones racionales 476
9.5 Integrales en las que aparecen expresiones cuadráticas 483
9.6 Sustituciones diversas 486
9.7 Tablas de integrales 490
9.8 Repaso 493

10 FORMAS INDETERMINADAS, INTEGRALES IMPROPIAS Y FÓRMULAS DE TAYLOR 495

10.1 Las formas indeterminadas 496
10.2 Otras formas indeterminadas 503
10.3 Integrales con extremos (o límites) de integración infinitos 507
10.4 Integrales con integrandos discontinuos 514
10.5 Fórmula de Taylor 520
10.6 Repaso 529

11 SERIES INFINITAS 531

11.1 Sucesiones infinitas 532
11.2 Series infinitas convergentes o divergentes 544
11.3 Series de términos positivos 554
11.4 Criterios de la Razón y de la Raíz 563
11.5 Series alternantes y convergencia absoluta 566
11.6 Series de potencias 575
11.7 Representación de funciones por series de potencias 581
11.8 Series de Taylor y de Maclaurin 586
11.9 Serie del Binomio 595
11.10 Repaso 599

12 TEMAS SELECTOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA 601

12.1 Secciones cónicas 602
12.2 Parábolas 602
12.3 Elipses 611
12.4 Hipérbolas 620
12.5 Rotación de ejes 628
12.6 Repaso 632

13 CURVAS PLANAS Y COORDENADAS POLARES 635

13.1 Curvas planas 636
13.2 Rectas tangentes y longitud de arco 646

13.3 Coordenadas polares 653
13.4 Integrales en coordenadas polares 663
13.5 Ecuaciones polares de las cónicas 669
13.6 Repaso 674

14 VECTORES Y SUPERFICIES 677
14.1 Vectores en dos dimensiones 678
14.2 Vectores en tres dimensiones 689
14.3 Producto escalar 697
14.4 Producto vectorial 705
14.5 Rectas y planos 713
14.6 Superficies 722
14.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas 731
14.8 Repaso 735

15 FUNCIONES VECTORIALES 739
15.1 Definiciones y curvas en el espacio 740
15.2 Límites, derivadas e integrales 745
15.3 El movimiento 753
15.4 Curvatura de líneas 761
15.5 Componentes tangencial y normal de la aceleración 771
15.6 Leyes de Kepler 777
15.7 Repaso 782

16 DERIVADAS PARCIALES 785
16.1 Funciones de varias variables 786
16.2 Límites y continuidad 794
16.3 Derivadas parciales 802
16.4 Incrementos y diferenciales 810
16.5 Regla de la Cadena 818
16.6 Derivadas direccionales 828
16.7 Planos tangentes y rectas normales a las superficies 837
16.8 Máximos y mínimos de funciones de varias variables 844
16.9 Multiplicadores de Lagrange 852
16.10 Repaso 860

17 INTEGRALES MÚLTIPLES 863
17.1 Integrales dobles 864
17.2 Evaluación de las integrales dobles 868
17.3 Área y volumen 876
17.4 Integrales dobles en coordenadas polares 882
17.5 Área de una superficie 887
17.6 Integrales triples 890
17.7 Momentos y centro de masa 900
17.8 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas 908
17.9 Cambio de variables en las integrales múltiples 913
17.10 Repaso 921

18 CÁLCULO VECTORIAL 925
18.1 Campos vectoriales 926
18.2 Integrales de línea 934
18.3 Independencia de la trayectoria 944
18.4 Teorema de Green 953
18.5 Integrales de superficie 961
18.6 Teorema de la divergencia 969
18.7 Teorema de Stokes 976
18.8 Repaso 983

19 ECUACIONES DIFERENCIALES 985
19.1 Ecuaciones diferenciales separables 986
19.2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 992
19.3 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden 999
19.4 Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas 1006
19.5 Vibraciones 1012
19.6 Repaso 1017

APÉNDICES 1021
I Inducción matemática 1022
II Teoremas sobre límites e integrales 1027
III Tablas 1040
IV Tablas de integrales 1042

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE NÚMERO IMPAR 1047

ÍNDICE 1093

CAPÍTULO 1

LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Este capítulo trata temas necesarios para el estudio del Cálculo. Después de una breve discusión sobre los números reales, los sistemas coordenados y las gráficas en dos dimensiones, se considera uno de los conceptos más importantes de las matemáticas: la noción de ***función****.*

1.1 LOS NÚMEROS REALES

El cálculo se basa en las propiedades de los **números reales.** Si se suma el número real 1 sucesivamente a sí mismo se obtienen los **enteros positivos** 1, 2, 3, 4, ... Los **números enteros** constan de todos los enteros positivos y negativos junto con el número real 0. Frecuentemente se escriben los enteros en una lista como sigue:

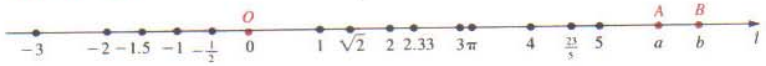
$$\ldots, \quad -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

Un **número racional** es un número real que se puede expresar como el cociente a/b de dos números enteros a y b con $b \neq 0$. Los números reales que no son racionales se llaman **irracionales.** Por ejemplo, la razón del perímetro de una circunferencia a su diámetro es un irracional. Este número real se denota por π y se escribe $\pi \approx 3.1416$ para indicar que π es *aproximadamente igual* a 3.1416. Otro ejemplo de un número irracional es $\sqrt{2}$.

Los números reales se pueden representar por *expresiones decimales infinitas.* Por ejemplo, realizando la división puede verse que la representación decimal del número racional 177/55 es 3.2181818..., en donde los dígitos 1 y 8 se repiten indefinidamente. Los números racionales pueden representarse siempre por expresiones decimales *periódicas*, es decir, en las que hay una combinación de dígitos que se repite indefinidamente. Los números irracionales pueden representarse por expresiones decimales infinitas *no periódicas.*

Existe una *correspondencia biunívoca* entre los números reales y los puntos de una recta l, en el sentido de que a cada número real a le corresponde uno y sólo un punto P en l, y viceversa, a cada punto P le corresponde un número real. Para ilustrar esta correspondencia, en la Figura 1.1 se señalan varios puntos que corresponden a números reales. El punto O que corresponde al número real 0 es el **origen.**

FIGURA 1.1



El número a que se asocia a un punto A en l se llama **coordenada** de A. Una asignación de coordenadas a los puntos de l constituye un **sistema coordenado** para l. Una recta que tiene un sistema coordenado se llama **eje coordenado** o **recta numérica real.** A l, supuesto horizontal, se le asigna una dirección tomando el **sentido positivo** hacia la derecha y el **sentido negativo** hacia la izquierda. La dirección positiva se indica trazando una punta de flecha en un extremo de l, como se muestra en la Figura 1.1.

Los números que corresponden a los puntos a la derecha de O en la Figura 1.1 son los **números reales positivos,** mientras que los que corresponden a puntos a la izquierda de O son los **números reales negativos.** El número real 0 no es positivo ni negativo.

Si a y b son números reales y $a - b$ es positivo, se dice que a **es mayor que** b y se escribe $a > b$. Esto es equivalente a decir que b **es menor que** a ($b < a$). Los símbolos $>$ y $<$ se llaman **signos de desigualdad** y expresiones como $a > b$ y $b < a$ se llaman **desigualdades.** Con referencia a la Figura 1.1, si A y B son puntos con coordenadas a y b, respectivamente, entonces $b > a$ (o $a < b$) *si y sólo si A se encuentra a la izquierda de B.* Como $a - 0 = a$, resulta que $a > 0$ si y sólo si a es positivo. Análogamente, $a < 0$ significa que a es negativo. Se pueden demostrar las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES (1.1)

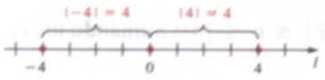
(i) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
(ii) Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
(iii) Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.
(iv) Si $a > b$ y c es positivo, entonces $ac > bc$.
(v) Si $a > b$ y c es negativo, entonces $ac < bc$.

Hay resultados parecidos cuando se invierten los signos de desigualdad. Por ejemplo, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$; si $a < b$, entonces $a + c < b + c$, etcétera.

La expresión $a \geq$ se lee **a es mayor que o igual a b** y significa que $a > b$, o bien que $a = b$. La expresión $a < b < c$ significa que $a < b$ y $b < c$, y cuando esto sucede se dice que **b está entre a y c**. Las expresiones $a \leq b$, $a < b \leq c$, $a \leq b < c$, $a \leq b \leq c$, etc., se pueden interpretar mediante las definiciones anteriores.

Si un número real a es la coordenada de un punto A sobre una recta coordenada l, para denotar la distancia de A al origen, independientemente del sentido, se utiliza el símbolo $|a|$. El número no negativo $|a|$ se llama *valor absoluto* de a. Con referencia a la Figura 1.2 se ve que para el punto con coordenada -4, se tiene $|-4| = 4$. Análogamente, $|4| = 4$. En general para calcular $|a|$, *si a es negativo hay que cambiar el signo, y si a no es negativo entonces* $|a| = a$. La siguiente definición resume este análisis.

FIGURA 1.2



DEFINICIÓN (1.2)

Sea a un número real. El **valor absoluto** de a se denota por $|a|$ y está dado por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 1 Evaluar $|3|$, $|-3|$, $|0|$, $|\sqrt{2} - 2|$, y $|2 - \sqrt{2}|$.

Solución Puesto que 3, $2 - \sqrt{2}$ y 0 no son negativos,

$$|3| = 3, \quad |2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}, \quad \text{y} \quad |0| = 0.$$

Como -3 y $\sqrt{2} - 2$ son negativos, usamos la fórmula $|a| = -a$ y así

$$|-3| = -(-3) = 3 \quad \text{y} \quad |\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = 2 - \sqrt{2}.$$

Se puede demostrar que para todos los números reales a y b,

$$|a| = |-a|, \quad |ab| = |a||b|, \quad -|a| \leq a \leq |a|.$$

También es posible demostrar las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LOS VALORES ABSOLUTOS (1.3)

Sea b un número real positivo. Entonces

(i) $|a| < b$ si y sólo si $-b < a < b$.

(ii) $|a| > b$ si y sólo si $a > b$ o bien $a < -b$.

(iii) $|a| = b$ si y sólo si $a = b$ o bien $a = -b$.

Las propiedades (ii) y (iii) también se cumplen cuando $b = 0$. Por tanto, si $b \geq 0$, entonces

$|a| \leq b$ si y sólo si $-b \leq a \leq b$

y $|a| \geq b$ si y sólo si $a \geq b$ o bien $a \leq -b$.

LA DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO (1.4)

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

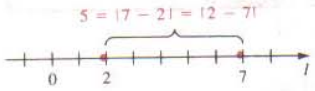
Demostración Es claro que $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$. Sumando los lados correspondientes se obtiene

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Aplicando el comentario anterior a este teorema se obtiene la Desigualdad del Triángulo. • •

A continuación se usarán valores absolutos para definir la distancia entre cualquier par de puntos sobre una recta coordenada. Nótese que la distancia entre los puntos de l con coordenadas 2 y 7 que se muestran en la Figura 1.3 es igual a 5 unidades. Esta distancia es la diferencia entre las coordenadas, $7 - 2$, que se obtiene restando la menor de la mayor. Si se usan valores absolutos el orden no importa, pues $|7 - 2| = |2 - 7|$.

FIGURA 1.3



DEFINICIÓN (1.5)

Sean A y B dos puntos sobre una recta coordenada l, y a y b sus coordenadas respectivas. La **distancia entre A y B** se denota por $d(A, B)$ y está dada por

$$d(A, B) = |b - a|$$

El número $d(A, B)$ denota la **longitud del segmento AB.** Obsérvese que, como $d(B, A) = |a - b|$ y $|b - a| = |a - b|$,

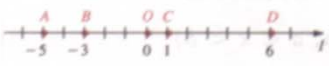
$$d(A, B) = d(B, A).$$

Nótese también que la distancia entre el origen O y el punto A es

$$d(O, A) = |a - 0| = |a|$$

que coincide con la interpretación geométrica del valor absoluto ilustrada en la Figura 1.2. La fórmula $d(A, B) = |b - a|$ es válida independientemente de los signos de a y b, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 1.4



EJEMPLO 2 Sean A, B, C y D puntos con coordenadas -5, -3, 1 y 6, respectivamente. Calcular $d(A, B)$, $d(C, B)$, $d(O, A)$ y $d(C, D)$.

Solución Los puntos están representados en la Figura 1.4. Por la Definición (1.5):

$$d(A, B) = |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2$$
$$d(C, B) = |-3 - 1| = |-4| = 4$$
$$d(O, A) = |-5 - 0| = |-5| = 5$$
$$d(C, D) = |6 - 1| = |5| = 5$$

A veces, como por ejemplo al estudiar las desigualdades, es conveniente usar la notación y la terminología de los *conjuntos*. Se puede pensar en un **conjunto** como una colección de objetos de algún tipo. Los objetos son los **elementos** del conjunto. En este libro se denota el conjunto de los números reales por $\mathbb{R}$. Si S es un conjunto, entonces $a \in S$ significa que a es un elemento de S y $a \notin S$ significa que a no es un elemento de S. Si todo elemento de un conjunto S es también un elemento de un conjunto T entonces se dice que S es un **subconjunto** de T. Sean S y T dos conjuntos. Se dice que S y T son **iguales** y se escribe $S = T$, si S y T tienen exactamente los mismos elementos. Para indicar que S y T no son iguales se escribe $S \neq T$. La **unión** $S \cup T$ de S y T es un conjunto que consta de todos los elementos que están en S o en T, o en S y T *a la vez*. La **intersección** $S \cap T$ consta de todos los elementos que ambos conjuntos tienen en común.

Para representar elementos arbitrarios de un conjunto se usan frecuentemente letras. Por ejemplo, a veces se usa x para denotar un número real cuando no se desea especificar ningún número real en *particular*. Una letra que se usa para representar *cualquier* elemento de un conjunto dado se llama **variable**. Un símbolo que representa un elemento *específico* es una **constante**. En este libro, como en muchos otros, se usan las últimas letras del alfabeto, como x, y y z, para representar variables. Las letras como a, b y c denotan constantes. A lo largo de todo el texto las variables representan números reales, a menos que se especifique lo contrario.

El **dominio de una variable** es el conjunto de los números reales que la variable representa. Por ejemplo, $\sqrt{x}$ es un número real si y sólo si $x \geq 0$ y, por lo tanto, el dominio de x es el conjunto de los números reales no negativos. Análogamente, al considerar la expresión $1/(x - 2)$ se debe excluir $x = 2$ para evitar la división entre cero. En este caso el dominio es el conjunto de todos los números reales diferentes de 2.

Si los elementos de un conjunto S son los que tienen alguna propiedad, se puede escribir $S = \{x: \quad\}$, enunciando la propiedad que describe a la variable x en el espacio después de los dos puntos. Por ejemplo, $\{x: x > 3\}$ denota el conjunto de todos los números reales mayores que 3. A veces, los conjuntos finitos se definen enunciando la lista de todos sus elementos puestos entre llaves. Por ejemplo, si el conjunto T consta de los primeros cinco enteros positivos, se puede escribir $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$ llamados **intervalos**, son muy importantes en el cálculo. Si $a < b$, el conjunto de todos los números reales entre a y b es un **intervalo abierto** y se denota por (a, b), como en la siguiente definición.

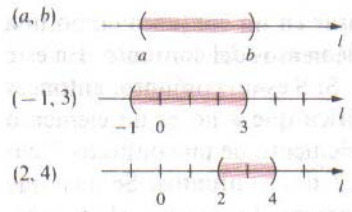
INTERVALO ABIERTO (1.6)

$$(a, b) = \{x: a < x < b\}$$

Los números a y b se llaman **extremos** del intervalo.

La **gráfica** de un conjunto de números reales consta de los puntos sobre una recta coordenada que corresponden a los números del conjunto. En particular, la gráfica del intervalo abierto (a, b) consta de todos los puntos entre los dos que corresponden a a y b. En la Figura 1.5 aparecen representaciones de las gráficas de un intervalo abierto general (a, b) y dos intervalos abiertos específicos $(-1, 3)$ y $(2, 4)$. Los paréntesis en las gráficas indican que los extremos de los intervalos no están incluidos. Por conveniencia, no haremos distinción entre *intervalo* y *gráfica de un intervalo*.

FIGURA 1.5

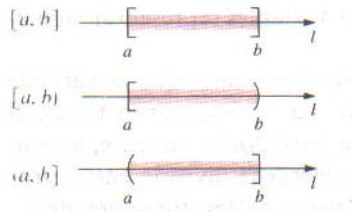


Para indicar que un extremo de un intervalo queda incluido en él, se utiliza un corchete en lugar de paréntesis (re-(redondo). Si $a < b$, entonces el **intervalo cerrado** $[a, b]$ y los **intervalos semiabiertos** $[a, b)$ o bien $(a, b]$, se definen como sigue.

INTERVALOS CERRADOS Y SEMIABIERTOS (1.7)

$$[a, b] = \{x: a \le x \le b\}$$
$$[a, b) = \{x: a \le x < b\}$$
$$(a, b] = \{x: a < x \le b\}$$

FIGURA 1.6



En la Figura 1.6 aparecen algunas gráficas típicas de este tipo de intervalos. La presencia de un corchete indica que el extremo correspondiente es parte de la gráfica.

En adelante, al hablar de intervalos, cuando los números a y b no se definan explícitamente, se sobreentiende que $a < b$. Si un intervalo es un subconjunto de otro intervalo I, se dice que es un **subintervalo** de I. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[2, 3]$ es un subintervalo de $[0, 5]$.

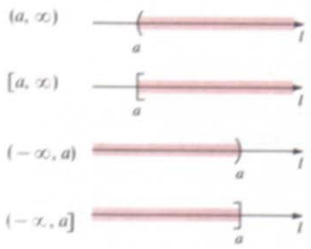
Para **intervalos infinitos** se usa la siguiente notación.

INTERVALOS INFINITOS (1.8)

$$(a, \infty) = \{x: x > a\}$$
$$[a, \infty) = \{x: x \geq a\}$$
$$(-\infty, a) = \{x: x < a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x: x \leq a\}$$

Por ejemplo, $(1, \infty)$ representa todos los números reales mayores que 1. El símbolo ∞ se lee *infinito* y no es un número real sino solamente un medio de notación. En la Figura 1.7 aparecen unas gráficas típicas de intervalos infinitos en los que a es un número real arbitrario. La ausencia de un signo de paréntesis o corchete como marca en un extremo de intervalo indica que la gráfica se extiende indefinidamente. A veces el conjunto de los números reales se denota por $(-\infty, \infty)$.

FIGURA 1.7



Con frecuencia se consideran desigualdades en las que intervienen variables, como por ejemplo,

$$x^2 - 3 < 2x + 4.$$

Si se sustituye x en $x^2 - 3 < 2x + 4$ por los números 4 o 5, se obtienen las desigualdades falsas $13 < 12$ o bien $22 < 14$, respectivamente. Otros números como 1 o 2 llevan a desigualdades verdaderas: $-2 < 6$ o bien $1 < 8$, respectivamente. Si al sustituir x por un número real a se obtiene una desigualdad verdadera, entonces se dice que a es una **solución** de la desigualdad. Así, 1 y 2 son soluciones de la desigualdad $x^2 - 3 < 2x + 4$, pero 4 y 5 no lo son. **Resolver** una desigualdad significa encontrar todas sus soluciones. Se dice que dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

Para resolver una desigualdad, se escribe una lista de desigualdades equivalentes que termina en una para la cual las soluciones son evidentes. Los medios que más se usan al aplicar este método son las propiedades de las desigualdades y del valor absoluto. Por ejemplo, si se suma una misma expresión a ambos lados de la desigualdad se obtiene una desigualdad equivalente. Pueden multiplicarse ambos miembros por una expresión positiva y obtener también una desigualdad equivalente. Si la expresión contiene a x debe verificarse que es positiva para todos los valores de x que se estén considerando. Si se multiplican ambos lados de una desigualdad por una expresión que es siempre negativa como $-7 - x^2$, se debe invertir el signo de la desigualdad para establecer una desigualdad equivalente.

EJEMPLO 3 Resolver la desigualdad $4x + 3 > 2x - 5$ y representar gráficamente las soluciones.

Solución Las siguientes desigualdades son equivalentes (justifíquese cada paso):

$$4x + 3 > 2x - 5$$
$$4x > 2x - 8$$
$$2x > -8$$
$$x > -4$$

FIGURA 1.8



Por lo tanto, las soluciones son todos los números reales mayores que -4, es decir, los números del intervalo infinito $(-4, \infty)$. La gráfica aparece en la Figura 1.8. •

EJEMPLO 4 Resolver la desigualdad $-5 \leq \dfrac{4 - 3x}{2} < 1$ y graficar las soluciones.

Solución Podemos proceder como sigue:

$$-5 \leq \frac{4 - 3x}{2} < 1$$
$$-10 \leq 4 - 3x < 2$$
$$-14 \leq -3x < -2$$
$$\frac{14}{3} \geq x > \frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$$

FIGURA 1.9



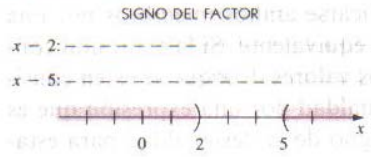
Por lo tanto, las soluciones son los números del intervalo semiabierto $(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}]$. La gráfica aparece en la Figura 1.9. •

EJEMPLO 5 Resolver $x^2 - 7x + 10 > 0$ y representar gráficamente las soluciones.

Solución Como la desigualdad se puede escribir

$$(x - 5)(x - 2) > 0,$$

FIGURA 1.10



resulta que x es una solución si y sólo si los factores $x - 5$ y $x - 2$ son ambos positivos o ambos negativos. El diagrama de la Figura 1.10 muestra el signo de cada uno de estos factores para varios números reales. Claramente, ambos factores son positivos si x está en el intervalo $(5, \infty)$ y ambos son negativos si x está en $(-\infty, 2)$. Como se ilustra en la Figura 1.10, las soluciones son todos los números reales en la unión $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$. •

EJEMPLO 6 Resolver la desigualdad $|x - 3| < 0.1$.

Solución Usando (1.3) (i) y (1.1) (ii), vemos que la desigualdad es equivalente a cada una de las siguientes:

$$-0.1 < x - 3 < 0.1$$
$$-0.1 + 3 < (x - 3) + 3 < 0.1 + 3$$
$$2.9 < x < 3.1$$

Entonces las soluciones son los números reales en el intervalo abierto (2.9,3.1). •

En la Sección 2.3 se usarán desigualdades parecidas a la del Ejemplo 6 para definir el concepto de *límite*. Más específicamente, se considerarán desigualdades como las del siguiente ejemplo. La letra griega δ (delta) que aparece en el Ejemplo 7 se emplea frecuentemente en cálculo para denotar un número real positivo pequeño.

EJEMPLO 7 Sean a y δ dos números reales, con $\delta > 0$. Resolver la desigualdad

$$0 < |x - a| < \delta$$

y representar gráficamente las soluciones.

Solución La desigualdad $0 < |x - a|$ se satisface si y sólo si $x \neq a$. Pueden encontrarse las soluciones de $|x - a| < \delta$ usando (1.3)(i) y (1.1)(ii) como sigue:

$$|x - a| < \delta$$
$$-\delta < x - a < \delta$$
$$a - \delta < x < a + \delta$$

Por lo tanto, las soluciones de $0 < |x - a| < \delta$ son todos los números reales en el intervalo abierto $(a - \delta,\ a + \delta)$ *excepto* el número a. Este conjunto es la unión

$$(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

de dos intervalos abiertos. La gráfica se ilustra en la Figura 1.11. •

FIGURA 1.11



EJEMPLO 8 Resolver $|2x - 7| > 3$.

Solución Por (1.3)(ii), x es solución de $|2x - 7| > 3$ si y sólo si

$$2x - 7 > 3 \quad \text{o bien} \quad 2x - 7 < -3.$$

La primera de estas dos desigualdades es equivalente a $2x > 10$, o bien $x > 5$. La segunda es equivalente a $2x < 4$, o bien $x < 2$. Por lo tanto, las soluciones de $|2x - 7| > 3$ son los números en la unión $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$. La gráfica es idéntica a la de la Figura 1.10. •

EJERCICIOS 1.1

Ejercicios 1-2: Sustituya el símbolo □ por $<$, $>$ o $=$.

1. (a) $-2 \square -5$ (b) $-2 \square 5$ (c) $6 - 1 \square 2 + 3$
 (d) $\frac{2}{3} \square 0.66$ (e) $2 \square \sqrt{4}$ (f) $\pi \square \frac{22}{7}$

2. (a) $-3 \square 0$ (b) $-8 \square -3$ (c) $8 \square -3$
 (d) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \square \frac{1}{15}$ (e) $\sqrt{2} \square 1.4$ (f) $\frac{4053}{1110} \square 3.6513$

Ejercicios 3-4: Escriba la expresión dada sin usar el valor absoluto.

3. (a) $|2 - 5|$ (b) $|-5| + |-2|$
(c) $|5| + |-2|$ (d) $|-5| - |-2|$
(e) $|\pi - \frac{22}{7}|$ (f) $(-2)/|-2|$
(g) $|\frac{1}{2} - 0.5|$ (h) $|(-3)^2|$
(i) $|5 - x|$ donde $x > 5$
(j) $|a - b|$ donde $a < b$

4. (a) $|4 - 8|$ (b) $|3 - \pi|$
(c) $|-4| - |-8|$ (d) $|-4 + 8|$
(e) $|-3|^2$ (f) $|2 - \sqrt{4}|$
(g) $|-0.67|$ (h) $-|-3|$
(i) $|x^2 + 1|$ (j) $|-4 - x^2|$

5. Sean A, B y C tres puntos de una recta coordenada y sean -5, -1 y 7 sus coordenadas respectivas. Calcule las siguientes distancias:

(a) $d(A, B)$ (b) $d(B, C)$ (c) $d(C, B)$ (d) $d(A, C)$

6. Repita el Ejercicio 5 suponiendo que A, B y C tienen coordenadas 2, -8 y -3, respectivamente.

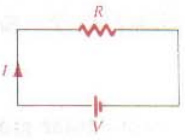
Ejercicios 7-34: Resuelva la desigualdad y exprese la solución en términos de intervalos.

7. $5x - 6 > 11$
8. $3x - 5 < 10$
9. $2 - 7x \le 16$
10. $7 - 2x \ge -3$
11. $|2x + 1| > 5$
12. $|x + 2| < 1$
13. $3x + 2 < 5x - 8$
14. $2 + 7x < 3x - 10$
15. $12 \ge 5x - 3 > -7$
16. $5 > 2 - 9x > -4$
17. $-1 < \dfrac{3 - 7x}{4} \le 6$
18. $0 \le 4x - 1 \le 2$
19. $\dfrac{5}{7 - 2x} > 0$
20. $\dfrac{4}{x^2 + 9} > 0$
21. $|x - 10| < 0.3$
22. $\left|\dfrac{2x + 3}{5}\right| < 2$
23. $\left|\dfrac{7 - 3x}{2}\right| \le 1$
24. $|3 - 11x| \ge 41$
25. $|25x - 8| > 7$
26. $|2x + 1| < 0$
27. $3x^2 + 5x - 2 < 0$
28. $2x^2 - 9x + 7 < 0$
29. $2x^2 + 9x + 4 \ge 0$
30. $x^2 - 10x \le 200$
31. $\dfrac{1}{x^2} < 100$
32. $5 + \sqrt{x} < 1$
33. $\dfrac{3x + 2}{2x - 7} \le 0$
34. $\dfrac{3}{x - 9} > \dfrac{2}{x + 2}$

35. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit y Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Exprese los valores de C correspondientes a $60 \le F \le 80$ por medio de una desigualdad.

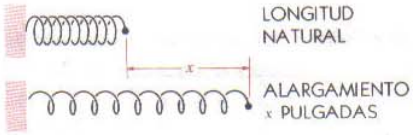
36. Para el circuito eléctrico que se muestra en la figura, la ley de Ohm afirma que $I = V/R$, donde R es la resistencia (en ohms, Ω), V es la diferencia de potencial (en volts, V) e I es la corriente (en amperes, A). Si la tensión es de 110 V, ¿qué valores de la resistencia producen una corriente que no excede de 10 A?

EJERCICIO 36



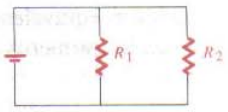
37. De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza F (en newtons, N) que se requiere para estirar un resorte x centímetros a partir de su longitud natural, está dada por la fórmula $F = (4.5)x$ (véase la figura). ¿Cuáles son los valores del alargamiento x correspondientes a $10 \le F \le 18$?

EJERC 7



38. Si en un circuito eléctrico se conectan dos resistores R_1 y R_2 en paralelo, la resistencia neta R está dada por $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$ (véase la figura). Si $R_1 = 10$ ohms (Ω), ¿qué valores de R_2 dan por resultado una resistencia neta de menos de 5 Ω?

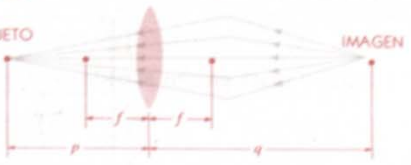
EJERCICIO 38



39. Una lente convexa tiene distancia focal $f = 5$ cm. Si un objeto se coloca a una distancia de p centímetros de la lente y la distancia de la lente a la imagen es q centímetros, entonces p, q y f están relacionados por la *ecuación de las lentes* $(1/p) +$

$(1/q) = 1/f$ (véase la figura). ¿A qué distancia de la lente debe colocarse el objeto para que la imagen esté a más de 12 cm de aquélla?

EJERCICIO 39



40. Para cierto gas, la ley de Boyle afirma que $pv = 200$, donde p denota la presión (en N/cm^2) y v el volumen (en cm^3). Si $25 \le v \le 50$, ¿cuáles son los valores correspondientes de p?

1.2 SISTEMAS DE COORDENADAS EN DOS DIMENSIONES

En la Sección 1.1 se presentó un método para asignar coordenadas a los puntos de una recta. También se puede introducir un sistema coordenado para un plano por medio de *pares ordenados*. La expresión **par ordenado** designa a dos números reales de los cuales uno es el "primero" y el otro el "segundo". El símbolo (a, b) denota al par ordenado que consta de los números reales a y b, donde a es el primero y b es el segundo. Los pares ordenados tienen muchas aplicaciones. En la Sección 1.1 se usaron para denotar intervalos abiertos. En esta sección representarán puntos en el plano. Aunque se usen los pares ordenados en diferentes situaciones, es poco probable que se confundan sus significados ya que siempre debe quedar claro por el contexto si el símbolo (a, b) representa un intervalo, un punto o algún otro concepto matemático. Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son **iguales**, y se escribe

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d.$$

En particular esto implica que $(a, b) \neq (b, a)$ si $a \neq b$. El conjunto de todos los pares ordenados se denota por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Se puede definir un **sistema coordenado rectangular** o **cartesiano*** en el plano considerando en él dos rectas coordenadas perpendiculares que se cortan o intersecan en el origen O de ambas. A menos que se especifique lo contrario, en cada recta se elige la misma unidad de longitud. Se acostumbra colocar una de las rectas en dirección horizontal con el sentido positivo a la derecha, y la otra, vertical con el sentido positivo hacia arriba, como se indica con las puntas de flecha en la Figura 1.12. Las dos rectas se denominan los **ejes coordenados** y el punto O es el **origen**. La recta horizontal se suele llamar **eje** x y la recta vertical **eje** y, lo cual se indica escribiendo una x y una y, respectivamente, junto a las puntas de los ejes. Entonces tal plano es un **plano coordenado** xy. En ciertas aplicaciones se usan otros nombres, por ejemplo s y t, para los ejes coordenados y se hace referencia al sistema usando esas denominaciones, por ejemplo plano st. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes llamadas el **primero**, **segundo**, **tercero** y **cuarto cuadrantes** que se denotan por I, II, III y IV, respectivamente (véase la Figura 1.12).

* El nombre *cartesiano* se emplea en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), quien fue uno de los primeros en emplear estos sistemas de coordenadas.

FIGURA 1.12

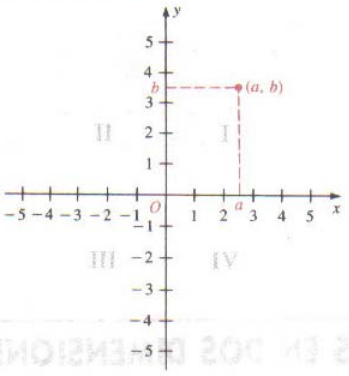
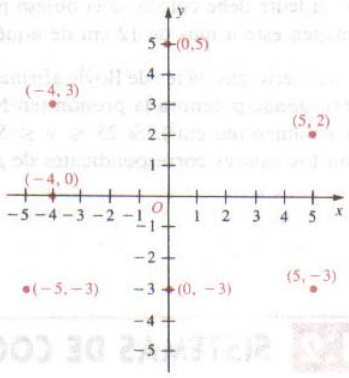


FIGURA 1.13



A cada punto P en el plano xy se le puede asignar un par ordenado único (a, b), como se muestra en la Figura 1.12. El número a es la **abscisa** (o **coordenada x**) de P, y b es su **ordenada** (o **coordenada y**). Se dice que *P tiene las coordenadas* (a, b). Recíprocamente, todo par ordenado (a, b) determina un punto P en el plano xy con coordenadas a y b. A veces se habla del *punto* (a, b), o $P(a, b)$ para indicar el punto P con abscisa a y ordenada b. Para **trazar un punto** $P(a, b)$ se localiza en un plano coordenado y se representa por un pequeño círculo, como se ilustra para varios puntos en la Figura 1.13.

El siguiente enunciado proporciona una fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en un plano coordenado.

FÓRMULA DE LA DISTANCIA (1.9)

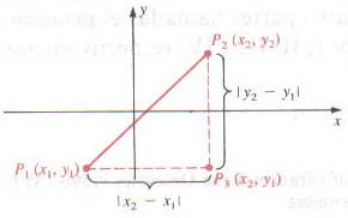
La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en un plano coordenado es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demostración Si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces, como se ilustra en la Figura 1.14, los puntos P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Por el Teorema de Pitágoras,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2.$$

FIGURA 1.14



De la figura se ve que

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \quad \text{y} \quad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

Como $|a|^2 = a^2$ para todo número real a, se puede escribir

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación se obtiene la Fórmula de la Distancia.

Si $y_1 = y_2$, los puntos P_1 y P_2 se encuentran sobre la misma recta horizontal y

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Análogamente, si $x_1 = x_2$, los puntos se encuentran sobre la misma recta vertical y

$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

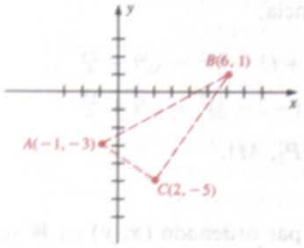
Estos son dos casos especiales de la Fórmula de la Distancia.

Aunque en la demostración se hizo referencia a los puntos de la Figura 1.14, el razonamiento es independiente de las posiciones de P_1 y P_2.

Conviene notar que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$, por lo que al aplicar la Fórmula de la Distancia no importa el orden en el que se restan las abscisas y las ordenadas del punto.

EJEMPLO 1 Situar los puntos $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$. Demostrar que el triángulo con vértices A, B y C es un triángulo rectángulo y calcular su área.

FIGURA 1.15



Solución Los puntos y el triángulo se tienen en la Figura 1.15. Por la geometría plana sabemos que un triángulo es rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del tercer lado. Usando la Fórmula de la Distancia,

$$d(A, B) = \sqrt{(-1 - 6)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

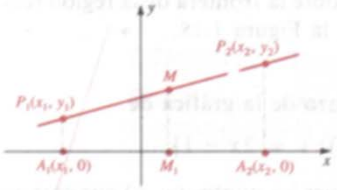
$$d(B, C) = \sqrt{(6 - 2)^2 + (1 + 5)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-3 + 5)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Como $[d(A, B)]^2 = [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2$, el triángulo es un rectángulo con hipotenusa AB. El área es $\frac{1}{2}\sqrt{52}\sqrt{13} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13}\sqrt{13}$, o sea 13 unidades cuadradas.

Es fácil obtener una fórmula para el punto medio de un segmento. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en un plano coordenado y sea M el punto medio del segmento P_1P_2. Las rectas paralelas al eje y que pasan por P_1 y P_2 cortan al eje x en $A_1(x_1, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$. De la geometría plana se sabe que la recta paralela al eje y que pasa por M biseca el segmento A_1A_2 (véase la Figura 1.16). Si $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$, y por tanto $d(A_1, A_2) = x_2 - x_1$. Como M_1 es el punto medio entre A_1 y A_2, la abscisa de M_1 es

FIGURA 1.16



$$x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_1 = \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Resulta que la abscisa de M también es $(x_1 + x_2)/2$. Análogamente, la ordenada de M es $(y_1 + y_2)/2$. Estas fórmulas son válidas para todas las posiciones de P_1 y P_2, por lo que se tiene el siguiente resultado.

FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO (1.10)

El punto medio del segmento entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

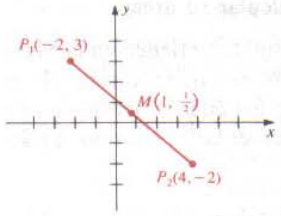
EJEMPLO 2 Encontrar el punto medio M del segmento entre $P_1(-2, 3)$ y $P_2(4, -2)$. Situar los puntos P_1, P_2 y M y verificar que

$$d(P_1, M) = d(P_2, M).$$

Solución Por la Fórmula del Punto Medio, las coordenadas de M son

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) \text{ o bien } \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

FIGURA 1.17



En la Figura 1.17 se presentan los puntos P_1, P_2 y M. Aplicando la Fórmula de la Distancia,

$$d(P_1, M) = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$

$$d(P_2, M) = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$

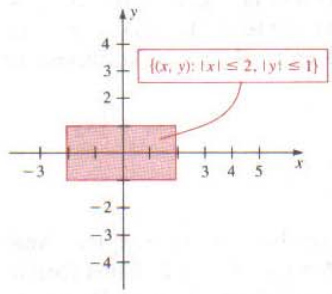
Por lo tanto, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$. •

Si W es un conjunto de pares ordenados, para cada par ordenado (x, y) en W se puede considerar el punto $P(x, y)$ que le corresponde en un plano coordenado. El conjunto de todos esos puntos se llama **gráfica** de W. Para *trazar la gráfica de W*, se ilustran geométricamente las características más significativas de la gráfica representándolas en un plano coordenado.

EJEMPLO 3 Efectúe el trazo de la gráfica de

$$W = \{(x, y): |x| \leq 2, |y| \leq 1\}.$$

FIGURA 1.18



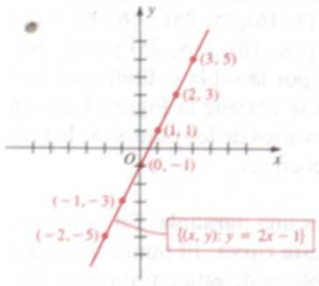
Solución Las desigualdades son equivalentes a $-2 \leq x \leq 2$ y $-1 \leq y \leq 1$. Por lo tanto, la gráfica consta de todos los puntos dentro de y sobre la frontera de la región rectangular que se muestra en la Figura 1.18. •

EJEMPLO 4 Realice el trazo de la gráfica de

$$W = \{(x, y): y = 2x - 1\}.$$

Solución Se desea obtener los puntos (x, y) que corresponden a los pares ordenados (x, y) en W. Es conveniente hacer una lista de las coordenadas de varios de estos puntos

FIGURA 1.19



y escribirla en forma de tabla. Para cada x obtenemos el valor de y por la fórmula $y = 2x - 1$:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5

Si se sitúan los puntos con estas coordenadas vemos que todos parecen estar sobre una recta y trazamos la gráfica de acuerdo con esto (véase la Figura 1.19). En general, no bastan tan pocos puntos para obtener una gráfica, sin embargo en este caso elemental son suficientes para indicar que la gráfica es una línea recta. En la Sección 1.3 se demuestra que efectivamente lo es.

Las abscisas de los puntos en que la gráfica corta al eje x se llaman **intercepciones** x de la gráfica. Las ordenadas de los puntos en que la gráfica corta al eje y son las **intercepciones** y. La gráfica de la Figura 1.19 tiene una intercepción x igual a $\frac{1}{2}$ y una intercepción y igual a -1.

No es posible tener la gráfica completa en el Ejemplo 4 pues se pueden asignar valores a x tan grandes como se desee. A pesar de esto, a una representación como la de la Figura 1.19 se le llama *gráfica de W*, o un *croquis* de la gráfica. Se entiende que el trazado es solamente un medio para visualizar la verdadera gráfica y que la recta no termina como parece hacerlo en la figura. En general, el croquis de una gráfica debe mostrar lo suficiente de ella para que las partes restantes resulten evidentes.

Dada una ecuación en x y y, se dice que un par ordenado (a, b) es una **solución** de la ecuación si al sustituir x por a y y por b se obtiene una igualdad. Por ejemplo, $(2, 3)$ es solución de $y = 2x - 1$ porque al sustituir x por 2 y y por 3 se obtiene $3 = 4 - 1$, o sea $3 = 3$. Se dice que dos ecuaciones en x y y son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Las soluciones de una ecuación en x y y determinan un conjunto W de pares ordenados. La **gráfica de la ecuación en x y y** se define como la gráfica de W. Nótese que la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$ es la misma que la del conjunto W del Ejemplo 4 (véase la Figura 1.19).

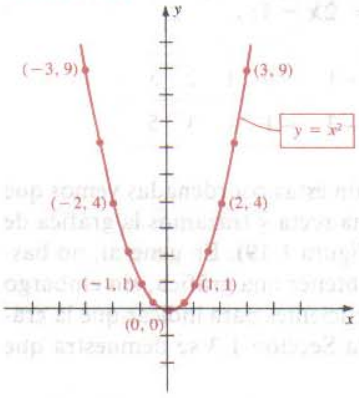
El método que usaremos para trazar la gráfica de algunas de las ecuaciones de este capítulo consiste en situar un número suficiente de puntos hasta que se note cierto patrón y luego se dibuja la gráfica de acuerdo con éste. Evidentemente ésta es una forma burda (y con frecuencia imprecisa) de gráficar, pero es el método que se emplea con más frecuencia en los cursos elementales. Al avanzar en el texto se presentarán métodos que permiten trazar o dibujar gráficas precisas sin necesidad de ubicar muchos puntos.

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de la ecuación $y = x^2$.

Solución Para este dibujo hace falta situar más puntos que en el ejemplo anterior. Incrementando la abscisa sucesivamente en $\frac{1}{2}$ obtenemos una tabla de coordenadas:

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
y	9	$\frac{25}{4}$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9

FIGURA 1.20



Valores mayores de $|x|$ producen valores aún más grandes de y. Por ejemplo, los puntos (4, 16), (5, 25) y (6, 36) están en la gráfica y también están (−4, 16), (−5, 25) y (−6, 36). Localizando los puntos dados por la tabla y dibujando una curva alisada a través de ellos se obtiene la Figura 1.20, en la que además se han marcado varios de los puntos de la gráfica con sus coordenadas respectivas. •

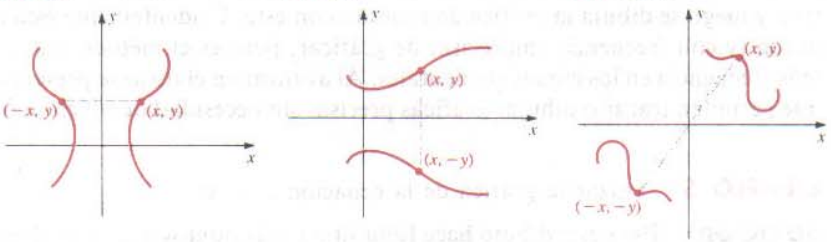
La gráfica del Ejemplo 5 es una **parábola**. En este caso, el eje y coincide con el **eje de esta curva**. El punto más bajo (0, 0) es el **vértice** de la parábola y; de esta parábola se dice que **abre hacia arriba**. Si se invierte la gráfica, lo que corresponde a la ecuación $y = -x^2$, entonces se dice de ella que **abre hacia abajo** y que su vértice (0, 0) es el punto más alto de la curva. En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = ax^2$ con $a \neq 0$ es una parábola con vértice (0, 0). También hay parábolas que abren a la derecha o a la izquierda (véase el Ejemplo 6). Las parábolas y sus propiedades se presentan con detalle en el Capítulo 12, en el que además se demuestra que la gráfica de una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, es una parábola cuyo eje es *paralelo* al eje y.

Si se dobla el plano coordenado de la Figura 1.20 a lo largo del eje y, entonces la gráfica que se encuentra en la mitad izquierda del plano coincide con la que se encuentra en la mitad derecha. Se dice entonces que la **gráfica es simétrica con respecto al eje y**. Una gráfica es simétrica con respecto al eje y si el punto $(-x, y)$ está en la gráfica cada vez que (x, y) está en ésta, como se ve en la Figura 1.21(i). Una **gráfica es simétrica con respecto al eje x** si cada vez que el punto (x, y) está en la gráfica, entonces $(x, -y)$ también lo está, como aparece en la Figura 1.21(ii). Algunas gráficas tienen **simetría con respecto al origen**. Esto sucede si cada vez que el punto (x, y) está en la gráfica, entonces $(-x, -y)$ también lo está, como se ilustra en la Figura 1.21(iii).

Los siguientes criterios son útiles para investigar estos tres tipos de simetría en las gráficas de ecuaciones en x y y.

FIGURA 1.21
Simetrías

(i) Eje y **(ii)** Eje x **(iii)** Origen



CRITERIOS DE SIMETRÍA (1.11)

(i) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente.

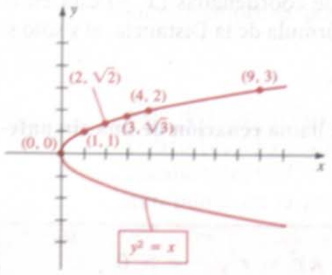
(ii) La grafica de una ecuación es simétrica con respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

(iii) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al origen si al sustituir simultáneamente x por $-x$ y y por $-y$ resulta una ecuación equivalente.

Si en la ecuación del Ejemplo 5 se sustituye x por $-x$ se obtiene $y = (-x)^2$, que es equivalente a $y = x^2$. Entonces, por el Criterio de Simetría (1.11) (i), la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Si una gráfica es simétrica con respecto a un eje, para trazarla basta su determinación en una mitad del plano coordenado ya que se puede dibujar el resto haciendo una reflexión con respecto al eje de simetría.

FIGURA 1.22



EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de la ecuación $y^2 = x$.

Solución Como al sustituir y por $-y$ no cambia la ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al eje x [Criterio de Simetría (ii)]. Por tanto, basta localizar puntos con ordenadas no negativas y luego reflejar con respecto al eje x. Como $y^2 = x$, las ordenadas de los puntos arriba del eje x están dadas por $y = \sqrt{x}$. En la siguiente tabla aparecen las coordenadas de varios de los puntos de la gráfica:

x	0	1	2	3	4	9
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	3

En la Figura 1.22 aparece una parte de la gráfica. Se trata de una parábola que abre hacia la derecha y que tiene su vértice en el origen. En este caso el eje de la parábola coincide con el eje x. •

EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de la ecuación $4y = x^3$.

Solución Si se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ resulta

$$4(-y) = (-x)^3 \quad \text{o bien} \quad -4y = -x^3.$$

Multiplicando ambos lados por -1 se ve que esta última ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación $4y = x^3$. Entonces, por el Criterio de Simetría (iii), resulta que la gráfica es simétrica con respecto al origen. La siguiente tabla es una lista de algunos de los puntos de la gráfica.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2	$\frac{125}{32}$

Por simetría (o por sustitución) vemos que los puntos $(-1, -\frac{1}{4})$, $(-2, -2)$, etc., están en la gráfica. La situación de estos puntos lleva al dibujo en la Figura 1.23. •

FIGURA 1.23

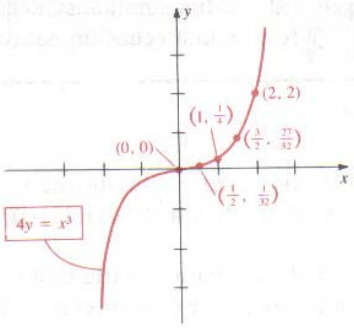
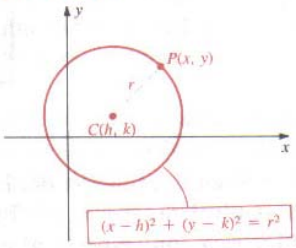


FIGURA 1.24



Si $C(h, k)$ es un punto en un plano coordenado, entonces una circunferencia con centro C y radio $r > 0$ consta de todos los puntos del plano que distan r unidades de C. Como se muestra en la Figura 1.24, un punto P de coordenadas (x, y) está en la circunferencia si y sólo si $d(C, P) = r$, o bien por la Fórmula de la Distancia, si y sólo si

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

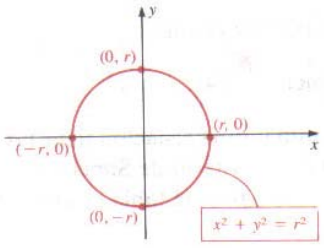
La siguiente ecuación es equivalente a ésta última y se llama **ecuación de una circunferencia de radio r con centro (h, k).**

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA (1.12)

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2, \quad r > 0$$

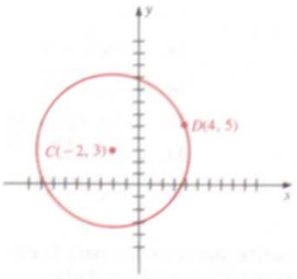
Si $h = 0$ y $k = 0$, la ecuación se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de una circunferencia con radio r y centro en el origen (véase la Figura 1.25). Si $r = 1$, la gráfica se llama **circunferencia unitaria.**

FIGURA 1.25



EJEMPLO 8 Encontrar una ecuación para la circunferencia que tiene centro $C(-2, 3)$ y pasa por el punto $D(4, 5)$.

FIGURA 1.26



Solución En la Figura 1.26 aparece un croquis de la circunferencia. Como D está en ella, el radio r es $d(C, D)$. Por la Fórmula de la Distancia,

$$r = \sqrt{(-2-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Usando la ecuación de la circunferencia con $h = -2$, $k = 3$ y $r = \sqrt{40}$, obtenemos

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 40$$

o bien

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0. \quad \bullet$$

Desarrollando los cuadrados en $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y simplificando se llega a una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

para ciertos números reales a, b y c. Recíprocamente, partiendo de esta última ecuación, siempre es posible *completar cuadrados* y llegar a una ecuación de la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = d.$$

Este método se ilustra en el Ejemplo 9. Si $d > 0$ la gráfica es una circunferencia con centro (h, k) y radio $r = \sqrt{d}$. Si $d = 0$ la gráfica consta solamente del punto (h, k). Finalmente, si $d < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales y por lo tanto, no hay ningún punto en la gráfica.

EJEMPLO 9 Calcular el centro y el radio de la circunferencia con ecuación

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

Solución Comenzamos por ordenar esta última como sigue:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 3.$$

Luego completamos los cuadrados de las expresiones dentro de los paréntesis. Por supuesto, para obtener una ecuación equivalente, hay que sumar números a *ambos* lados de la ecuación. Para completar el cuadrado de una expresión de la forma $x^2 + ax$ debe sumarse el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $(b/2)^2$ a ambos lados de la ecuación. Análogamente, para $y^2 + by$, se suma $(b/2)^2$ a ambos lados. En este ejemplo, $a = -4$, $b = 6$, $(a/2)^2 = (-2)^2 = 4$ y $(b/2)^2 = 3^2 = 9$. Esto lleva a

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

o bien

$$(x-2)^2 - (y+3)^2 = 16.$$

Por lo tanto, de acuerdo con (1.12), el centro es $(2, -3)$ y el radio es 4. $\bullet$

EJERCICIOS 1.2

Ejercicios 1-6: (a) Calcule la distancia $d(A, B)$ entre los puntos A y B; (b) determine el punto medio del segmento AB.

1. $A(6, -2)$, $B(2, 1)$
2. $A(-4, -1)$, $B(2, 3)$
3. $A(0, -7)$, $B(-1, -2)$
4. $A(4, 5)$, $B(4, -4)$
5. $A(-3, -2)$, $B(-8, -2)$
6. $A(11, -7)$, $B(-9, 0)$

Ejercicios 7-8: Demuestre que el triángulo con vértices A, B y C es un triángulo rectángulo y calcule su área.

7. $A(-3, 4)$, $B(2, -1)$, $C(9, 6)$
8. $A(7, 2)$, $B(-4, 0)$, $C(4, 6)$

Ejercicios 9-14: Trace la gráfica del conjunto W.

9. $W = \{(x, y): x = 4\}$
10. $W = \{(x, y): y = -3\}$
11. $W = \{(x, y): xy < 0\}$
12. $W = \{(x, y): xy = 0\}$
13. $W = \{(x, y): |x| < 2, |y| > 1\}$
14. $W = \{(x, y): |x| > 1, |y| \leq 2\}$

Ejercicios 15-36: Trace la gráfica de la ecuación y determine las simetrías usando (1.11).

15. $y = 3x + 1$
16. $y = 4x - 3$
17. $y = -2x + 3$
18. $y = 2 - 3x$
19. $y = 2x^2 - 1$
20. $y = -x^2 + 2$
21. $4y = x^2$
22. $3y + x^2 = 0$
23. $y = -\frac{1}{2}x^3$
24. $y = \frac{1}{2}x^3$
25. $y = x^3 - 2$
26. $y = 2 - x^3$
27. $y = \sqrt{x}$
28. $y = \sqrt{x} - 1$
29. $y = \sqrt{-x}$
30. $y = \sqrt{x - 1}$
31. $x^2 + y^2 = 16$
32. $4x^2 + 4y^2 = 25$
33. $y = -\sqrt{4 - x^2}$
34. $x = \sqrt{4 - y^2}$
35. $x = \sqrt{9 - y^2}$
36. $y = \sqrt{9 - x^2}$

Ejercicios 37-44: Encuentre una ecuación para la circunferencia que satisface las condiciones dadas.

37. Centro $C(3, -2)$, radio 4.
38. Centro $C(-5, 2)$, radio 5.
39. Centro en el origen y pasa por $P(-3, 5)$.
40. Centro $C(-4, 6)$, pasa por $P(1, 2)$.
41. Centro $C(-4, 2)$ y es tangente al eje x.
42. Centro $C(3, -5)$ y es tangente al eje y.
43. Los extremos de uno de sus diámetros son $A(4, -3)$ y $B(-2, 7)$.
44. Es tangente a ambos ejes, el centro está en el primer cuadrante y el radio es 2.

Ejercicios 45-50: Determine el centro y el radio de la circunferencia que satisface la ecuación dada.

45. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$
46. $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$
47. $x^2 + y^2 + 6x = 0$
48. $x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$
49. $2x^2 + 2y^2 - x + y - 3 = 0$
50. $9x^2 + 9y^2 - 6x + 12y - 31 = 0$

1.3 LA RECTA

El siguiente concepto es de importancia fundamental para el estudio de las rectas. Todas las rectas a las que se hará referencia están en un plano coordenado.

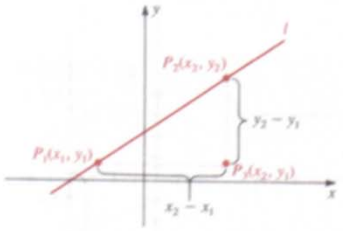
DEFINICIÓN (1.13) Sea l una recta que no es paralela al eje y, y sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos en l. La **pendiente** m de l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si l es paralela al eje y entonces su pendiente no está definida.

FIGURA 1.27

Pendiente positiva



En la Figuras 1.27 y 1.28 se muestran unos puntos típicos P_1 y P_2 sobre una recta l. El numerador $y_2 - y_1$ en la fórmula de m es igual al incremento de ordenada (cambio vertical) al ir de P_1 a P_2 y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador $x_2 - x_1$, es el incremento de abscisas (cambio horizontal) al ir de P_1 a P_2 y también puede ser positivo o negativo, pero no puede ser cero porque, cuando la pendiente existe, l no puede ser paralela al eje y.

Al calcular la pendiente de una recta no importa cuál de los puntos se llama P_1 y cual P_2 puesto que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Por lo tanto, puede suponerse que los puntos son tales que $x_1 < x_2$, como en las Figuras 1.27 y 1.28. En este caso, $x_2 - x_1 > 0$, y entonces la pendiente es positiva, negativa o cero según $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$, o bien $y_2 = y_1$. La pendiente de la recta que se muestra en la Figura 1.27 es positiva. La pendiente de la recta que se muestra en la Figura 1.28 es negativa.

FIGURA 1.28

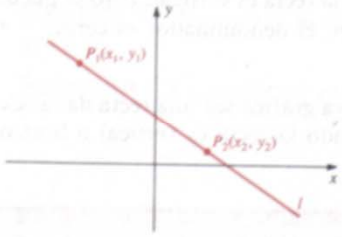
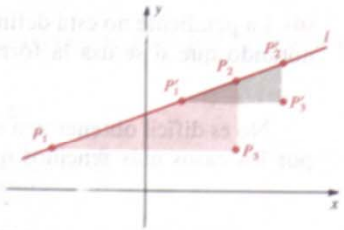


FIGURA 1.29



Una **recta horizontal** es una recta paralela al eje x. Nótese que *una recta es horizontal si y sólo si su pendiente es cero*. Una **recta vertical** es una paralela al eje y. La pendiente de una recta vertical no está definida.

El valor de la pendiente no depende de los dos puntos que se elijan sobre l para calcularla. Si se usan otros puntos $P_1'(x_1', y_1')$ y $P_2'(x_2', y_2')$, entonces el triángulo con vértices P_1', P_2' y $P_3'(x_2', y_1')$ es semejante al triángulo con vértices P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$, como se ve en la Figura 1.29. Como las razones de los lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales,

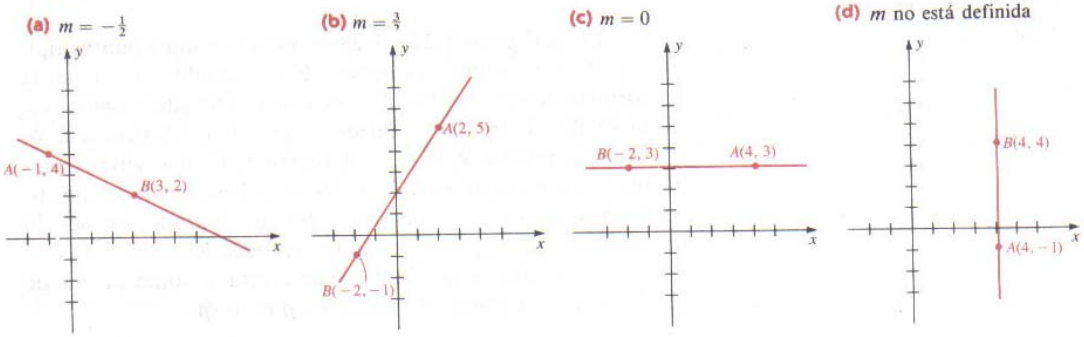
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

EJEMPLO 1 Trazar la recta que pasa por cada par de puntos y calcular su pendiente.

(a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ (b) $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$

(c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ (d) $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$.

FIGURA 1.30



Solución Las rectas pueden verse en la Figura 1.30. Usando la Definición (1.13),

(a) $m = \dfrac{2-4}{3-(-1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

(b) $m = \dfrac{5-(-1)}{2-(-2)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

(c) $m = \dfrac{3-3}{-2-4} = \dfrac{0}{-6} = 0$

(d) La pendiente no está definida porque la recta es vertical. Esto se puede ver también notando que si se usa la fórmula para m, el denominador es cero. •

No es difícil obtener una ecuación cuya gráfica sea una recta dada. Comenzaremos por los casos más sencillos que son cuando la recta es vertical u horizontal.

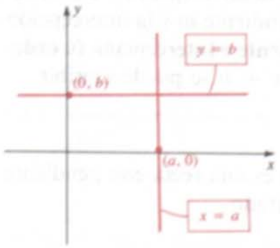
TEOREMA (1.14)

(i) La gráfica de la ecuación $x = a$ es una recta vertical cuya intercepción x es a.

(ii) La gráfica de la ecuación $y = b$ es una recta horizontal cuya intercepción y es b.

Demostración La ecuación $x = a$ se puede escribir en la forma $x + (0)y = a$. Los puntos $(a, -2)$, $(a, 1)$ y $(a, 0)$ son soluciones típicas de esta ecuación. Evidentemente, toda solución tiene la forma (a, y), donde y puede tomar cualquier valor y a es fijo. Entonces, la gráfica de $x = a$ es una recta que es paralela al eje y y su intercepción

FIGURA 1.31

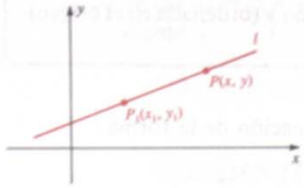


x es a, como se ilustra en la Figura 1.31. Esto demuestra (i). La parte (ii) se verifica de manera análoga. • •

Procedemos ahora a encontrar una ecuación para una recta l que tiene pendiente m y pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ (sólo hay una recta que satisface estas condiciones). Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$ (véase la Figura 1.32), entonces P está en l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m, es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

FIGURA 1.32



Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Nótese que (x_1, y_1) es una solución de esta última ecuación y, por lo tanto, los puntos de l son precisamente los que corresponden a la solución. Esta ecuación para l se llama **forma de Punto y Pendiente**.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADOS UN PUNTO Y SU PENDIENTE (1.15)

La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m, es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 2 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

Solución La pendiente m de la recta es

$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}.$$

En la ecuación con la forma de Punto y Pendiente (1.15) se pueden usar como (x_1, y_1) las coordenadas de A o bien de B. Usando $A(1, 7)$ obtenemos

$$y - 7 = \tfrac{5}{4}(x - 1)$$

que es equivalente a

$$4y - 28 = 5x - 5 \quad \text{o bien} \quad 5x - 4y + 23 = 0. \quad \bullet$$

La Ecuación (1.15) se puede escribir como $y = mx - mx_1 + y_1$, que tiene la forma

$$y = mx + b$$

en donde $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la ordenada de la intersección de la

gráfica con el eje y, como se puede ver tomando $x = 0$, y es la intercepción y u ordenada en el origen. Como la ecuación $y = mx + b$ indica la pendiente m y la intercepción y o la ordenada en el origen, b, se denomina **forma de Pendiente e Intercepción** (u **ordenada en el origen**). Recíprocamente, partiendo de $y = mx + b$ se puede escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

Comparando esta ecuación con (1.15), se ve que la gráfica es una recta con pendiente m que pasa por el punto $(0, b)$. Esto da el siguiente resultado.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADAS SU PENDIENTE Y SU INTERCEPCIÓN y (1.16)

La gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta con pendiente m y con intercepción y (ordenada en el origen) b.

Se demostró que toda recta es la gráfica de una ecuación de la forma

$$ax + by + c = 0$$

en donde a, b y c son números reales tales que a y b no son ambos cero. Una ecuación como ésta se llama **ecuación lineal** en x y y. Ahora se demostrará que, recíprocamente, la gráfica de $ax + by + c = 0$ donde a y b no son ambos iguales a cero, es siempre una recta. Si $b \neq 0$, se puede despejar y y obtener

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right)$$

que es una ecuación de la forma (1.16) con pendiente $-a/b$ e intercepción y igual a $-c/b$. Si $b = 0$ pero $a \neq 0$, se puede despejar x y obtener $x = -c/a$, que es la ecuación de una recta vertical con intercepción x (abscisa en el origen) igual a $-c/a$. Esto completa la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA (1.17)

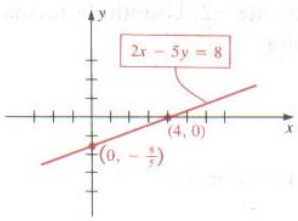
La gráfica de una ecuación lineal $ax + by + c = 0$ es una recta y, recíprocamente, toda línea recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Por simplicidad, se usará la expresión *la recta* $ax + by + c = 0$ en vez de la expresión más precisa *la recta con ecuación* $ax + by + c = 0$.

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de $2x - 5y = 8$.

Solución Por el teorema (1.17), la gráfica es una recta y por lo tanto basta encontrar dos puntos de la gráfica. Buscaremos la abscisa y la ordenada en el origen. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación, obtenemos que la abscisa en el origen es 4. Sustituyendo $x = 0$ vemos que la ordenada en el origen es $-\frac{8}{5}$. Esto nos lleva a la gráfica de la Figura 1.33.

FIGURA 1.33



Otro camino para encontrar la gráfica consiste en expresar la ecuación en términos de la pendiente y la ordenada en el origen. Comenzamos por dejar solo el término en y a un lado del signo igual, obteniendo

$$5y = 2x - 8.$$

Luego se dividen ambos lados entre 5 y resulta así

$$y = \frac{2}{5}x + \left(\frac{-8}{5}\right)$$

que es de la forma $y = mx + b$. Por lo tanto, la pendiente es $m = \frac{2}{5}$ y la ordenada en el origen es $b = -\frac{8}{5}$. Podemos dibujar una recta que pasa por $(0, -\frac{8}{5})$ y tiene pendiente $\frac{2}{5}$. •

El siguiente teorema señala la relación entre rectas paralelas y la pendiente.

TEOREMA (1.18)

Dos rectas que no son verticales, son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Demostración Sean l_1 y l_2 dos rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Usando la forma de Pendiente e Intercepción (1.16), resulta que tales rectas tienen las ecuaciones

$$y = m_1x + b_1, \qquad y = m_2x + b_2$$

en donde b_1 y b_2 son las intercepciones y u ordenadas en el origen. Las rectas se cortan en un punto (x, y) si y sólo si

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$$

o bien

$$(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1.$$

Como $l_1 \neq l_2$, puede despejarse x de la ecuación anterior si y sólo si $m_1 - m_2 \neq 0$. Esto muestra que las rectas l_1 y l_2 se intersecan si y sólo si $m_1 \neq m_2$. Por lo tanto, son paralelas (*no* se cortan) si y sólo si $m_1 = m_2$. • •

EJEMPLO 4 Encontrar la ecuación de una recta que pasa por el punto $(5, -7)$ y es paralela a la recta $6x + 3y - 4 = 0$.

Solución Expresemos la ecuación en términos de la pendiente y la ordenada al origen. Comenzaremos por escribir

$$3y = -6x + 4$$

y, dividiendo ambos lados entre 3, obtenemos

$$y = -2x + \tfrac{4}{3}.$$

Esta ecuación tiene la forma (1.16) con $m = -2$. Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la recta que buscamos también tiene pendiente -2. Usando la forma (1.15) de la ecuación dados un punto y la pendiente, resulta

$$y + 7 = -2(x - 5).$$

Esto es equivalente a

$$y + 7 = -2x + 10 \quad \text{o bien} \quad 2x + y - 3 = 0. \quad \bullet$$

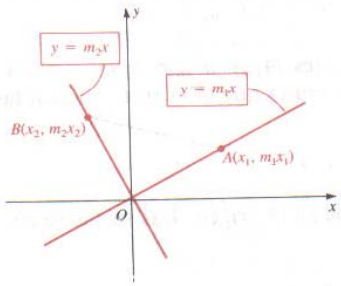
El siguiente resultado da una condición para que dos rectas sean perpendiculares.

TEOREMA (1.19)

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si

$$m_1 m_2 = -1$$

FIGURA 1.34



Demostración Por simplicidad se considerará solamente el caso en que las dos rectas se intersecan en el origen O, como se ilustra en la Figura 1.34. Entonces sus ecuaciones son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Si se escogen puntos $A(x_1, m_1x_1)$ y $B(x_2, m_2x_2)$ distintos de O sobre las rectas, como se ve en la figura, entonces las rectas son perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es recto. Por el Teorema de Pitágoras, el ángulo AOB es recto si y sólo si

$$[d(A, B)]^2 = [d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2$$

o, por la Fórmula de la Distancia,

$$(m_2x_2 - m_1x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = (m_2x_2)^2 + x_2^2 + (m_1x_1)^2 + x_1^2.$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando,

$$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0.$$

Dividiendo ambos lados entre $-2x_1x_2$, se ve que $m_1m_2 + 1 = 0$. Por lo tanto, las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

Para el caso en que las rectas se intersecan en *un* punto *arbitrario* (a, b) puede darse una demostración parecida. • •

Para recordar la condición de perpendicularidad, es conveniente notar que m_1 y m_2 deben ser cada una el *recíproco negativo* de la otra, es decir, $m_1 = -1/m_2$ y $m_2 = -1/m_1$.

EJEMPLO 5 Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que va de $A(1, 7)$ a $B(-3, 2)$.

Solución Por la Fórmula del Punto Medio (1.10), el punto central M del segmento AB es $(-1, \frac{9}{2})$. Como la pendiente de AB es $\frac{5}{4}$ (véase el Ejemplo 2), del Teorema (1.19) se deduce que la pendiente de la mediatriz es $-\frac{4}{5}$. Usando la Forma de Punto y Pendiente,

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{4}{5}(x + 1).$$

Multiplicando por 10 ambos lados y simplificando obtenemos $8x + 10y - 37 = 0$. •

Dos variables x y y están **relacionadas linealmente** si $y = ax + b$ para algunas constantes a y b con $a \neq 0$. En las aplicaciones aparecen con frecuencia las relaciones lineales. El siguiente ejemplo ilustra esto. En los Ejercicios 35-40 pueden verse otras aplicaciones.

EJEMPLO 6 La relación entre la temperatura del aire T (en °F) y la altitud h (la altura en pies sobre el nivel del mar) es aproximadamente lineal. Cuando la temperatura al nivel del mar es de 60°, un incremento de 5 000 pie en la altitud disminuye aproximadamente en 18° la temperatura.

(a) Expresar T en términos de h.

(b) Calcular la temperatura del aire a una altitud de 15 000 pie.

Solución

(a) Como T y h están relacionadas linealmente,

$$T = ah + b$$

para constantes a y b. Como $T = 60$ cuando $h = 0$,

$$60 = a(0) + b \quad \text{o bien} \quad b = 60.$$

Por lo tanto,

$$T = ah + 60.$$

Además, si $h = 5\,000$, entonces $T = 60 - 18 = 42$. Sustituyendo estos valores en la fórmula $T = ah + 60$,

$$42 = a(5000) + 60 \quad \text{o bien} \quad 5000a = -18.$$

Por lo tanto,

$$a = -\frac{18}{5000} = -\frac{9}{2500}$$

y la fórmula (aproximada) para T es

$$T = -\frac{9}{2500}h + 60.$$

(b) Usando la fórmula para T que obtuvimos en la parte (a), la temperatura cuando $h = 15\,000$ es aproximadamente

$$T = -\frac{9}{2500}(15\,000) + 60 = -54 + 60 = 6°\text{F}.$$ •

EJERCICIOS 1.3

Ejercicios 1-4: Localice los puntos A y B, y calcule la pendiente de la recta que pasa por A y B.

1. $A(-4, 6)$, $B(-1, 18)$
2. $A(6, -2)$, $B(-3, 5)$
3. $A(-1, -3)$, $B(-1, 2)$
4. $A(-3, 4)$, $B(2, 4)$

5. Demuestre que $A(-3, 1)$, $B(5, 3)$, $C(3, 0)$ y $D(-5, -2)$ son los vértices de un paralelogramo.
6. Demuestre que $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(0, -6)$ y $D(-6, 2)$ son los vértices de un trapecio.
7. Demuestre que los puntos $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$ y $D(-6, -5)$ son los vértices de un rectángulo.
8. Demuestre que los puntos $A(1, 4)$, $B(6, -4)$ y $C(-15, -6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
9. Los puntos $A(-1, -3)$, $B(4, 2)$ y $C(-7, 5)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Encuentre el cuarto vértice.
10. Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$ los vértices de un cuadrilátero arbitrario. Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de lados adyacentes forman un paralelogramo.

Ejercicios 11-20: Encuentre la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas.

11. Pasa por $A(2, -6)$, pendiente $\frac{1}{2}$
12. Pendiente -3, ordenada en el origen 5.
13. Pasa por $A(-5, -7)$ y $B(3, -4)$.
14. Abscisa en el origen -4 y ordenada en el origen 8.
15. Pasa por $A(8, -2)$, intercepción y igual a -3.
16. Pendiente 6, intercepción x igual a -2.
17. Pasa por $A(10, -6)$, es paralela (a) al eje y; (b) al eje x.
18. Pasa por $A(-5, 1)$, es perpendicular (a) al eje y; (b) al eje x.
19. Pasa por $A(7, -3)$, es perpendicular a la recta $2x - 5y = 8$.
20. Pasa por $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ es paralela a la recta $x + 3y = 1$.
21. Dados $A(3, -1)$ y $B(-2, 6)$, encuentre la ecuación de la mediatriz del segmento AB.
22. Obtenga la ecuación de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

Ejercicios 23-30: Use la Forma de Pendiente e Intercepción (1.16) para calcular la pendiente y la ordenada en el origen de la recta dada por la ecuación y trace la gráfica.

23. $3x - 4y + 8 = 0$
24. $2y - 5x = 1$
25. $x + 2y = 0$
26. $8x = 1 - 4y$
27. $5x + 4y = 20$
28. $x + 2 = \frac{1}{2}y$
29. $x = 3y + 7$
30. $x - y = 0$

31. Encuentre un número real k tal que el punto $P(-1, 2)$ se encuentre en la recta $kx + 2y - 7 = 0$.
32. Determine todos los valores de r tales que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(r, 4)$ y $(1, 3 - 2r)$ es menor que 5.
33. Demuestre que si la recta l tiene abscisa en el origen a y ordenada en el origen b diferentes de cero, entonces $(x/a) + (y/b) = 1$, es una ecuación de la recta l. Esta forma se llama *Forma de Intercepciones* (o *Simétrica*) de la recta. Exprese la ecuación $4x - 2y = 6$ en la forma simétrica.
34. Demuestre que

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

es la ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Esta forma se llama *Forma de Dos Puntos* de la ecuación de la recta. Use esta forma para encontrar la ecuación de la recta que pasa por $A(7, -1)$ y $B(4, 6)$.

35. Los productos farmacéuticos deben especificar las dosis recomendadas para adultos y para niños. Dos de las fórmulas que se han sugerido para obtener las dosis para niños a partir de las de adultos son las siguientes:

$$\text{Regla de Cowling: } y = \frac{t + 1}{24}a$$

$$\text{Regla de Friend: } y = \frac{2}{25}ta$$

donde a denota la dosis para adultos (en miligramos, mg) y t indica la edad del niño (en años).

(a) Tomando $a = 100$, grafique las dos ecuaciones lineales en el mismo sistema coordenado para $0 \le t \le 12$.
(b) ¿Para qué edad las dos fórmulas especifican la misma dosis?

36. La ley de Charles para los gases afirma que si la presión permanece constante entonces la relación entre el volumen V (en cm^3) ocupado por un gas y su temperatura T (en °C) está dada por $V = V_0(1 + \frac{1}{273}T)$.
(a) ¿Cuál es el significado de V_0?
(b) ¿Qué incremento de temperatura corresponde a un incremento en el volumen de V_0 a $2V_0$?
(c) Trace la gráfica de la ecuación en un plano TV para el caso en que $V_0 = 100$, para $T \ge -273$.

37. La resistencia eléctrica R (en ohms, Ω) de un alambre de metal puro tiene una relación lineal con la temperatura T (en °C) dada por la fórmula

$$R = R_0(1 + aT)$$

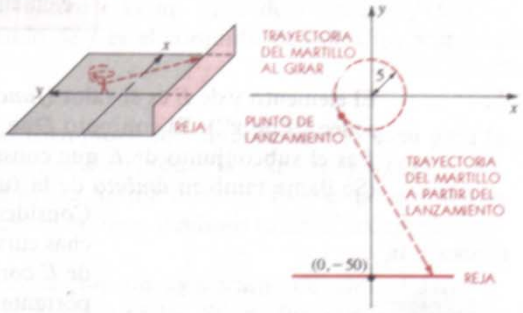
para alguna constante a y $R_0 > 0$.
(a) ¿Qué significado tiene R_0?
(b) En el *cero absoluto* ($T = -273°C$), $R = 0$. Calcule a.
(c) A 0°C, la resistencia de alambre de plata es de 1.25 Ω. ¿A qué temperatura se duplica la resistencia?

38. La temperatura de congelación del agua es 0°C (o 32°F). La temperatura de ebullición es 100°C (o 212°F). Utilice esta información para encontrar una relación lineal entre la temperatura en °F y la temperatura en °C. ¿Qué incremento de temperatura en °F corresponde a un incremento de temperatura de 1°C?

39. Las ballenas azules recién nacidas miden aproximadamente 24 pie de largo y pesan 3 toneladas (ton). A los 7 meses, cuando se destetan, las ballenas jóvenes tienen una sorprendente longitud de 53 pie y un peso de 23 ton. Sea L la longitud (en pies) y W el peso (en toneladas) de una ballena de t meses de edad.
(a) Suponiendo que L y t están relacionados linealmente, ¿cuál es el incremento diario en la longitud? (Suponga que 1 mes = 30 días.)
(b) Suponiendo que W y t están relacionados linealmente, ¿cuál es el incremento diario en peso?

40. Un lanzador de martillo practica en un lugar pequeño. Cuando el lanzador gira, el martillo recorre una circunferencia de 5 pie de radio. Una vez lanzado el martillo choca contra una reja de alambre que se encuentra a 50 pie del centro de la zona de lanzamiento. Suponga que unos ejes coordenados se colocan como se muestra en la figura (el dibujo no está a escala).
(a) Si el martillo se suelta en $(-4, -3)$ y se mueve a lo largo de la tangente, ¿en dónde golpearía a la reja?
(b) Si el martillo debe chocar contra la citada reja en el punto $(0, -50)$, ¿en qué sitio de la circunferencia debe soltarse?

EJERCICIO 40



1.4 LA DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

La noción de **correspondencia** aparece frecuentemente en la vida diaria. Por ejemplo,

a cada libro de una biblioteca le corresponde un número de páginas;

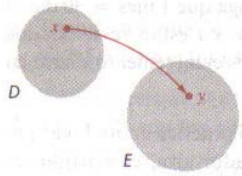
a cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento;

si se registra la temperatura del aire a lo largo de un día, entonces a cada instante de tiempo le corresponde una temperatura.

Estos ejemplos de correspondencia involucran dos conjuntos D y E. En el primer ejemplo D denota el conjunto de libros de una biblioteca y E es el conjunto de enteros positivos. A cada libro x en D le corresponde un entero positivo y en E, el número de páginas del libro.

A veces se ilustran las correspondencias con diagramas como el de la Figura 1.35, en los que los conjuntos D y E quedan representados por puntos dentro de ciertas regiones (sombreadas) en el plano. La flecha curva indica que y es el elemento de E que corresponde al elemento x de D. Los conjuntos pueden tener elementos en común. De hecho, muchas veces $D = E$.

FIGURA 1.35



Los ejemplos indican que *a cada x en D le corresponde uno y sólo un y en E*; es decir, dado x, se tiene que *y es único*. Sin embargo, a varios elementos de D les puede corresponder un mismo elemento de E. Por ejemplo, dos libros pueden tener el mismo número de páginas, dos personas pueden tener la misma fecha de nacimiento, etcétera.

En general, en todo este libro, D y E serán conjuntos de números. Por ejemplo, si D y E son ambos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, a cada número real x se le puede asignar su cuadrado x^2. Así, a 3 se le asigna 9, a -5 se le asigna 25, y a $\sqrt{2}$, el número 2. Esto da una correspondencia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Cada uno de los ejemplos anteriores de una correspondencia es una *función*, que se define como sigue.

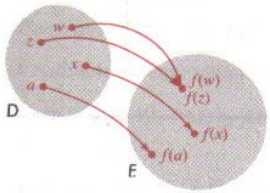
DEFINICIÓN (1.20)

Una **función** f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D un elemento único y de E.

El elemento y de E es el **valor** (*funcional*) de f en x y se denota por $f(x)$ (notación que se lee "f de x"). El conjunto D se llama **dominio** de la función. El **contradominio** de f es el subconjunto de E que consta de todos los valores posibles $f(x)$ para x en D. (Se llama también *ámbito* de la función.)

Consideremos ahora el diagrama de la Figura 1.36. Las flechas curvas indican que los elementos $f(x), f(w), f(z)$ y $f(a)$ de E corresponden a los elementos x, w, z y a de D. Es importante recordar que *a cada x en D se le asigna un valor $f(x)$ en E*. Sin embargo, a elementos diferentes de D, como w y z en la Figura 1.36, les puede corresponder un mismo elemento de E.

FIGURA 1.36



Los símbolos

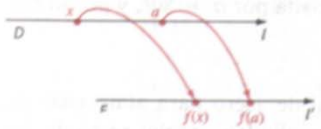
$$D \xrightarrow{f} E, \qquad f: D \to E, \quad \text{o bien}$$



significan que f es una función de D a E. A veces, a los estudiantes les confunden las notaciones f y $f(x)$. Hay que recordar que f es el símbolo que se usa para representar a la función y no está en D ni en E. Sin embargo, $f(x)$ es un elemento de E, el que f asigna a x.

Si los conjuntos D y E de la Definición (1.20) son intervalos o algunos otros conjuntos de números reales, entonces en vez de usar puntos dentro de regiones del plano para representar a los elementos, se pueden usar dos rectas coordenadas l y l' como se ilustra en la Figura 1.37.

FIGURA 1.37



Se dice que dos funciones f y g de D a E son **iguales**, y se escribe

$$f = g \quad \text{siempre que} \quad f(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } D.$$

Por ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3$ y $f(x) = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$, entonces $g = f$.

EJEMPLO 1 Sea f una función con dominio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$.

(a) Calcular $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$ y $f(a + b)$, donde a y b son números reales arbitrarios.

(b) ¿Cuál es el contradominio de f?

Solución

(a) Podemos calcular los valores de f sustituyendo x por los valores dados en la ecuación $f(x) = x^2$. Así,

$$f(-6) = (-6)^2 = 36, \qquad f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3,$$

y

$$f(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

(b) Por definición, el contradominio de f consta de todos los números de la forma $f(x) = x^2$, para x en $\mathbb{R}$. Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, el contradominio está contenido en el conjunto de todos los números reales no negativos. Más aún, todo número real no negativo c es un valor de f, ya que $f(\sqrt{c}) = (\sqrt{c})^2 = c$. Por lo tanto, el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales no negativos. •

Si una función se define como en el Ejemplo 1, los símbolos que se usan para la función y para la variable son irrelevantes, es decir, todas las expresiones $f(x) = x^2$, $f(s) = s^2$, $g(t) = t^2$ y $k(r) = r^2$ definen la misma función. Esto es porque si a es cualquier número en el dominio, entonces se obtiene el mismo valor a^2 independientemente de la expresión que se utilice.

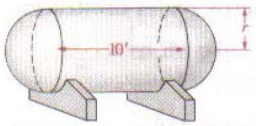
A lo largo de este libro, la frase *f es una función* significará que tanto el dominio como el contradominio son conjuntos de números reales. Si una función se define por medio de una expresión, como en el Ejemplo 1, y no se especifica explícitamente el dominio D, entonces se considera que D consta de todos los números reales x para los que $f(x)$ es un número real. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x - 2}$, entonces se supone que el dominio es el conjunto de todos los números reales x tales que $\sqrt{x - 2}$ es real; es decir, $x - 2 \geq 0$, o $x \geq 2$. Por lo tanto, el dominio es el intervalo infinito $[2, \infty)$. Si x está en el dominio, se dice que f **está definida en** x, o que $f(x)$ **existe**. Si un conjunto S está contenido en el dominio, se dice que f **está definida en** S. La frase f **no está definida en** x significa que x no está en el dominio de f.

Muchas de las fórmulas que aparecen en las matemáticas y en las ciencias determinan funciones. Por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ para el área A de un círculo de radio r, asigna a cada número real positivo r, un valor único de A. Esto determina una

función f tal que $f(r) = \pi r^2$, y se puede escribir $A = f(r)$. La letra r representa un número arbitrario en el dominio de f y se llama **variable independiente**. La letra A que representa a un número en el contradominio de f se la llama **variable dependiente**, pues su valor depende del de r. Si dos variables r y A están relacionadas de esta manera se dice que "A es una función de r". Veamos otro ejemplo. Si un automóvil viaja con velocidad constante de 80 kilómetros por hora (km/h), entonces la distancia d (en kilómetros, km) que recorre en un tiempo t (en horas) está dada por $d = 80t$, y por lo tanto, la distancia d es una función del tiempo t.

EJEMPLO 2 Se desea construir un tanque horizontal de acero para almacenar gas propano, que tenga forma de cilindro circular recto de 3 m de largo con una semiesfera en cada extremo. El radio r no está aún determinado. Expresar el volumen V del tanque como una función de r.

FIGURA 1.38



Solución En la Figura 1.38 se tiene un croquis del tanque. El volumen de la parte cilíndrica del tanque puede calcularse multiplicando la altura 3 por el área πr^2 de la base del cilindro. Esto da

$$\text{Volumen del cilindro} = 3(\pi r^2) = 3\pi r^2.$$

Los dos extremos semiesféricos forman juntos una esfera de radio r. Usando la fórmula para el volumen de una esfera, obtenemos

$$\text{Volumen de los dos extremos} = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

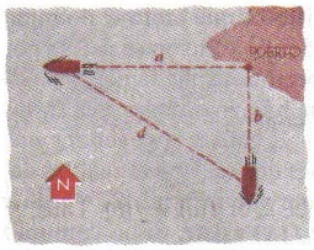
Por lo tanto, el volumen V del tanque es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 + 3\pi r^2.$$

Esta fórmula expresa V como una función de r. Se puede factorizar y escribir:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2(4r + 9). \quad \bullet$$

FIGURA 1.39



EJEMPLO 3 Dos barcos zarpan al mismo tiempo del puerto. Uno viaja al oeste a 17 mi/h y el otro hacia el sur a 12 mi/h. Sea t el tiempo (en horas) después de la salida. Expresar la distancia d entre las embarcaciones como una función de t.

Solución Para visualizar el problema, se traza un diagrama como el de la Figura 1.39 y se asignan literales a las distancias. Por el Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad \text{o bien} \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Como distancia = (velocidad)(tiempo) y las velocidades son 17 y 12, respectivamente,

$$a = 17t \quad \text{y} \quad b = 12t.$$

Sustituyendo en $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ obtenemos

$$d = \sqrt{(17t)^2 + (12t)^2} = \sqrt{289t^2 + 144t^2} = \sqrt{433t^2} \quad \text{o bien} \quad d = \sqrt{433}t.$$

La fórmula $d \approx (20.8)t$ expresa *aproximadamente* d como función de t. •

Si $f(x) = x$ para todo x en el dominio de f, entonces f se llama **función identidad** en D. Una función f es una **función constante** si existe un elemento (fijo) c en el contradominio tal que $f(x) = c$ para todo x en el dominio. Si una función constante se representa con un diagrama como el de la Figura 1.35, *todas* las flechas que salen de D terminan en el mismo punto de E.

Las funciones del tipo descrito en la siguiente definición aparecen frecuentemente en la práctica.

DEFINICIÓN (1.21)

Sea f una función tal que siempre que x esté en el dominio D, $-x$ también está en D.

(i) f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo x en D.

(ii) f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en D.

EJEMPLO 4

(a) Sea $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$. Demostrar que f es una función par.

(b) Sea $g(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$. Demostrar que g es una función impar.

Solución Si x es un número real, entonces

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 5 = f(x) \end{aligned}$$

y por lo tanto, f es par.

(b)
$$\begin{aligned} g(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) \\ &= -2x^5 + 7x^3 - 4x \\ &= -(2x^5 - 7x^3 + 4x) = -g(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, g es impar. •

Una función f puede tomar el mismo valor para distintos números de su dominio. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$. Si los valores de una función son siempre diferentes, entonces la función es *biunívoca* o (*uno a uno*).

DEFINICIÓN (1.22)

Una función f con dominio D y contradominio E, es una **función biunívoca**, si siempre que $a \neq b$ en D entonces $f(a) \neq f(b)$ en E.

EJEMPLO 5

(a) Sea $f(x) = 3x + 2$. Demostrar que f es biunívoca.

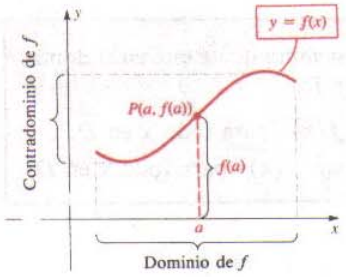
(b) Sea $g(x) = x^4 + 2x^2$. Demostrar que g no es biunívoca.

Solución

(a) Si $a \neq b$, entonces $3a \neq 3b$ y por lo tanto $3a + 2 \neq 3b + 2$ o bien $f(a) \neq f(b)$. De donde f es biunívoca.

(b) La función g no es biunívoca pues puede haber el mismo valor en números distintos de su dominio. Por ejemplo, aunque $-1 \neq 1$, $g(-1)$ y $g(1)$ son ambos iguales a 3. •

FIGURA 1.40



Se puede usar una gráfica para mostrar los cambios de los valores $f(x)$ de una función f cuando x varía dentro del dominio de f. Por definición, la **gráfica de una función** f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f. A veces se pone la indicación $y = f(x)$ en el croquis de la gráfica, como se muestra en la Figura 1.40. Nótese que si $P(a, b)$ es un punto de la gráfica, entonces la ordenada b es el valor $f(a)$ de la función. La figura muestra el dominio de f (el conjunto de los valores posibles de x) y el contradominio de f (los correspondientes valores de y). Aunque en la figura el dominio y el contradominio son intervalos cerrados, podrían ser intervalos infinitos u otros tipos de conjuntos de números reales.

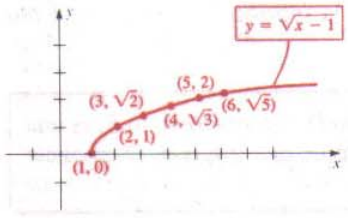
Es importante notar que como hay un valor único $f(a)$ para cada a en el dominio, sólo hay *un* punto de la gráfica que tiene abscisa a. Por lo tanto, *toda recta vertical corta a la gráfica de una función a lo más en un punto*. Entonces, una gráfica a la que alguna recta vertical corte en más de un punto, como en el caso de una circunferencia, no puede ser la gráfica de una función.

Las intercepciones x (o abscisas en el origen) de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estos números se llaman **ceros** de la función. La intercepción y (ordenada en el origen) de la gráfica, si existe, es $f(0)$.

EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de la función f dada por $f(x) = \sqrt{x - 1}$. ¿Cuáles son el dominio y el contradominio de f?

Solución Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x - 1}$. La siguiente tabla presenta las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

FIGURA 1.41



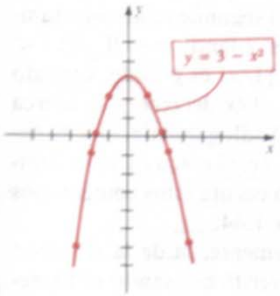
x	1	2	3	4	5	6
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$

Situando puntos se obtiene el croquis que se muestra en la Figura 1.41. Nótese que la abscisa en el origen es 1 y que no hay ordenada en el origen.

El dominio de f consta de todos los números reales x tales que $x \geq 1$, es decir, el intervalo $[1, \infty)$. El contradominio de f es el conjunto de todos los números reales y tales que $y \geq 0$, es decir, $[0, \infty)$. •

EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de la función f dada por $f(x) = 3 - x^2$. ¿Cuáles son el dominio y el contradominio de f?

FIGURA 1.42



Solución La siguiente tabla presenta algunos de los puntos (x, y) de la gráfica.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-1	2	3	2	-1	-6

Las intercepciones x son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, de $3 - x^2 = 0$. Sus valores son $\pm\sqrt{3}$. La intercepción y es $f(0) = 3$. Por localización de puntos se obtiene la parábola de la Figura 1.42.

Como x puede tomar cualquier valor, el dominio de f es $\mathbb{R}$. De la gráfica, vemos que el contradominio de f es $(-\infty, 3]$. •

Se puede simplificar la solución del Ejemplo 7 observando que como $3 - (-x)^2 = 3 - x^2$, la gráfica de $y = 3 - x^2$ es simétrica con respecto al eje y. Este hecho es también consecuencia de (i) del siguiente teorema.

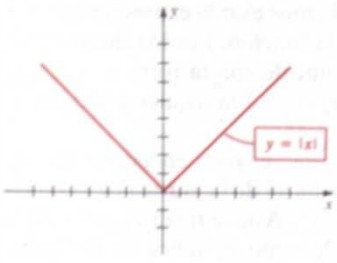
TEOREMA (1.23)

(i) La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.

(ii) La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Demostración Si f es par, entonces $f(-x) = f(x)$ y, por lo tanto, la ecuación $y = f(x)$ no cambia al sustituir x por $-x$. El enunciado (i) se puede deducir del Criterio de Simetría (1.11) (i). La demostración de (ii) se deja al lector. • •

FIGURA 1.43



EJEMPLO 8 Trazar la gráfica de la función f dada por $f(x) = |x|$ y encontrar el dominio y el contradominio de f.

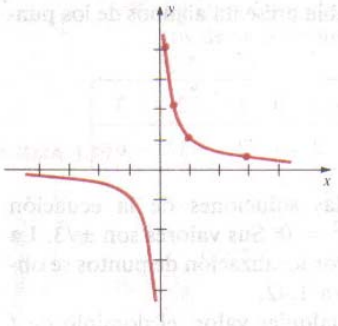
Solución Si $x \geq 0$, entonces $f(x) = x$ y por lo tanto, la parte de la gráfica que se encuentra a la derecha del eje x es idéntica a la gráfica de $y = x$, que es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente 1. Si $x < 0$, entonces, por la Definición (1.2), $f(x) = |x| = -x$, y por lo tanto, la parte de la gráfica que se encuentra a la izquierda del eje y es igual a la gráfica de $y = -x$. En la Figura 1.43 se indica la gráfica de f.

Nótese que f es una función par y, por el Teorema (1.23) (i), la gráfica es simétrica con respecto al eje y, como también se ve en la figura.

De la gráfica vemos que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el contradominio es $[0, \infty)$. •

EJEMPLO 9 Trazar la gráfica de la función f dada por $f(x) = \frac{1}{x}$.

FIGURA 1.44



Solución El dominio de f es el conjunto de todos los números reales diferentes de cero. Cuando x es positivo, $f(x)$ también lo es y por lo tanto, ningún punto de la gráfica se encuentra en el cuarto cuadrante. El segundo cuadrante tampoco tiene puntos de la gráfica pues, cuando $x < 0$, $f(x) < 0$. Si x está cerca de cero, entonces $|1/x|$ es grande. Cuando x crece tomando valores positivos, $1/x$ decrece y se acerca a cero para valores grandes de x. Análogamente, si x es negativo y $|x|$ es grande, entonces $1/x$ está cerca de cero. Ubicando algunos puntos y tomando en cuenta estos comentarios obtenemos el croquis de la Figura 1.44.

La gráfica de f o, equivalentemente, la de la ecuación $y = 1/x$, es simétrica con respecto al origen. Esto se puede verificar usando el Teorema (1.23) (ii) o bien el Criterio de Simetría (1.11) (iii). •

EJEMPLO 10 Describir la gráfica de una función constante.

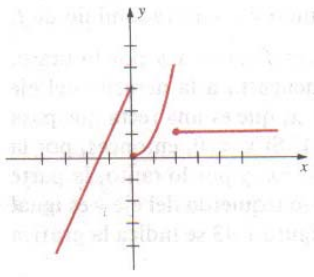
Solución Si para algún número real c, $f(x) = c$ para todo x, entonces la gráfica de f es la misma que la de la ecuación $y = c$, y por lo tanto, es una recta horizontal con intercepción y igual a c. •

A veces las funciones se describen con varias expresiones, como en los siguientes ejemplos. Se dice que tales funciones tienen **definición parte por parte**.

EJEMPLO 11 Trazar la gráfica de la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

FIGURA 1.45



Solución Si $x < 0$, entonces $f(x) = 2x + 3$. Esto significa que para x negativo, debemos usar la expresión $2x + 3$ para encontrar los valores de la función. Por lo tanto, si $x < 0$, entonces la gráfica de f coincide con la recta $y = 2x + 3$ y se traza esta parte de la gráfica a la izquierda del eje y, como se indica en la Figura 1.45.

Si $0 \le x < 2$, debemos usar x^2 para encontrar los valores de f y, por lo tanto, esta parte de la gráfica de f coincide con la de la parábola $y = x^2$. Así, se traza la parte de la gráfica entre $x = 0$ y $x = 2$, como se indica en la figura.

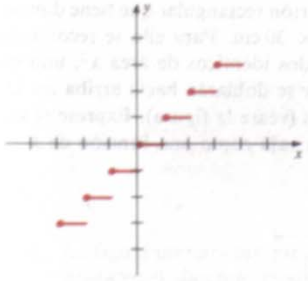
Finalmente, si $x \geq 2$, f toma siempre el valor 1. Para $x \geq 2$, la gráfica de f es la recta horizontal que se muestra en la Figura 1.45.

EJEMPLO 12 Para cualquier número real x, existen enteros consecutivos n y $n + 1$ tales que $n \leq x \leq n + 1$. Sea f la función definida como sigue: Si $n \leq x < n + 1$, entonces $f(x) = n$. Trazar la gráfica de f.

Solución La tabla siguiente indica la relación entre las abscisas y las ordenadas de los puntos de la gráfica:

Valores de x	$f(x)$
...	...
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
...	...

FIGURA 1.46



Como f es una función constante mientras x se encuentra entre dos enteros consecutivos, la parte correspondiente de la gráfica es un segmento de una recta horizontal. En la Figura 1.46 aparece una parte de la gráfica. La representación continúa indefinidamente a la derecha y a la izquierda.

Para denotar el mayor entero n tal que $n \leq x$, se utiliza el símbolo $[x]$. Por ejemplo, $[1.6] = 1$, $[\sqrt{5}] = 2$, $[\pi] = 3$ y $[-3.5] = -4$. Usando esta notación, la función del Ejemplo 12 se puede definir por $f(x) = [x]$. La función f se llama **función mayor entero**.

EJERCICIOS 1.4

1. Sea $f(x) = x^3 + 4x - 3$. Calcule $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(\sqrt{2})$.

2. Sea $f(x) = \sqrt{x - 1} + 2x$. Calcule $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(10)$.

Ejercicios 3-4: Sea f la función dada, y sean a y h dos números reales. Encuentre lo siguiente:

(a) $f(a)$ (b) $f(-a)$

(c) $-f(a)$ (d) $f(a + h)$

(e) $f(a) + f(h)$ (f) $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ para $h \neq 0$.

3. $f(x) = 3x^2 - x + 2$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Ejercicios 5-6: Sea g la función dada. Determine lo siguiente:

(a) $g(1/a)$ (b) $\dfrac{1}{g(a)}$ (c) $g(a^2)$

(d) $[g(a)]^2$ (e) $g(\sqrt{a})$ (f) $\sqrt{g(a)}$

5. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

6. $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Ejercicios 7-12: Encuentre el dominio de la función f.

7. $f(x) = \sqrt{3x - 5}$

8. $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$

9. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

10. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

11. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^3 - 9x}$

12. $f(x) = \dfrac{4x + 7}{6x^2 + 13x - 5}$

Ejercicios 13-20: Determine si la función f es biunívoca.

13. $f(x) = 2x + 9$
14. $f(x) = \dfrac{1}{7x + 9}$
15. $f(x) = 5 - 3x^2$
16. $f(x) = 2x^2 - x - 3$
17. $f(x) = \sqrt{x}$
18. $f(x) = x^3$
19. $f(x) = |x|$
20. $f(x) = 4$

Ejercicios 21-30: Determine si f es par o impar, o si no es par ni impar.

21. $f(x) = 3x^3 - 4x$
22. $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$
23. $f(x) = 9 - 5x^2$
24. $f(x) = 2x^5 - 4x^3$
25. $f(x) = 2$
26. $f(x) = 2x^3 + x^2$
27. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$
28. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
29. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$
30. $f(x) = |x| + 5$

Ejercicios 31-44: Trace la gráfica y determine el dominio y el contradominio de f.

31. $f(x) = -4x + 3$
32. $f(x) = 4x - 3$
33. $f(x) = -3$
34. $f(x) = 3$
35. $f(x) = 4 - x^2$
36. $f(x) = -(4 + x^2)$
37. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
38. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
39. $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}$
40. $f(x) = -\dfrac{1}{(x - 4)^2}$
41. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$
42. $f(x) = x + |x|$
43. $f(x) = \sqrt{4 - x}$
44. $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

Ejercicios 45-50: Trace la gráfica de la función f definida parte por parte.

45. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -3 \\ -x & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

47. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

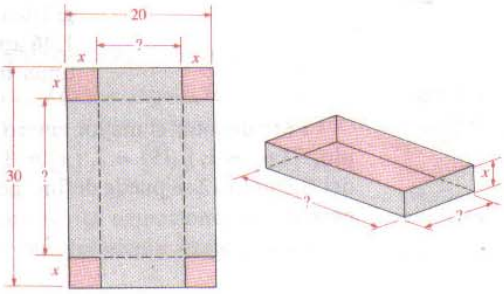
50. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

51. Explique por qué la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ no es la gráfica de una función.

52. Demuestre que una función f es biunívoca si y sólo si toda recta horizontal corta a la gráfica de f a lo más en un punto.

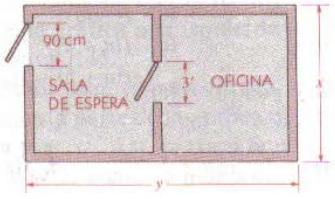
53. Se desea construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón rectangular que tiene dimensiones 20 cm × 30 cm. Para ello se recortarán cuatro cuadrados idénticos de área x^2, uno en cada esquina y se doblarán hacia arriba los lados resultantes (véase la figura). Exprese el volumen V de la caja como una función de x.

EJERCICIO 53



54. Un pequeño edificio de oficinas está construido sobre un área de 46 m². El plano del piso se muestra en la figura.
 (a) Exprese la longitud y del área del edificio como una función del ancho x.
 (b) Suponiendo que el costo de las paredes es de $100 (dólares) el metro lineal, exprese el

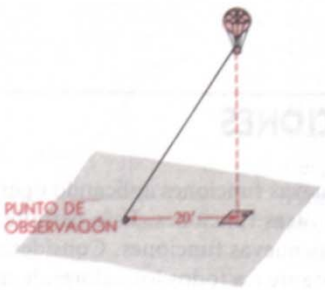
EJERCICIO 54



costo C de las paredes como una función del ancho x. (Desprecie la porción de pared sobre las puertas.)

55. Un globo de aire caliente se suelta a la 1 P.M. y se eleva verticalmente a razón de 2 m/s. Un punto de observación está situado a 100 m del punto en el suelo que se encuentra ubicado directamente abajo del globo (véase la figura). Sea t el tiempo (en segundos) transcurrido a partir de la 1 P.M. Exprese la distancia d del globo al punto de observación como una función de t.

EJERCICIO 55

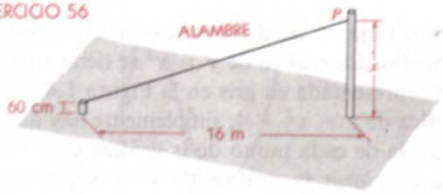


56. La figura muestra las instalaciones de un equilibrista en el alambre. La distancia entre los postes es de 16 m, pero aún no se ha determinado la altura del punto de amarre P.

(a) Exprese la longitud L como una función de la altura x del punto P.

(b) Determine la altura del punto de amarre P suponiendo que el alambre o cuerda tiene una longitud de 24 m.

EJERCICIO 56

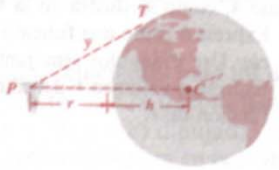


57. Desde un punto exterior P que se encuentra a h unidades de una circunferencia de radio r, se traza una tangente a la circunferencia (véase la figura). Sea y la distancia del punto P al punto de tangencia T.

(a) Exprese y como función de h. (*Sugerencia:* Si C es el centro de la circunferencia, entonces PT es perpendicular a CT.)

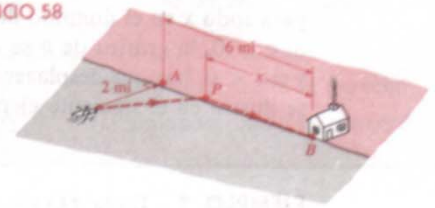
(b) Sea r el radio de la Tierra y h la altitud de un transbordador espacial. Se puede deducir una fórmula para la distancia máxima y (desde la Tierra) a la que un astronauta puede ver desde el transbordador. Calcule y aproximadamente suponiendo que $h = 200$ millas y $r \approx 4000$ millas.

EJERCICIO 57



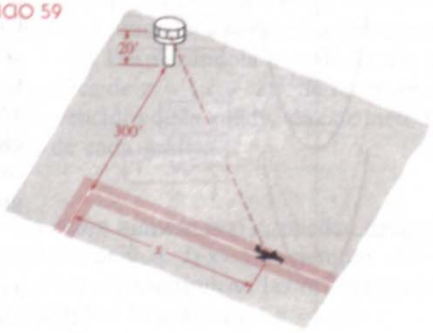
58. Un hombre se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano A de la costa, que es recta, y desea llegar a una casa que se encuentra en un punto B de la citada costa, a 6 millas (mi) de A (véase la figura). El hombre piensa remar hasta un punto P entre A y B que se encuentra a x millas de la casa y luego caminar el resto. Suponiendo que puede remar a una velocidad de 3 mi/h y caminar a 5 mi/h, exprese el tiempo total T que la tomará llegar a la casa, como una función de x.

EJERCICIO 58



59. En la figura se muestran las posiciones relativas de un avión y una torre de control de 20 pie de alto. El principio de la pista se encuentra a una distancia de 300 pie de la base de la torre, sobre

EJERCICIO 59



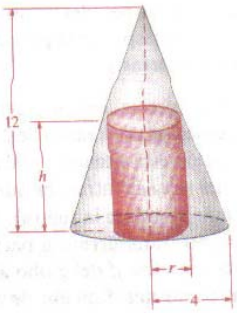
la perpendicular. Exprese la distancia d de la aeronave a la torre de control como una función de la distancia x que el avión ha recorrido sobre la pista.

60. Un cilindro circular recto de radio r y altura h está inscrito en un cono de altura 12 y radio de la base 4, como se ilustra en la figura.

(a) Exprese h como una función de r (*Sugerencia:* Use triángulos semejantes.)

(b) Exprese el volumen V del cilindro como una función de r.

EJERCICIO 60



1.5 OPERACIONES CON LAS FUNCIONES

En esta sección se estudia la obtención de nuevas funciones aplicando operaciones algebraicas como la suma y la multiplicación a otras funciones. Esto permite con frecuencia obtener fácilmente las propiedades de las nuevas funciones. Consideramos primero la función que se obtiene al sumar una constante c a todos los valores de una función f.

Sea f una función, c una constante y sea g la función definida por

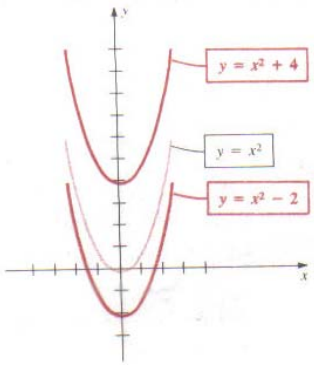
$$g(x) = f(x) + c$$

para todo x en el dominio de f. A veces se dice que g y f *difieren por una constante*. Si $c > 0$, la gráfica de g se obtiene desplazando la de f una distancia c hacia arriba y si $c < 0$, hay que desplazar la gráfica de f una distancia $|c|$ hacia abajo. Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Dada $f(x) = x^2 + c$, trazar la gráfica de f para $c = 4$ y para $c = -2$.

Solución Se dibujarán las dos gráficas en el mismo sistema de coordenadas. La gráfica de $y = x^2$ se tiene en la Figura 1.20 y está representada en gris en la Figura 1.47. Para encontrar la gráfica de $y = x^2 + 4$, simplemente hay que sumar 4 a la ordenada de cada punto de la gráfica de $y = x^2$. Esto equivale a *desplazar* la gráfica de $y = x^2$, 4 unidades *hacia arriba*, como se muestra en la figura. Para $c = -2$, restamos 2 a las ordenadas, por lo que la gráfica de $y = x^2 - 2$ se obtiene desplazando la de $y = x^2$, 2 unidades *hacia abajo*. Cada una de las gráficas es una parábola simétrica con respecto al eje y. Para verificar que la posición de cada gráfica es correcta se suelen trazar algunos puntos. •

FIGURA 1.47

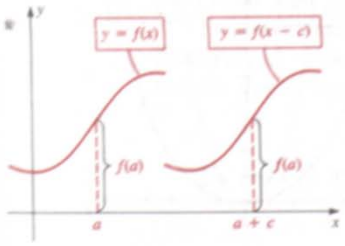


Las gráficas del ejemplo anterior son **desplazamientos verticales** de la gráfica de $y = x^2$, y resultan ser casos especiales de las siguientes reglas generales.

DESPLAZAMIENTOS VERTICALES DE LAS GRÁFICAS ($c > 0$)

Para obtener la gráfica de:	se desplaza la gráfica de $y = f(x)$:
$y = f(x) - c$	c unidades hacia abajo
$y = f(x) + c$	c unidades hacia arriba

FIGURA 1.48

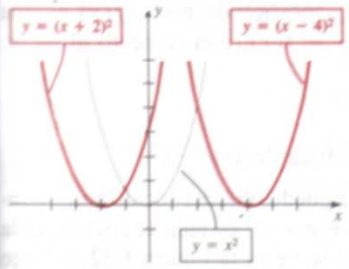


Es posible enunciar reglas semejantes para los **desplazamientos horizontales**. En efecto, si $c > 0$, consideremos las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(x - c)$ dibujadas según los mismos ejes coordenados, como se ilustra en la Figura 1.48. Como $f(a) = f(a + c - c)$, se ve que el punto de la gráfica de $y = f(x)$ con abscisa a tiene la misma ordenada que el punto de la gráfica de $y = f(x - c)$ con abscisa $a + c$. Esto implica que la gráfica de $y = f(x - c)$ se obtiene desplazando la de $y = f(x)$, c unidades hacia la derecha. Análogamente, la gráfica de $y = f(x + c)$ se obtiene desplazando la de f un valor de c unidades hacia la izquierda. Estas reglas se resumen en el siguiente cuadro.

DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE LAS GRÁFICAS ($c > 0$)

Para obtener la gráfica de	se desplaza la gráfica de $y = f(x)$:
$y = f(x - c)$	c unidades hacia la derecha
$y = f(x + c)$	c unidades hacia la izquierda

FIGURA 1.49



EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de f para $f(x) = (x - 4)^2$ y para $f(x) = (x + 2)^2$.

Solución La gráfica de $y = x^2$ aparece en gris en la Figura 1.49. Según las reglas para desplazamientos horizontales, al trasladar la gráfica 4 unidades a la derecha obtenemos la gráfica de $y = (x - 4)^2$. Desplazándola 2 unidades a la izquierda, se tiene la gráfica de $y = (x + 2)^2$. Se recomienda a quienes no estén convencidos de la validez de este método, ubicar varios puntos de cada gráfica. •

Para obtener la gráfica de $y = cf(x)$ para algún número real c, pueden *multiplicarse* por c las ordenadas de los puntos de la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, si $y = 2f(x)$, se duplican las ordenadas y si $y = \frac{1}{2} f(x)$, se multiplican las ordenadas por $\frac{1}{2}$. Si $c > 0$ ($y\ c \neq 1$), este proceso se llama **ampliar** la gráfica de $y = f(x)$.

EJEMPLO 3 Trazar las gráficas de **(a)** $y = 4x^2$ y **(b)** $y = \frac{1}{4}x^2$.

Solución

(a) Para trazar la gráfica de $y = 4x^2$ comenzamos con la gráfica de $y = x^2$ (que aparece en gris en la Figura 1.50) y se multiplica por 4 las ordenadas de todos los puntos. Esto da una parábola más angosta, más aguda en su vértice, como se ilustra en la figura. Para llegar a la forma correcta, deben localizarse varios puntos como (0, 0), $(\frac{1}{2}, 1)$ y (1, 4).

FIGURA 1.50

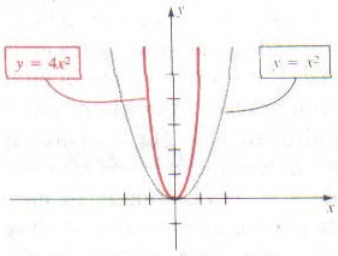
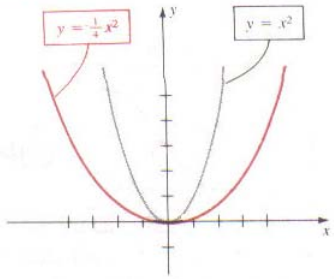


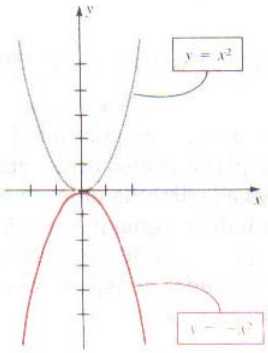
FIGURA 1.51



(b) La gráfica de $y = \frac{1}{4}x^2$ se puede trazar multiplicando por $\frac{1}{4}$ las ordenadas de los puntos de la gráfica de $y = x^2$. Esta gráfica es una parábola más abierta que es más aplanada en su vértice, como se muestra en la Figura 1.51. •

La gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene multiplicando por -1 la ordenada de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$. Así, cada punto (a, b) de la gráfica de $y = f(x)$ que se encuentra arriba del eje x, determina un punto $(a, -b)$ en la gráfica de $y = -f(x)$ que se encuentra abajo del eje x. Análogamente, si (c, d) está debajo del eje x (es decir, $d < 0$), entonces $(c, -d)$ se encuentra arriba del eje x. La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$, con respecto al eje x.

FIGURA 1.52



EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de $y = -x^2$.

Solución La gráfica se puede obtener localizando puntos, pero como la gráfica de $y = x^2$ es bien conocida, se la presenta en tono gris, como se ve en la Figura 1.52, y luego multiplicamos por -1 las ordenadas de todos sus puntos. Esto da la reflexión con respecto al eje x que se indica en la figura. •

Las funciones suelen definirse en términos de sumas, restas, productos y cocientes de varias expresiones. Por ejemplo, si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1},$$

puede considerarse a $h(x)$ como la suma de los valores de dos funciones más simples f y g definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{5x + 1}.$$

La función h se denomina *suma* de f y g.

En general, supongamos que f y g son dos funciones *cualesquiera*. Sea I *la intersección de sus dominios*, es decir, los números que ambos dominios tienen *en común*. La **suma** de f y g es la función h definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

para todo x en I.

Es conveniente denotar a h por el símbolo $f + g$. Como f y g son funciones y no números, el $+$ entre f y g no significa suma de números reales, sino que sirve para indicar que el valor de $f + g$ en x es $f(x) + g(x)$, es decir,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

La **resta** (o **diferencia**) $f - g$ y el **producto** fg de f y g se definen por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{y} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

para todo x en I. El **cociente** f/g de f entre g está dado por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

para todo x en I y $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 5 Sean $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$. Encontrar la suma, la resta y el producto de f y g y también el cociente de f y g.

Solución El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ y el dominio de g es $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la intersección de sus dominios es $[-2, 2]$ y las funciones que se requieren están dadas por

$$\begin{aligned}
(f + g)(x) &= \sqrt{4 - x^2} + (3x + 1), && -2 \leq x \leq 2 \\
(f - g)(x) &= \sqrt{4 - x^2} - (3x + 1), && -2 \leq x \leq 2 \\
(fg)(x) &= \sqrt{4 - x^2}(3x + 1), && -2 \leq x \leq 2 \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}, && -2 \leq x \leq 2, \quad x \neq -\tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

•

Si g es una función constante tal que $g(x) = c$ para todo x y si f es cualquier función, entonces cf denota el producto de g y f, es decir, $(cf)(x) = cf(x)$ para todo x en el dominio de f. Por ejemplo, si f es la función del Ejemplo 5, entonces $(cf)(x) = c\sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$. Geométricamente, la función cf es una ampliación y una reflexión, o sólo una reflexión, de la gráfica de f (véanse las Figuras 1.50-1.52).

Las funciones que se presentan en el resto de esta sección: polinomiales (polinomios), racionales, algebraicas, trascendentales y compuestas, son algunas de las funciones más importantes de las matemáticas.

DEFINICIÓN (1.24)

Una función f es un **polinomio** si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos.

Se puede pensar en una función polinomial como una suma de funciones cuyos valores están dados por $a_k x^k$ para algún número real a_k y un entero no negativo k.

La expresión en el lado derecho de la igualdad en la Definición (1.24) es un **polinomio en x** (con coeficientes reales) y cada $a_k x^k$ es un **término** del polinomio. El número a_0 es el **término constante**. Se llama *polinomio* tanto la expresión del lado derecho de la igualdad como la función que dicha expresión define. Si $a_n \neq 0$, entonces a_n es el **coeficiente principal** de $f(x)$ y se dice que f (o que $f(x)$) es de **grado n**.

Si un polinomio f es de grado 0, entonces $f(x) = c$ para $c \neq 0$ y por lo tanto, f es una función constante. Si un coeficiente a_k es cero, se abrevia la escritura de (1.24) omitiendo el término $a_k x^k$. Si *todos* los coeficientes de un polinomio son nulos, el polinomio se llama **polinomio cero** y se denota por 0. A este polinomio cero no se le asigna ningún grado.

Si algunos de los coeficientes son negativos, conviene usar signos menos entre los términos correspondientes. Por ejemplo, en vez de escribir $3x^2 + (-5)x + (-7)$, se escribe $3x^2 - 5x - 7$ para este polinomio de grado 2. También se pueden considerar polinomios en otras variables. Por ejemplo, $\frac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}z^4$ es un polinomio en z de grado 7. Se acostumbra disponer los términos de un polinomio en orden decreciente de potencias: $-3z^7 - \sqrt{5}z^4 + \frac{2}{5}z^2 + 8$.

De acuerdo con la definición de grado, si c es un número real diferente de cero, entonces c es un polinomio de grado 0. Estos polinomios (junto con el polinomio cero) se denominan **polinomios constantes**.

Si $f(x)$ es un polinomio de grado 1, entonces $f(x) = ax + b$ para $a \neq 0$. Sabemos por la Sección 1.3 que la gráfica de f es una recta y, de acuerdo con ello, se dice que f es una **función lineal**.

Todo polinomio $f(x)$ de grado 2 puede escribirse

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde $a \neq 0$. En este caso, se dice que f es una **función cuadrática**. La gráfica de f, o equivalentemente la de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, es una parábola.

En el Capítulo 4 se presentan métodos de cálculo para estudiar las gráficas de los polinomios de grado mayor que 2.

Una **función racional** es el cociente de dos polinomios. Entonces q es racional si, para todo x en su dominio,

$$q(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$$

en donde $f(x)$ y $h(x)$ son polinomios. El dominio de un polinomio es $\mathbb{R}$, pero el dominio de una función racional consta de todos los números reales excepto los ceros del polinomio que está en el denominador.

Una **función algebraica** es una función que puede expresarse en términos de sumas, restas, productos, cocientes y raíces de polinomios. Por ejemplo, si

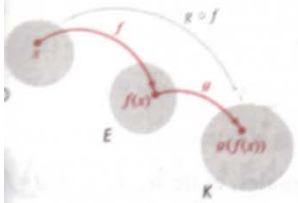
$$f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{x(x^2+5)}{\sqrt{x^3+\sqrt{x}}},$$

entonces f es una función algebraica. Las funciones que no son algebraicas se llaman **trascendentales** (o **trascendentes**). Las funciones trigonométricas, la exponencial y la logarítmica que se estudian más adelante, son ejemplos de funciones trascendentales.

Concluimos esta sección con la descripción de un método importante para definir una función usando otras dos funciones f y g. Sean D, E y K tres conjuntos de números reales. Sea f una función de D a E y sea g una función de E a K. Esto se puede expresar como

$$D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} K.$$

FIGURA 1.53



Es posible usar f y g para definir una función de D a K.

Para todo x en D, el número $f(x)$ está en E. Como el dominio de g es E, entonces puede determinarse el número $g(f(x))$ y tal número está en K. Asociando x a $g(f(x))$ se obtiene una función de D a K que se llama *composición* de g con f. Esto se ilustra en la Figura 1.53, en donde la flecha gris indica la correspondencia definida de D a K.

A veces se usa un símbolo de operador $\circ$ y se denota la composición como $g \circ f$. La siguiente definición resume lo anterior.

DEFINICIÓN (1.25)

Sea f una función de D a E y sea g una de E a K. La **función composición** $g \circ f$ es la función de D a K definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para todo x en D. A $g \circ f$ se la llama también **función compuesta de g con f**.

(A veces $g \circ f$ se lee "f seguida de g".)

Si el dominio de g es un *subconjunto* E' de E, entonces el dominio de $g \circ f$ consta de todos los x en D tales que $f(x)$ está en E'.

EJEMPLO 6 Sean f y g dadas por $f(x) = x - 2$ y $g(x) = 5x + \sqrt{x}$. Encontrar $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

Solución Sustituyendo formalmente obtenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x-2) \\ &= 5(x-2) + \sqrt{x-2} \\ &= 5x - 10 + \sqrt{x-2}\end{aligned}$$

El dominio de f es $\mathbb{R}$, pero la última igualdad implica que $(g \circ f)(x)$ es un número real sólo si $x \geq 2$. Por lo tanto, el dominio de la composición $g \circ f$ es el intervalo $[2, \infty)$. •

Dadas f y g, también puede considerarse $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, como se expone en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$. Encontrar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Solución Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(3x + 5)\\ &= (3x + 5)^2 - 1\\ &= 9x^2 + 30x + 24\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 - 1)\\ &= 3(x^2 - 1) + 5\\ &= 3x^2 + 2\end{aligned}$$

•

Nótese que en el Ejemplo 7, $f(g(x))$ y $g(f(x))$ no son iguales, es decir, $f \circ g \neq g \circ f$.

En algunas aplicaciones hay que expresar una cantidad y como función del tiempo t. A veces es más fácil introducir primero otra variable x y expresar x como función de t, es decir, $x = g(t)$; después expresar y como función de x, —es decir, $y = f(x)$—, y finalmente expresar y como la composición de las funciones f y g, o sea, $y = f(x) = f(g(t))$. Esta situación se plantea en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Un globo esférico de juguete se infla con helio. El radio del globo aumenta a razón de 1.5 cm/s, expresar el volumen V del globo como una función del tiempo t (en segundos, s).

Solución Sea x el radio del globo. Suponiendo que al comenzar el radio es 0, entonces a los t segundos

$$x = 1.5t \quad \text{(radio del globo a los } t \text{ segundos).}$$

Después de 1 s el radio es 1.5 cm, a los 2 s el radio es 3.0 cm, a los 3 s es 4.5 cm, etcétera.

Ahora escribimos

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3 \quad \text{(volumen de una esfera de radio } x\text{).}$$

Esto da una relación de composición de funciones en la que V es una función de x, y x es una función de t. Por sustitución,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3 = \tfrac{4}{3}\pi(1.5t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi(\tfrac{3}{2}t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi(\tfrac{27}{8}t^3).$$

Simplificando llegamos a la siguiente fórmula para V como función de t:

$$V = \tfrac{9}{2}\pi t^3 \quad •$$

EJERCICIOS 1.5

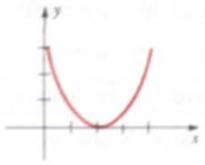
Ejercicios 1-10: Trace las gráficas de f para los tres valores de c en un mismo sistema coordenado (utilice desplazamientos verticales, desplazamientos horizontales, ampliaciones (o reducciones) y reflexiones).

1. $f(x) = 3x + c$; $c = 0, c = 2, c = -1$
2. $f(x) = -2x + c$; $c = 0, c = 1, c = -3$
3. $f(x) = x^3 + c$; $c = 0, c = 1, c = -2$
4. $f(x) = -x^3 + c$; $c = 0, c = 2, c = -1$
5. $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + c$; $c = 0, c = 4, c = -3$
6. $f(x) = c - |x|$; $c = 0, c = 5, c = -2$
7. $f(x) = 3(x - c)$; $c = 0, c = 2, c = 3$
8. $f(x) = -2(x - c)^2$; $c = 0, c = 3, c = 1$
9. $f(x) = (x + c)^3$; $c = 0, c = 2, c = -2$
10. $f(x) = c\sqrt{9 - x^2}$; $c = 0, c = 2, c = 3$

11. En la figura se muestra la gráfica de una función f con dominio $0 \le x \le 4$. Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones:

(a) $y = f(x + 2)$ (b) $y = f(x - 2)$
(c) $y = f(x) + 2$ (d) $y = f(x) - 2$
(e) $y = 2f(x)$ (f) $y = \frac{1}{2}f(x)$
(g) $y = -2f(x)$ (h) $y = f(x - 3) + 1$

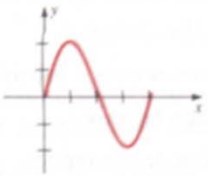
EJERCICIO 11



12. En la figura se muestra la gráfica de una función f con dominio $0 \le x \le 4$. Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones:

(a) $y = f(x - 1)$ (b) $y = f(x + 3)$
(c) $y = f(x) - 2$ (d) $y = f(x) + 1$
(e) $y = 3f(x)$ (f) $y = \frac{1}{2}f(x)$
(g) $y = f(x + 2) - 2$ (h) $y = f(2x)$

EJERCICIO 12



Ejercicios 13-18: Determine la suma, la resta, el producto y el cociente de f y g.

13. $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 1/(2x - 3)$
14. $f(x) = \sqrt{x + 3}$, $g(x) = \sqrt{x + 3}$
15. $f(x) = x + (1/x)$, $g(x) = x - (1/x)$
16. $f(x) = x^3 + 3x$, $g(x) = 3x^2 + 1$
17. $f(x) = 2x^3 - x + 5$, $g(x) = x^2 + x + 2$
18. $f(x) = 7x^4 + x^2 - 1$, $g(x) = 7x^4 - x^3 + 4x$

Ejercicios 19-32: Determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

19. $f(x) = 2x^2 + 5$, $g(x) = 4 - 7x$
20. $f(x) = 1/(3x + 1)$, $g(x) = 2/x^2$
21. $f(x) = x^3$, $g(x) = x + 1$
22. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $g(x) = 7x^2 + 1$
23. $f(x) = 3x^2 + 2$, $g(x) = 1/(3x^2 + 2)$
24. $f(x) = 7$, $g(x) = 4$
25. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, $g(x) = x^2 + 3$
26. $f(x) = 6x - 12$, $g(x) = \frac{1}{6}x + 2$
27. $f(x) = |x|$, $g(x) = -5$
28. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, $g(x) = x^3 + 1$
29. $f(x) = x^2$, $g(x) = 1/x^2$
30. $f(x) = 1/(x + 1)$, $g(x) = x + 1$
31. $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = (x + 3)/2$
32. $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

33. Demuestre que si f es una función lineal y g es una función cuadrática, entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ son funciones cuadráticas.

34. Demuestre que si f y g son polinomios de grados m y n, respectivamente, entonces $f \circ g$ es un polinomio de grado mn.

Ejercicios 35-40: Use el método del Ejemplo 8 para resolverlos.

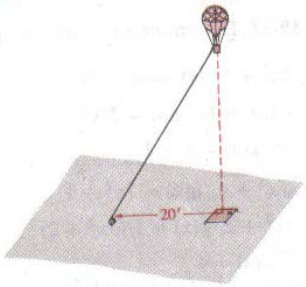
35. Un incendio comienza en un campo abierto y seco, y se extiende en forma de círculo. El radio de tal círculo aumenta a razón de 6 m/min. Exprese el área con fuego como una función del tiempo t.

36. Un cable de 30 m de largo y 10 cm de diámetro está sumergido en el mar. Debido a la corrosión,

el área de la superficie del cable disminuye a razón de 4685 cm^2 por año. Exprese el diámetro del cable como una función del tiempo. (Desprecie la corrosión en los extremos del cable.)

37. Un globo de aire caliente se eleva en forma vertical a medida que una cuerda atada a su base se va soltando a razón de 5 pie/s. La polea por la que pasa la cuerda al soltarse está a 20 pie de distancia de la plataforma donde los pasajeros abordan el globo (véase la figura). Exprese la altura del globo como una función del tiempo.

EJERCICIO 37



38. El diámetro d de un cubo es la distancia entre dos de sus vértices opuestos. Exprese d como una función del lado x del cubo. (*Sugerencia:* Primero exprese la diagonal y de una cara como una función de x.)

39. Consulte el Ejercicio 59 de la Sección 1.4. Cuando el avión ha recorrido 500 pie por la pista, ha alcanzado una velocidad de 150 pie/s (alrededor de 100 mi/h o 160 km/h), que mantendrá hasta que despegue. Exprese la distancia d del avión a la torre de control como una función del tiempo t (en segundos). (*Sugerencia:* En el Ejercicio 59 de la Sección 1.4, escriba primero x como una función de t.)

40. Consulte el Ejercicio 56 de la Sección 1.4. El equilibrista camina por el alambre hacia arriba a razón de 30 cm/s. El cable está atado al poste a 10 m del suelo. Exprese la altura h del alambrista sobre el suelo como una función del tiempo. (*Sugerencia:* Denote por d la distancia total que ha recorrido sobre el cable. Exprese primero d como una función de t y luego h como una función de d.)

1.6 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Números racionales e irracionales.

2. Recta coordenada.

3. Un número real a es mayor que un número real b.

4. Desigualdades.

5. El valor absoluto de un número real.

6. Desigualdad del Triángulo.

7. La notación de conjuntos.

8. Variable.

9. Intervalos (abierto, cerrado, semiabierto, infinito).

10. Par ordenado.

11. Sistema coordenado rectangular en un plano.

12. Abscisa y ordenada de un punto.

13. Fórmula de la Distancia.

14. Fórmula del Punto Medio.

15. Gráfica de una ecuación en x y y.

16. Criterios de simetría.

17. Ecuación de la circunferencia.

18. Pendiente de una recta.

19. Ecuación de la recta dados un punto y la pendiente.

20. Ecuación de la recta dadas la pendiente y la ordenada en el origen.

21. Función.

22. Dominio de una función.

23. Contradominio de una función.

24. Función constante.

25. Funciones pares e impares.

26. Función biunívoca.

27. Gráfica de una función.

28. Función definida parte por parte.

29. Desplazamientos verticales y horizontales de las gráficas.

30. Ampliaciones y reflexiones de las gráficas.

31. Suma, resta, producto y cociente de dos funciones.

32. Polinomios.

33. Funciones racionales.

34. Composición de dos funciones.

EJERCICIOS 1.6

Ejercicios 1-8: Resuelva la desigualdad y exprese la solución en términos de intervalos.

1. $4 - 3x > 7 + 2x$

2. $\frac{7}{2} > \frac{1 - 4x}{5} > \frac{3}{2}$

3. $|2x - 7| \le 0.01$

4. $|6x - 7| > 1$

5. $2x^2 < 5x - 3$

6. $\frac{2x^2 - 3x - 20}{x + 3} < 0$

7. $\frac{1}{3x - 1} < \frac{2}{x + 5}$

8. $x^2 + 4 \ge 4x$

9. Si se tienen los tres puntos $A(2, 1)$, $B(-1, 4)$ y $C(-2, -3)$.
 (a) demuestre que A, B y C son los vértices de un triángulo rectángulo y calcule su área.
 (b) encuentre las coordenadas del punto medio de AB.
 (c) calcule la pendiente de la recta que pasa por B y C.

Ejercicios 10-13: Trace la gráfica de la ecuación y discuta su simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen.

10. $3x - 5y = 10$

11. $x^2 + y = 4$

12. $x = y^3$

13. $|x + y| = 1$

Ejercicios 14-17: Trace la gráfica del conjunto W.

14. $W = \{(x, y): x > 0\}$

15. $W = \{(x, y): y > x\}$

16. $W = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$

17. $W = \{(x, y): |x - 4| < 1, |y + 3| < 2\}$

Ejercicios 18-20: Encuentre la ecuación de una circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

18. Centro $C(4, -7)$, pasa por el origen.

19. Centro $C(-4, -3)$, es tangente a la recta con ecuación $x = 5$.

20. Pasa por los tres puntos $A(-2, 3)$, $B(4, 3)$ y $C(-2, -1)$.

21. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia con ecuación

$$x^2 + y^2 - 10x + 14y - 7 = 0.$$

Ejercicios 22-26: Dados los puntos $A(-4, 2)$, $B(3, 6)$ y $C(2, -5)$, resuelva los problemas.

22. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la que pasa por A y C.

23. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por B y es perpendicular a la que pasa por A y C.

24. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por C y por el punto medio del segmento AB.

25. Obtenga la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al eje y.

26. Obtenga la ecuación de la recta que pasa por C y es perpendicular a la recta con ecuación $3x - 10y + 7 = 0$.

Ejercicios 27-30: Halle el dominio de f.

27. $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x}$

28. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$

29. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 5}\sqrt{7 - x}}$

30. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x - 2)}$

31. Sea $f(x) = 1/\sqrt{x + 1}$. Encuentre lo siguiente.

 (a) $f(1)$ (b) $f(3)$ (c) $f(0)$

 (d) $f(\sqrt{2} - 1)$ (e) $f(-x)$ (f) $-f(x)$

 (g) $f(x^2)$ (h) $(f(x))^2$

Ejercicios 32-36: Trace la gráfica de f.

32. $f(x) = 1 - 4x^2$

33. $f(x) = 100$

34. $f(x) = -1/(x + 1)$

35. $f(x) = |x + 5|$

36. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

37. Trace la gráfica de cada ecuación usando desplazamientos, ampliaciones (o reducciones) o reflexiones:

(a) $y = \sqrt{x}$

(b) $y = \sqrt{x + 4}$

(c) $y = \sqrt{x} + 4$

(d) $y = 4\sqrt{x}$

(e) $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$

(f) $y = -\sqrt{x}$

38. Determine si f es par, si es impar, o si no es par ni impar:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 5}$

(d) $f(x) = 0$

39. Sea $f(x) = 5 - 7x$. Demuestre que f es biunívoca.

Ejercicios 40-42: Determine $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$, $(f/g)(x)$, $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

40. $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x - 1$

41. $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = \sqrt{2x + 5}$

42. $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = 1/x^2$

CAPÍTULO **2**

LÍMITES DE FUNCIONES

*El concepto de **límite de una función** es una de las nociones fundamentales que distinguen al Cálculo de otras áreas de las matemáticas como el álgebra o la trigonometría. Se puede desarrollar fácilmente una idea intuitiva de los límites. Por este motivo, la exposición en las dos primeras secciones es informal. La definición matemáticamente rigurosa de límite se presenta en la Sección 2.3. El resto del capítulo trata algunas propiedades importantes de los límites.*

2.1 INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

En el cálculo y sus aplicaciones se analiza la forma en que varían ciertas cantidades y si éstas *tienden* a valores específicos bajo ciertas condiciones. Estas cantidades a menudo involucran los valores de algunas funciones. Para hacer este análisis se utilizan los conceptos de *derivada* (Capítulo 3) o de *integral definida* (Capítulo 5).

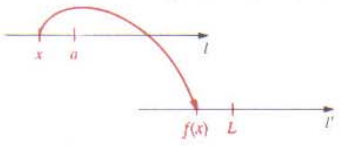
La definición de derivada depende de la noción de *límite* de una *función*. Comenzaremos con una presentación intuitiva. La definición formal de límite aparece en la Sección 2.3.

Sea a un número real contenido en un intervalo abierto y sea f una función definida en todo el intervalo, excepto posiblemente en a mismo. A veces es de interés conocer los valores $f(x)$ de la función *para x muy cercano a a, pero no necesariamente igual a a*. De hecho, en muchos casos, el número a no se encuentra en el dominio de f, es decir, $f(a)$ no está definido. Informalmente hablando, a veces se formula la siguiente pregunta: ¿Cuando x se acerca cada vez más a a (pero $x \neq a$), acaso $f(x)$ se acerca también a un número L? Si la respuesta es *afirmativa* se dice que *$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a*, o que *el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L*, y se escribe:

NOTACIÓN DE LÍMITE (2.1)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

FIGURA 2.1



Si se sabe que $f(x)$ tiende a algún número cuando x tiende a a, pero tal número no se conoce, entonces se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a *a existe*, o simplemente que $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*.

Representaremos el dominio y el contradominio de la función f con puntos sobre dos rectas coordenadas l y l', como se ilustra en la Figura 2.1 (véase también la Figura 1.37). Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces, cuando x tiende a a, entonces $f(x)$ tiende a L. Cuando esto sucede no importa el modo en que x tiende a a. Así, en la Figura 2.1 x puede acercarse a a por la izquierda (lo que se denota por $x \to a^-$), o por la derecha (lo que se señala por $x \to a^+$), o bien oscilando de un lado a otro de a. Análogamente, el valor $f(x)$ de la función puede acercarse a L de muchas maneras diferentes, dependiendo de las propiedades de f.

La noción de límite es fundamental para el estudio de muchos conceptos de las matemáticas y de la física. Para ilustrar esto estudiaremos dos problemas:

(i) Encontrar la recta tangente a una curva en un punto P dado.

(ii) Encontrar la velocidad en cualquier instante de un objeto que se mueve sobre una trayectoria recta.

En la geometría plana, la recta tangente l en un punto P sobre una circunferencia se puede definir como la recta que tiene solamente un punto P en común con tal circunferencia, como se ilustra en la Figura 2.2. Esta definición no se puede aplicar a cualquier gráfica, ya que una recta tangente puede cortar a una gráfica varias veces, como se muestra en la Figura 2.3 (véase también el Ejercicio 11).

FIGURA 2.2

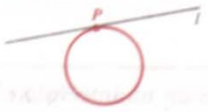
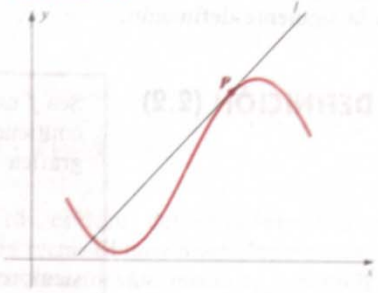
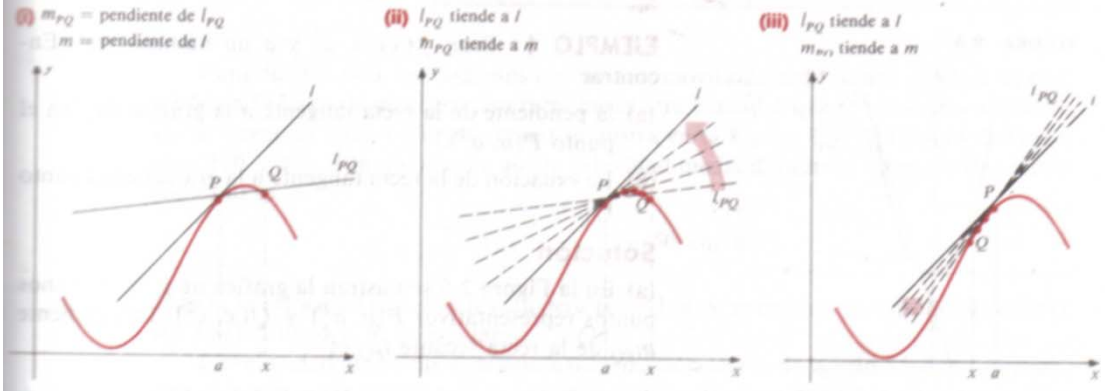


FIGURA 2.3



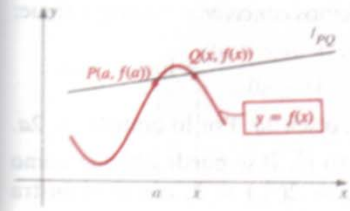
Para identificar la recta tangente l a la gráfica de una función en un punto P, basta especificar la pendiente m de l, ya que ésta y el punto P determinan completamente a la recta. Para encontrar m se escoge otro punto Q sobre la gráfica y se considera a la recta l_{PQ} que pasa por P y Q, como en la Figura 2.4(i). La recta l_{PQ} es una **recta secante** de la gráfica.

FIGURA 2.4



Sea m_{PQ} la pendiente de l_{PQ}. Ahora se considera la variación de m_{PQ} cuando Q se acerca a P. Si Q tiende a P por la derecha se tiene la situación ilustrada en la Figura 2.4(ii), en la que se señalan varias posiciones de la recta secante l_{PQ} correspondientes a las diversas posiciones de Q, por medio de línea punteada. Se ve que para Q cercano a P, la pendiente m_{PQ} debe ser muy parecida a la pendiente m de l. En la Figura 2.4(iii) Q tiende a P por la izquierda y, nuevamente, se ve que m_{PQ} se acerca a m. Estas observaciones sugieren que si m_{PQ} tiende a algún valor fijo cuando Q tiende a P, entonces ese valor se debe usar para *definir* la pendiente de la recta tangente l en P.

FIGURA 2.5



Si la función f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, entonces marcamos las coordenadas de P y Q como en la Figura 2.5. Usando la fórmula para la pendiente (1.13), se obtiene que la pendiente de la recta secante l_{PQ} es

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Con esta notación, puede sustituirse la frase *Q tiende a P* por *x tiende a a*. Así se llega a la siguiente definición.

DEFINICIÓN (2.2)

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a. La **pendiente m de la recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre y cuando el límite exista.

Nótese que en la fórmula de la Definición (2.2) no se usa el límite de $f(x)$ sino el de la expresión $[f(x) - f(a)]/(x - a)$. Obsérvese también que al estudiar este límite, $x \neq a$. En efecto, si se toma $x = a$, entonces $P = Q$ y m_{PQ} no existe.

FIGURA 2.6

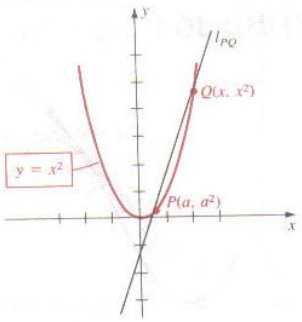
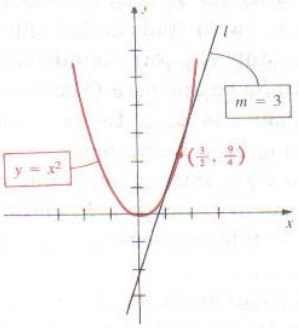


FIGURA 2.7



EJEMPLO 1 Sean $f(x) = x^2$ y a un número real. Encontrar

(a) la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, a^2)$.

(b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$.

Solución

(a) En la Figura 2.6 se ilustran la gráfica de $y = x^2$ y unos puntos representativos $P(a, a^2)$ y $Q(x, x^2)$. La pendiente m_{PQ} de la recta secante l_{PQ} es

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

De la Definición (2.2), se obtiene que la pendiente m de la recta tangente en P es

$$m = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

Para encontrar el límite se necesita cambiar la forma de la expresión. Como al tomar el límite $x \neq a$, resulta que $x - a \neq 0$, y entonces podemos dividir el numerador y el denominador entre $x - a$, es decir, podemos *cancelar* $x - a$ como sigue:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x + a)(x - a)}{(x - a)} = \lim_{x \to a} (x + a).$$

Cuando x tiende a a la expresión $x + a$ tiende a $a + a$, o sea $2a$. Por lo tanto $m = 2a$.

(b) Como la pendiente de la recta tangente l en el punto $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ se puede obtener como el caso especial en que $a = \frac{3}{2}$, tenemos que $m = 2a = 2(\frac{3}{2}) = 3$, como se ilustra

en la Figura 2.7. Usando la Forma de Punto y Pendiente (1.15) se obtiene la siguiente ecuación para l:

$$y - \tfrac{9}{4} = 3(x - \tfrac{3}{2}).$$

Simplificando queda

$$12x - 4y - 9 = 0. \quad \bullet$$

Consideremos ahora el problema (ii), es decir, definir la velocidad instantánea de un objeto que se mueve sobre una línea recta. El movimiento sobre una recta se llama **movimiento rectilíneo**. Es fácil calcular la *velocidad media* v_{med} durante un intervalo de tiempo. Basta usar la fórmula $d = vt$, donde v es la velocidad media, t es la magnitud del intervalo de tiempo y d es la distancia total recorrida. Despejando v se obtiene:

VELOCIDAD MEDIA (2.3)

$$v_{\text{med}} = \frac{d}{t}$$

Para ilustrar esto, supongamos que un automóvil sale de la ciudad A a la 1:00 P.M. y viaja a lo largo de una carretera recta hasta otra ciudad B que se encuentra a 150 km de A, llegando a las 4:00 P.M., como se ilustra en la Figura 2.8. Aplicando (2.3) con $d = 150$ y $t = 3$ (horas), se ve que la velocidad media durante el intervalo de tiempo indicado es

$$v_{\text{med}} = \frac{150}{3} = 50 \text{ km/h}.$$

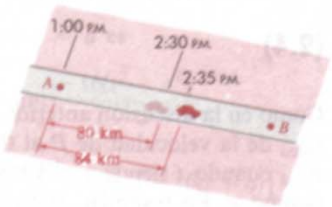
Ésta es la velocidad que si se mantuviera por 3 horas, permitiría al automóvil recorrer los 150 km de A a B, en ese lapso.

La velocidad media no da ninguna información acerca de la velocidad instantánea. Por ejemplo, a las 2:30 (P.M.) el velocímetro del automóvil pudo haber marcado 40 o 30, o el automóvil pudo haber estado en reposo. Si se desea determinar la velocidad a la que el automóvil viaja a las 2:30, se necesita alguna información acerca del movimiento o la posición *alrededor* de esta hora. Por ejemplo, supongamos que a las 2:30 el automóvil se encuentra a 80 km de A y que a las 2:35 está a 84 km de A, como se ilustra en la Figura 2.9. La magnitud t del intervalo de tiempo de las 2:30 a las 2:35

FIGURA 2.8



FIGURA 2.9



es de 5 min, o sea $\frac{1}{12}$ hora, y la distancia d es 4 km. Sustituyendo en (2.3) se obtiene que la velocidad media durante este intervalo es

$$v_{\text{med}} = \frac{4}{\frac{1}{12}} = 48 \text{ km/h}.$$

Sin embargo, éste todavía no es el valor exacto de la velocidad a las 2:30 ya que, por ejemplo, el automóvil podría haber ido muy lentamente a las 2:30 y luego haber aumentado su velocidad considerablemente logrando llegar a estar a 84 km de A a las 2:35 P.M. Evidentemente, se obtiene una mejor aproximación tomando la velocidad media durante un intervalo de tiempo más pequeño, digamos de las 2:30 a las 2:31. Se ve que el mejor procedimiento sería tomar intervalos de tiempo cada vez más pequeños alrededor de las 2:30 P.M. y calcular la velocidad media en cada intervalo. Esto lleva a un proceso límite parecido al de las rectas tangentes.

Para basar esta discusión en conceptos matemáticos, supondremos que la posición de un objeto con movimiento rectilíneo se puede representar por un *punto P* sobre una recta coordenada l. A veces hablaremos del movimiento del *punto P* sobre l o del movimiento de un objeto sobre l, cuya posición está dada por P. Suponemos además que se conoce la posición de P en todo instante dentro de un intervalo de tiempo. Si $s(t)$ denota la coordenada de P al tiempo t, entonces esta función s se llama **función de posición** de P. Supongamos que se mide el tiempo con un reloj. Entonces para cada instante t, el punto P está a $s(t)$ unidades del origen, como se ilustra en la Figura 2.10.

FIGURA 2.10

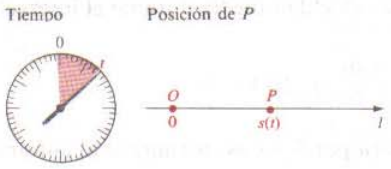
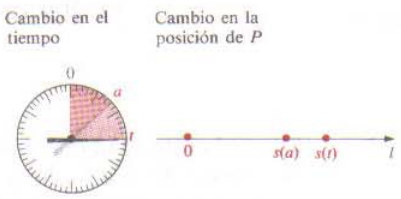


FIGURA 2.11



Para definir la velocidad de P al tiempo a, comenzamos por calcular la velocidad media en un intervalo de tiempo (pequeño) alrededor de a. Consideremos pues los tiempos a y t, donde t está cerca de a pero $t \neq a$. Las posiciones de P correspondientes a estos tiempos son $s(a)$ y $s(t)$, como se muestra en la Figura 2.11, y por lo tanto el cambio en la posición de P es $s(t) - s(a)$. Este número puede ser positivo, negativo o cero, según que la posición de P al tiempo t sea a la derecha de, a la izquierda de o la misma que la posición al tiempo a. El número $s(t) - s(a)$ no es necesariamente igual a la distancia recorrida por P entre los instantes a y t ya que, por ejemplo, P podría haber ido más allá del punto correspondiente a $s(t)$ y haber regresado a este punto al tiempo t.

Por (2.3), la velocidad media de P entre los tiempos a y t es

$$v_{\text{med}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a} \tag{2.4}$$

Como en la discusión anterior, cuanto más cerca esté t de a, tanto más próxima estará v_{med} de la velocidad de P al tiempo a. Así, *definimos* la velocidad como el límite de v_{med} cuando t tiende a a. Este límite se llama también *velocidad instantánea* de P al tiempo a. En resumen, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN (2.5)

Si un punto P se mueve sobre una recta coordenada l de manera que su coordenada al tiempo t es $s(t)$, entonces la **velocidad** $v(a)$ de P al tiempo a es

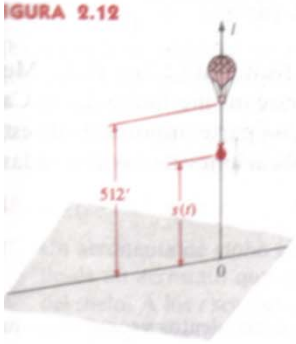
$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

siempre y cuando el límite exista.

Si $s(t)$ se mide en centímetros (cm) y t en segundos (s), entonces las unidades de la velocidad son centímetros por segundo (cm/s). Si $s(t)$ se mide en kilómetros o en millas y t en horas, entonces la velocidad está en kilómetros por hora (km/h) o en millas por hora (mi/h), respectivamente. Por supuesto, se pueden usar otras unidades.

Regresaremos al concepto de velocidad en el Capítulo 4, donde se demostrará que si la velocidad es positiva en un intervalo de tiempo, entonces el punto se mueve en la dirección positiva de l, mientras que si la velocidad es negativa, el punto se mueve en la dirección negativa. Aunque no se han demostrado se usarán en el siguiente ejemplo.

GURA 2.12



EJEMPLO 2 Desde un globo de aire caliente que se halla a una altura de 512 pie sobre el suelo, se deja caer un saco de arena del lastre. Si se desprecia la fricción del aire, la distancia $s(t)$ del suelo al saco a los t segundos está dada por $s(t) = -16t^2 + 512$. Calcular la velocidad del lastre en

(a) $t = a$ segundos **(b)** $t = 2$ s **(c)** el momento en que llega al suelo.

Solución

(a) Como se muestra en la Figura 2.12, podemos considerar que el lastre se mueve sobre una recta coordenada vertical l cuyo origen se encuentra al nivel del suelo. Nótese que en el momento en que se suelta, $t = 0$ y

$$s(0) = -16(0) + 512 = 512 \text{ pie.}$$

Usamos la Definición (2.5) para calcular la velocidad del saco en $t = a$. Primero tomamos la velocidad media y simplificamos:

$$\frac{s(t) - s(a)}{t - a} = \frac{(-16t^2 + 512) - (-16a^2 + 512)}{t - a}$$

$$= \frac{-16t^2 + 16a^2}{t - a} = \frac{-16(t^2 - a^2)}{t - a}.$$

Por la Definición (2.5), la velocidad $v(a)$ en $t = a$ es

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a} = \lim_{t \to a} \frac{-16(t^2 - a^2)}{t - a}$$

$$= \lim_{t \to a} \frac{-16(t - a)(t + a)}{t - a} = \lim_{t \to a} [-16(t + a)]$$

en donde hemos cancelado el factor $t - a$ (como en el Ejemplo 1(a)), porque como $t \neq a$ durante el proceso límite, $t - a \neq 0$. Cuando t tiende a a, $t + a$ tiende a $a + a$, o sea $2a$. Por lo tanto

$$v(a) = -16(2a) = -32a \text{ pie/s}.$$

El signo negativo indica que el movimiento del lastre es en la dirección negativa de l (hacia abajo).

(b) Para calcular la velocidad en $t = 2$ sustituimos a por 2 en la fórmula $v(a) = -32a$, obteniendo así

$$v(2) = -32(2) = -64 \text{ pie/s}.$$

(c) El saco de lastre llega al suelo cuando

$$s(t) = -16t^2 + 512 = 0 \quad \text{o bien} \quad t^2 = \frac{512}{16} = 32.$$

Esto da $t = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5.7$ s. Usando la fórmula $v(a) = -32a$ de la parte (a) con $a = 4\sqrt{2}$, concluimos que la velocidad al llegar al suelo es

$$v(4\sqrt{2}) = -32(4\sqrt{2}) = -128\sqrt{2} \approx 181 \text{ pie/s}. \quad \bullet$$

El lector debe notar la semejanza que existe entre las fórmulas (2.2) y (2.5). Muchas aplicaciones en las matemáticas y en la física llevan a este mismo límite. En el Capítulo 3 se llama a este límite la *derivada* de la función f. Una parte importante de este libro está dedicada al estudio de las propiedades y las aplicaciones de las derivadas.

EJERCICIOS 2.1

Ejercicios 1-4: (a) Use (2.2) para calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, y (b) encuentre una ecuación para la recta tangente en el punto $P(2, f(2))$.

1. $f(x) = 5x^2 - 4$
2. $f(x) = 3 - 2x^2$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = x^4$

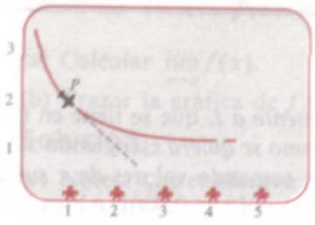
Ejercicios 5-8: (a) Use (2.2) para calcular la pendiente de la recta tangente en el punto con abscisa a sobre la gráfica de la ecuación; (b) encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto P; (c) trace la gráfica y la recta tangente en P.

5. $y = 3x + 2$, $P(1, 5)$
6. $y = \sqrt{x}$, $P(4, 2)$
7. $y = 1/x$, $P(2, \frac{1}{2})$
8. $y = x^{-2}$, $P(2, \frac{1}{4})$

9. Demuestre con razonamientos geométricos que la gráfica de $y = |x|$ no tiene recta tangente en el punto $(0, 0)$.
10. Demuestre con razonamientos geométricos que la gráfica de la función mayor entero (véase la Figura 1.46) no tiene recta tangente en el punto $P(1,1)$.
11. Consulte el Ejercicio 3. Demuestre que la recta tangente a la gráfica de $y = x^3$ en el punto $P(-1, -1)$ corta a la gráfica en $(-1, -1)$ y $(2, 8)$.
12. Consulte el Ejemplo 1. Trace la gráfica de $y = x^2$ y las rectas tangentes en los puntos con abscisas $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3. ¿En cuál de los puntos de la gráfica la pendiente de la recta tangente es igual a 6?
13. En un juego de video para niños, aparecen aviones en la pantalla volando de izquierda a derecha sobre la trayectoria $y = 1 + (1/x)$, que pueden disparar balas en la dirección de la tangente para alcanzar a unos objetivos colocados sobre el eje x en $x = 1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Si un juga-

dor dispara cuando el avión se encuentra en $P(1,2)$, entonces da en alguno de los blancos? ¿Y si dispara estando en $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$?

EJERCICIO 13



14. Sea $f(x) = ax + b$. Demuestre que la recta tangente a la gráfica de f en cualquier punto coincide con la gráfica de f.

Ejercicios 15-16: La posición de un punto P que se mueve sobre una recta coordenada l está dada por $s(t)$ con t en segundos y $s(t)$ en centímetros.

(a) Calcule la velocidad media de P en los siguientes intervalos de tiempo: [1, 1.2]; [1, 1.1]; [1, 1.01]; [1, 1.001].
(b) Calcule la velocidad de P en $t = 1$.
(c) Determine los intervalos de tiempo en los que P se mueve en la dirección positiva.
(d) Determine los intervalos de tiempo en los que P se mueve en la dirección negativa.

15. $s(t) = 4t^2 + 3t$. **16.** $s(t) = t^3$.

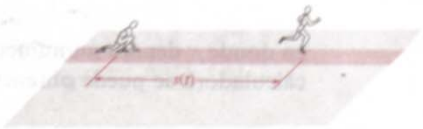
17. Un aeronauta de globo suelta un saco de lastre desde un aeróstato que se encuentra a 160 pies del suelo. A los t segundos el lastre está a $160 - 16t^2$ pie del suelo.

(a) Calcule la velocidad del saco para $t = 1$.
(b) ¿Qué velocidad tiene el saco cuando llega al suelo?

18. Se dispara un proyectil directamente hacia arriba desde el suelo con una velocidad de 40 m/s. Su distancia sobre el suelo a los t segundos es $40t\text{-}4.5t^2$ metros. ¿Cuál es la velocidad del proyectil en $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$? ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuándo choca con el suelo? ¿Cuál es su velocidad en ese momento?

19. Un atleta corre los cien metros planos de manera que la distancia $s(t)$ que ha recorrido a los t segundos está dada por $\frac{1}{5}t^2 + 8t$ metros (véase la figura). Calcule la velocidad del corredor (a) en el momento de la salida ($t = 0$), (b) a los 5 s de la salida y (c) al cruzar la meta.

EJERCICIO 19



20. (a) Pruebe que si la posición de un objeto que se mueve sobre una recta coordenada está dada por una función polinomial de grado 1, entonces la velocidad es constante.
(b) Demuestre que si la función de posición de una partícula en movimiento rectilíneo es constante, entonces la velocidad es 0 en todo tiempo. Describa el movimiento de la partícula.

2.2 DEFINICIÓN INFORMAL DE LÍMITE

En la sección anterior se vio que las definiciones de recta tangente y de velocidad dependen de la noción de *límite* de una función. En el resto de este capítulo se estudiarán los límites con más detalle. Comenzamos con una descripción informal del concepto de límite. En la siguiente sección se hará una presentación matemáticamente rigurosa.

En la Sección 2.1 se dijo que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que *el valor de la función $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a*. A continuación se da una descripción un poco más precisa que es todavía informal.

DEFINICIÓN (2.6) INFORMAL DE LÍMITE

Sea a en un intervalo abierto, y sea f una función definida en todo el intervalo excepto posiblemente en a, y L un número real. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L si x se elige suficientemente cercano a a (pero $x \neq a$).

La frase $f(x)$ *puede acercarse arbitrariamente a* L que se tiene en (2.6) significa que $|f(x) - L|$ *se puede hacer tan pequeño como se quiera* escogiendo x lo suficientemente cercano a a (pero $x \neq a$). Por ejemplo, tomando valores de x suficientemente cercanos a a (con $x \neq a$) se puede hacer que $|f(x) - L| < 0.0001$, o bien $|f(x) - L| < 0.00001$, etcétera.

Como en la sección anterior, se dice que $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe* si (2.6) se satisface para algún número (posiblemente desconocido) L.

En la Sección 8.2, al estudiar los límites de las funciones trigonométricas se demostrará que

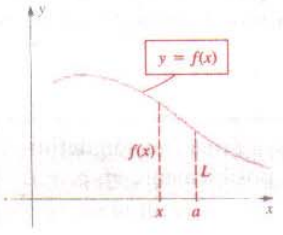
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

en donde x denota un número real que es el *valor en radianes* de un ángulo. Con una calculadora se puede obtener la siguiente tabla que ilustra este importante resultado.

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 0.1	0.998334166
± 0.01	0.999983333
± 0.001	0.999999833
± 0.0001	0.999999995
± 0.00001	1
± 0.000001	1

Esta tabla puede malinterpretarse por varias razones. Primero debido a que la calculadora redondea los resultados, parece que $(\operatorname{sen} x)/x$ es *igual* a 1 si x está entre 0 y 0.00001. Esto *no es cierto*. Se podrá deducir del análisis en la Sección 8.2 que $(\operatorname{sen} x)/x < 1$ para todo x. Luego, aunque la tabla indica que $(\operatorname{sen} x)/x$ tiende a 1 cuando x tiende a 0, no se puede estar seguro de este hecho si sólo se han sustituido algunos valores de x. Podría ser que $(\operatorname{sen} x)/x$ se alejara de 1 para valores de x más cercanos a 0 que los que se usaron en la tabla.

FIGURA 2.13



Aunque una calculadora puede usarse para tener una idea del valor de un límite, no sirve para *demostrar* que el límite existe. Es necesario contar con una teoría matemática precisa de los límites que no dependa de instrumentos mecánicos o de conjeturas. En el resto de este capítulo se desarrolla tal teoría.

La gráfica de la función f en la Figura 2.13 muestra un caso en el que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. En ella no hace falta ubicar un punto correspondiente a $x = a$ porque al tomar el límite *el valor de* $f(a)$ *no tiene ninguna importancia*. Como

se verá en los ejemplos, $f(a)$ puede ser igual a L, diferente de L o bien no existir, dependiendo de la naturaleza de la función f.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

(a) Calcular $\lim_{x \to a} f(x)$.

(b) Trazar la gráfica de f y comprobar gráficamente el límite en la parte (a).

Solución

(a) Nótese que el número 9 no está en el dominio de f, ya que al sustituir x por 9 se llega a la expresión 0/0 que no tiene sentido. Para evaluar el límite cambiamos la forma de $f(x)$ racionalizando el denominador como sigue:

$$\lim_{x \to 9} f(x) = \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

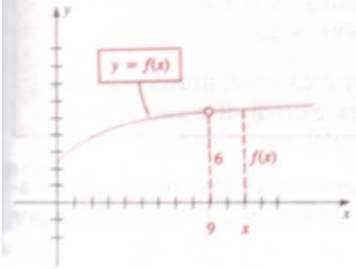
$$= \lim_{x \to 9} \left(\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \right)$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$$

Por la Definición (2.6), para calcular el límite de $f(x)$ cuando $x \to 9$, podemos suponer que $x \neq 9$. Por lo tanto, $x - 9 \neq 0$ y es posible dividir el numerador y el denominador entre $x - 9$; es decir, podemos *cancelar* la expresión $x - 9$. Esto da

$$\lim_{x \to 9} f(x) = \lim_{x \to 9} (\sqrt{x} + 3) = \sqrt{9} + 3 = 6$$

FIGURA 2.14



(b) Al racionalizar el denominador de $f(x)$ como en la parte (a), vemos que la gráfica de f es la misma que la de la ecuación $y = \sqrt{x} + 3$, *excepto por el punto* (9,6). El hecho de que (9,6) no está en la gráfica de f se ilustra con un pequeño círculo claro en la Figura 2.14. Cuando x se acerca a 9, la ordenada $f(x)$ en la gráfica de f se acerca al número 6. Nótese que $f(x)$ nunca toma el valor 6, sin embargo, se puede hacer tan cercano a 6 como se desee escogiendo x suficientemente cerca de 9. •

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6}$. Calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Solución El número 2 no está en el dominio de f porque al sustituir x por 2 se obtiene la expresión sin sentido 0/0. Factorizando el numerador y el denominador,

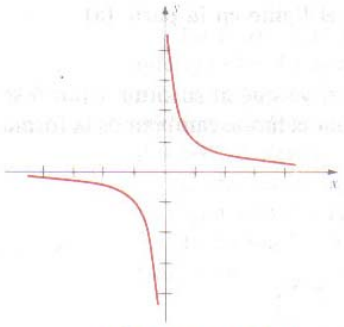
$$f(x) = \frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(5x+3)}.$$

En este paso no puede cancelarse el factor $x - 2$, sin embargo, al tomar el *límite* de $f(x)$ cuando $x \to 2$ *sí* se puede cancelar ya que según la Definición (2.6), $x \neq 2$ y entonces $x - 2 \neq 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(5x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{5x+3} = \frac{3}{13} \quad \bullet$$

FIGURA 2.15



La función racional f definida por $f(x) = 1/x$ proporciona un ejemplo en el que el límite no existe cuando x tiende a 0. Consultando la gráfica de f en la Figura 2.15 (véase también la Figura 1.44) se capta que al dar a x valores cercanos a 0 (con $x \neq 0$), $|f(x)|$ no está acotado; es decir, crece sin frontera. En la Sección 4.6 se estudiarán las propiedades de las funciones racionales.

Los siguientes límites *unilaterales* son también de interés.

LÍMITE POR LA IZQUIERDA (2.7)

Sea f una función definida en un intervalo abierto (c, a). Entonces

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$$

significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L_1 escogiendo x suficientemente cerca de a, con $x < a$.

LÍMITE POR LA DERECHA (2.8)

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, c). Entonces

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$$

significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L_2 escogiendo x suficientemente cerca de a con $x > a$.

A continuación se muestran algunas ilustraciones gráficas de los límites unilaterales. En la Figura 2.16 *x tiende a a por la izquierda*. En la Figura 2.17 *x tiende a a por la derecha*.

FIGURA 2.16

Límite por la izquierda: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$

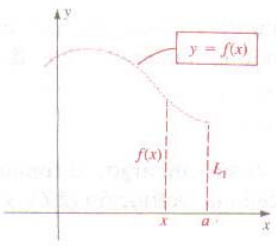
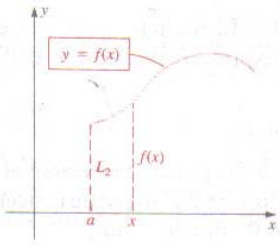


FIGURA 2.17

Límite por la derecha: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$



El croquis de la Figura 2.16 no pretende dar la impresión de que $f(x)$ no está definida para $x \geq a$, sino ilustrar que para $x \to a^-$ solamente deben tomarse en cuenta los valores de x que son *menores* que a. Análogamente, para $x \to a^+$ sólo deben tomarse en cuenta los valores de x que son *mayores* que a.

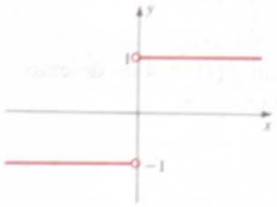
En el siguiente teorema se describe la relación entre los límites y los límites unilaterales.

TEOREMA (2.9)

Sea a un punto contenido en un intervalo abierto y f una función definida en todo el intervalo, excepto posiblemente en a. Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

Este teorema (que se puede demostrar usando la Definición (2.10) de la Sección 2.3) dice que *el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a existe si y sólo si los límites por la derecha y por la izquierda existen y son iguales.*

FIGURA 2.18



EJEMPLO 3 Sea $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Calcular $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Solución En la Figura 2.18 hay un croquis de la gráfica de f. Nótese que f no está definida en $x = 0$.

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y $f(x) = x/x = 1$. Por lo tanto,

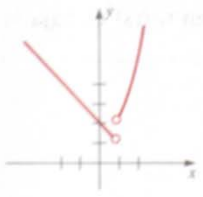
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $f(x) = -x/x = -1$. Por tanto,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1.$$

Como los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, del Teorema (2.9) se deduce que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. •

FIGURA 2.19



EJEMPLO 4 Sea f la función definida parte por parte como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{para } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

Evaluar $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Solución En la Figura 2.19 aparece un croquis de la gráfica de f. Nótese que la gráfica no tiene ningún punto con abscisa 1. Claramente,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2 - x) = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 1) = 2$$

Como los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, por el Teorema (2.9), $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. •

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{para } x < 1 \\ 4 & \text{para } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

Determinar $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} f(x)$.

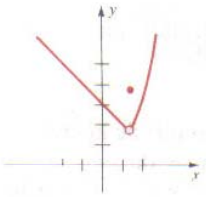
Solución La gráfica se tiene en la Figura 2.20. Vemos que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3 - x) = 2$$

y

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + 1) = 2$$

FIGURA 2.20



Como los límites por la derecha y por la izquierda son iguales, del Teorema (2.9) se deduce que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

Adviértase que el valor de la función $f(1) = 4$ no desempeña ningún papel al calcular el límite. •

La siguiente aplicación utiliza los límites unilaterales.

EJEMPLO 6 Un gas (como el vapor de agua o el oxígeno) se mantiene a temperatura constante dentro del cilindro mostrado en la Figura 2.21. Cuando el gas se comprime el volumen disminuye hasta que se llega a una presión crítica. Al rebasar esta presión el gas se convierte en un líquido. Utilizar la gráfica de la Figura 2.22 para interpretar y calcular

$$\lim_{P\to 100^-} V \quad \text{y} \quad \lim_{P\to 100^+} V$$

Solución En la Figura 2.22 vemos que cuando la presión P (en torrs) es baja la

FIGURA 2.21

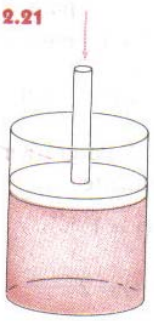
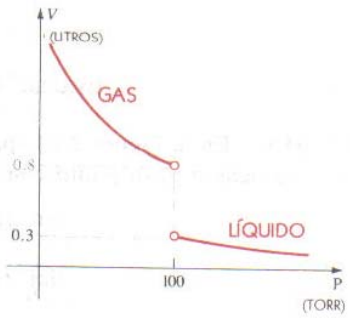


FIGURA 2.22



sustancia es gaseosa y el volumen V (en litros) es grande. (La definición de esta unidad de presión, el *torr* o milímetro de mercurio, puede encontrarse en libros de física.) Cuando P se acerca a 100 tomando valores menores que 100, V disminuye y tiende a 0.8, es decir,

$$\lim_{P \to 100^-} V = 0.8$$

Cuando P tiende a 100 tomando valores menores que 100 la sustancia es líquida y V aumenta muy lentamente (los líquidos son casi incompresibles) tendiendo a 0.3, es decir,

$$\lim_{P \to 100^+} V = 0.3$$

Cuando $P = 100$ las formas líquida y gaseosa coexisten en equilibrio y la sustancia no se puede clasificar como gas ni como líquido. •

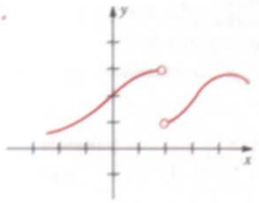
EJERCICIOS 2.2

Ejercicios 1-6: Consulte las gráficas para calcular los límites (a)-(f), si es que existen.

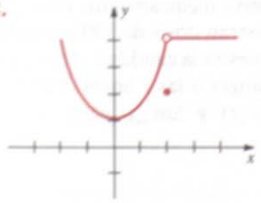
(a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (f) $\lim_{x \to 0} f(x)$

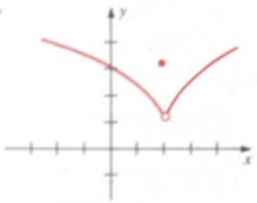
1.



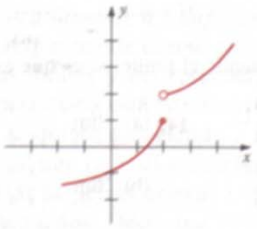
2.



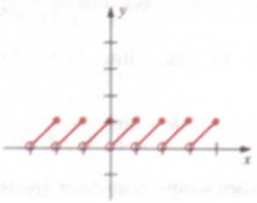
3.



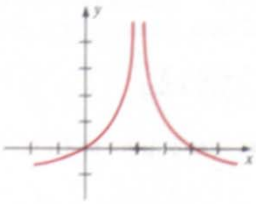
4.



5.



6.



Ejercicios 7-12: Trace la gráfica de la función f definida parte por parte y determine los límites (a)-(c) si es que existen.

(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \le 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \lvert x - 1 \rvert & \text{si } x \ne 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lvert x - 1 \rvert}{x - 1} x^2 & \text{si } x \ne 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Ejercicios 13-18: Calcule el límite, si es que existe.

13. (a) $\lim_{x \to 4^-} \dfrac{\lvert x - 4 \rvert}{x - 4}$ (b) $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{\lvert x - 4 \rvert}{x - 4}$ (c) $\lim_{x \to 4} \dfrac{\lvert x - 4 \rvert}{x - 4}$

14. (a) $\lim_{x \to -5^-} \dfrac{x + 5}{\lvert x + 5 \rvert}$ (b) $\lim_{x \to -5^-} \dfrac{x + 5}{\lvert x + 5 \rvert}$ (c) $\lim_{x \to -5} \dfrac{x + 5}{\lvert x + 5 \rvert}$

15. $\lim_{x \to -6^+} (\sqrt{x + 6} + x)$

16. $\lim_{x \to 5/2^-} (\sqrt{5 - 2x} - x^2)$

17. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3}$

18. $\lim_{x \to 8^-} \dfrac{1}{x - 8}$

Ejercicios 19-30: Utilice simplificaciones algebraicas como ayuda para evaluar el límite, si es que existe.

19. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

20. $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{x - 3}$

21. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7}$

22. $\lim_{r \to -3} \dfrac{r^2 + 2r - 3}{r^2 + 7r + 12}$

23. $\lim_{x \to 5} \dfrac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15}$

24. $\lim_{x \to 25} \dfrac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$

25. $\lim_{k \to 4} \dfrac{k^2 - 16}{\sqrt{k} - 2}$

26. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

27. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

28. $\lim_{h \to 2} \dfrac{h^3 - 8}{h^2 - 4}$

29. $\lim_{h \to -2} \dfrac{h^3 + 8}{h + 2}$

30. $\lim_{z \to 10} \dfrac{1}{z - 10}$

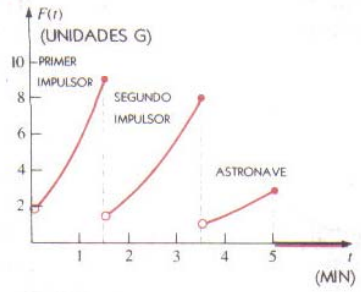
31. La figura muestra una gráfica típica de la fuerza de aceleración a la que se ven sometidos los astronautas durante el despegue de una nave espacial que tiene dos cohetes de impulso. (Una fuerza de 2G es igual al doble de la fuerza de la gravedad G; una de 3G es el triple de la gravedad, etcétera.) Sea $F(t)$ la fuerza en unidades G a los t minutos de vuelo. Calcule e interprete:

(a) $\lim_{t \to 0^+} F(t)$

(b) $\lim_{t \to 3.5^-} F(t)$ y $\lim_{t \to 3.5^+} F(t)$

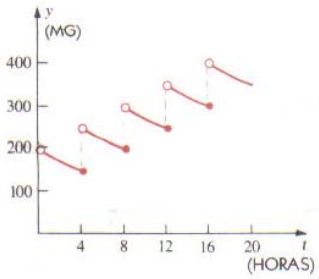
(c) $\lim_{t \to 5^-} F(t)$ y $\lim_{t \to 5^+} F(t)$

EJERCICIO 31



32. Un paciente recibe una dosis inicial de 200 mg (miligramos) de cierto medicamento. Posteriormente se le administran dosis de 100 mg cada 4 horas. La figura muestra la cantidad $y(t)$ del medicamento en la sangre a las t horas. Calcule e interprete $\lim_{t \to 8^-} y(t)$ y $\lim_{t \to 8^+} y(t)$.

EJERCICIO 32



Ejercicios 33-38: El resultado enunciado se puede comprobar con métodos que se exponen en capítulos posteriores. Use una calculadora para verificar el resultado sustituyendo x por varios números reales. Explique por qué no se puede *demostrar* la existencia del límite usando la calculadora.

33. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} \approx 2.72$

34. $\lim_{x \to 0} (1 + 2x)^{3/x} \approx 403.4$

35. $\lim_{x \to 2} \dfrac{3^x - 9}{x - 2} \approx 9.89$

36. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2^x - 2}{x - 1} \approx 1.39$

37. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{4^{|x|} + 9^{|x|}}{2} \right)^{1/|x|} = 6$

38. $\lim_{x \to 0} |x|^x = 1$

2.3 DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

En la Sección 2.2 se definió informalmente $\lim_{x \to a} f(x) = L$ diciendo que $f(x)$ puede *acercarse arbitrariamente* a L escogiendo a x *suficientemente próximo a* a (con $x \neq a$). Esto es una buena descripción de límite, pero le falta precisión matemática debido a la vaguedad de las expresiones *acercarse arbitrariamente a* y *suficientemente cerca de*. En esta sección se dará una definición formal que puede usarse para formular demostraciones rigurosas de las propiedades de los límites y sus resultados.

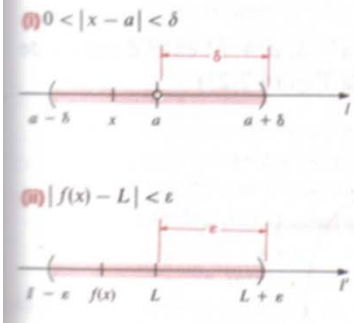
La clave para llegar a una definición satisfactoria está en observar que se debe poder hacer a $|f(x) - L|$ tan *pequeño como se quiera* escogiendo x lo suficientemente cerca de a (con $x \neq a$), es decir, eligiendo a x tal que $|x - a|$ sea *suficientemente pequeño* (y $x - a \neq 0$). En cálculo es costumbre usar las letras griegas ε (épsilon) y δ (delta) para denotar números reales positivos muy pequeños. Decir que $|f(x) - L|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera significa que *para todo* $\varepsilon > 0$, pueden encontrarse valores de x tales que

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Por (1.3) (i) esta igualdad es equivalente a

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \quad \text{ó bien} \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

FIGURA 2.23



Análogamente, para expresar que $|x - a|$ es suficientemente pequeño (y que $x - a \neq 0$) puede usar la desigualdad

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{para un } \delta > 0.$$

Usando de nuevo (1.3) (i) se ve que esto equivale a

$$a - \delta < x < a + \delta \quad \text{y} \quad x \neq a.$$

En la Figura 2.23 se tienen las gráficas de estas desigualdades sobre rectas coordenadas l y l', respectivamente. En ellas ε y δ deben considerarse números muy pequeños tales como 0.0001 o 0.0000001. El círculo pequeño en la Figura 2.23 (i) indica que $x \neq a$.

Esta notación se utiliza en la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE LÍMITE (2.10)

Sea a un punto de un intervalo abierto, sea f una función definida en todo el intervalo excepto posiblemente en a, y sea L un número real. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

A veces es conveniente usar otra forma de la Definición (2.10) en la que las desigualdades con valor absoluto se enuncian en términos de intervalos abiertos (véase la Figura 2.23).

DEFINICIÓN ALTERNA DE LÍMITE (2.11)

La expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ se encuentra localizada en el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Si $f(x)$ *tiene límite cuando* x *tiende a* a, *entonces el límite es único*. En el Apéndice II se da una demostración de este importante teorema.

Para comprender mejor la relación entre los números positivos ε y δ en las Definiciones (2.10) y (2.11), utilizaremos interpretaciones geométricas parecidas a las de la Figura 1.37. El dominio de f se representa por algunos puntos sobre una recta coordenada l, y el contradominio por otros puntos sobre una recta coordenada l'. El proceso de límite se puede describir como sigue.

Para demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$:

Paso 1. Para todo $\varepsilon > 0$ se considera el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ en el contradominio de f (véase la Figura 2.24).

Paso 2. Se demuestra que existe un intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ en el dominio de f para el que se satisface la Definición (2.11) (véase la Figura 2.25).

FIGURA 2.24

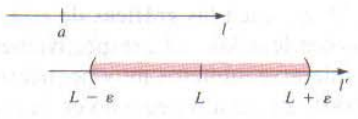
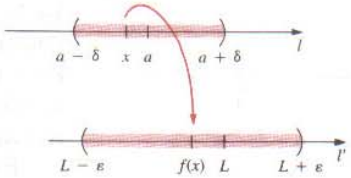


FIGURA 2.25



Es muy importante recordar que *primero* se considera el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ y *después* se demuestra que el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ con las características deseadas, existe en el dominio de f. Para recordar este orden de cosas es conveniente imaginar la función f como un cañón que dispara una bala desde el punto en l con coordenada x al punto en l' con coordenada $f(x)$, como se ilustra en la Figura 2.25 por medio de la flecha curva. El primer paso se puede considerar como el poner un blanco de radio ε con la diana en L. En el Paso 2 se debe encontrar un intervalo abierto que contenga a a punto en el que se debe emplazar el cañón de manera que la bala pegue en el blanco. Por cierto que no hay garantía de que acierte a la diana, pero si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se puede lograr que la bala haga impacto tan cerca del centro como se quiera.

El número δ en la definición de límite no es único, pues si algún valor específico δ la satisface, entonces cualquier número positivo δ' *menor* también la satisface.

En el siguiente ejemplo se verifica el valor de un límite utilizando la Definición (2.10).

EJEMPLO 1 Comprobar que $\lim_{x \to 4} \frac{1}{2}(3x - 1) = \frac{11}{2}$.

Solución Sean $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1)$, $a = 4$ y $L = \frac{11}{2}$. De acuerdo con la Definición (2.10), debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 4| < \delta, \quad \text{entonces} \quad \left|\tfrac{1}{2}(3x - 1) - \tfrac{11}{2}\right| < \varepsilon.$$

Para tener una idea de cómo elegir δ podemos estudiar la desigualdad en que interviene ε. La siguiente es una lista de desigualdades equivalentes:

$$\left|\tfrac{1}{2}(3x - 1) - \tfrac{11}{2}\right| < \varepsilon$$
$$\tfrac{1}{2}|(3x - 1) - 11| < \varepsilon$$
$$|3x - 1 - 11| < 2\varepsilon$$
$$|3x - 12| < 2\varepsilon$$
$$3|x - 4| < 2\varepsilon$$
$$|x - 4| < \tfrac{2}{3}\varepsilon$$

La última de éstas da la pista que necesitamos. Tomando $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$, si $0 < |x - 4| < \delta$, entonces se satisface la última desigualdad de la lista y, como todas ellas son equivalentes, la primera también se satisface. Entonces, por la Definición (2.10), $\lim_{x \to 4} \frac{1}{2}(3x - 1) = \frac{11}{2}$. •

Fue relativamente fácil usar la definición de límite (2.10) en el Ejemplo 1 porque $f(x)$ era una expresión sencilla de x. Los límites de otras funciones más complicadas también se pueden verificar aplicando directamente la definición; sin embargo, la tarea de demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ adecuado, a veces requiere de mucho ingenio.

Se interpretarán ahora las Definiciones (2.10) y (2.11) usando la gráfica de f que se muestra en la Figura 2.26. Dado cualquier $\varepsilon > 0$ consideramos el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ sobre el eje y y las rectas horizontales $y = L \pm \varepsilon$. Si existe un intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ tal que para todo x en $(a - \delta, a + \delta)$, excepto posible-

mente para $x = a$, el punto $P(x, f(x))$ se encuentra entre las rectas horizontales —es decir, dentro del rectángulo sombreado que se tiene en la Figura 2.26— entonces

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

y por lo tanto $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se aplica a una función específica el procedimiento geométrico presentado en la Figura 2.26.

FIGURA 2.26

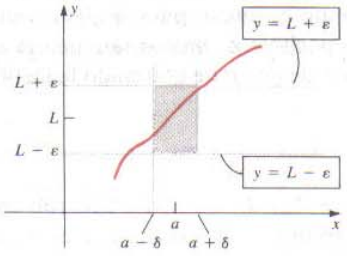
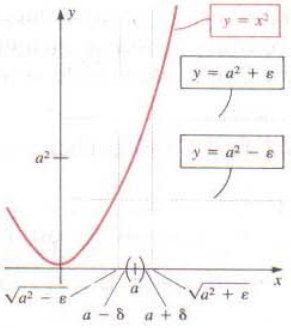


FIGURA 2.27



EJEMPLO 2 Demostrar que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$.

Solución Consideremos el caso $a > 0$. Se aplicará la Definición Alterna (2.11) con $f(x) = x^2$ y $L = a^2$. En la Figura 2.27 aparece un croquis de la gráfica de f junto con unos puntos sobre los ejes x y y que corresponden a a y a^2, respectivamente.

Para cualquier número positivo ε consideramos las rectas horizontales $y = a^2 - \varepsilon$ y $y = a^2 + \varepsilon$. Estas rectas cortan a la gráfica de f en puntos con abscisas $\sqrt{a^2 - \varepsilon}$ y $\sqrt{a^2 + \varepsilon}$, como se ve en la figura. Si x está en el intervalo abierto $(\sqrt{a^2 - \varepsilon}, \sqrt{a^2 + \varepsilon})$, entonces

$$\sqrt{a^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{a^2 + \varepsilon}.$$

Por lo tanto,

$$a^2 - \varepsilon < x^2 < a^2 + \varepsilon,$$

es decir, $f(x) = x^2$ está en el intervalo abierto $(a^2 - \varepsilon, a^2 + \varepsilon)$. Geométricamente, esto significa que el punto (x, x^2) sobre la gráfica de f se encuentra entre las dos rectas horizontales.

Escojamos un número δ menor que $\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$ y $a - \sqrt{a^2 - \varepsilon}$, como se ilustra en la Figura 2.27. Resulta que si x está en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, entonces x también está en $(\sqrt{a^2 - \varepsilon}, \sqrt{a^2 + \varepsilon})$ y, por lo tanto, $f(x)$ está en el intervalo $(a^2 - \varepsilon, a^2 + \varepsilon)$. Por la Definición (2.11), $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$. Aunque sólo hemos considerado $a > 0$, se ve que puede aplicarse un razonamiento análogo para $a \leq 0$. •

Los siguientes dos ejemplos, que se estudiaron también en la Sección 2.2, muestran cómo puede usarse la interpretación geométrica ilustrada en la Figura 2.27 para demostrar que algunos límites no existen.

EJEMPLO 3 Demostrar que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Solución Procedamos de manera indirecta. Supóngase que existe un número L tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = L.$$

Consideremos cualquier par de rectas horizontales $y = L \pm \varepsilon$, como se ilustra en la Figura 2.28. Como estamos suponiendo que el límite existe, debería ser posible encontrar un intervalo abierto $(0 - \delta, 0 + \delta)$, o equivalentemente $(-\delta, \delta)$, que contuviese al 0, tal que si $-\delta < x < \delta$ y $x \neq 0$, el punto $(x, 1/x)$ de la gráfica estuviese entre las rectas horizontales. Sin embargo, como $1/x$ se puede hacer tan grande como se quiera escogiendo x cerca de 0, no todos los puntos $(x, 1/x)$ con abscisa diferente de cero en $(-\delta, \delta)$ tienen esta propiedad. Por tanto nuestra suposición es falsa, es decir, el límite no existe. •

FIGURA 2.28

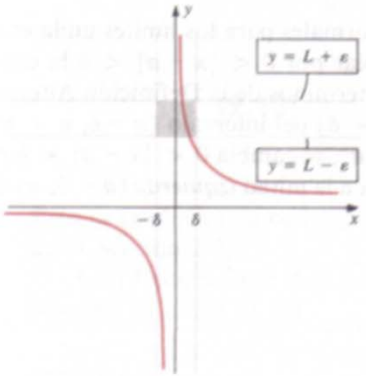
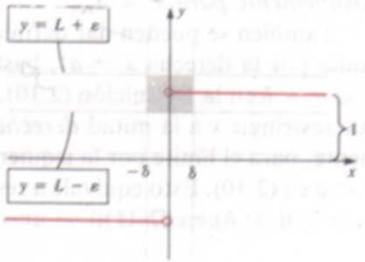


FIGURA 2.29



EJEMPLO 4 Sea $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Demostrar que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Solución Si $x > 0$, entonces $|x|/x = x/x = 1$ y, por lo tanto, la gráfica de f a la derecha del eje y coincide con la recta $y = 1$. Si $x < 0$, entonces $|x|/x = -x/x = -1$, lo que significa que a la izquierda del eje y la gráfica de f coincide con la recta $y = -1$. Si fuese cierto que $\lim_{x \to 0} f(x) = L$ para algún L, estas observaciones implicarían que $-1 \leq L \leq 1$. Si consideramos cualquier par de rectas horizontales $y = L \pm \varepsilon$, con $0 < \varepsilon < 1$, como se muestra en la Figura 2.29, entonces para *todo* intervalo $(-\delta, \delta)$ que contiene al 0, existen puntos de la gráfica con x diferente de cero en el intervalo, que no se encuentran entre estas dos rectas. De esto se deduce que el límite no existe. •

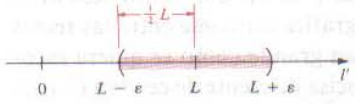
El siguiente teorema afirma que *si una función f tiene un límite positivo cuando x tiende a a, entonces $f(x)$ es positivo en todos los puntos de algún intervalo abierto que contenga a a, excepto posiblemente en a.*

TEOREMA (2.12)

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $L > 0$, existe entonces un intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ que contiene a a, tal que $f(x) > 0$ para todo x en $(a - \delta, a + \delta)$, excepto posiblemente $x = a$.

Demostración Considérese el punto en una recta coordenada que corresponde al número positivo L. Si se elige $\varepsilon = \frac{1}{2}L$, entonces el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ contiene solamente números positivos, como se ilustra en la Figura 2.30. Por la Definición (2.11), existe un $\delta > 0$ tal que si x está el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ está en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ y, por lo tanto, $f(x) > 0$. • •

FIGURA 2.30



Se puede demostrar que *si f tiene un límite negativo cuando x tiende a a, entonces existe un intervalo abierto I que contiene a a tal que $f(x) < 0$ para todo x en I, excepto posiblemente para $x = a$.*

También se pueden dar definiciones formales para los límites unilaterales. Para el límite por la derecha $x \to a^+$, basta cambiar por $0 < |x - a| < \delta$ la condición $a < x < a + \delta$ en la Definición (2.10). En los términos de la Definición Alterna (2.11) hay que restringir x a la mitad *derecha* $(a, a + \delta)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. Análogamente, para el límite por la izquierda $x \to a^-$, se cambia $0 < |x - a| < \delta$ por $a - \delta < x < a$ en (2.10). Esto equivale a restringir x a la mitad *izquierda* $(a - \delta, a)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ en (2.11).

EJERCICIOS 2.3

Ejercicios 1-12: Demuestre que el límite existe usando la Definición (2.10).

1. $\lim_{x \to 4} 3x = 12$
2. $\lim_{x \to 5} (-4x) = -20$
3. $\lim_{x \to 2} (5x - 3) = 7$
4. $\lim_{x \to -3} (2x + 1) = -5$
5. $\lim_{x \to -6} (10 - 9x) = 64$
6. $\lim_{x \to 4} (8x - 15) = 17$
7. $\lim_{x \to 3} 5 = 5$
8. $\lim_{x \to 5} 3 = 3$
9. $\lim_{x \to a} c = c$ para cualesquiera números reales a y c.
10. $\lim_{x \to 6} \left(9 - \frac{x}{6}\right) = 8$
11. $\lim_{x \to a} x = a$ para todo número real a.
12. $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$ para cualesquiera números reales m, b y a.

Ejercicios 13-18: Use el método gráfico ilustrado en el Ejemplo 2 para verificar el límite suponiendo que $a > 0$.

13. $\lim_{x \to -a} x^2 = a^2$
14. $\lim_{x \to a} (x^2 + 1) = a^2 + 1$
15. $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$
16. $\lim_{x \to a} x^4 = a^4$
17. $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
18. $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$

Ejercicios 19-26: Use el método ilustrado en los Ejemplos 3 y 4 para demostrar que el límite no existe.

19. $\lim_{x \to 3} \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$
20. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{|x + 2|}$
21. $\lim_{x \to -1} \dfrac{3x + 3}{|x + 1|}$
22. $\lim_{x \to 5} \dfrac{2x - 10}{|x - 5|}$
23. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$
24. $\lim_{x \to 4} \dfrac{7}{x - 4}$

25. $\lim_{x \to -5} \frac{1}{x+5}$ 26. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

27. Dé un ejemplo de una función f definida en a tal que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

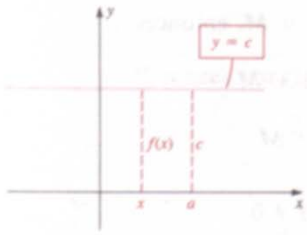
28. Demuestre que si f es la función mayor entero y a es un entero, entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

29. Sea f definida por las condiciones: $f(x) = 0$ si x es racional y $f(x) = 1$ si x es irracional. Demuestre que para todo número real a, $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

30. ¿Por qué no se puede aplicar la Definición (2.10) para investigar $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$?

2.4 MÉTODOS PARA CALCULAR LÍMITES

FIGURA 2.31



Si f es una función constante, entonces existe un número real c tal que $f(x) = c$ para todo x. La gráfica de f es la recta horizontal $y = c$ que se ilustra en la Figura 2.31. Es evidente que $f(x)$ *tiende a* c, o que $f(x)$ se puede *acercar arbitrariamente* a c, puesto que $f(x)$ toma el valor c para todo x. Por lo tanto,

(2.13) $$\lim_{x \to a} c = c$$

Esto es también una consecuencia directa de la Definición (2.10) (véase el Ejercicio 7 de la Sección 2.3).

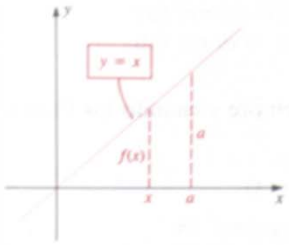
Con frecuencia se dice que *el límite de una constante es la propia constante* para describir el límite (2.13).

EJEMPLO 1 Evaluar $\lim_{x \to 3} 8$, $\lim_{x \to 8} 3$ y $\lim_{x \to a} 0$.

Solución Aplicando (2.13),

$$\lim_{x \to 3} 8 = 8, \quad \lim_{x \to 8} 3 = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} 0 = 0 \bullet$$

FIGURA 2.32



Consideremos ahora la función lineal f dada por $f(x) = x$ para todo x. La gráfica de f es la recta $y = x$ que se ilustra en la Figura 2.32. Como $f(x) = x$, es evidente que $f(x)$ tiende a a cuando x tiende a a. Usando la notación de límite:

(2.14) $$\lim_{x \to a} x = a$$

Es fácil demostrar (2.14) usando la Definición (2.10).

EJEMPLO 2 Evaluar $\lim_{x \to \sqrt{2}} x$ y $\lim_{x \to -4} x$.

Solución Por (2.14),

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} x = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -4} x = -4 \bullet$$

Más adelante se verá que las fórmulas (2.13) y (2.14) se pueden usar como base para calcular los límites de expresiones muy complicadas.

Muchas funciones pueden expresarse como sumas, diferencias, productos y cocientes de otras funciones. En particular, sea s la suma de dos funciones f y g, de manera que $s(x) = f(x) + g(x)$ para todo x en el dominio de s. Si $f(x)$ y $g(x)$ tienen límites L y M, respectivamente, cuando x tiende a a, es de esperarse que $s(x)$ tenga como límite $L + M$, cuando x tiende a a. El siguiente teorema afirma que éste y otros enunciados análogos para productos y cocientes son ciertos.

TEOREMA (2.15)

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

(ii) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

(iii) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}$, si $M \neq 0$

(iv) $\lim_{x \to a} [cf(x)] = cL$, para todo número real c

(v) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L - M$

Aunque intuitivamente las conclusiones del Teorema (2.15) son evidentes, sus demostraciones son bastante técnicas. En el Apéndice II se pueden encontrar demostraciones para (i)-(iii) basadas en la Definición (2.10). La parte (iv) del teorema se deduce fácilmente de la parte (ii) y de (2.13), como sigue:

$$\lim_{x \to a} [cf(x)] = \left[\lim_{x \to a} c\right]\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = cL.$$

Finalmente, para demostrar (v) se escribe

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$$

y se utilizan (i) y (iv) con $c = -1$.

El Teorema (2.15) se escribe con frecuencia como sigue, siempre y cuando los límites de $f(x)$ y $g(x)$ existan.

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \quad \text{si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

$$\text{(iv)}\ \lim_{x\to a}[cf(x)] = c\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

$$\text{(v)}\ \lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

Se usará el Teorema (2.15) para demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA (2.16) Si m, b y a son números reales arbitrarios, entonces

$$\lim_{x\to a}(mx + b) = ma + b$$

Demostración De (2.13) y (2.14) se sabe que

$$\lim_{x\to a} m = m, \quad \lim_{x\to a} x = a \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} b = b.$$

Entonces por (i) y (iv) del Teorema (2.15),

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(mx + b) &= \lim_{x\to a}(mx) + \lim_{x\to a} b \\ &= m\left(\lim_{x\to a} x\right) + b \\ &= ma + b.\end{aligned}$$

Este resultado también puede demostrarse directamente a partir de la Definición (2.10) (véase el Ejercicio 12 de la Sección 2.3). • •

Si f es una función lineal, entonces de acuerdo con el Teorema (2.16), $\lim_{x\to a} f(x)$ se puede calcular simplemente sustituyendo x por a. En la Sección 2.5 se estudiarán muchas otras funciones que tienen también esta propiedad.

EJEMPLO 3 Calcular $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x + 4}{5x + 7}$.

Solución El numerador y el denominador del cociente son funciones lineales cuyos límites existen, de acuerdo con el Teorema (2.16). Además el límite del denominador no es 0. Entonces, por el Teorema (2.15) (iii) y el Teorema (2.16),

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x + 4}{5x + 7} = \frac{\lim_{x\to 2}(3x + 4)}{\lim_{x\to 2}(5x + 7)} = \frac{3(2) + 4}{5(2) + 7} = \frac{10}{17}.$$

El Teorema (2.15) se puede generalizar a límites de sumas, diferencias, productos y cocientes de más de dos funciones.

EJEMPLO 4 Demostrar que para todo número real a, $\lim_{x\to a} x^3 = a^3$.

Solución Como $\lim_{x\to a} x = a$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} x^3 &= \lim_{x\to a} (x \cdot x \cdot x)\\ &= \left(\lim_{x\to a} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} x\right)\\ &= a \cdot a \cdot a = a^3\end{aligned}$$

El método empleado en el Ejemplo 4 se puede aplicar a x^n para cualquier entero positivo n. Basta escribir x^n como un producto $x \cdot x \cdot \cdots \cdot x$ de n factores y luego tomar el límite de cada factor. Esto da la parte (i) del siguiente teorema. La parte (ii) puede demostrarse usando el Teorema (2.15) (ii).

TEOREMA (2.17)

Sea n un entero positivo. Entonces

(i) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

(ii) $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$, siempre y cuando $\lim_{x\to a} f(x)$ exista.

EJEMPLO 5 Calcular $\lim_{x\to 2} (3x + 4)^5$.

Solución Aplicando (2.17) (ii) y el Teorema (2.16),

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} (3x + 4)^5 = \left[\lim_{x\to 2} (3x + 4)\right]^5 &= [3(2) + 4]^5\\ &= 10^5 = 100{,}000\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Calcular $\lim_{x\to -2} (5x^3 + 3x^2 - 6)$.

Solución Procederemos como sigue (justifíquese el razonamiento):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} (5x^3 + 3x^2 - 6) &= \lim_{x\to -2} (5x^3) + \lim_{x\to -2} (3x^2) - \lim_{x\to -2} (6)\\ &= 5 \lim_{x\to -2} (x^3) + 3 \lim_{x\to -2} (x^2) - 6\\ &= 5(-2)^3 + 3(-2)^2 - 6\\ &= 5(-8) + 3(4) - 6 = -34\end{aligned}$$

El límite en el Ejemplo 6 es el número que se obtiene al sustituir x por -2 en $5x^3 + 3x^2 - 6$. El siguiente teorema afirma que esto mismo sucede para los límites de *cualquier* polinomio.

TEOREMA (2.18)

Si f es un polinomio y a es un número real, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Demostración Se puede escribir $f(x)$ en la forma

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$$

para algunos números reales b_n, b_{n-1}, $\ldots$, b_0. Como en el Ejemplo 6,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}(b_n x^n) + \lim_{x\to a}(b_{n-1}x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x\to a} b_0 \\ &= b_n \lim_{x\to a}(x^n) + b_{n-1}\lim_{x\to a}(x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x\to a} b_0 \\ &= b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \cdots + b_0 = f(a)\end{aligned}$$

• •

COROLARIO (2.19)

Si q es una función racional y a está en el dominio de q, entonces

$$\lim_{x\to a} q(x) = q(a).$$

Demostración Puede escribirse $q(x) = f(x)/h(x)$, donde f y h son polinomios. Si a está en el dominio de q, entonces $h(a) \neq 0$. Usando el Teorema (2.15) (iii) y (2.18),

$$\lim_{x\to a} q(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} h(x)} = \frac{f(a)}{h(a)} = q(a)$$

• •

EJEMPLO 7 Calcular $\lim_{x\to 3} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^3 - 7}$.

Solución Aplicando el Corolario (2.19),

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{5x^2 - 2x + 1}{4x^3 - 7} &= \frac{5(3)^2 - 2(3) + 1}{4(3)^3 - 7} \\ &= \frac{45 - 6 + 1}{108 - 7} = \frac{40}{101}\end{aligned}$$

•

El siguiente teorema expresa que para las raíces enteras positivas de x el límite se puede obtener por sustitución. La demostración utiliza la definición formal de límite (2.10) y se puede ver en el Apéndice II.

TEOREMA (2.20)

Si $a > 0$ y n es un entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Si m y n son enteros positivos y $a > 0$, entonces usando el Teorema (2.17) (ii) y el Teorema (2.20),

$$\lim_{x\to a} (\sqrt[n]{x})^m = \left(\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

En términos de exponentes racionales,

$$\lim_{x \to a} x^{m/n} = a^{m/n}.$$

Esta fórmula puede ser generalizada al caso de exponentes negativos escribiendo $x^{-r} = 1/x^r$ y aplicando el Teorema (2.15) (iii).

EJEMPLO 8 Calcular $\lim_{x \to 8} \dfrac{x^{2/3} + 3\sqrt{x}}{4 - (16/x)}$.

Solución Procederemos como sigue (justifíquese el razonamiento):

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^{2/3} + 3\sqrt{x}}{4 - (16/x)} = \frac{\lim_{x \to 8} (x^{2/3} + 3\sqrt{x})}{\lim_{x \to 8} [4 - (16/x)]}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 8} x^{2/3} + \lim_{x \to 8} 3\sqrt{x}}{\lim_{x \to 8} 4 - \lim_{x \to 8} (16/x)}$$

$$= \frac{8^{2/3} + 3\sqrt{8}}{4 - (16/8)}$$

$$= \frac{4 + 6\sqrt{2}}{4 - 2} = 2 + 3\sqrt{2} \quad \bullet$$

TEOREMA (2.21)

Si una función f tiene un límite cuando x tiende a a, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

siempre y cuando n sea un entero positivo impar o bien n sea un entero positivo y $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.

El teorema anterior se demostrará en la Sección 2.5. Mientras tanto se usará sin demostrarlo para adquirir experiencia en la determinación de límites en los que intervengan raíces de expresiones algebraicas.

EJEMPLO 9 Calcular $\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{3x^2 - 4x + 9}$.

Solución Usando los Teoremas (2.21) y (2.18),

$$\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{3x^2 - 4x + 9} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 5} (3x^2 - 4x + 9)}$$

$$= \sqrt[3]{75 - 20 + 9} = \sqrt[3]{64} = 4 \quad \bullet$$

No hay que confundirse por los ejemplos anteriores: No siempre pueden calcularse los límites simplemente por sustitución. A veces es necesario usar otros medios. El siguiente teorema se refiere a tres funciones f, h y g, de las cuales $h(x)$ se encuentra siem-

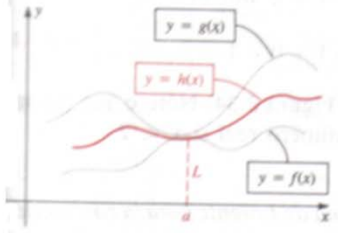
pre "intercalada" entre $f(x)$ y $g(x)$. Si f y g tienen el mismo límite L cuando x tiende a a, entonces h debe tener el mismo límite, como se enuncia a continuación.

TEOREMA (2.22) DE LA INTERCALACIÓN

Supóngase que para todo x en un intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente para $x = a$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$, entonces $\lim_{x \to a} h(x) = L$.

FIGURA 2.33



En el Apéndice II puede encontrarse una demostración del Teorema de la Intercalación basada en la definición de límite. El resultado es intuitivamente cierto desde el punto de vista geométrico. En efecto, si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, para todo x en un intervalo abierto que contiene a x, entonces la gráfica de h está interpuesta *entre* las gráficas de f y g en ese intervalo, como se ilustra en la Figura 2.33. Si f y g tienen el mismo límite L cuando x tiende a a, entonces evidentemente, h también tiene el límite L.

EJEMPLO 10 La función seno tiene la propiedad de que $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ para todo número real t. Usar este hecho y el Teorema de la Intercalación para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Solución Podemos escribir

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$$

para todo $x \neq 0$. Multiplicando por x^2 (que es un número positivo cuando $x \neq 0$), obtenemos

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Como $\lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$ y $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$,

se deduce del Teorema de la Intercalación (2.22), con $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2$, que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \quad \blacksquare$$

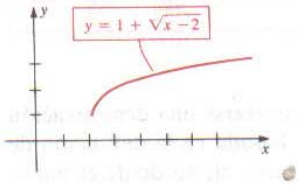
Para los límites unilaterales se pueden demostrar teoremas análogos a todos los teoremas sobre límites enunciados en esta sección. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to a^+} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to a^+} g(x)$$

y
$$\lim_{x \to a^+} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a^+} f(x)}$$

con las restricciones acostumbradas acerca de la existencia de los límites y las raíces n-ésimas. Existen también resultados análogos para los límites por la izquierda.

FIGURA 2.34



EJEMPLO 11 Determinar $\lim_{x \to 2^+} (1 + \sqrt{x-2})$.

Solución Aplicando teoremas sobre límites (unilaterales),

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^+} (1 + \sqrt{x-2}) &= \lim_{x \to 2^+} 1 + \lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} \\ &= 1 + \sqrt{\lim_{x \to 2^+} (x-2)} \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

La gráfica de $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ está trazada en la Figura 2.34. Nótese que no hay límite por la izquierda puesto que $\sqrt{x-2}$ no es un número real si $x < 2$. •

EJEMPLO 12 En la Teoría de la Relatividad, la *fórmula de Lorentz para la contracción*

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

da la relación entre la longitud L de un objeto que se mueve con velocidad v respecto de un observador, y la longitud L_0 en reposo, donde c es la velocidad de la luz. Esta fórmula indica que un objeto es más corto cuando se está moviendo que cuando se halla en reposo. Calcular e interpretar $\lim_{v \to c^-} L$ y explicar por qué se requiere un límite por la izquierda.

Solución Aplicando teoremas sobre límites (unilaterales),

$$\begin{aligned} \lim_{v \to c^-} L &= \lim_{v \to c^-} L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= L_0 \lim_{v \to c^-} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= L_0 \sqrt{\lim_{v \to c^-} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \\ &= L_0 \sqrt{0} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si la velocidad de un objeto pudiera acercarse a la velocidad de la luz, entonces su longitud (dimensión en la dirección del movimiento), medida por un observador en reposo, tendería a cero. A veces se usa este resultado para justificar la teoría de que la velocidad de la luz (aproximadamente 3.0×10^8 m/s, o bien 186 000 mi/s) es la velocidad extrema del universo; es decir, ningún objeto puede llegar a tener una velocidad mayor que o igual a c.

El límite por la izquierda se necesita porque $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ no es un número real si $v > c$. •

EJERCICIOS 2.4

Ejercicios 1-40: Calcule el límite, si es que existe.

1. $\lim_{x \to -2} (3x^3 - 2x + 7)$
2. $\lim_{x \to 4} (5x^2 - 9x - 8)$
3. $\lim_{x \to \sqrt{2}} (x^2 + 3)(x - 4)$
4. $\lim_{t \to -3} (3t + 4)(7t - 9)$
5. $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}$
6. $\lim_{x \to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$
7. $\lim_{x \to 7} 0$
8. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{4x^2 - 6x + 3}{16x^3 + 8x - 7}$
9. $\lim_{x \to \sqrt{2}} 15$
10. $\lim_{x \to 15} \sqrt{2}$
11. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 - 7x + 2}$
12. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{(1/x) + (1/3)}$
13. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^3 - 8}$
14. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{(x - 2)^2}$
15. $\lim_{x \to 16} \dfrac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$
16. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$
17. $\lim_{s \to 4} \dfrac{6s - 1}{2s - 9}$
18. $\lim_{x \to \pi} (x - 3.1416)$
19. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$
20. $\lim_{x \to 1} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right)^6$
21. $\lim_{x \to 16} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{3/2}}{\sqrt[4]{x} + 5}$
22. $\lim_{x \to -8} \dfrac{16x^{2/3}}{4 - x^{4/3}}$
23. $\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2 + 5x - 3x^3}{x^2 - 1}}$
24. $\lim_{x \to \pi} \sqrt[5]{\dfrac{x - \pi}{x + \pi}}$
25. $\lim_{h \to 0} \dfrac{4 - \sqrt{16 + h}}{h}$
26. $\lim_{h \to 0} \left(\dfrac{1}{h} \right) \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + h}} - 1 \right)$
27. $\lim_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)^5}{x^5 - 1}$
28. $\lim_{x \to 6} (x + 4)^3 (x - 6)^2$
29. $\lim_{v \to 3} v^2 (3v - 4)(9 - v^3)$
30. $\lim_{k \to 2} \sqrt{3k^2 + 4}\, \sqrt[3]{3k + 2}$
31. (a) $\lim_{x \to 5^-} \sqrt{5 - x}$
 (b) $\lim_{x \to 5^+} \sqrt{5 - x}$
 (c) $\lim_{x \to 5} \sqrt{5 - x}$
32. (a) $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{8 - x^3}$
 (b) $\lim_{x \to 2^+} \sqrt{8 - x^3}$
 (c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{8 - x^3}$
33. (a) $\lim_{x \to 1^-} \sqrt[3]{x^3 - 1}$
 (b) $\lim_{x \to 1^+} \sqrt[3]{x^3 - 1}$
 (c) $\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x^3 - 1}$
34. (a) $\lim_{x \to -8^-} x^{2/3}$
 (b) $\lim_{x \to -8^+} x^{2/3}$
 (c) $\lim_{x \to -8} x^{2/3}$
35. $\lim_{x \to 5^+} (\sqrt{x^2 - 25} + 3)$
36. $\lim_{x \to 3^-} x\sqrt{9 - x^2}$
37. $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{(x - 3)^2}}{x - 3}$
38. $\lim_{x \to -10^-} \dfrac{x + 10}{\sqrt{(x + 10)^2}}$
39. $\lim_{x \to 5^+} \dfrac{1 + \sqrt{2x - 10}}{x + 3}$
40. $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - 16}}{x + 4}$

Ejercicios 41-43: n denota un entero arbitrario. Para cada función f lleve a cabo el trazo de la gráfica de f y calcule $\lim_{x \to n^-} f(x)$ y $\lim_{x \to n^+} f(x)$.

41. $f(x) = (-1)^n$ si $n \le x < n + 1$
42. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = n \\ 1 & \text{si } x \neq n \end{cases}$
43. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = n \\ 0 & \text{si } x \neq n \end{cases}$

Ejercicios 44-45: $[\![\]\!]$ denota la función mayor entero y n es un entero arbitrario.

44. Determine $\lim_{x \to n^-} [\![x]\!]$ y $\lim_{x \to n^+} [\![x]\!]$.
45. Sea $f(x) = x - [\![x]\!]$. Calcule $\lim_{x \to n^-} f(x)$ y $\lim_{x \to n^+} f(x)$.
46. Ponga de manifiesto que si $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to a} [f(x)/g(x)]$ no existe. (*Sugerencia:* Supóngase que hay un número M tal que $\lim_{x \to a} [f(x)/g(x)] = M$ y considérese que
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \right]$$
47. Use el Teorema de la Intercalación y el hecho de que $\lim_{x \to 0} (|x| + 1) = 1$ para demostrar que $\lim_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1$.
48. Use el Teorema de la Intercalación con $f(x) = 0$ y $g(x) = |x|$ para demostrar que
$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} = 0$$
49. Demuestre que si c es un número real no negativo y $0 \le f(x) \le c$ para todo x, entonces $\lim_{x \to 0} x^2 f(x) = 0$.
50. Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^4 \operatorname{sen}(1/\sqrt[3]{x}) = 0$. (*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 10.)
51. La ley de Charles para los gases afirma que si la presión permanece constante entonces la relación entre el volumen V que un gas ocupa y su temperatura T (en grados C) está dada por $V =$

$V_0(1 + \frac{1}{273}T)$. La temperatura $T = -273$ °C es *el cero absoluto*.

(a) Calcule $\lim_{T \to -273^+} V$.

(b) ¿Por qué se necesita un límite por la derecha?

52. Según la Teoría de la Relatividad, la longitud de un objeto depende de su velocidad v (véase el Ejemplo 12). Einstein demostró también que la masa m de un objeto depende de v según la fórmula $m = m_0/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$, donde m_0 es la masa del objeto en reposo. Investigue $\lim_{v \to c^-} m$ y utilice su resultado para justificar que c es la velocidad máxima en el universo.

53. Una lente convexa tiene una distancia focal f en centímetros. Si un objeto se coloca a p centímetros de la lente, la distancia q de la imagen a la lente está relacionada con p y f por la *ecuación de las lentes* $(1/p) + (1/q) = 1/f$. Como se muestra en la figura, p debe ser mayor que f para que los rayos converjan.

(a) Analice $\lim_{p \to f^+} q$.

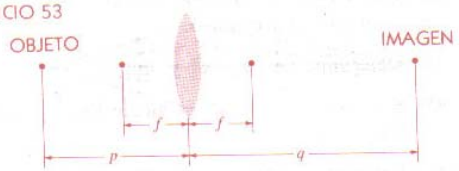
(b) ¿Qué sucede a la imagen cuando $p \to f^+$?

54. Consulte el Ejercicio 53. En la figura del Ejercicio 54 se muestra una lupa formada por una lente convexa. El objeto que será amplificado se coloca de manera que su distancia p a la lente sea menor que la distancia focal f. La amplificación lineal M es la razón del tamaño (altura) de la imagen al tamaño del objeto. Usando triángulos semejantes, $M = q/p$, donde q es la distancia de la imagen a la lente.

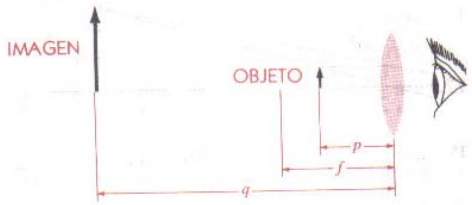
(a) Calcule $\lim_{p \to 0^+} M$. ¿Por qué se necesita un límite por la derecha?

(b) Investigue $\lim_{p \to f^-} M$. Explique lo que sucede al tamaño de la imagen.

EJERCICIO 53



EJERCICIO 54



2.5 FUNCIONES CONTINUAS

En la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ se hizo énfasis en la restricción $x \neq a$. En varios ejemplos de la sección anterior se vio que $\lim_{x \to a} f(x)$ puede existir aunque f no esté definida en a. Ahora se prestará atención a los casos en que a se halla en el dominio de f. Si f está definida en a y $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces este límite puede o no ser igual a $f(a)$. Si $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ entonces f es **continua** en a, de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN (2.23)

Una función f es **continua** en un número a si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

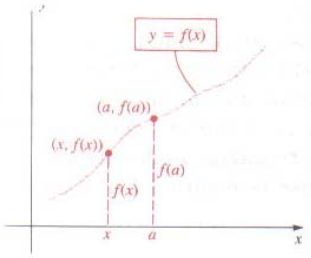
(i) f está definida en un intervalo abierto que contiene a a.

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si f no es continua en a entonces se dice que es **discontinua** en a o que tiene una **discontinuidad** en a. Si f es continua en a, entonces por la Definición (2.23) (i), hay un punto $(a, f(a))$ en la gráfica de f. Además, como $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, a medida

FIGURA 2.35



que x se acerca a a, $f(x)$ se acerca a $f(a)$, o bien, en términos geométricos, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f, se acerca al punto $(a, f(a))$ (véase la Figura 2.35).

A veces es conveniente pensar que las funciones que son continuas en todos los números de un intervalo son aquellas cuyas gráficas pueden trazarse sin levantar el lápiz del papel; es decir, que las gráficas no tienen interrupciones. Otra interpretación de una función continua es que un cambio pequeño en x produce solamente un cambio pequeño en el valor de la función $f(x)$. Estas descripciones no son completamente rigurosas pero contribuyen a desarrollar una idea intuitiva de las funciones continuas.

EJEMPLO 1

(a) Demostrar que un polinomio es una función continua en todo número real a.

(b) Demostrar que una función racional es continua en todos los números reales de su dominio.

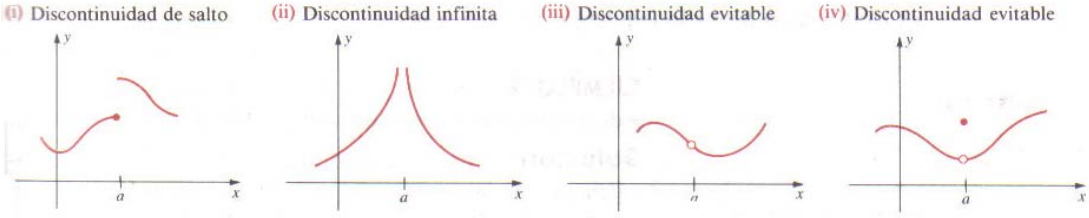
Solución

(a) Un polinomio f está definido en todo $\mathbb{R}$. Por el Teorema (2.18), $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ para todo número real a. Entonces f satisface las condiciones (i)-(iii) de la Definición (2.23) y, por lo tanto, es una función continua en a.

(b) Si q es una función racional, entonces $q = f/h$, donde f y h son polinomios. Por lo tanto q está definida en todos los números reales *excepto* en los ceros de h. Resulta que si $h(a) \neq 0$, entonces q está definida en un intervalo abierto que contiene a a. Además, por (2.19), $\lim_{x \to a} q(x) = q(a)$. Aplicando la Definición (2.23) se deduce que q es continua en a. •

En la Figura 2.36 aparecen las gráficas de varias funciones que *no* son continuas en el número real a y se indican los nombres que se dan a tales discontinuidades.

FIGURA 2.36



En el caso de la discontinuidad de salto (i), los límites por la derecha y por la izquierda cuando x tiende a a existen, pero son distintos y por lo tanto, $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, como se requiere en (ii) de la Definición (2.23).

Para la discontinuidad infinita (ii), no se satisface *ninguna* de las tres condiciones

de la Definición (2.23). En la Sección 4.6 se estudiarán con mayor profundidad las discontinuidades infinitas.

Las discontinuidades evitables en (iii) y (iv) son parecidas porque $\lim_{x\to a} f(x)$ existe en ambos casos. En (iii) $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, pues f no está definida en a; sin embargo, en (iv) $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, a pesar de que f *sí* está definida en a. Si f es una función que tiene una discontinuidad evitable en a y se *define* (o se *vuelve a definir*) $f(a)$ como el número $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces la (nueva) función resultante *es* continua en a. Para ilustrar esto, en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2 (véase la Figura 2.14) se puede *definir* la función f de manera que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} & \text{si } x \neq 9 \\ 6 & \text{si } x = 9 \end{cases}$$

y entonces la función resultante f es continua en $a = 9$. Con esto se logra "evitar" la discontinuidad de la función original en $a = 9$.

Las funciones cuyas gráficas se tienen en la Figura 2.36 parecen ser continuas en los números distintos de a. La mayoría de las funciones que se usan en cálculo son de este tipo; es decir, pueden ser discontinuas en algunos números de sus dominios, pero continuas en el resto del dominio.

Si una función f es continua en todos los números de un intervalo abierto (a, b) se dice que **f es continua en el intervalo (a, b)**. Análogamente, una función es continua en un intervalo infinito de la forma (a, ∞) o bien $(-\infty, b)$, si es continua en todos los números del intervalo. La siguiente definición abarca el caso de un intervalo cerrado.

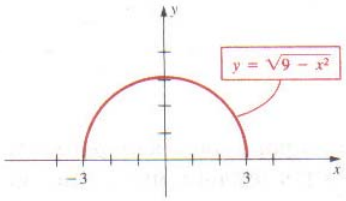
DEFINICIÓN (2.24)

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La **función f es continua en $[a, b]$** si lo es en (a, b) y además

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Si una función f tiene un límite por la derecha o por la izquierda como los que aparecen en la Definición (2.24), se dice que **f es continua en a por la derecha** o que **f es continua en b por la izquierda**, respectivamente.

FIGURA 2.37



EJEMPLO 2 Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Trazar la gráfica de f y demostrar que f es continua en el intervalo cerrado $[-3, 3]$.

Solución Por (1.12), la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$, o equivalentemente la de $y^2 = 9 - x^2$, es una circunferencia con centro en el origen y radio 3. Resulta que la gráfica de $y = \sqrt{9 - x^2}$ y, por lo tanto la gráfica de f, es la mitad superior de esa circunferencia (véase la Figura 2.37).

Si $-3 < c < 3$ entonces, usando el Teorema (2.21),

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - c^2} = f(c).$$

Así, por la Definición (2.23), f es continua en c.

Según la Definición (2.24), sólo falta analizar los límites unilaterales en los extremos del intervalo. Como

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 = f(-3),$$

f es continua por la derecha en -3. Y como también

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 = f(3)$$

f es continua por la izquierda en 3. Esto completa la demostración de que f es continua en $[-3, 3]$. •

Definir la continuidad en otros tipos de intervalos no ofrece ninguna dificultad. Por ejemplo, una función f es continua en $[a, b)$ o bien $[a, \infty)$ si lo es en todos los números del intervalo mayores que a y si, además, f es continua por la derecha en a. Para que una función sea continua en intervalos de la forma $(a, b]$ o bien $(-\infty, b]$ se requiere que sea continua en todos los números del intervalo menores que b y que también sea continua por la izquierda en b.

Cuando se requiera estudiar la continuidad de una función f es conveniente obtener los intervalos más grandes en los que f sea continua, como se ilustra en el ejemplo siguiente. Por supuesto, f también es continua en cualquier subintervalo de esos intervalos.

EJEMPLO 3 Discutir la continuidad de f si $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4}$.

Solución La función no está definida cuando el denominador $x - 4$ es cero (es decir, para $x = 4$), o cuando el radicando $x^2 - 9$ es negativo (es decir, si $-3 < x < 3$). Cualquier otro número real está en uno de los intervalos $(-\infty, -3]$, $[3, 4)$, o bien $(4, \infty)$. La demostración de que f es continua en cada uno de estos intervalos es parecida a la que se dio en la solución del Ejemplo 23. Por ejemplo, para demostrar la continuidad en $[3, 4)$ hay que demostrar que

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \quad \text{si } 3 < c < 4$$

y también que

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3).$$

Se dejan al lector los detalles de la demostración para éste y para los otros intervalos.

Los teoremas sobre límites de la Sección 2.4 se pueden usar para establecer el siguiente teorema.

TEOREMA (2.25)

Si las funciones f y g son continuas en a, entonces también lo son la suma $f + g$, la diferencia $f - g$, el producto fg y, si $g(a) \neq 0$, el cociente f/g.

Demostración Si f y g son ambas continuas en a, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. Por la definición de suma de funciones, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f+g)(x) &= \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]\\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\ &= f(a) + g(a)\\ &= (f+g)(a)\end{aligned}$$

Esto demuestra que $f + g$ es continua en a. El resto del teorema se demuestra de manera parecida. • •

Si f y g son continuas en un intervalo I entonces $f + g$, $f - g$ y fg son continuas en I. Si además $g(a) \neq 0$ para todo a en I, entonces f/g es continua en I. Estos resultados se pueden generalizar a más de dos funciones; es decir, las sumas, diferencias, productos o cocientes que involucran cualquier número de funciones continuas son continuas (siempre y cuando no se anulen los denominadores).

En el Apéndice II se da una demostración del siguiente resultado sobre límites de funciones compuestas.

TEOREMA (2.26)

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to a} g(x) = b$, y si f es continua en b, entonces

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

El Teorema (2.26) se usa principalmente para demostrar otros teoremas. Por ejemplo, si n es un entero positivo y $f(x) = \sqrt[n]{x}$, entonces

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y

$$f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Aplicando ahora el hecho de que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right),$$

se obtiene el resultado enunciado en el Teorema (2.21); es decir,

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)},$$

siempre y cuando exista la raíz n-ésima indicada.

Del Teorema (2.26) se deduce directamente el siguiente resultado.

TEOREMA (2.27)

Si g es continua en a y f es continua en $b = g(a)$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

Este teorema afirma que la composición de las funciones f y g es continua en a. Este resultado puede generalizarse al caso de funciones continuas en intervalos. A veces se enuncia como sigue: *La composición de funciones continuas es continua.*

EJEMPLO 4 Sea $f(x) = |x|$. Probar que f es continua en todo número real a.

Solución Como $|x| = \sqrt{x^2}$, por (2.21) y (2.17) tenemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} |x| = \lim_{x \to a} \sqrt{x^2}$$
$$= \sqrt{\lim_{x \to a} x^2} = \sqrt{a^2} = |a| = f(a).$$

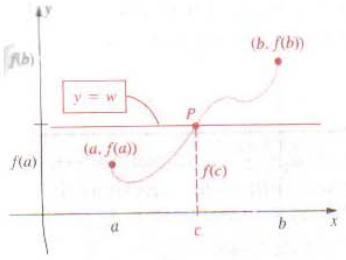
De la Definición (2.23) concluimos que f es continua en a •

En textos más avanzados de cálculo se puede encontrar una demostración de la siguiente propiedad de las funciones continuas.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO (2.28)

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = w$.

FIGURA 2.38



El Teorema (2.28) afirma que *cuando x varía de a a b, la función continua f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$*. Si se considera la gráfica de la función continua f como una curva que va del punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ sin interrupciones, como se ilustra en la Figura 2.38, se ve que para cualquier número w entre $f(a)$ y $f(b)$ la recta horizontal con ordenada w debe cortar a la gráfica al menos en un punto P. La abscisa c de P es un número tal que $f(c) = w$.

EJEMPLO 5 Verificar el Teorema del Valor Intermedio (2.28) para $f(x) = \sqrt{x + 1}$ en el intervalo $[3, 24]$.

Solución La función f es continua en $[3, 24]$. Como $f(3) = 2$ y $f(24) = 5$, si w es cualquier número real entre 2 y 5, debe encontrarse un número c en el intervalo $[3, 24]$ tal que $f(c) = w$, es decir, $\sqrt{c + 1} = w$. Elevando al cuadrado ambos lados

de la ecuación y despejando c obtenemos $c = w^2 - 1$. Este número c está en el intervalo [3, 24], pues si $2 < w < 5$, entonces

$$4 < w^2 < 25, \quad \text{o bien} \quad 3 < w^2 - 1 < 24.$$

Para verificar nuestro resultado escribimos

$$f(c) = f(w^2 - 1) = \sqrt{(w^2 - 1) + 1} = w \quad \bullet$$

Como corolario del Teorema (2.28) se obtiene que *si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces existe un número c entre a y b tal que $f(c) = 0$; es decir, f tiene un cero en c.* Geométricamente esto significa que si el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de una función continua se encuentra abajo del eje x y el punto $(b, f(b))$ se encuentra arriba del eje x, o viceversa, entonces la gráfica cruza el eje x en algún punto $(c, 0)$ tal que $a < c < b$.

La siguiente es una consecuencia útil del Teorema del Valor Intermedio. El intervalo al que se hace referencia puede ser abierto, cerrado, semiabierto (o abierto de un lado) o infinito.

TEOREMA (2.29)

Si una función f es continua en un intervalo y no tiene ceros en él, entonces $f(x) > 0$ o bien $f(x) < 0$ para todo x en el intervalo.

Demostración La tesis del teorema establece que, según la hipótesis dada, $f(x)$ tiene el mismo signo en todo el intervalo. Si la conclusión fuera *falsa* existirían números x_1 y x_2 en el intervalo tales que $f(x_1) > 0$ y $f(x_2) < 0$. Por lo que se dijo anteriormente, esto implicaría que $f(c) = 0$ para algún número c entre x_1 y x_2, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, la tesis es verdadera. • •

En el Capítulo 4 se aplicará el Teorema (2.29) a la derivada de una función f como ayuda para conocer el modo en que $f(x)$ varía en diversos intervalos. El siguiente corolario es un caso especial muy útil para estudiar polinomios. En el enunciado del corolario, la expresión *soluciones sucesivas* c y d significa que no hay ninguna otra solución entre c y d.

COROLARIO (2.30)

Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Si los números reales c y d son soluciones sucesivas de la ecuación

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

entonces los valores de $P(x)$ para x en el intervalo abierto (c, d) son todos positivos, o bien, todos negativos.

El corolario implica que si se elige cualquier número k tal que $c < k < d$, y si el valor $P(k)$ del polinomio es positivo, entonces $P(x)$ es positivo para *todo* x en (c, d).

Si $P(k)$ es negativo, entonces $P(x)$ es negativo en todo el intervalo (c, d). A $P(k)$ se le denomina un **valor de prueba** para el intervalo (c, d). También pueden emplearse valores de prueba para intervalos infinitos de la forma $(-\infty, a)$ o bien (a, ∞), si la ecuación $P(x) = 0$ no tiene soluciones en ellos. En el siguiente ejemplo se muestra cómo se utilizan los valores de prueba.

EJEMPLO 6 El polinomio de Legendre de tercer grado $P(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ aparece en la solución de los problemas de transmisión (o transferencia) de calor en física y en ingeniería. Encontrar dónde $P(x) > 0$ y dónde $P(x) < 0$.

Solución Comenzamos por calcular las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$. Escribiendo

$$P(x) = \tfrac{1}{2}x(5x^2 - 3) = 0,$$

obtenemos $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3/5} + \pm\sqrt{15}/5 \approx 0.77$. Por lo tanto, las soluciones sucesivas de $P(x) = 0$ son $-\sqrt{15}/5$, 0 y $\sqrt{15}/5$, en orden creciente. Estas soluciones determinan los cuatro intervalos siguientes que no contienen soluciones $P(x) = 0$:

$$(-\infty, -\sqrt{15}/5), \quad (-\sqrt{15}/5, 0), \quad (0, \sqrt{15}/5), \quad (\sqrt{15}/5, \infty)$$

Escogemos luego un número k en cada uno de estos intervalos y aplicamos el Corolario (2.30). Eligiendo el número -1 en $(-\infty, -\sqrt{15}/5)$, resulta el valor de prueba

$$P(-1) = \tfrac{1}{2}(-1)[5(-1)^2 - 3] = -1.$$

Como $P(-1) = -1 < 0$, del corolario se deduce que $P(x) < 0$ para todo x en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{15}/5)$.

Escogiendo $-\frac{1}{2}$ en el intervalo $(-\sqrt{15}/5, 0)$, obtenemos el valor de prueba

$$P(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})[5(\tfrac{1}{4}) - 3] = \tfrac{7}{16} > 0$$

y por tanto, $P(x) > 0$ para todo x en $(-\sqrt{15}/5, 0)$.

Los intervalos restantes se estudian de la misma manera. Es conveniente ordenar el resultado de este trabajo en una tabla como sigue (verifíquense todos los valores):

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{15}/5)$	$(-\sqrt{15}/5, 0)$	$(0, \sqrt{15}/5)$	$(\sqrt{15}/5), \infty)$
k	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Valor de prueba $P(k)$	-1	$\frac{7}{16}$	$-\frac{7}{16}$	1
Signo de $P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

En consecuencia, $P(x) > 0$ en los intervalos $(-\sqrt{15}/5, 0)$ y $(\sqrt{15}/5, \infty)$ y $P(x) < 0$ en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{15}/5)$ y $(0, \sqrt{15}/5)$. •

EJERCICIOS 2.5

Ejercicios 1-6: Demuestre que la función f es continua en el número a dado.

1. $f(x) = \sqrt{2x - 5} + 3x, \; a = 4$

2. $f(x) = 3x^2 + 7 - \dfrac{1}{\sqrt{-x}}, \; a = -2$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, $a = 3$

4. $f(x) = 1/x$, $a = 10^{-6}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$, $a = -5$

6. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2x + 1}$, $a = 8$

Ejercicios 7-10: Demuestre que f es continua en el intervalo indicado.

7. $f(x) = \sqrt{x - 4}$; $[4, 8]$

8. $f(x) = \sqrt{16 - x}$; $(-\infty, 16]$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $(0, \infty)$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$; $(1, 3)$

Ejercicios 11-22: Encuentre todos los números en los que la función f es continua.

11. $f(x) = \dfrac{3x - 5}{2x^2 - x - 3}$

12. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

13. $f(x) = \sqrt{2x - 3} + x^2$

14. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x - 4}}$

15. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

17. $f(x) = \dfrac{|x + 9|}{x + 9}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

19. $f(x) = \dfrac{5}{x^3 - x^2}$

20. $f(x) = \dfrac{4x - 7}{(x + 3)(x^2 + 2x - 8)}$

21. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}\sqrt{25 - x^2}}{x - 4}$

22. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x}}{\sqrt{x - 6}}$

23-28. Describa las discontinuidades de las funciones definidas en los Ejercicios 7-12 de la Sección 2.2.

29. Sea $f(x) = \begin{cases} cx^2 - 3 & \text{si } x \le 2 \\ cx + 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Encuentre un valor de c para el cual f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

30. Sea $f(x) = \begin{cases} c^2 x & \text{si } x < 1 \\ 3cx - 2 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$

Determine todos los valores de c para los que f es continua en $\mathbb{R}$.

31. Sea $f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = -3 \\ \dfrac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} & \text{si } |x| < 3 \\ d & \text{si } x = 3. \end{cases}$

Encuentre valores de c y d para los que f sea continua en $[-3, 3]$.

32. Sea $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \le -1 \\ cx + d & \text{si } -1 < x < 2 \\ -5x & \text{si } x \ge 2. \end{cases}$

Obtenga valores de c y d para los que f sea continua en $\mathbb{R}$.

33. Sean

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \le 0 \\ |x - 4| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Determine si las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ son continuas en 0.

34. Sea $f(x) = (x - [\![x]\!])^2$, donde $[\![\]\!]$ denota la función mayor entero. Sea n un entero arbitrario. Demuestre (a) que f es continua en el intervalo $[n, n + 1)$, y (b) que f no es continua en $(n, n + 1]$. Trace la gráfica de f.

35. Demuestre que si $f(x) = 1/x$ entonces f es continua en cualquier intervalo abierto que no contenga al origen. ¿Qué se puede decir de los intervalos abiertos que contienen al origen?

Ejercicios 36-37: ¿Es continua f en 3? Justifique su respuesta.

36. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \ne 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 3|}{x - 3} & \text{si } x \ne 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

38. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{1 + x} & \text{si } x \ne -1 \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$

¿Es continua f en -1? Justifique su respuesta.

39. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2. \end{cases}$

¿Es continua f en $x = 2$? Justifique su respuesta.

40. Sea $f(x) = 0$ si x es racional, y $f(x) = 1$ si x es irracional. Demuestre que f es discontinua en todos los números reales a.

41. Un vendedor tiene un salario básico de \$12 000 (dólares) y recibe \$1 000 de comisión por cada \$50 000 de las ventas que excedan \$100 000. Trace una gráfica que muestre su ingreso como función de las ventas. Discuta la continuidad de la función.

42. La cuota de un estacionamiento para automóviles es de \$1.00 (dólar) por la primera media hora y \$0.50 por cada media hora o fracción adicional, hasta un máximo de \$5.00. Encuentre una función f que relacione la cuota con el tiempo que se deja un automóvil en el estacionamiento. Trace la gráfica de f y discuta la continuidad de f.

Ejercicios 43-46: Verifique el Teorema del Valor Intermedio (2.28) para la función f en el intervalo $[a, b]$, demostrando que si w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = w$.

43. $f(x) = x^3 + 1$; $[-1, 2]$

44. $f(x) = -x^3$; $[0, 2]$

45. $f(x) = x^2 + 4x + 4$; $[0, 1]$

46. $f(x) = x^2 - x$; $[-1, 3]$

47. Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$. Use el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que existe un número real a tal que $f(a) = 100$.

48. Demuestre que la ecuación $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1.

49. Un meteorólogo encuentra que la temperatura T (en °F) durante un frío día de invierno estuvo dada por

$$T = 0.05t(t - 12)(t - 24)$$

donde t es el tiempo (en horas) y $t = 0$ corresponde a las 6 A.M.

(a) Use el Corolario (2.30) para determinar cuándo la temperatura T estuvo arriba de 0° y cuándo estuvo abajo de 0°.

(b) Demuestre que la temperatura fue de 32°F en algún momento entre las 12 A.M. y la 1 P.M. (*Sugerencia:* Utilice el Teorema del Valor Intermedio.)

50. La temperatura T (en °C) a la que el agua hierve está dada aproximadamente por la fórmula

$$T = 100.862 - 0.0415\sqrt{h + 431.03}$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar (en metros). Use el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que entre los 4000 y los 4500 metros sobre el nivel del mar hay una altitud a la cual el agua hierve a 98°C.

Ejercicios 51-52: Use el Corolario (2.30) para encontrar todos los valores de x para los cuales (a) $f(x) > 0$; (b) $f(x) < 0$.

51. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

52. $f(x) = x(x + 1)^2(x - 3)(x - 5)$

2.6 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Recta tangente a una gráfica.
2. Velocidad en el movimiento rectilíneo.
3. Definición del límite de una función.
4. Interpretaciones geométricas de $\lim_{x \to a} f(x) = L$.
5. Límites por la derecha y por la izquierda.
6. Teoremas sobre límites.
7. Límites de polinomios y funciones racionales.
8. Teorema de la Intercalación.
9. Función continua.
10. Tipos de discontinuidades de las funciones.
11. Teorema del Valor Intermedio.
12. Continuidad en un intervalo.

EJERCICIOS 2.6

Ejercicios 1-20: Calcule el límite si es que existe.

1. $\lim_{x \to 3} \dfrac{5x + 11}{\sqrt{x + 1}}$

2. $\lim_{x \to -2} \dfrac{6 - 7x}{(3 + 2x)^4}$

3. $\lim_{x \to -2} (2x - \sqrt{4x^2 + x})$

4. $\lim_{x \to 4} (x - \sqrt{16 - x^2})$

5. $\lim_{x \to 3/2} \dfrac{2x^2 + x - 6}{4x^2 - 4x - 3}$

6. $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - x - 2}$

7. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - x - 2}$

8. $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 3}$

9. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

10. $\lim_{x \to 5} \dfrac{(1/x) - (1/5)}{x - 5}$

11. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{8x^3 - 1}{2x - 1}$

12. $\lim_{x \to 2} 5$

13. $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{3 - x}{|3 - x|}$

14. $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

15. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(a + h)^4 - a^4}{h}$

16. $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{\dfrac{x + 3}{x^3 + 27}}$

17. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^{-3} - 2^{-3}}{h}$

18. $\lim_{x \to 5/2} (\sqrt{5 - 2x} - x^2)$

19. $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{(x - 2)^2}}{2 - x}$

20. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{|x - 1|}$

Ejercicios 21-26: Trace la gráfica de la función f definida parte por parte y calcule

(a) $\lim_{x \to a} f(x)$ (b) $\lim_{x \to a} f(x)$ y (c) $\lim_{x \to a} f(x)$

para el valor de a indicado, si es que el límite existe.

21. $a = 2$: $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

22. $a = 2$: $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \le 2 \\ 4 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

23. $a = -3$: $f(x) = \begin{cases} 1/(2 - 3x) & \text{si } x < -3 \\ \sqrt[3]{x + 2} & \text{si } x \ge -3 \end{cases}$

24 $a = -3$: $f(x) = \begin{cases} 9/x^2 & \text{si } x \le -3 \\ 4 + x & \text{si } x > -3 \end{cases}$

25. $a = 1$: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

26. $a = 0$: $f(x) = \begin{cases} (x^4 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Ejercicios 27-28: Calcule el límite. ($[\![\]\!]$ denota la función mayor entero.)

27. $\lim_{x \to 3^-} ([\![x]\!] - x^2)$

28. $\lim_{x \to 3} ([\![x]\!] - x^2)$

29. Demuestre directamente a partir de la Definición (2.10) para el límite que

$$\lim_{x \to 6} (5x - 21) = 9.$$

30. Sea $f(x) = 1$ si x es racional y $f(x) = -1$ si x es irracional. Demuestre que para todo número real a no existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

Ejercicios 31-34: Encuentre todos los números en los que f es continua.

31. $f(x) = 2x^4 - \sqrt[3]{x} + 1$

32. $f(x) = \sqrt{(2 + x)(3 - x)}$

33. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x^4 - 16}$

34. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$

Ejercicios 35-38: Determine las discontinuidades de f.

35. $f(x) = \dfrac{|x^2 - 16|}{x^2 - 16}$

36. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 16}$

37. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}$

38. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^3 - 8}$

39. Sea $f(x) = 1/x^2$. Verifique el Teorema del Valor Intermedio (2.28) para f en el intervalo $[2, 3]$.

CAPÍTULO **3**

LA DERIVADA

*La **derivada de una función** es uno de los instrumentos más poderosos de las matemáticas y las ciencias aplicadas. En este capítulo se define la derivada y se discuten muchas de las propiedades relacionadas con este concepto tan importante.*

3.1 DEFINICIÓN DE LA DERIVADA

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al número real a. En la Figura 3.1 se ilustran la gráfica de f y una recta secante l_{PQ} que pasa por $P(a, f(a))$ y $Q(x, f(x))$. La recta de trazo punteado l representa una posible recta tangente en el punto P.

FIGURA 3.1

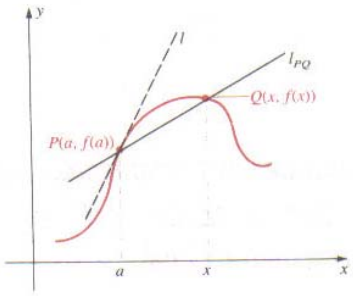
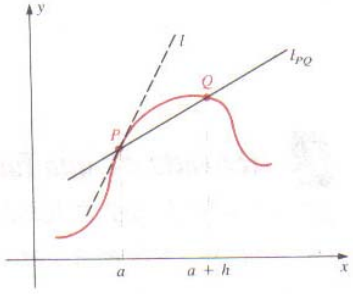


FIGURA 3.2



En la Sección 2.1 definimos la pendiente m de l como el valor de límite de la pendiente de l_{PQ} cuando Q tiende a P. Así, de la Definición 2.2,

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre y cuando el límite exista. Si se introduce una nueva variable h tal que $x = a + h$ (es decir, $h = x - a$), como se ilustra en la Figura 3.2, se obtiene la siguiente fórmula para m:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

que es equivalente a la anterior. En el Apéndice II se da una demostración de esta equivalencia. El límite anterior es uno de los conceptos fundamentales del cálculo y se llama *derivada de la función f en a*.

DEFINICIÓN (3.1)

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a. La **derivada de f en a**, denotada por $f'(a)$, está dada por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

La fórmula para $f'(a)$ también se puede escribir como sigue:

DEFINICIÓN ALTERNA (3.1′)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

El símbolo $f'(a)$ se lee *f prima de a*. La frase $f'(a)$ *existe* significa que el límite en las Definiciones (3.1) y (3.1′) existe. Si $f'(a)$ existe decimos que la función f **es derivable en** a, que **es diferenciable en** a **o que** f **tiene derivada en** a.

Suponiendo que las funciones f y s de las Definiciones (2.2) y (2.5) de la Sección 2.1 son derivables en a, se pueden enunciar dichas definiciones de la siguiente manera:

APLICACIONES DE LA DERIVADA (3.2)

(i) **Recta tangente:** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$.

(ii) **Velocidad:** Si un punto P se mueve a lo largo de una recta coordenada de manera que al tiempo t su coordenada es $s(t)$, entonces su velocidad al tiempo a es $s'(a)$.

Más adelante en el texto se presentan otras aplicaciones de la derivada.

Una función f **es derivable en un intervalo abierto** (a, b) si lo es en todos los números c de (a, b). También se considerarán funciones que son derivables en un intervalo infinito (a, ∞), $(-\infty, a)$ o bien $(-\infty, \infty)$. Para intervalos cerrados usamos la siguiente convención que es análoga a la definición de continuidad en un intervalo cerrado dada en (2.24).

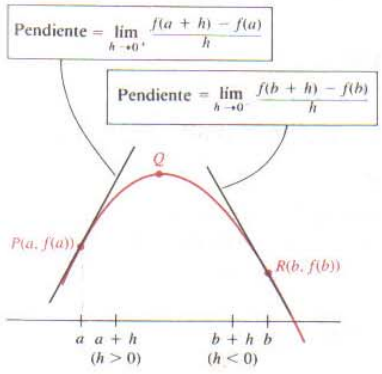
DEFINICIÓN (3.3)

Una función f **es derivable en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si lo es en el intervalo abierto (a, b) y los límites

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h}$$

existen.

FIGURA 3.3



Los límites por la derecha y por la izquierda en la Definición (3.3) se llaman **derivada por la derecha** y **derivada por la izquierda** de f en a y b, respectivamente. Nótese que para la derivada por la derecha se tiene que $h \to 0^+$ y $a + h$ tiende a *a por la derecha*. Para la derivada por la izquierda se tiene que $h \to 0^-$ y $b + h$ tiende a *b por la izquierda*.

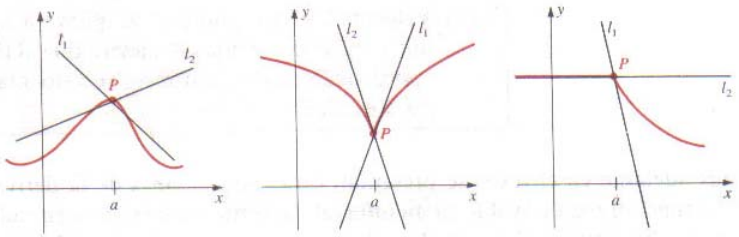
Si f es una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y no está definida fuera de él, entonces las derivadas por la derecha y por la izquierda permiten definir las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $P(a, f(a))$ y $R(b, f(b))$, respectivamente, como se ilustra en la Figura 3.3. Por lo tanto, para obtener la pendiente de la recta tangente en P se toma el valor límite de las pendientes de las rectas

secantes que pasan por P y Q cuando Q tiende a P por la derecha. Para la recta tangente en R, el punto Q tiende a R por la izquierda.

La derivabilidad de una función en intervalos de la forma $[a, b)$, $[a, \infty)$, $(a, b]$, o bien $(-\infty, b]$ se define usando los límites por la izquierda o por la derecha en uno de los puntos extremos.

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, entonces $f'(a)$ *existe si y sólo si las derivadas por la derecha y por la izquierda en a existen y son iguales.* Las funciones cuyas gráficas se muestran en la Figura 3.4 tienen derivadas por la derecha y por la izquierda en a que corresponden a las pendientes de las rectas l_1 y l_2, respectivamente. Sin embargo, como las pendientes de l_1 y l_2 no son iguales, $f'(a)$ no existe. En general, si la gráfica de f tiene un *pico* en el punto $P(a, f(a))$, entonces f no es derivable en a.

FIGURA 3.4



Si f es derivable para todo x en un intervalo entonces, asociando a cada x el número $f'(x)$, se obtiene una función f' llamada **derivada de** f. El valor de f' en x está dado por el siguiente límite (o por un límite unilateral).

LA DERIVADA COMO UNA FUNCIÓN (3.4)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Nótese que en (3.4) el número x es fijo pero arbitrario y el límite se toma haciendo tender h a cero. *Derivar* $f(x)$ o *encontrar la derivada de* $f(x)$ significa determinar $f'(x)$.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$. Encontrar:

(a) $f'(x)$; **(b)** el dominio de f'; **(c)** $f'(2)$, $f'(-\sqrt{2})$ y $f'(a)$;

(d) una ecuación para la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(2, f(2))$.

Solución

(a) Por (3.4),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x + h)^2 - 5(x + h) + 4] - (3x^2 - 5x + 4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4) - (3x^2 - 5x + 4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} = \lim_{h\to 0} (6x + 3h - 5)$$

$$= 6x - 5$$

(b) Como $f'(x) = 6x - 5$, la derivada existe para todo número real x. Por lo tanto el dominio de f' es $\mathbb{R}$.

(c) Sustituyendo x en $f'(x) = 6x - 5$,

$$f'(2) = 6(2) - 5 = 7$$

$$f'(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - 5 = -(6\sqrt{2} + 5)$$

$$f'(a) = 6a - 5$$

(d) Como $f(2) = 3(2)^2 - 5(2) + 4 = 12 - 10 + 4 = 6$, el punto $P(2, f(2))$ en la gráfica de f tiene coordenadas (2,6). Por (3.2) (i), la pendiente de la recta tangente en P es $f'(2) = 7$ (ver (c)). Usando la forma de la ecuación de la recta dados un punto y su pendiente (1.15), se obtiene la siguiente ecuación para la recta tangente en P:

$$y - 6 = 7(x - 2), \quad \text{o, equivalentemente,} \quad 7x - y - 8 = 0. \quad \bullet$$

EJEMPLO 2 Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x}$. ¿Cuál es el dominio de f'?

Solución El dominio de f consta de todos los números reales no negativos. Examinaremos los casos $x > 0$ y $x = 0$ por separado. Si $x > 0$ entonces, por (3.4),

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Para encontrar el límite, se racionaliza el numerador y luego simplificamos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

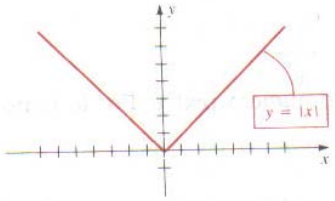
$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como $x = 0$ es un punto extremo del dominio de f, debe usarse un límite unilateral para determinar si $f'(0)$ existe. Suponiendo que f es derivable en 0 y usando la Definición (3.4) con $x = 0$, obtenemos

$$f'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Como este límite no existe (véase el Ejercicio 46 de la Sección 2.4), $f'(0)$ tampoco existe. Por lo tanto, el dominio de f' es el conjunto de los números reales positivos. •

FIGURA 3.5



EJEMPLO 3 Sea $f(x) = |x|$. Demostrar que f no es derivable en 0.

Solución En el Ejemplo 8 de la Sección 1.4 se estudió la gráfica de f que se ilustra nuevamente en la Figura 3.5. Geométricamente es obvio que f no tiene derivada en 0 pues la gráfica tiene un pico en el origen. Puede demostrarse que $f'(0)$ no existe haciendo ver que las derivadas de f por la derecha y por la izquierda en 0 no son iguales. Usando los límites de la Definición (3.3) con $a = 0$ y $b = 0$ obtenemos:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Por lo tanto, $f'(0)$ no existe. •

Del Ejemplo 3 se concluye que la gráfica de $y = |x|$ no tiene una recta tangente en el punto $P(0, 0)$.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de la definición equivalente (3.1′) para calcular $f'(a)$.

EJEMPLO 4 Sean $f(x) = x^{1/3}$ y $a \neq 0$. Obtener $f'(a)$.

Solución Usando (3.1′),

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x^{1/3}-a^{1/3}}{x-a}$$

si el límite existe. Para investigar la existencia del límite se requiere modificar la forma del cociente. Un medio para hacerlo es escribir

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{1/3}-a^{1/3}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^{1/3}-a^{1/3}}{(x^{1/3})^3-(a^{1/3})^3}.$$

El denominador puede factorizarse usando la fórmula

$$p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2)$$

con $p = x^{1/3}$ y $q = a^{1/3}$. Esto da

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{1/3}-a^{1/3}}{(x^{1/3}-a^{1/3})(x^{2/3}+x^{1/3}a^{1/3}+a^{2/3})}.$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre $x^{1/3} - a^{1/3}$ y tomando el límite obtenemos

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{a^{2/3} + a^{2/3} + a^{2/3}} = \frac{1}{3a^{2/3}}.$$

TEOREMA (3.5)

Si una función f es derivable en a entonces f es continua en a.

Demostración Si x está en el dominio de f y $x \neq a$, entonces $f(x)$ puede expresarse como sigue:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Usando los teoremas sobre límites y la Definición (3.2),

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Por lo tanto, de acuerdo con la Definición (2.23), f es continua en a.

Aplicando los límites unilaterales, se puede generalizar el Teorema (3.5) para incluir funciones derivables en un intervalo cerrado.

El recíproco del Teorema (3.5) es falso porque *existen funciones continuas que no son derivables*. Por ejemplo, si $f(x) = |x|$ entonces f es continua en 0; pero se demostró en el Ejemplo 3 que f no es derivable en 0 (véase la Figura 3.5).

Cuando $y = f(x)$ se utilizan las siguientes notaciones para las derivadas.

NOTACIONES PARA LAS DERIVADAS (3.6)

$$f'(x) = D_x[f(x)] = D_x y = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

Todas las notaciones anteriores se utilizan en las matemáticas y sus aplicaciones, y es recomendable que el lector se familiarice con ellas.

El subíndice x en el símbolo D_x se utiliza para designar a la variable independiente. Por ejemplo, si la variable independiente es t, escribimos $f'(t) = D_t[f(t)]$. Los símbolos D_x y D_t se llaman **operadores diferenciales**. El símbolo D_x por sí solo no tiene significado simple; sin embargo, si se le agrega a la derecha una expresión que incluya a x, entonces denota a la derivada. Para ilustrar esto, usando el Ejemplo 1,

$$D_x(3x^2 - 5x + 4) = 6x - 5.$$

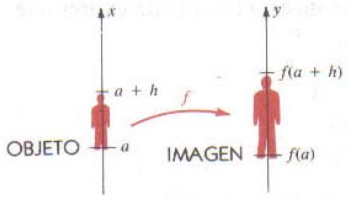
Se dice que D_x *opera* sobre la expresión $3x^2 - 5x + 4$. La expresión $D_x y$ puede leerse como **derivada de y con respecto a x**. El símbolo d/dx se utiliza de manera parecida, por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 4) = 6x - 5.$$

Como se indica en (3.6), las notaciones y' y dy/dx también se usan para denotar la derivada de y con respecto a x. En la Sección 3.4 se justifica la notación dy/dx con base en el concepto de *diferencial*.

Concluimos esta sección con una aplicación especializada de la derivada.

FIGURA 3.6



EJEMPLO 5 En óptica, una función f tal que $f'(x) > 1$ para todo x, puede considerarse como una transformación que amplifica objetos. Como se ilustra en la Figura 3.6, la función f transforma un objeto que se extiende sobre el intervalo de x $[a, a + h]$ en uno que se extiende sobre el intervalo de y $[f(a), f(a + h)]$. (Piénsese en una fuente de luz a la izquierda del eje x que proyecta la imagen en una película localizada sobre el eje x sobre una pantalla ubicada sobre el eje y.) La *amplificación* M *de* f para $[a, a + h]$ se define como la razón del tamaño (o altura) de la imagen al tamaño (altura) del objeto. El valor de M puede variar dependiendo del intervalo $[a, a + h]$. La *amplificación* M_a en $x = a$ se define como $\lim_{h\to 0} M$.

(a) Expresar M y M_a en términos de f.

(b) Sea $f(x) = x^2$. Calcular M_1 y M_2.

Solución

(a) El tamaño del objeto es $(a + h) - a = h$ y el tamaño de la imagen es $f(a + h) - f(a)$. Por lo tanto,

$$M = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad M_a = \lim_{h\to 0} M = f'(a)$$

(b) Si $f(x) = x^2$ entonces, del Ejemplo 1 de la Sección 2.1, $f'(a) = 2a$, y por lo tanto, $M_1 = f'(1) = 2$ y $M_2 = f'(2) = 4$. Nótese que la amplificación en $x = 2$ es el doble de la amplificación en $x = 1$. •

EJERCICIOS 3.1

Ejercicios 1-10: (a) Use (3.4) para calcular $f'(x)$. (b) Encuentre el dominio de f'. (c) Obtenga una ecuación para la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(1, f(1))$.

1. $f(x) = 37$
2. $f(x) = 17 - 6x$
3. $f(x) = 9x - 2$
4. $f(x) = 7x^2 - 5$
5. $f(x) = 2 + 8x - 5x^2$
6. $f(x) = x^3 + x$
7. $f(x) = 1/(x - 2)$
8. $f(x) = (1 + \sqrt{3})^2$
9. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$
10. $f(x) = 1/(2x)$

Ejercicios 11-14: Calcule $D_x y$.

11. $y = 7/\sqrt{x}$
12. $y = (2x + 3)^2$
13. $y = 2x^3 - 4x + 1$
14. $y = x/(3x + 4)$

Ejercicios 15-20: Calcule $f'(a)$ utilizando (3.1′).

15. $f(x) = x^2$
16. $f(x) = \sqrt{2}x$

17. $f(x) = 6/x^2$ 18. $f(x) = 8 - x^3$

19. $f(x) = 1/(x + 5)$ 20. $f(x) = \sqrt{x}$

Ejercicios 21-22: Use las derivadas por la derecha y por la izquierda para demostrar que f no es derivable en $x = 5$.

21. $f(x) = |x - 5|$

22. $f(x) = [\![x]\!]$ (f es la función mayor entero)

Ejercicios 23-26: Trace la gráfica de f y úsela para encontrar el dominio de f'.

23. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

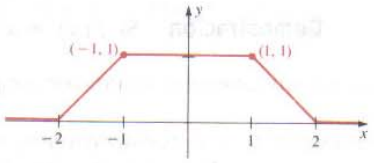
25. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \le 1 \\ 2 - |x| & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} x - [\![x]\!] & \text{si } n \le x < n + 1 \text{ y } n \text{ es un entero par} \\ 1 - x + [\![x]\!] & \text{si } n \le x \le n + 1 \text{ y } n \text{ es un entero impar} \end{cases}$

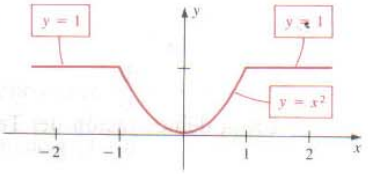
([] denota la función mayor entero.)

Ejercicios 27-28: Cada figura muestra la gráfica de una función f. Trace la gráfica de f' y señale en dónde f *no* es derivable.

27.



28.



29. Sea $f(x) = |x|$. Demuestre que $f'(x) = 1$ si $x > 0$ y que $f'(x) = -1$ si $x < 0$.

30. Sea $f(x) = |x|/x$. Encuentre (a) el dominio de f'; (b) $f'(x)$ para todo x en el dominio de f'.

31. Demuestre que si $f(x)$ es un polinomio de grado 1 entonces $f'(x)$ es un polinomio de grado 0. ¿Qué sucede cuando $f(x)$ es un polinomio de grado 2 o 3?

32. Demuestre que $D_x c = 0$ para todo número real c.

3.2 ALGUNAS REGLAS PARA DETERMINAR DERIVADAS

Esta sección contiene algunas reglas generales que simplifican la tarea de encontrar derivadas. En los enunciados de los teoremas se usará el operador diferencial D_x para denotar derivadas (véase (3.6)). El primer resultado de esta sección se enuncia expresando: *la derivada de una constante es cero.*

TEOREMA (3.7)

$$D_x(c) = 0.$$

Demostración Sea f la función constante definida por $f(x) = c$ para todo x. Demostraremos que $f'(x) = 0$. Como todos los valores de f son iguales a c, resulta que $f(x + h) = c$ para todo h. Aplicando (3.4),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

El último paso es consecuencia del Teorema (2.13). • •

TEOREMA (3.8) $D_x(x) = 1$

Demostración Si $f(x) = x$ para todo x, entonces

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 \quad \bullet\bullet$$

En la demostración del Teorema (3.10) se usará la siguiente fórmula.

TEOREMA DEL BINOMIO (3.9)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

donde a y b son números reales, n es un entero positivo y

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

El Teorema del Binomio puede demostrarse por el método de inducción matemática. Los casos particulares para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$ son:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

REGLA DE LA POTENCIA (3.10) Si n es un entero positivo entonces $D_x(x^n) = nx^{n-1}$.

Demostración Sea $f(x) = x^n$. Se quiere demostrar que $f'(x) = nx^{n-1}$. Por (3.4),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

si el límite existe. Usando el Teorema del Binomio (3.9) con $a = x$ y $b = h$.

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n.$$

Todos los términos después del primero contienen un factor h elevado a alguna potencia entera. Restando x^n y dividiendo entre h se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-2)}{2!} x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right].$$

Como todos los términos dentro del paréntesis, excepto el primero, contienen una potencia de h, resulta que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Para $x \neq 0$, la fórmula (3.10) es válida también cuando $n = 0$ pues en este caso $f(x) = x^0 = 1$ y, por el Teorema (3.7), $f'(x) = 0 = 0 \cdot x^{0-1}$. • •

EJEMPLO 1

(a) Evaluar $D_x(x^3)$ y $\dfrac{d}{dx}(x^8)$. **(b)** Encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = x^{100}$.

Solución Aplicando la Regla de la Potencia (3.10),

(a) $D_x(x^3) = 3x^2$ y $\dfrac{d}{dx}(x^8) = D_x(x^8) = 8x^7$

(b) Si $y = x^{100}$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = D_x y = D_x(x^{100}) = 100x^{99}$ •

Cuando se usan variables independientes diferentes de x, la Regla de la Potencia se escribe en términos de esas variables:

$$D_t(t^n) = nt^{n-1}, \qquad D_z(z^n) = nz^{n-1}, \qquad D_v(v^n) = nv^{n-1}.$$

En la Sección 3.6 se demuestra que la citada regla para las potencias es válida también cuando n es un número *racional*.

En los enunciados de los Teoremas (3.11) a (3.14) se supone que f y g son derivables en x.

TEOREMA (3.11) $\quad D_x[cf(x)] = cD_x[f(x)]$

Demostración Tomando $g(x) = cf(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} D_x[cf(x)] = D_x[g(x)] &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x) = cD_x[f(x)] \end{aligned}$$

• •

Para el caso especial $f(x) = x^n$, los Teoremas (3.11) y (3.10) dan la siguiente fórmula que es válida para todo número real c y para todo entero positivo n:

$$D_x(cx^n) = (cn)x^{n-1}$$

Así, *para derivar cx^n se multiplica el coeficiente c por el exponente n y se le resta 1 al exponente original.*

EJEMPLO 2

(a) Encontrar $D_x(7x^4)$. **(b)** Encontrar $F'(z)$ para $F(z) = -3z^{15}$.

Solución Por los comentarios anteriores tenemos

(a) $D_x(7x^4) = (7 \cdot 4)x^3 = 28x^3$

(b) $F'(z) = D_z(-3z^{15}) = (-3)(15)z^{14} = -45z^{14}$ •

TEOREMA (3.12)

(i) $D_x[f(x) + g(x)] = D_x[f(x)] + D_x[g(x)]$

(ii) $D_x[f(x) - g(x)] = D_x[f(x)] - D_x[g(x)]$

Demostración Para demostrar (i) tomamos $k(x) = f(x) + g(x)$. Demostraremos que $k'(x) = f'(x) + g'(x)$. Esto puede hacerse como sigue:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Se puede usar un razonamiento semejante para demostrar la parte (ii). • •

El Teorema (3.12) (i), el cual expresa que *la derivada de una suma es la suma de las derivadas*, puede generalizarse al caso de sumas de un número arbitrario de funciones.

Como un polinomio es una suma de términos de la forma, cx^n donde c es un número real y n un entero no negativo, pueden usarse los resultados sobre derivadas de sumas y diferencias para evaluar la derivada, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Solución

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1) \\ &= D_x(2x^4) - D_x(5x^3) + D_x(x^2) - D_x(4x) + D_x(1) \\ &= 8x^3 - 15x^2 + 2x - 4 \end{aligned}$$

REGLA DEL PRODUCTO (3.13)

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)\,D_x[g(x)] + g(x)\,D_x[f(x)]$$

Demostración Sea $k(x) = f(x)g(x)$. Demostraremos que

$$k'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Si $k'(x)$ existe, entonces

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Para cambiar la forma del cociente de manera que el límite pueda evaluarse, sumamos y restamos la expresión $f(x+h)g(x)$ en el numerador. Entonces

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

lo cual puede escribirse así

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Como f es derivable en x también es continua en x (véase el Teorema (3.5)). Por lo tanto $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. También $\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$, ya que x se mantiene fijo al tomar el límite. Finalmente, aplicando la definición de derivada a $f(x)$ y $g(x)$ se obtiene

$$k'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \quad \bullet\bullet$$

La Regla del Producto puede enunciarse como sigue: *La derivada de un producto es igual al primer factor multiplicado por la derivada del segundo, más el segundo factor multiplicado por la derivada del primero.*

EJEMPLO 4 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = (x^3 + 1)(2x^2 + 8x - 5)$.

Solución Usando la Regla del Producto (3.13),

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3+1)\,D_x(2x^2 + 8x - 5) + (2x^2 + 8x - 5)\,D_x(x^3 + 1) \\ &= (x^3+1)(4x + 8) + (2x^2 + 8x - 5)(3x^2) \end{aligned}$$

$$= (4x^4 + 8x^3 + 4x + 8) + (6x^4 + 24x^3 - 15x^2)$$
$$= 10x^4 + 32x^3 - 15x^2 + 4x + 8$$

En el Ejemplo 4 también se puede evaluar $f'(x)$ multiplicando primero los dos factores $x^3 + 1$ y $2x^2 + 8x - 5$ y derivando el polinomio resultante.

REGLA DEL COCIENTE (3.14)

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\,D_x\,[f(x)] - f(x)\,D_x\,[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

siempre y cuando $g(x) \neq 0$.

Demostración Sea $k(x) = f(x)/g(x)$. Demostraremos que

$$k'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Usando las definiciones para $k'(x)$ y $k(x)$,

$$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h) - k(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}.$$

Restando y sumando $g(x)f(x)$ en el numerador del último cociente resulta

$$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

o, equivalentemente,

$$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\left[\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}$$

Tomando el límite del numerador y el denominador se obtiene la Regla del Cociente. • •

La citada Regla del Cociente puede enunciarse como sigue: *La derivada de un cociente es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo ello dividido entre el cuadrado del denominador.*

EJEMPLO 5 Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = \dfrac{3x^2 - x + 2}{4x^2 + 5}$.

Solución Por la Regla del Cociente (3.14),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2 + 5)\,D_x(3x^2 - x + 2) - (3x^2 - x + 2)\,D_x(4x^2 + 5)}{(4x^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{(4x^2 + 5)(6x - 1) - (3x^2 - x + 2)(8x)}{(4x^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{(24x^3 - 4x^2 + 30x - 5) - (24x^3 - 8x^2 + 16x)}{(4x^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 14x - 5}{(4x^2 + 5)^2}$$

Ahora resulta fácil generalizar la Regla de la Potencia (3.10) al caso en que el exponente sea un entero negativo.

TEOREMA (3.15) Si n es un entero positivo, entonces $D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$

Demostración Usando la definición de x^{-n} y la Regla del Cociente (3.14),

$$D_x(x^{-n}) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n\,D_x(1) - 1\,D_x(x^n)}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{x^n(0) - 1(nx^{n-1})}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -nx^{(n-1)-2n} = -nx^{-n-1}$$

EJEMPLO 6 Derivar estas funciones: **(a)** $g(x) = 1/w^4$ **(b)** $H(s) = 3/s$.

Solución

(a) Escribiendo $g(w) = w^{-4}$ y usando el Teorema (3.15) (con w como la variable independiente),

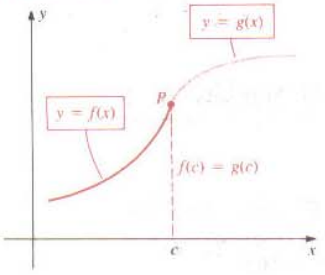
$$g'(w) = D_w(w^{-4}) = -4w^{-5} = -\frac{4}{w^5}$$

(b) Como $H(s) = 3s^{-1}$,

$$H'(s) = D_s(3s^{-1}) = 3(-1)s^{-2} = -\frac{3}{s^2}$$

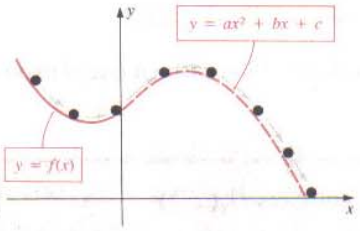
Sean f y g funciones derivables tales que $f(c) = g(c)$ para un número c. En algunas aplicaciones puede considerarse una partícula que se mueve de izquierda a derecha sobre la gráfica de f y luego cambia a la gráfica de g en el punto $P(c, f(c))$, como se

FIGURA 3.7



ilustra en la Figura 3.7. Se dice que la transición es **suave** (o **alisada**) si $f'(c) = g'(c)$ (o si la derivada por la izquierda de f en c es igual a la derivada por la derecha de g en c). En ese caso las rectas tangentes en $P(c, f(c))$ tienen la misma pendiente. Este concepto se usa en el siguiente ejemplo (véase también el Ejercicio 53).

FIGURA 3.8



EJEMPLO 7 Una pelota rueda por el tobogán de una piscina. Al llegar al extremo del tobogán su trayectoria cambia suavemente a una trayectoria parabólica que conserva hasta que cae al agua. El movimiento de la pelota se ilustra en la Figura 3.8, donde la gráfica de $y = f(x)$ representa la forma del tobogán y la trayectoria parabólica es la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$. El extremo del citado tobogán se encuentra sobre el eje y y el nivel del agua coincide con el eje x.

(a) Demostrar que $c = f(0)$ y $b = f'(0)$. (La constante a depende del ímpetu (o moméntum) de la pelota en $x = 0$.)

(b) Calcular la altura máxima del movimiento libre de la pelota suponiendo que $f(x) = 2 + [x/(1 + x^2)]$ y que la bola toca el agua en el punto (6, 0).

Solución

(a) El número c es la ordenada en el origen tanto de la parábola como de la gráfica de f y, por lo tanto, $c = f(0)$.

La pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto (x, y) es $y' = 2ax + b$. En particular, en $(0, c)$ la pendiente es $2a(0) + b = b$. Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f es $f'(0)$ y el cambio de trayectoria es suave, necesariamente, $b = f'(0)$.

(b) Por los Teoremas (3.12) y (3.7) y la Regla del Cociente (3.14),

$$f'(x) = 0 + \frac{(1 + x^2)(1) - x(2x)}{(1 + x^2)} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

De los resultados de la parte (a), $b = f'(0) = 1$ y $c = f(0) = 2$. Por lo tanto,

$$y = ax^2 + x + 2.$$

es la ecuación de una parábola. Como (6, 0) es un punto sobre la parábola,

$$0 = a(36) + 6 + 2 \quad \text{y} \quad a = -\tfrac{8}{36} = -\tfrac{2}{9}.$$

Entonces resulta que

$$y = -\tfrac{2}{9}x^2 + x + 2.$$

es la ecuación de una parábola. La altura máxima durante el vuelo corresponde al vértice de la parábola, que es también el punto en el que la pendiente de la recta tangente es 0; es decir, $y' = 0$. Se deja al lector el trabajo de verificar que este es el punto $(\tfrac{9}{4}, \tfrac{25}{8})$. Por lo tanto, la citada altura máxima es $\tfrac{25}{8}$. •

Las fórmulas de derivación (3.12), (3.13) y (3.14) están expresadas en términos de los valores $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ y $g'(x)$. Si se desea enunciar estas reglas sin hacer referencia a la variable x, pueden aplicarse las siguientes fórmulas, en las que se supone que f y g son derivables (y que g es diferente de cero en la última de ellas).

(3.16)

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

EJERCICIOS 3.2

Ejercicios 1-32: Derive la función.

1. $f(x) = 10x^2 + 9x - 4$
2. $f(x) = 6x^3 - 5x^2 + x + 9$
3. $f(s) = 15 - s + 4s^2 - 5s^4$
4. $f(t) = 12 - 3t^4 + 4t^6$
5. $g(x) = (x^3 - 7)(2x^2 + 3)$
6. $k(x) = (2x^2 - 4x + 1)(6x - 5)$
7. $h(r) = r^2(3r^4 - 7r + 2)$
8. $g(s) = (s^3 - 5s + 9)(2s + 1)$
9. $f(x) = \dfrac{4x - 5}{3x + 2}$
10. $h(x) = \dfrac{8x^2 - 6x + 11}{x - 1}$
11. $h(z) = \dfrac{8 - z + 3z^2}{2 - 9z}$
12. $f(w) = \dfrac{2w}{w^3 - 7}$
13. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 7$
14. $g(z) = 5z^4 - 8z^2 + z$
15. $F(t) = t^2 + (1/t^2)$
16. $s(x) = 2x + (2x)^{-1}$
17. $g(x) = (8x^2 - 5x)(13x^2 + 4)$
18. $H(y) = (y^5 - 2y^3)(7y^2 + y - 8)$
19. $G(v) = (v^3 - 1)/(v^3 + 1)$
20. $f(t) = (8t + 15)/(t^2 - 2t + 3)$
21. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$
22. $p(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$
23. $g(z) = z(2z^3 - 5z - 1)(6z^2 + 7)$
24. $N(v) = 4v(v - 1)(2v - 3)$
25. $K(s) = (3s)^{-4}$
26. $W(s) = (3s)^4$
27. $h(x) = (5x - 4)^2$
28. $g(r) = (5r - 4)^{-2}$
29. $f(t) = \dfrac{3/(5t) - 1}{(2/t^2) + 7}$
30. $S(w) = (2w + 1)^3$
31. $M(x) = (2x^3 - 7x^2 + 4x + 3)/x^2$
32. $f(x) = (3x^2 - 5x + 8)/7$

Ejercicios 33-34: Encuentre dy/dx usando (a) la Regla del Cociente (3.14), (b) la Regla del Producto (3.13), y (c) simplificando algebraicamente y usando (3.12) y (3.10).

33. $y = (3x - 1)/x^2$
34. $y = (x^2 + 1)/x^4$
35. Halle la ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y = 5/(1 + x^2)$ en cada uno de los siguientes puntos:

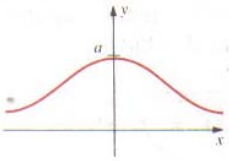
 (a) $P(0, 5)$ (b) $P(1, \frac{5}{2})$ (c) $P(-2, 1)$
36. Halle la ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 3$ en cada uno de los siguientes puntos:

 (a) $P(0, -3)$ (b) $P(-1, 4)$ (c) $P(1, -2)$
37. Encuentre la abscisa de todos los puntos de la gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ en los que la recta tangente es (a) horizontal y (b) paralela a la recta $2y + 8x - 5 = 0$.
38. Encuentre el punto P en la gráfica de $y = x^3$ tal que la intercepción x de la recta tangente en P sea igual a 4.

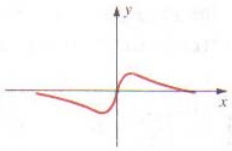
Ejercicios 39-40: Se dan la ecuación y la gráfica de una curva clásica, con a y b constantes positivas. (Consulte libros de geometría analítica para mayor información.) Calcule la pendiente de la recta tangente en el punto P.

39. *La curva de Agnesi:* $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$; $P(a, a/2)$

EJERCICIO 39



EJERCICIO 40



40. *La curva serpentina:* $y = \dfrac{abx}{a^2 + x^2}$; $P(a, b/2)$

41. Encuentre una ecuación para la recta que pasa por al punto $P(5, 9)$ y es tangente a la gráfica de $y = x^2$.

42. Encuentre las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(5, 9)$ y es tangente a la gráfica de $xy = 4$.

Ejercicios 43-46: Suponiendo que f y g son funciones derivables tales que $f(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $g(2) = -5$ y $g'(2) = 2$, encuentre los números indicados.

43. (a) $(f + g)'(2)$ (b) $(f - g)'(2)$
(c) $(4f)'(2)$ (d) $(fg)'(2)$
(e) $(f/g)'(2)$

44. (a) $(g - f)'(2)$ (b) $(g/f)'(2)$
(c) $(4g)'(2)$ (d) $(ff)'(2)$

45. (a) $(2f - g)'(2)$ (b) $(5f + 3g)'(2)$
(c) $(gg)'(2)$ (d) $\left(\dfrac{1}{f + g}\right)'(2)$

46. (a) $(3f - 2g)'(2)$ (b) $(5/g)'(2)$
(c) $(6f)'(2)$ (d) $\left(\dfrac{f}{f + g}\right)'(2)$

47. Suponiendo que f, g y h son derivables, use la Regla del Producto para demostrar que

$$D_x[f(x)g(x)h(x)] = f(x)g(x)h'(x) + f(x)h(x)g'(x) + h(x)g(x)f'(x).$$

Suponiendo que $f = g = h$, demuestre como corolario que

$$D_x[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x).$$

48. Amplíe el resultado anterior a un producto de cuatro funciones y obtenga una fórmula para $D_x[f(x)]^4$.

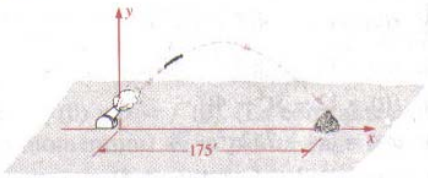
Ejercicios 49-50: Aplique el Ejercicio 47 para encontrar dy/dx.

49. $y = (8x - 1)(x^2 + 4x + 7)(x^3 - 5)$

50. $y = (3x^4 - 10x^2 + 8)(2x^2 - 10)(6x + 7)$

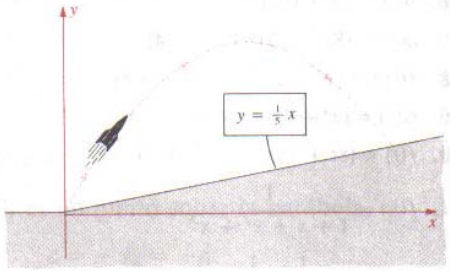
51. En los años cuarenta, Emmanuel Zacchini del circo Ringling Brothers and Barnum & Bailey ejecutaba regularmente el acto de la bala humana. La boca del cañón se elevaba a 15 pie sobre el suelo y apuntaba según un ángulo de 45°. La trayectoria parabólica de Zacchini tenía un alcance horizontal de 175 pie (véase la figura).
(a) Encuentre una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$ que especifique la trayectoria parabólica.
(b) Calcule aproximadamente la altura máxima alcanzada por la bala humana.

EJERCICIO 51



52. Un cohete que se tiene emplazado al pie de una colina cuya pendiente es $\frac{1}{5}$ se dispara hacia la loma y sigue una trayectoria dada por $y = -0.016x^2 + 1.6x$.
(a) ¿Cual es la pendiente de la trayectoria del cohete en el momento del disparo?
(b) ¿Cual es la pendiente de la trayectoria cuando choca contra la colina?
(c) Calcule la altura máxima del cohete *sobre el suelo*.

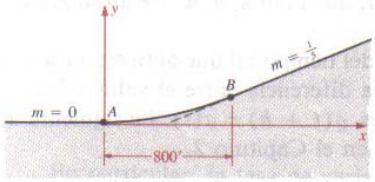
EJERCICIO 52



53. Un grupo de ingenieros de caminos diseña un tramo de carretera que debe conectar una autopista horizontal con otra que tiene una inclinación de 20° (es decir, una pendiente de $\frac{1}{5}$), como se ilustra en la figura. El enlace debe realizarse sobre una distancia horizontal de 800 pie usando

una curva parabólica para unir los puntos A y B. Obtenga una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$ para la parábola respectiva y determine las coordenadas de B.

EJERCICIO 5.3



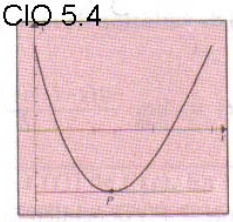
54

En la figura se muestra una gráfica generada por computadora de la ecuación $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$, para $0 \le x \le 3$.

(a) Determine la abscisa del punto P en el que la recta tangente es horizontal.

b) ¿Existen otros puntos en la *gráfica completa* para los que $f'(x) = 0$?

EJERCICIO 5.4



55

Un globo meteorológico se eleva verticalmente de manera que su altura $s(t)$ sobre el suelo durante los primeros 10 segundos de su ascenso está dada por $s(t) = 6 + 2t + t^2$ para $s(t)$ en unidades de distancia (pies) y t en segundos.

(a) Calcule la velocidad del globo para $t = 1$, $t = 4$ y $t = 8$.

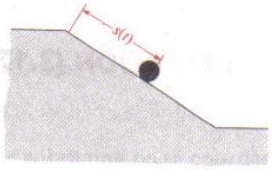
(b) Determine la velocidad del globo en el momento en que se encuentra a 50 pie del suelo.

56. Una pelota baja rodando por un plano inclinado de manera que la distancia (en centímetros) que recorre al cabo de 3 segundos está dada por $s(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4$, donde $0 \le t \le 3$ (véase la figura).

(a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en $t = 2$?

(b) ¿En qué momento alcanza una velocidad de 30 cm/s?

EJERCICIO 56



57. Dos atletas se disponen a correr los 100 metros planos. Las distancias $s_1(t)$ y $s_2(t)$ que cada uno de ellos recorre a los t segundos está dada por $s_1(t) = \frac{1}{5}t^2 + 8t$ y $s_2(t) = 1100t/(t + 100)$ para $t \ge 0$. Determine cuál de los corredores es (a) el más rápido en la salida; (b) el que gana la carrera; y (c) el más rápido al cruzar la meta.

58. Cuando cierto jugador de basquetbol (o baloncesto) salta para hacer un enceste, la altura de sus pies sobre el piso está dada por $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 16t$ (s en pies).

(a) Suponiendo $g = 32$, calcule el *tiempo de vuelo* en que el jugador se halla en el aire.

(b) Determine la velocidad inicial y la *altura de salto* o distancia máxima que alcanzan sus pies sobre el suelo.

(c) En la Luna se tiene que $g \approx \frac{32}{6}$. Resuelva las partes (a) y (b) para este valor de g.

3.3 LA DERIVADA COMO TASA DE VARIACIÓN (O RAZÓN DE CAMBIO)

Se han estudiado ya dos aplicaciones importantes de la derivada: rectas tangentes a gráficas y la velocidad de un objeto que se mueve sobre una línea recta. La derivada es útil en muchas otras situaciones de la práctica. Se utilizó en el Ejemplo 5 de la Sección 3.1 para representar amplificaciones ópticas. En esta sección se estudian algunas otras aplicaciones que ilustran la gran utilidad de este poderoso concepto.

La mayoría de las cantidades que aparecen en la vida diaria cambian o varían en el tiempo. Esto es particularmente evidente en las investigaciones científicas. Por ejem-

plo un químico puede estar interesado en la rapidez con la que cierta sustancia se disuelve en agua. Un ingeniero eléctrico quizá necesite conocer la intensidad con la que la corriente varía en alguna parte de un circuito. Un biólogo puede desear saber la rapidez con la que las bacterias en un cultivo aumentan o disminuyen. Podrían citarse muchos otros ejemplos, incluyendo algunos otros de campos fuera de las ciencias naturales. Consideremos la siguiente situación general, que podría aplicarse a todos los ejemplos anteriores.

Sea w una variable que es una función del tiempo tal que al tiempo t se tiene, $w = g(t)$, donde g es una función derivable. La diferencia entre el valor inicial y el final de w en el intervalo de tiempo $[t, t + h]$ es $g(t + h) - g(t)$. La siguiente definición es análoga a la del concepto de velocidad en el Capítulo 2.

DEFINICIÓN (3.17)

Sea $w = g(t)$, donde g es derivable y t representa el tiempo.

(i) La **tasa (o razón) media de variación** de $w = g(t)$ en el intervalo $[t, t + h]$ es

$$\frac{g(t + h) - g(t)}{h}$$

(ii) La **tasa (o razón) de variación** de $w = g(t)$ con respecto a t es

$$\frac{dw}{dt} = g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h}$$

Las unidades que deben usarse en la Definición (3.17) dependen de la naturaleza de la cantidad representada por w. A veces se llama a dw/dt la **tasa (o razón) instantánea de variación** de w con respecto a t.

EJEMPLO 1 Un físico descubre que cuando cierta sustancia se calienta, la temperatura, medida en grados Celsius (o centígrados) después de t minutos, está dada por $g(t) = 30t + 6\sqrt{t} + 8$ para $0 \leq t \leq 5$.

(a) Calcular la tasa media de cambio o variación de $g(t)$ durante el intervalo de tiempo [4, 4.41].

(b) Calcular la tasa de variación de $g(t)$ en $t = 4$.

Solución

(a) Sustituyendo $t = 4$ y $h = 0.41$ en la Definición (3.17) (i) se obtiene que la tasa media de cambio de g en [4, 4.41] es

$$\frac{g(4.41) - g(4)}{0.41} = \frac{[30(4.41) + 6\sqrt{4.41} + 8] - [120 + 6\sqrt{4} + 8]}{0.41}$$

$$= \frac{12.9}{0.41} \approx 31.46 \text{ °C/min}$$

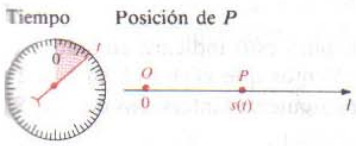
(b) De acuerdo con la Definición (3.17) (ii) la razón o tasa de cambio de $g(t)$ al tiempo t es $g'(t)$. En el Ejemplo 2 de la Sección 3.1 demostramos que $D_x(\sqrt{x}) = 1/(2\sqrt{x})$. Por lo tanto,

$$g'(t) = D_t(30t + 6\sqrt{t} + 8)$$
$$= 30 + 6\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) + 0$$
$$= 30 + \frac{3}{\sqrt{t}}.$$

En particular, la tasa de variación de $g(t)$ en $t = 4$ es

$$g'(4) = 30 + \frac{3}{\sqrt{4}} = 31.5 \text{ °C/min} \quad \bullet$$

FIGURA 3.9



Si un punto P se mueve sobre una recta coordenada l de manera que su coordenada al tiempo t es $s(t)$, como se ilustra en la Figura 3.9, entonces s es la función de posición de P. Según (3.2) (ii), la velocidad $v(t)$ de P al tiempo t es $s'(t)$. En términos de la Definición (3.17), la velocidad es la tasa de variación de $s(t)$ con respecto al tiempo (su rapidez de variación).

La *aceleración* $a(t)$ de P al tiempo t se define como la tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, $a(t) = v'(t)$. Por lo tanto la aceleración es la derivada $D_t[s'(t)]$ de $s'(t)$. En la Sección 3.7, $D_t[s'(t)]$ se llama la *segunda derivada* de s con respecto a t y se denota por $s''(t)$. La siguiente definición resume esta discusión e introduce el concepto de *rapidez de movimiento* (o valor absoluto de la velocidad) de P.

DEFINICIÓN (3.18)

Sea P un punto sobre una recta coordenada l tal que su posición al tiempo t está dada por $s(t)$, donde s es una función derivable.

(i) La **velocidad** $v(t)$ de P al tiempo t es $v(t) = s'(t)$.
(ii) La **rapidez** de P al tiempo t es $|v(t)|$.
(iii) La **aceleración** $a(t)$ de $P(t)$ al tiempo t es $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

En los términos de esta definición, v se llama la **función velocidad** de P, y a es la **función aceleración** de P. Se utiliza también la notación

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad a = \frac{dv}{dt}.$$

Si t se mide en segundos (s) y $s(t)$ en centímetros (cm), entonces $v(t)$ se expresa en cm/s y $a(t)$ en cm/s^2 (centímetros por segundo por segundo, o por segundo al cuadrado). Si t se mide en horas y $s(t)$ en kilómetros o millas, entonces $v(t)$ se expresa en km/h o mi/h, y $a(t)$ en km/h^2 o mi/h^2, respectivamente.

En el Capítulo 2 se hizo notar que si $v(t)$ es positiva en un intervalo de tiempo, entonces el punto P se mueve en la dirección positiva de l. Si $v(t)$ es negativa entonces el movimiento es en la dirección negativa. La velocidad es cero en los puntos donde P cambia de dirección. Todo esto será demostrado en el Capítulo 4 junto con el hecho de que cuando la aceleración $a(t)$ es positiva, entonces la velocidad es creciente. Si $a(t)$ es negativa la velocidad es decreciente.

EJEMPLO 2 La función de posición s de un punto P que se mueve sobre una recta coordenada está dada por

$$s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

en donde t se mide en segundos y $s(t)$ en centímetros. Describir el movimiento de P durante el intervalo de tiempo $[-1, 9]$.

Solución Derivando,

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t - 2)(t - 6),$$

y

$$a(t) = v'(t) = 6t - 24 = 6(t - 4).$$

Determinemos cuándo $v(t) > 0$ y cuándo $v(t) > 0$, pues esto indicará cuándo P se mueve hacia la derecha y cuándo hacia la izquierda. Vemos que $v(t) = 0$ en $t = 2$ y $t = 6$. Esto sugiere que se analice el movimiento en los siguientes intervalos de $[-1, 9]$:

$$(-1, 2) \quad (2, 6) \quad (6, 9)$$

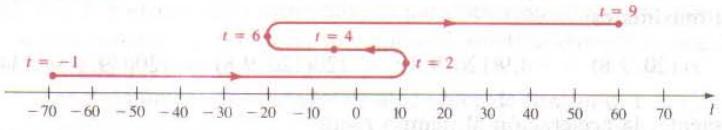
Como $v(t)$ es un polinomio, es positivo o negativo en cada uno de estos subintervalos (véase el Corolario (2.30)). Como en el Ejemplo 6 de la Sección 2.5, podemos determinar el signo de $v(t)$ usando valores de prueba, como se indica en esta tabla (verifíquese cada valor):

Intervalo de tiempo	$(-1, 2)$	$(2, 6)$	$(6, 9)$
k	0	3	7
Valor de prueba $v(k)$	36	-9	15
Signo de $v(t)$	+	−	+
Dirección del movimiento	a la derecha	a la izquierda	a la derecha

En la siguiente tabla se muestran los valores de la función de posición, la función velocidad y la función aceleración, en los extremos del intervalo de tiempo $[-1, 9]$, y también los tiempos en los que la velocidad o la aceleración valen cero.

t	-1	2	4	6	9
$s(t)$	-69	12	-4	-20	61
$v(t)$	63	0	-12	0	63
$a(t)$	-30	-12	0	12	30

FIGURA 3.10

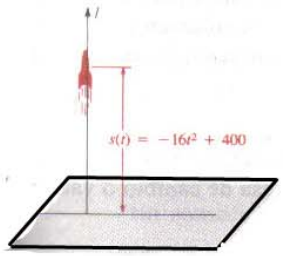


Es conveniente representar gráficamente el movimiento de P como en la Figura 3.10. La curva situada arriba de la recta coordenada no es la trayectoria del punto pero indica cómo se mueve P sobre la recta l.

Como está indicado en las tablas y en la Figura 3.10, al tiempo $t = -1$ el punto está a 69 cm a la izquierda del origen y se mueve hacia la derecha con una velocidad de 63 cm/s. La aceleración negativa de $-30\,\text{cm/s}^2$ indica que la velocidad está disminuyendo a razón de 30 centímetros por segundo en cada segundo (cm/s^2). El punto continúa moviéndose hacia la derecha pero más lento, hasta que su velocidad se vuelve cero en $t = 2$, 12 cm a la derecha del origen. En ese instante el punto P invierte la dirección (o sentido) de su movimiento y va hacia la izquierda, hasta que en el tiempo $t = 6$, 20 cm a la izquierda del origen, vuelve a cambiar de dirección. Continúa moviéndose a la derecha en el resto del intervalo de tiempo, aumentando su velocidad. El sentido del movimiento está indicado con flechas sobre la curva de la Figura 3.10. •

EJEMPLO 3 Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 120 m/s. Su altura sobre el suelo t segundos después está dada por $s(t) = -4.9t^2 + 120t$. Calcular el tiempo en el que el proyectil llegará al suelo de regreso y su velocidad en ese momento. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil? ¿Cuál es la aceleración en cualquier instante t?

FIGURA 3.11



Solución El proyectil se mueve sobre una recta coordenada vertical con el origen al nivel del suelo y dirección positiva hacia arriba, como se ilustra en la Figura 3.11. El proyectil se halla al nivel del suelo cuando $-4.9t^2 + 120t = 0$, es decir, cuando $-4.9t(t - 120/4.9) = 0$. Esto da $t = 0$ y $t = 120/4.9 \approx 24.5$. Por lo tanto, el proyectil tocará el suelo al caer de regreso a los 24.5 segundos. La velocidad al tiempo t es

$$v(t) = s'(t) = -9.8t + 120.$$

En particular, con $t = 120/4.9$, obtenemos la *velocidad de impacto*:

$$v(120/4.9) = -9.8(120/4.9) + 120 = -120\,\text{m/s}.$$

La velocidad negativa indica que en el instante en que el proyectil llega al suelo, se está moviendo en la dirección negativa de l (hacia abajo). Nótese que la *rapidez* en este tiempo es

$$|v(25)| = |-120| = 120\,\text{m/s}.$$

La altura máxima se alcanza cuando la velocidad es cero, es decir, cuando $s'(t) =$

$-9.8t + 120 = 0$. Despejando t obtenemos $t = 120/9.8 \approx 12.24$ s, y por lo tanto la altura máxima es

$$s(120/9.8) = -4.9(120/9.8)^2 + 120(120/9.8) = 7200/9.8 \approx 734.7 \text{ m}.$$

Finalmente, la aceleración al tiempo t vale

$$a(t) = v'(t) = -9.8\,\text{m/s}^2.$$

Esta aceleración constante se debe a la fuerza de gravedad. •

Se pueden estudiar razones de cambio o tasas de variación con respecto a variables distintas del tiempo, como se indica en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (3.19)

Sea $y = f(x)$, donde x es cualquier variable.

(i) La **tasa media de variación de y con respecto a x en el intervalo $[x, x + h]$** es el cociente

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

(ii) La **tasa de variación de y con respecto a x** es el límite de la razón promedio cuando $h \to 0$, es decir, dy/dx.

Según la Definición (3.19) (ii), si la variable x cambia, entonces y cambia a razón de dy/dx unidades por unidad de cambio de x. Por ejemplo, supongamos que un gas está encerrado en un globo esférico. Si el gas se calienta o se enfría pero la presión se mantiene constante, entonces el globo se dilata o se contrae y su volumen V es una función de la temperatura T. La derivada dV/dT es la tasa de variación (o razón de cambio) del volumen con respecto a la temperatura.

EJEMPLO 4 La corriente I (en amperes, A) en un circuito eléctrico está dada por $I = 100/R$, donde R es la resistencia (en ohms, Ω). Calcular la tasa de cambio o variación de I con respecto a R cuando la resistencia es 20 Ω.

Solución Escribiendo $I = 100R^{-1}$ y aplicando la Regla de la Potencia (3.10)

$$\frac{dI}{dR} = 100(-1)R^{-2} = -\frac{100}{R^2}.$$

Sustituyendo R por 20,

$$\frac{dI}{dR} = -\frac{100}{400} = -\frac{1}{4}.$$

Entonces, cuando $R = 20$, al aumentar R, I disminuye a razón de 0.25 amperes por ohm (A/Ω). •

El cálculo se ha convertido en un instrumento importante para resolver algunos problemas que surgen en la economía. Si para describir una cierta cantidad económica se usa una función f, entonces, se emplea el adjetivo *marginal* para hacer referencia a la derivada f'.

Sea x el número de unidades de algún bien de consumo. Los economistas usan frecuentemente las funciones C, c, R y P definidas como sigue:

Función de costo: $C(x)$ = Costo de producción de x unidades.

Función de costo medio: $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ = Costo medio de producción de una unidad.

Función de ingreso: $R(x)$ = Percepción por la venta de x unidades.

Función de utilidad: $P(x) = R(x) - C(x)$ = Utilidad (o ganancia) por la venta de x unidades.

Para utilizar el cálculo, se supone que x es un número real, aunque en general esta variable toma sólo valores enteros. Se supone siempre que $x \geq 0$, ya que la producción de un número negativo de unidades no tiene sentido en la práctica.

EJEMPLO 5 Un fabricante de grabadoras portátiles tiene un costo fijo mensual de \$10 000 (dólares), un costo de producción de \$12 por unidad y un precio de venta de \$20 por unidad.

(a) Calcular $C(x)$, $c(x)$, $R(x)$ y $P(x)$.

(b) Determinar los valores de las funciones en la parte (a) para $x = 1000$.

(c) ¿Cuántas unidades deben fabricarse para no salir perdiendo?

Solución

(a) El costo de producción de x unidades es $12x$. Como hay además un costo fijo mensual de \$10 000, el costo mensual total cuando se fabrican x unidades es

$$C(x) = 12x + 10\,000$$

En consecuencia, $c(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 12 + \dfrac{10\,000}{x}$.

Vemos también que

$$R(x) = 20x$$

y

$$P(x) = R(x) - C(x) = 8x - 10\,000.$$

(b) Sustituyendo $x = 1000$ en la parte (a),

$C(1000) = 22\,000$ (costo de fabricación de 1000 unidades)

$c(1000) = 22$ (costo medio de fabricación por unidad)

$R(1000) = 20\,000$ (ingreso total por la venta de 1000 unidades)
$P(1000) = -2000$ (utilidad en la fabricación y venta de 1000 unidades)

Nótese que el fabricante tendría una pérdida de $2000 por mes si se fabricaran y vendieran solamente 1000 unidades.

(c) Para que no haya pérdida, la ganancia mínima debe ser cero, es decir, $8x - 10\,000 = 0$. Esto da

$$8x = 10\,000 \quad \text{o bien} \quad x = 1500.$$

Por lo tanto, para el punto de equilibrio (no salir perdiendo) es necesario producir y vender 1500 unidades al mes. •

Las derivadas C', c', R' y P' se llaman **función de costo marginal**, **función de costo medio marginal**, **función de ingreso marginal** y **función de utilidad marginal**, respectivamente. El número $C'(x)$ es el **costo marginal** asociado a la producción de x unidades. Si se interpreta la derivada como la tasa de variación o de cambio, se dice entonces que el costo varía con respecto a la cantidad de unidades producidas x a razón de $C'(x)$ unidades monetarias por unidad de producción. Pueden hacerse afirmaciones semejantes para $c'(x)$, $R'(x)$ y $P'(x)$.

Si C es la función de costo y n es un entero positivo entonces, por la Definición (3.1),

$$C'(n) = \lim_{h \to 0} \frac{C(n + h) - C(n)}{h}.$$

Por lo tanto, si h es pequeño entonces

$$C'(n) \approx \frac{C(n + h) - C(n)}{h}.$$

Cuando la cantidad n de unidades producidas es grande, los economistas suelen tomar $h = 1$ en la fórmula anterior y estimar el costo marginal por

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n).$$

En este contexto, *el costo marginal asociado a la producción de n unidades es (aproximadamente) igual al costo de producir una unidad más.*

Algunas empresas consideran que el costo $C(x)$ de producir x unidades de un bien de consumo está dado por una fórmula como ésta:

$$C(x) = a + bx + dx^2 + kx^3.$$

La constante a representa un costo fijo por conceptos como alquiler, electricidad y calefacción, que son independientes del número de unidades producidas. Si el costo de producir una unidad fuera b y no hubiese otros factores implícitos, entonces el segundo término bx en la fórmula representaría el costo de producción de x unidades. Cuando x es muy grande, entonces los términos dx^2 y kx^3 pueden afectar significativamente los costos de producción.

EJEMPLO 6 Una fábrica de productos electrónicos calcula que el costo de producir x componentes para juguetes de tal tipo está dado por

$$C(x) = 200 + 0.05x + 0.0001x^2$$

(a) Calcular el costo, el costo medio y el costo marginal por la producción de 500 unidades, de 1000 unidades y de 5000 unidades.

(b) Comparar el costo marginal por la producción de 1000 unidades, con el costo de producir la milésimo primera (o 1001-ésima) unidad.

Solución

(a) El costo medio de producir x componentes es

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{200}{x} + 0.05 + 0.0001x$$

El costo marginal es

$$C'(x) = 0.05 + 0.0002x.$$

Se deja al lector el trabajo de verificar los valores de la tabla siguiente en la que se han desechado los milésimos de unidad monetaria.

Unidades x	**Costo** $C(x)$	**Costo medio** $c(x) = \frac{C(x)}{x}$	**Costo marginal** $C'(x)$
500	250.00	0.50	0.15
1000	350.00	0.35	0.25
5000	2950.00	0.59	1.05

(b) Usando la función de costo,

$$C(1001) = 200 + 0.05(1001) + (0.0001)(1000)^2 = 350.25$$

Por lo tanto, el costo de producir la milésimo primera unidad es

$$C(1001) - C(1000) = 350.25 - 350.00 = 0.25$$

que es igual al costo marginal $C'(1000)$.

Las empresas deben tener en cuenta muchos factores para determinar el precio de venta de cada producto. Además del costo de producción y la ganancia deseada, la fábrica debe considerar el comportamiento de la demanda con respecto a los incrementos de precio. Para algunos productos la demanda es constante y los cambios de precio tienen poco efecto en las ventas. Un aumento de precio en los artículos que no son de primera necesidad normalmente produce una disminución en la cantidad de unidades

vendidas. Una compañía puede conocer por experiencia el precio por unidad $p(x)$ que induce una venta de x unidades; p se llama **función de demanda** para el producto en cuestión y se dice que $p(x)$ es el precio por unidad cuando la **demanda** es de x unidades. El ingreso total, o percepción, es el número de unidades vendidas multiplicado por el precio por unidad, es decir, $x \cdot p(x)$. Por lo tanto,

$$R(x) = xp(x).$$

La derivada p' se llama **función de demanda marginal**. Más adelante se darán algunos ejemplos de funciones de demanda.

EJERCICIOS 3.3

1. Un globo esférico se infla y su radio (en centímetros) a los t minutos está dado por $r(t) = 3\sqrt[3]{t}$, donde $0 \le t \le 10$. Calcule la razón de cambio con respecto a t en $t = 8$ de las siguientes cantidades.
 (a) $r(t)$ (*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 4 de la Sección 3.1.)
 (b) El volumen del globo.
 (c) El área de la superficie del globo. (*Sugerencia:* Usar la Regla del Producto.)

2. El volumen V (en pie^3) de una pequeña represa durante la época de lluvias está dado por $V = 5000(t + 1)^2$, donde t se mide en meses y $0 \le t \le 3$. La tasa de cambio del volumen con respecto al tiempo es el *flujo* instantáneo hacia la represa. Calcule el flujo en los tiempos $t = 0$ y $t = 2$. ¿Cuál es el valor del flujo cuando el volumen es de 11 250 pie^3?

3. Suponga que el pulso de un individuo (en latidos/minuto) a los t segundos de haber comenzado a correr, está dado por $P(t) = 56 + 2t^2 - t$, para $0 \le t \le 7$. Calcule la tasa de cambio de $P(t)$ con respecto a t en (a) $t = 2$, (b) $t = 4$ y (c) $t = 6$.

4. La temperatura T (en °C) de una solución al tiempo t (en minutos) está dada por $T(t) = 10 + 4t + [3/(t + 1)]$ para $1 \le t \le 10$. Calcule la tasa de variación o cambio de $T(t)$ con respecto a t en (a) $t = 2$, (b) $t = 5$ y (c) $t = 9$.

5. Un piedra se deja caer a un estanque y produce ondas de agua que forman círculos concéntricos. El radio de una onda es de $40t$ centímetros a los t segundos. Calcule la tasa de cambio con respecto a t del área del círculo en (a) $t = 1$, (b) $t = 2$ y (c) $t = 3$.

6. La ley de Boyle para los gases dice que $pv = c$ donde p es la presión, v el volumen y c una constante. Suponga que al tiempo t (en minutos) la presión es $20 + 2t$ cm/Hg para $0 \le t \le 10$, y que el volumen en $t = 0$ es de 60 cm^3. Determine la razón de cambio del volumen con respecto a t en $t = 5$.

7. Una población de moscas crece en un recipiente grande. El número de moscas P (en cientos) a las t semanas está dado por $P = 12t^2 - t^4 + 5$. ¿Cuándo deja de crecer la población? ¿En qué intervalos de tiempo es positiva o negativa la tasa de crecimiento de la población?

8. Cuando se calienta un frasco que contiene 10 moles de un gas A, la velocidad de las moléculas del gas aumenta y se forma un segundo gas B. Cuando chocan dos moléculas del gas A, se originan dos moléculas del gas B. El número y de moles (mol) del gas B a los t minutos está dado por $y = 10t/(t + 4)$. Evalúe la rapidez de la reacción (en mol/min) cuando el número de moles del gas A es igual al número de moles del gas B.

Ejercicios 9-14: Encuentre la velocidad y la aceleración al tiempo t correspondientes a las funciones de posición s de un punto en movimiento rectilíneo, y describa el movimiento del punto durante el intervalo de tiempo indicado. Ilustre el fenómeno con un diagrama como el de la Figura 3.10.

9. $s(t) = 3t^2 - 12t + 1$, $[0, 5]$
10. $s(t) = t^2 + 3t - 6$, $[-2, 2]$
11. $s(t) = t^3 - 9t + 1$, $[-3, 3]$
12. $s(t) = 24 + 6t - t^3$, $[-2, 3]$

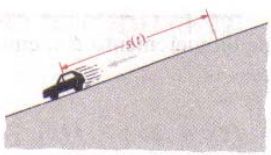
13. $s(t) = 2t^4 - 6t^2$, $[-2, 2]$

14. $s(t) = 2t^3 - 6t^5$, $[-1, 1]$

15. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 144 pie/s. Su altura sobre el suelo $s(t)$ (en pies) a los t segundos (s) está dada por $s(t) = 144t - 16t^2$. ¿Cuál es la velocidad y cuál la aceleración a los t segundos? ¿cuáles son a los 3 s? ¿Cuál es la altura máxima? ¿Cuándo llega al suelo?

16. Un automóvil baja por un plano inclinado (ver la figura). El número de pies $s(t)$ recorridos a los t segundos está dado por $s(t) = 5t^2 + 2$. ¿Cuál es la velocidad en $t = 1$ s? ¿En $t = 2$ s? ¿Cuándo alcanza una velocidad de 28 pie/s?

EJERCICIO 16



17. La iluminación producida por una fuente de luz es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia s a la citada fuente. A una distancia de 2 pie de una hoguera, el luxómetro de un fotógrafo registra 120 unidades. El fotógrafo se aleja poco a poco de la hoguera. Calcule la tasa de cambio de la lectura del luxómetro con respecto a s cuando está a 20 pie de la hoguera.

18. Demuestre que la tasa de cambio del volumen de una esfera con respecto al radio es igual al área de la superficie.

19. Demuestre que la tasa de cambio del radio de una circunferencia con respecto a su perímetro es independiente de su tamaño.

20. La relación entre la temperatura F en la escala Fahrenheit y la temperatura C en la escala Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. ¿Cuál es la razón de cambio de F con respecto a C?

21. La resistencia eléctrica R de un alambre de cobre de longitud constante es inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro d. ¿Cuál es la tasa de cambio o variación de R con respecto a d?

22. En la óptica se utiliza la ecuación de las lentes $1/f = (1/p) + (1/q)$, donde f es la distancia focal de una lente convexa y p y q son las distancias de la lente al objeto y a la imagen respectivamente. (Véase la figura del Ejercicio 53 de la Sección 2.4.) Encuentre una fórmula general para la tasa de cambio de q con respecto a p cuando f se mantiene fija.

Ejercicios 23-26: C es la función de costo de un producto. (a) Calcule el costo de producción de 100 unidades, y (b) encuentre las funciones de costo medio y marginal y obtenga sus valores en $x = 100$.

23. $C(x) = 800 + 0.04x + 0.0002x^2$

24. $C(x) = 6400 + 6.5x + 0.003x^2$

25. $C(x) = 250 + 100x + 0.001x^3$

26. $C(x) = 200 + (100/x) + (x/100)$

27. Un fabricante de motores pequeños calcula que el costo de producción de x unidades al día está dado por $C(x) = 100 + 50x + (100/x)$. Compare el costo marginal de producir 5 motores con el costo de la producción del sexto motor.

28. Una compañía lleva a cabo una serie de pruebas piloto para la producción de un nuevo solvente industrial, y encuentra que el costo de producir x litros para cada prueba está dado por $C(x) = 3 + x + (10/x)$. Compare el costo marginal de producir 10 litros con el costo de producir el undécimo litro.

3.4 INCREMENTOS Y DIFERENCIALES

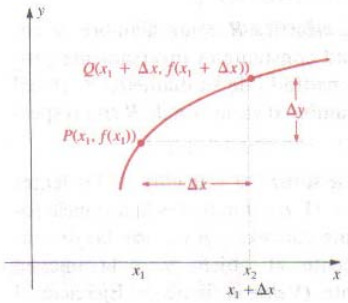
Consideremos la ecuación $y = f(x)$ en donde f es una función. En muchas aplicaciones la variable independiente x puede cambiar ligeramente y es necesario encontrar el cambio correspondiente de la variable dependiente y. Un cambio en x se denota frecuentemente por el símbolo Δx (que se lee "delta x"). Por ejemplo, si x varía de x_1 a x_2, entonces

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

El número Δx es el **incremento** de x. Nótese que $x_2 = x_1 + \Delta x$, es decir, el nuevo valor x_2 es igual al valor inicial x_1 más el incremento Δx. El símbolo Δy se usa para denotar el cambio en la variable dependiente y que corresponde a Δx. Entonces

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

FIGURA 3.12



En la Figura 3.12 se ilustran gráficamente los incrementos Δx y Δy.

En ocasiones se utiliza x para representar el valor inicial de la variable dependiente. En ese caso, para indicar un cambio (pequeño) de esta variable, se dice que x *tiene un incremento* Δx. Con esto la definición de Δy adquiere la siguiente forma.

DEFINICIÓN (3.20)

Si $y = f(x)$ y x tiene un incremento Δx, entonces el **incremento Δy de y** es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

EJEMPLO 1 Sea $y = 3x^2 - 5$.

(a) Calcular el incremento Δy correspondiente a un incremento Δx de x.

(b) Calcular Δy cuando x cambia de 2 a 2.1.

Solución

(a) Sea $f(x) = 3x^2 - 5$. Aplicando la Definición (3.20),

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= [3(x + \Delta x)^2 - 5] - [3x^2 - 5]\\ &= [3(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5] - [3x^2 - 5]\\ &= 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - 5 - 3x^2 + 5\\ &= 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2\end{aligned}$$

(b) Deseamos calcular Δy cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.1$ Sustituyendo en la fórmula para Δy,

$$\begin{aligned}\Delta y &= 6(2)(0.1) + 3(0.1)^2\\ &= 12(0.1) + 3(0.01) = 1.2 + 0.03 = 1.23\end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio de y es 1.23 cuando x varía de 2 a 2.1. También podemos calcular Δy directamente como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(2.1) - f(2)\\ &= [3(2.1)^2 - 5] - [3(2)^2 - 5] = 1.23\end{aligned}$$

La notación de incrementos puede usarse para definir la derivada de una función. Basta sustituir h por Δx en (3.4) y así:

(3.21) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esto puede expresarse: *La derivada de f es el límite de la razón del incremento Δy de la variable dependiente al incremento Δx de la variable independiente, cuando Δx tiende a cero*. En la Figura 3.12 puede verse que $\Delta y/\Delta x$ es la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q. De (3.21) se advierte que si $f'(x)$ existe, entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{cuando } \Delta x \approx 0 \qquad \text{o bien} \qquad \Delta y \approx f'(x)\,\Delta x \quad \text{cuando } \Delta x \approx 0.$$

En la siguiente definición se da un nombre especial a $f'(x)\,\Delta x$.

DEFINICIÓN (3.22)

Sea $y = f(x)$, donde f es una función derivable, y sea Δx un incremento de x.

(i) La **diferencial** dx de la variable independiente x es $dx = \Delta x$.

(ii) La **diferencial** dy de la variable dependiente y es

$$dy = f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx$$

En (3.22) (i) puede verse que la (variación) diferencial dx de la variable *independiente* x es igual a su incremento Δx. Sin embargo, esto no sucede con la variable *dependiente* y. Como puede verse en (ii) el valor de dy depende de x y de dx.

Si ambos lados de la ecuación $dy = f'(x)\,dx$ de la Definición (3.22) (ii) se dividen entre dx (suponiendo que $dx \neq 0$), se obtiene lo siguiente.

(3.23) $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por lo tanto, la derivada $f'(x)$ puede expresarse como el cociente de dos diferenciales. Esto justifica la notación dy/dx que se presentó en (3.6) para la derivada de $y = f(x)$ con respecto a x.

Los comentarios previos a la Definición (3.22) conducen a lo siguiente.

(3.24) Si $\Delta x \approx 0$, entonces $\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx = (D_x y)\,dx$.

Por tanto, si $y = f(x)$, dy puede usarse como un valor aproximado del incremento exacto Δy de la variable dependiente correspondiente a un incremento pequeño Δx de

x. Esta observación es útil para las aplicaciones en que se requiere una estimación de la variación de y.

EJEMPLO 2 Sea $y = 3x^2 - 5$. Utilizar dy para estimar Δy cuando x cambia de 2 a 2.1.

Solución Sea $f(x) = 3x^2 - 5$. En el Ejemplo 1 vimos que $\Delta y = 1.23$. Usando la Definición (3.22),

$$dy = f'(x)\,dx = 6x\,dx.$$

En este ejemplo, $x = 2$, $\Delta x = dx = 0.1$, y

$$dy = (6)(2)(0.1) = 1.2$$

Obsérvese que el valor 1.2 coincide con el valor exacto hasta la primera cifra decimal. •

EJEMPLO 3 Sea $y = x^3$ y Δx un incremento de x. Calcular (a) Δy, (b) dy, (c) $\Delta y - dy$ y (d) el valor de $\Delta y - dy$ para $x = 1$ y $\Delta x = 0.02$.

Solución

(a) Usando (3.20) con $f(x) = x^3$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3.$$

Aplicando el Teorema del Binomio (3.9) con $n = 3$,

$$\begin{aligned}\Delta y &= [x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - x^3 \\ &= 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\end{aligned}$$

(b) Por la Definición (3.22) (ii),

$$dy = f'(x)\,dx = 3x^2\,dx = 3x^2(\Delta x)$$

(c) De las partes (a) y (b),

$$\begin{aligned}\Delta y - dy &= [3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - 3x^2(\Delta x) \\ &= 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\end{aligned}$$

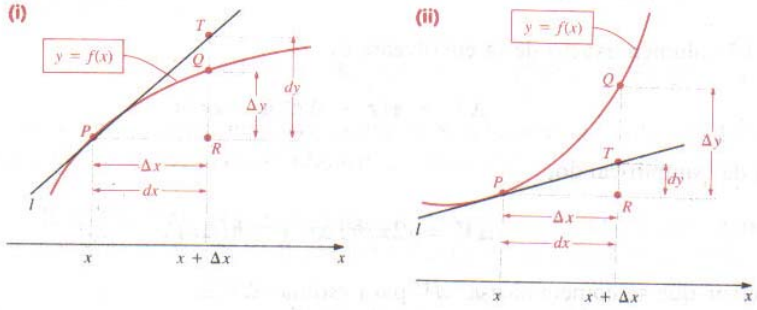
(d) Sustituyendo $x = 1$ y $\Delta x = 0.02$ en la parte (c),

$$\begin{aligned}\Delta y - dy &= 3(1)(0.02)^2 + (0.02)^3 \\ &= 3(0.0004) + (0.000008) = 0.001208 \approx 0.001\end{aligned}$$

Esto muestra que si dy se usa para estimar Δy cuando x cambia de 1 a 1.02, el error que se comete es de 0.001, aproximadamente. •

Las gráficas en la Figura 3.13 ilustran la interpretación geométrica de dx y dy en relación con la recta tangente l en el punto P. Se han representado Δx y Δy suponien-

FIGURA 3.13



do que son positivos, sin embargo, pueden tomar valores negativos. En el triángulo PRT puede apreciarse que la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente l es la razón $RT/\Delta x$, donde RT es la longitud del segmento que une R y T. Por lo tanto,

$$\frac{RT}{\Delta x} = f'(x) \qquad \text{o bien} \qquad RT = f'(x)\,\Delta x = dy.$$

Cuando los incrementos son negativos se obtiene un resultado análogo. En general, si x tiene un incremento Δx, entonces dy es lo que la *recta tangente* en P sube (o baja) cuando la variable independiente cambia de x a $x + \Delta x$. Esto es distinto de la cantidad Δy que es lo que la *gráfica* sube (o baja) entre P y Q. Esta interpretación geométrica también muestra que $dy \approx \Delta y$ cuando Δx es pequeño.

El ejemplo siguiente muestra cómo se pueden usar las diferenciales para obtener fórmulas de aproximación.

EJEMPLO 4

(a) Usar diferenciales para llegar a una fórmula que dé el valor aproximado del volumen de una envolvente cilíndrica delgada de altura h, radio interior r y espesor T.

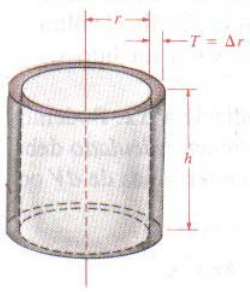
(b) ¿Cuál es el error que se comete al usar esta fórmula?

Solución

(a) En la Figura 3.14 se ilustra la cubierta cilíndrica de espesor T denotado por Δr. Hay que calcular el volumen comprendido entre el cilindro *interior* de radio r y el cilindro *exterior* de radio $r + \Delta r$. El volumen V del cilindro interno es

$$V = \pi r^2 h.$$

FIGURA 3.14



Si r se incrementa en Δr, entonces el volumen de la envolvente es el cambio ΔV de V. Considerando V como función de r y aplicando (3.24),

$$\Delta V \approx dV = (D_r V)\,dr = (2\pi rh)\,dr$$

con $dr = \Delta r$, ya que r es la variable independiente. Entonces

$$\Delta V \approx (2\pi rh)\,dr = (2\pi rh)T$$

es una fórmula aproximada para el volumen del cascarón cilíndrico. En palabras,

Volumen ≈ (Área de la cara cilíndrica interior) × (Espesor).

(b) El volumen exacto de la envolvente es

$$\Delta V = \pi(r + \Delta r)^2 h - \pi r^2 h$$

que da, simplificando,

$$\Delta V = (2\pi rh)\Delta r + \pi h(\Delta r)^2.$$

El error que se comete al usar dV para estimar ΔV es

$$\Delta V - dV = \pi h(\Delta r)^2.$$

Esto muestra que la aproximación dV es muy precisa cuando Δr es pequeño en comparación con h. •

El siguiente ejemplo ilustra el uso de las diferenciales para evaluar los errores de cálculo provenientes de errores de medición. Como se indica en la solución, *es importante considerar primero las fórmulas generales* y no sustituir las variables por sus valores específicos sino hasta los últimos pasos de la solución.

EJEMPLO 5 El radio de un globo esférico mide 30 cm y el error máximo en la medición es de 0.15 cm. Estimar el máximo error que se comete al calcular el volumen de la esfera.

Solución Consideramos primero la fórmula *general* que relaciona el radio con el volumen. Definimos

$$x = \text{valor medido del radio}$$

y

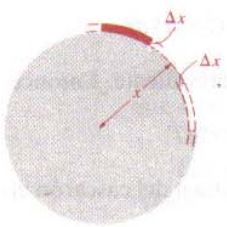
$$dx = \Delta x = \text{error máximo en } x.$$

Suponiendo que Δx es positivo, tenemos que

$$x - \Delta x \leq \text{radio exacto} \leq x + \Delta x.$$

Si Δx es negativo, podemos usar $|\Delta x|$ en vez de Δx. En la Figura 3.15 se muestra una parte de la sección transversal del globo que indica el posible error Δx. Si se calcula el volumen V de la envolvente cilíndrica usando el valor medido x, entonces $V = \frac{4}{3}\pi x^3$.

FIGURA 3.15



Sea ΔV el cambio en V correspondiente a Δx. Podemos interpretar ΔV como *el error en el volumen calculado* debido al error Δx. Podemos estimar ΔV en términos de dV como sigue:

$$\Delta V \approx dV = (D_x V)\,dx = 4\pi x^2\,dx.$$

Finalmente, sustituimos los valores específicos de x y dx. Con $x = 30$ y $\Delta x = dx = \pm 0.15$ obtenemos

$$dV = 4\pi(30^2)(\pm 0.15) = \pm(540)\pi \approx \pm 1696.$$

Por lo tanto, el error máximo posible en el volumen calculado debido al error de medición del radio es, aproximadamente, $\pm 1696\ \text{cm}^3$.

En el Ejemplo 5 el radio medido del globo fue de 30 cm con error máximo de 0.15 cm. La razón de 0.15 a 30 se llama *error medio* en la medición del radio. Por tanto

$$\text{Error medio} = \frac{0.15}{30} = 0.005.$$

Este número significa que el error en la medición del radio es, *en promedio*, 0.005 cm por cm. El *error porcentual* se define como el error medio multiplicado por 100%. En este ejemplo,

$$\text{Error porcentual} = (0.005)(100\%) = 0.5\%.$$

A continuación se enuncia la definición general de estos conceptos.

DEFINICIÓN **(3.25)**

Sea x una medida con un error máximo Δx. Por definición,

(i) **Error medio** $= \dfrac{\Delta x}{x}$.

(ii) **Error porcentual** = (Error medio) × (100%).

En términos de diferenciales, si x representa una medida con un error posible dx, entonces el error medio es $(dx)/x$. Si dx es una *aproximación* al error en x entonces, por supuesto, $(dx)/x$ es una *aproximación* al error medio. El siguiente ejemplo ilustra estos comentarios.

EJEMPLO 6 El radio de un globo mide 30 cm con un error máximo en la medición de 0.15 cm. Estimar el error medio y el error porcentual para el valor calculado del volumen.

Solución Este ejemplo es continuación del Ejemplo 5, donde encontramos que si el error máximo en la medición del radio es 0.15 cm, entonces el error máximo ΔV en el volumen calculado V del globo puede aproximarse por

$$dV = \pm(540)\pi \approx \pm 1696\ \text{cm}^3.$$

El volumen calculado es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(30)^3 = 36\,000\pi\ \text{cm}^3.$$

Aplicando la Definición (3.25) a la variable V:

$$\text{Error medio} = \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{\pm(540)\pi}{36\,000\,\pi} \approx \pm 0.015.$$

$$\text{Error porcentual} \approx \pm(0.015)(100\%) = \pm 1.5\%.$$

Por lo tanto, *en promedio*, hay un error de $\pm 0.015\ \text{cm}^3$ por cm^3 del volumen calculado. A continuación del Ejemplo 5 encontramos que el error porcentual para el radio es 0.5%. Nótese que esto da un error porcentual de 1.5% para el volumen. •

EJERCICIOS 3.4

Ejercicios 1-4: (a) Utilice la Definición (3.20) para encontrar una fórmula general para Δy. (b) Calcule el cambio en y correspondiente a los valores x y Δx, usando Δy.

1. $y = 2x^2 - 4x + 5,\ x = 2,\ \Delta x = -0.2$
2. $y = x^3 - 4,\ x = -1,\ \Delta x = 0.1$
3. $y = 1/x^2,\ x = 3,\ \Delta x = 0.3$
4. $y = 1/(2 + x),\ x = 0,\ \Delta x = -0.03$

Ejercicios 5-12: Determine (a) Δy, (b) dy y (c) $dy - \Delta y$.

5. $y = 3x^2 + 5x - 2$
6. $y = 4 - 7x - 2x^2$
7. $y = 1/x$
8. $y = 7x + 12$
9. $y = 4 - 9x$
10. $y = 8$
11. $y = x^4$
12. $y = x^{-2}$

Ejercicios 13-14: Use diferenciales para estimar el cambio en $f(x)$ cuando x varía de a a b.

13. $f(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 5;\ a = 1,\ b = 1.03$
14. $f(x) = -3x^3 + 8x - 7;\ a = 4,\ b = 3.96$
15. Sean $f(z) = z^3 - 3z^2 + 2z - 7$ y $w = f(z)$. Encuentre dw. Use dw para estimar el incremento de w cuando z varía de 4 a 3.95.
16. Sean $F(t) = 1/(2 - t^2)$ y $s = F(t)$. Determine ds y utilice este valor para estimar el incremento de s cuando t varía de 1 a 1.02.
17. El radio de la tapa circular de un pozo de alcantarilla es de 40 cm aproximadamente, con un error en la medición de 0.15 cm. Utilizando diferenciales, estime el error máximo en el cálculo del área de un lado de la tapa. Calcule el error medio y el error porcentual.
18. El lado de una baldosa cuadrada mide 30 cm con un error de medición de 0.15 cm. Use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo del área. Calcule el error medio y el error porcentual.
19. Emplee diferenciales para estimar el incremento en volumen de un cubo cuando sus lados cambian de 10 a 10.1 cm. ¿Cuál es el incremento exacto del volumen?
20. Un globo esférico se infla con gas. Use diferenciales para estimar el incremento del área de la superficie del globo cuando el diámetro varía de 60 cm a 60.6 cm.
21. Un lado de una casa tiene la forma de un cuadrado coronado por un triángulo equilátero. La base mide 48 pie con un error máximo en la medición de 1 pulg. Calcule el área del lado y use diferenciales para estimar el error máximo cometido en el cálculo. Evalúe el error medio y el error porcentual.
22. Los pequeños errores en la medición de las dimensiones de grandes recipientes tienen un efecto importante en el cálculo de sus volúmenes. Un silo tiene la forma de un cilindro circular recto coronado por una semiesfera (véase la figura). La altura del cilindro es exactamente de 50 pie. Suponga que la circunferencia de la base mide 30 pie con un error máximo en la medición de 6 pulg. Calcule el volumen del silo a partir de estas medidas y use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo. Determine el error medio y el error porcentual.

EJERCICIO 22



23. La arena que se escapa de un recipiente va formando un montículo cónico cuya altura siempre es igual a su radio. Use diferenciales para estimar el incremento del radio correspondiente a un aumento de 2 cm³ en el volumen del montículo, cuando el radio mide 10 cm.

24. **Use el método ilustrado en el Ejemplo 4 de esta sección para encontrar fórmulas aproximadas del volumen de una envolvente sólida delgada cuya forma superficial es (a) esférica, (b) cúbica.**

25. La ley de gravitación de Newton dice que la fuerza de atracción entre dos partículas con masas m_1 y m_2 está dada por $F = gm_1m_2/s^2$, donde g es una constante y s es la distancia entre las partículas. Use diferenciales para estimar el incremento en s que se requiere para aumentar F en un 10% cuando $s = 20$ cm.

26. **La ley de Boyle establece que la presión p y el volumen v de un gas encerrado están relacionados por la fórmula $pv = c$, donde c es una constante; o, equivalentemente, por $p = c/v$,** suponiendo $v \neq 0$. Demuestre que dp y dv están relacionados por la fórmula $p\,dv + v\,dp = 0$.

27. Haga uso de diferenciales para estimar $(0.98)^4$. (*Sugerencia:* Tome $y = f(x) = x^4$ y considere $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$, con $x = 1$ y $\Delta x = -0.02$.) ¿Cuál es el valor exacto de $(0.98)^4$?

28. Emplee diferenciales para estimar el valor de

$$N = (2.01)^4 - 3(2.01)^3 + 4(2.01)^2 - 5.$$

¿Cuál es el valor exacto de N?

29. El área A de un cuadrado de lado s está dada por $A = s^2$. Suponga que s tiene un incremento Δs. Ilustre geométricamente dA y $\Delta A - dA$.

30. El volumen V de un cubo de lado x está dado por $V = x^3$. Suponga que x tiene un incremento Δx. Ilustre geométricamente dV y $\Delta V - dV$.

31. La obstrucción de las arteriolas es una de las causas de hipertensión sanguínea. Se ha comprobado experimentalmente que cuando la sangre fluye por una arteriola de longitud dada, la diferencia de presión en los dos extremos de la arteriola es inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio. Suponga que el radio de una arteriola disminuye en 10%. Use diferenciales para calcular el cambio porcentual en la diferencia de presión.

32. La resistencia eléctrica R de un conductor es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro. Suponiendo que la longitud es constante, ¿con qué precisión debe medirse el diámetro (en términos del error porcentual) para mantener el error porcentual en el valor de R entre -3% y 3%?

3.5 LA REGLA DE LA CADENA

Las reglas de derivación presentadas en las secciones anteriores se pueden usar solamente para sumas, restas, productos y cocientes de expresiones de la forma x^n donde n es un entero. Hasta ahora no se ha presentado ninguna regla que pueda aplicarse *directamente* a una expresión como $(x^2 + 1)^3$. Es claro que

$$D_x\,(x^2 + 1)^3 \neq 3(x^2 + 1)^2$$

pues cambiando la forma de la expresión puede escribirse

$$y = (x^2 + 1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

y entonces

$$\begin{aligned} D_x y &= 6x^5 + 12x^3 + 6x \\ &= 6x(x^4 + 2x^2 + 1) \\ &= 6x(x^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $$D_x(x^2 + 1)^3 = 6x(x^2 + 1)^2.$$

Estos desarrollos pueden llegar a ser muy complicados para potencias mayores, como por ejemplo $(x^2 + 1)^{10}$. Por esto es conveniente tener métodos más sencillos para calcular la derivada. El que se usa en este caso parte de expresar y como una función *compuesta* de x. Recordemos que si f y g son funciones tales que

$$y = f(u) \quad \text{y} \quad u = g(x),$$

y si $g(x)$ está en el dominio de f entonces puede escribirse

$$y = f(u) = f(g(x)),$$

es decir, y es una función de x. Esta última es la función compuesta $f \circ g$ definida en la Sección 1.5. Nótese que $y = (x^2 + 1)^3$ puede expresarse de esta manera definiendo

$$y = u^3 \quad \text{y} \quad u = x^2 + 1.$$

Si se pudiera encontrar una regla general para derivar $f(g(x))$, entonces se podría aplicar a $y = (x^2 + 1)^3$ como un caso especial y también a cualquier expresión de la forma $y = [f(x)]^n$, donde n es un entero.

Para dar una idea del tipo de regla esperada, regresemos a las ecuaciones

$$y = f(u) \quad \text{y} \quad u = g(x).$$

El objetivo es encontrar una fórmula para la derivada dy/dx de la función compuesta dada por $y = f(g(x))$. Si f y g son derivables, entonces, usando la notación de diferenciales,

$$\frac{dy}{du} = f'(u) \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = g'(x).$$

Considerando el producto

$$\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

y tratando las derivadas como cocientes de diferenciales, *se llega* a la siguiente regla:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x).$$

Nótese que ésta proporciona la derivada correcta de $y = (x^2 + 1)^3$, pues escribiendo

$$y = u^3 \quad \text{y} \quad u = x^2 + 1$$

y usando la regla, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (3u^2)(2x) = 6xu^2 = 6x(x^2 + 1)^2.$$

Aunque no se ha *demostrado* la citada regla, se ha planteado el siguiente teorema, en el que se supone que las variables se eligen de manera que la función compuesta $f \circ g$ está definida y que si g tiene derivada en x entonces f tiene derivada en $g(x)$.

REGLA DE LA CADENA (3.26)

Si $y = f(u)$, $u = g(x)$, y las derivadas $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$ existen ambas, entonces la función compuesta definida por $y = f(g(x))$ tiene una derivada dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Demostración Parcial Sean x y Δx tales que tanto x como $x + \Delta x$ estén en el dominio de la función compuesta. Como $y = f(g(x))$, el incremento de y correspondiente está dado por

$$\Delta y = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)).$$

Si la función compuesta tiene una derivada en x, entonces por (3.23),

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Considerando $u = g(x)$, sea Δu el incremento de u correspondiente a Δx, es decir,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Puesto que

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$$

la fórmula $\Delta y = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$ puede expresarse como

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Si $y = f(u)$ es derivable en u entonces

$$\frac{dy}{du} = f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Análogamente, si $u = g(x)$ es derivable en x entonces

$$\frac{du}{dx} = g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Supongamos que existe un intervalo abierto I que contiene a x tal que siempre que $x + \Delta x$ está en I y $\Delta x \neq 0$, entonces $\Delta x \neq 0$. En este caso puede escribirse

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

siempre y cuando el límite exista. Como g es derivable en x entonces es continua en x. Como $\Delta x \to 0$, entonces $g(x + \Delta x)$ tiende a $g(x)$ y por lo tanto $\Delta u \to 0$. Resulta que la fórmula del límite dada anteriormente se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

que es lo que se quería demostrar.

En la mayoría de las aplicaciones de la Regla de la Cadena, $u = g(x)$ tiene las propiedades utilizadas en el párrafo anterior. Si g no satisface esta propiedad, entonces todo el intervalo abierto que contiene a x contiene también a un número $x + \Delta x$, con $\Delta x \neq 0$, tal que $\Delta u = 0$. En este caso la demostración no es válida ya que Δu aparece en un denominador. Para tener una demostración que se aplique a funciones de este tipo es necesario desarrollar otros métodos. *En el Apéndice II se da una demostración completa de la Regla de la Cadena.* • •

EJEMPLO 1 Sea $y = (3x^2 - 7x + 1)^5$. Usar la Regla de la Cadena para encontrar dy/dx.

Solución Considerando

$$y = u^5 \quad \text{y} \quad u = 3x^2 - 7x + 1.$$

se expresa y como una función compuesta de x. Si se utiliza la Regla de la Cadena (3.26),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 5u^4(6x - 7)$$

$$= 5(3x^2 - 7x + 1)^4(6x - 7) \quad \bullet$$

Una de las aplicaciones principales de la regla mencionada es para desarrollar otras fórmulas de derivación. Como un primer ejemplo se demostrará una fórmula para la derivada de una potencia de una función.

REGLA DE LA POTENCIA PARA FUNCIONES (3.27)

Si g es una función derivable y n es un entero entonces

$$D_x\,[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}\,D_x\,[g(x)].$$

Demostración Si $y = u^n$ y $u = g(x)$, se tiene que $y = [g(x)]^n$. Por la Regla de la Cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\,D_x\,u = n[g(x)]^{n-1}\,D_x\,[g(x)].$$

Esto completa la demostración. • •

La siguiente forma equivalente para la Regla de la Potencia en el caso de Funciones es más fácil de recordar que (3.27).

REGLA DE LA POTENCIA (FORMA ALTERNA) (3.28)

$$D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u, \quad \text{para } u = g(x)$$

Nótese que si $u = x$ entonces $D_x u = 1$, con lo que (3.28) se reduce a (3.10).

EJEMPLO 2 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = (x^5 - 4x + 8)^7$.

Solución Usando la Regla de la Potencia (3.28) con $u = x^5 - 4x + 8$ y $n = 7$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(x^5 - 4x + 8)^7 = 7(x^5 - 4x + 8)^6 D_x(x^5 - 4x + 8) \\ &= 7(x^5 - 4x + 8)^6(5x^4 - 4) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Determinar $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = \dfrac{1}{(4x^2 + 6x - 7)^3}$.

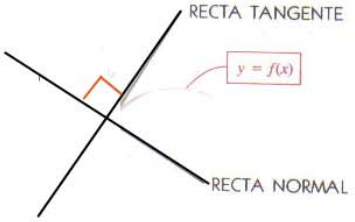
Solución Escribiendo $y = (4x^2 + 6x - 7)^{-3}$ y aplicando la Regla de la Potencia (3.28) con $u = 4x^2 + 6x - 7$ y $n = -3$,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= D_x(4x^2 + 6x - 7)^{-3} \\ &= -3(4x^2 + 6x - 7)^{-4} D_x(4x^2 + 6x - 7) \\ &= -3(4x^2 + 6x - 7)^{-4}(8x + 6) \\ &= \frac{-6(4x + 3)}{(4x^2 + 6x - 7)^4} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Sea $F(z) = (2z + 5)^3(3z - 1)^4$. Encontrar $F'(z)$.

Solución Usando primero la Regla del Producto, después la Regla de la Potencia y factorizando el resultado,

$$\begin{aligned} F'(z) &= (2z + 5)^3 D_z(3z - 1)^4 + (3z - 1)^4 D_z(2z + 5)^3 \\ &= (2z + 5)^3 \cdot 4(3z - 1)^3(3) + (3z - 1)^4 \cdot 3(2z + 5)^2(2) \\ &= 6(2z + 5)^2(3z - 1)^3[2(2z + 5) + (3z - 1)] \\ &= 6(2z + 5)^2(3z - 1)^3(7z + 9) \end{aligned}$$



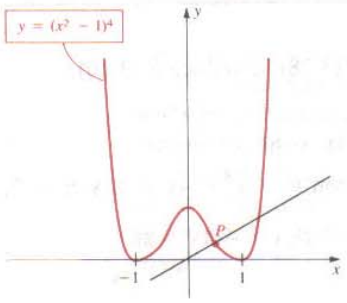
Sea f una función derivable. La **recta normal** a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en el mismo punto, como se ilustra en la Figura 3.16. Si $f'(a) \neq 0$, entonces por el Teorema (1.19), la pendiente de la recta normal es $-1/f'(a)$. Si $f'(a) = 0$, entonces la recta tangente es horizontal y, en este caso, la recta normal es vertical y tiene por ecuación $x = a$.

EJEMPLO 5 Sea $f(x) = (x^2 - 1)^4$. Encontrar la pendiente de la recta normal a la gráfica de f en el punto $P(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$. Ilustrar esto con un croquis.

Solución Por la Regla de la Potencia,

$$f'(x) = 4(x^2 - 1)^3(2x) = 8x(x^2 - 1)^3.$$

FIGURA 3.17



La pendiente m de la recta tangente en P es

$$m = f'(\tfrac{1}{2}) = 8(\tfrac{1}{2})(-\tfrac{3}{4})^3 = -\tfrac{27}{16} \approx -1.7$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta normal es $-1/m = 16/27 \approx 0.6$.

La gráfica de f es simétrica con respecto al eje y, las abscisas de sus intersecciones con el eje x son ± 1, y la ordenada de la intersección con el eje y es 1. En la Figura 3.17 aparece un croquis de la gráfica de f y su recta normal en P. •

Si g es una función derivable y $y = g(x)$, entonces (3.28) también se puede expresar en cualquiera de las siguientes formas.

(3.29)
$$D_x(y^n) = ny^{n-1} D_x y = ny^{n-1} y' = ny^{n-1} \frac{dy}{dx}$$

La variable dependiente y representa la expresión $g(x)$ y por lo tanto, al derivar y^n *es necesario* multiplicar ny^{n-1} por la derivada y'. En general, $D_x y^r \neq ry^{r-1}$. La Fórmula (3.29) será de gran utilidad en la siguiente sección para trabajar con las funciones implícitas.

EJERCICIOS 3.5

Ejercicios 1-26: Derive la función.

1. $f(x) = (x^2 - 3x + 8)^3$
2. $f(x) = (4x^3 + 2x^2 - x - 3)^2$
3. $g(x) = (8x - 7)^{-5}$
4. $k(x) = (5x^2 - 2x + 1)^{-3}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 - 1)^4}$
6. $a(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{(2x + 3)^4}$
7. $f(x) = (8x^3 - 2x^2 + x - 7)^5$
8. $g(w) = (w^4 - 8w^2 + 15)^4$
9. $F(v) = (17v - 5)^{1000}$
10. $K(x) = (3x^2 - 5x + 7)^{-1}$
11. $s(t) = (4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-2}$
12. $p(s) = 1/(8 - 5s + 7s^2)^{10}$
13. $N(x) = (6x - 7)^3(8x^2 + 9)^2$
14. $f(w) = (2w^2 - 3w + 1)(3w + 2)^4$
15. $g(z) = \left(z^2 - \dfrac{1}{z^2}\right)^6$
16. $S(t) = \left(\dfrac{3t + 4}{6t - 7}\right)^3$
17. $k(u) = \dfrac{(u^2 + 1)^3}{(4u - 5)^5}$

18. $g(x) = (3x - 8)^{-2}(7x^2 + 4)^{-3}$

19. $f(x) = \left(\dfrac{3x^2 - 5}{2x^2 + 7}\right)^2$

20. $M(z) = \dfrac{9z^3 + 2z}{(6z + 1)^3}$

21. $G(s) = (s^{-4} + 3s^{-2} + 2)^{-6}$

22. $F(v) = (v^{-1} - 2v^{-2})^{-3}$

23. $h(x) = [(2x + 1)^{10} + 1]^{10}$

24. $f(t) = \left[\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^{-1} + 1\right]^{-1}$

25. $F(t) = 2t(2t + 1)^2(2t + 3)^3$

26. $N(x) = \dfrac{7x(x^2 + 1)^2}{(3x + 10)^4}$

Ejercicios 27-30: (a) Encuentre ecuaciones para la recta tangente y la recta normal en el punto P de la gráfica de la ecuación dada. (b) Determine los puntos de la gráfica en los que la recta tangente es horizontal.

27. $y = (4x^2 - 8x + 3)^4$; $P(2, 81)$

28. $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^5$; $P(1, 32)$

29. $y = (2x - 1)^{10}$; $P(1, 1)$

30. $y = (x^2 - 1)^7$; $P(0, -1)$

31. Sea $y = (x^4 - 3x^2 + 1)^{10}$. Encuentre dy y úsela para estimar el incremento de y cuando x varía de 1 a 1.01.

32. Sea $w = z^3(z - 1)^5$. Halle dw y úsela para estimar el incremento de w cuando z varía de 2 a 1.98.

33. Sean $w = f(z)$ y $z = g(s)$. (a) Exprese la fórmula de la Regla de la Cadena para dw/ds en términos de la notación con diferenciales. (b) Determine dw/ds para $w = z^3 - (2/z)$ y para $z = (s^2 + 1)^5$.

34. Sean $v = F(u)$ y $u = G(t)$. (a) Exprese la fórmula de la Regla de la Cadena para dv/dt en términos de la notación con diferenciales. (b) Encuentre dv/dt para $v = (u^4 + 2u^2 + 1)^3$ y $u = 4t^2$.

Si un cuerpo de masa m tiene velocidad v, entonces su *energía cinética* K está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$. Suponiendo que v es una función del tiempo t, aplique la Regla de la Cadena para encontar una fórmula para dK/dt.

Cuando un globo meteorológico se está inflando, su radio r es función del tiempo t. Sea V el volumen del globo. Aplique la Regla de la Cadena para obtener una fórmula para dV/dt.

37. Cuando se lanza un astronauta al espacio, el peso de su cuerpo disminuye hasta llegar a un estado de ingravedad (o ingravidez) total. El peso W de un astronauta de 150 libras (lb), a una altura de x km sobre el nivel del mar está dado por

$$W = 150\left[\frac{6400}{6400 + x}\right]^2.$$

¿A razón de cuántas libras por segundo (lb/s) pierde peso el astronauta si cuando $x = 1000$ km la astronave se va alejando a razón de 6 km/s?

38. La relación de longitud a peso del pez llamado hipogloso del Pacífico está descrita por la fórmula $W = 10.375L^3$, donde la longitud L está en metros y el peso W en kilogramos. Su tasa de crecimiento en longitud dL/dt está dada por $0.18(2 - L)$, para t medido en años.
 (a) Encuentre una fórmula para la tasa de crecimiento en peso dW/dt en términos de L.
 (b) Use la fórmula de la parte (a) para calcular la tasa de crecimiento en peso de un hipogloso de 20 kg.

39. Calcule $k(2)$ y $k'(2)$ suponiendo que $k(x) = f(g(x))$ y $f(2) = -4$, $g(2) = 2$, $f'(2) = 3$, $g'(2) = 5$.

40. Sean p, q y r funciones tales que $p(z) = q(r(z))$. Suponiendo que $r(3) = 3$, $q(3) = -2$, $r'(3) = 4$ y $q'(3) = 6$, calcule $p(3)$ y $p'(3)$.

41. Sea $f(t) = g(h(t))$. Suponiendo que $f(4) = 3$, $g(4) = 3$, $h(4) = 4$, $f'(4) = 2$ y $g'(4) = -5$, evalúe $h'(4)$.

42. Sea $u(x) = v(w(x))$. Considerando que $v(0) = -1$, $w(0) = 0$, $u(0) = -1$, $v'(0) = -3$ y $u'(0) = 2$, calcule $w'(0)$.

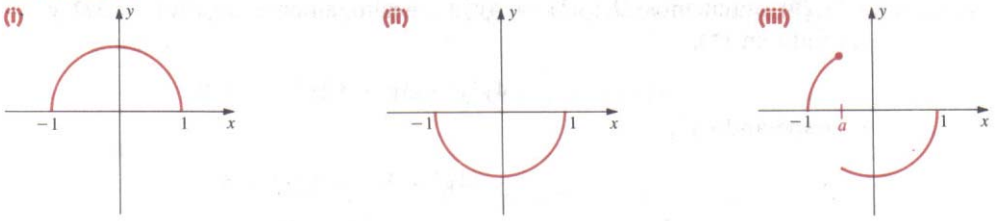
43. Consulte la Definición (1.21). Sea f derivable. Aplique la Regla de la Cadena para demostrar (a) que si f es par, por lo tanto f' es impar, y (b) que si f es impar, entonces f' es par. Dé ejemplos de (a) y (b) utilizando funciones polinomiales.

44. Sean $z = k(y)$, $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Demuestre que según hipótesis restrictivas adecuadas

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Generalice este resultado a un número arbitrario de funciones.

FIGURA 3.18



La gráfica de k aparece en la Figura 3.18(iii). Obsérvese que hay una discontinuidad de salto en $x = a$. La función k está definida implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, ya que

$$x^2 + [k(x)]^2 = 1$$

para todo x en el dominio de k. Haciendo que a tome diferentes valores podemos obtener tantas funciones implícitas como queramos. Hay muchas otras funciones determinadas implícitamente por $x^2 + y^2 = 1$, y la gráfica de cada una de ellas es una parte de la gráfica de la ecuación.

No es obvio que la ecuación

$$y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$$

defina una función implícita f en el sentido de que al sustituir y por $f(x)$,

$$[f(x)]^4 + 3[f(x)] - 4x^3 = 5x + 1$$

sea una identidad para todo x en el dominio de f. Se pueden enunciar condiciones en las cuales una función implícita existe y es derivable en algunos números de su dominio; sin embargo, se omite la demostración pues requiere métodos más avanzados. En los siguientes ejemplos se supone que una ecuación en x y y define una función derivable f tal que al sustituir y por $f(x)$ la ecuación se convierte en una identidad para todo x en el dominio de f. La derivada de f puede evaluarse por el método de **derivación implícita**.

EJEMPLO 2 Suponiendo que la ecuación $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ define implícitamente una función derivable f tal que $y = f(x)$, encontrar su derivada.

Solución Tomamos a y como un símbolo que denota a $f(x)$ y consideramos la ecuación como una identidad para todo x en el dominio de f. Entonces las derivadas de ambos lados son iguales; es decir,

$$D_x(y^4 + 3y - 4x^3) = D_x(5x + 1), \quad \text{o bien}$$

$$(*) \qquad D_x(y^4) + D_x(3y) - D_x(4x^3) = D_x(5x) + D_x(1).$$

3.6 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Dada una ecuación de la forma

$$y = 2x^2 - 3$$

se dice que y *es una función de* x, ya que

$$y = f(x) \quad \text{con} \quad f(x) = 2x^2 - 3.$$

La ecuación

$$4x^2 - 2y = 6$$

define la misma función f, pues al despejar y se obtiene

$$-2y = -4x^2 + 6 \quad \text{o bien} \quad y = 2x^2 - 3.$$

En el caso $4x^2 - 2y = 6$ se expresa que y (o bien f) es una **función implícita** de x, o que f está definida *implícitamente* por la ecuación. Sustituyendo y por $f(x)$ en $4x^2 - 2y = 6$, se obtiene

$$4x^2 - 2f(x) = 6$$
$$4x^2 - 2(2x^2 - 3) = 6$$
$$4x^2 - 4x^2 + 6 = 6$$

La última ecuación es una identidad, pues es válida para todo x en el dominio de f. Esto es lo que caracteriza a las funciones f definidas implícitamente por una ecuación en x y y. Es decir, *f está definida implícitamente por una ecuación si y sólo si al sustituir y por $f(x)$ se llega a una identidad*. Como $(x, f(x))$ es un punto de la gráfica de f, el enunciado anterior implica que *la gráfica de la función implícita f coincide con una parte de (o con toda) la gráfica de la ecuación*.

En el siguiente ejemplo se muestra que una ecuación en x y y puede definir a más de una función implícita.

EJEMPLO 1 ¿Cuántas funciones diferentes quedan definidas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$?

Solución La gráfica de $x^2 + y^2 = 1$ es la circunferencia unitaria con centro en el origen. Despejando y en términos de x obtenemos

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

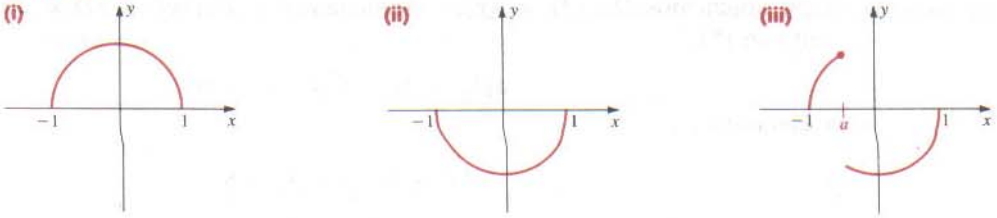
Dos de las funciones implícitas de la ecuación están dadas por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{y} \quad g(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Las gráficas de f y g son, respectivamente, la mitad superior y la mitad inferior de la circunferencia unitaria (véase la Figura 3.18(i) y (ii)). Para encontrar otras funciones implícitas podemos tomar cualquier número a entre -1 y 1, y definir una función k por

$$k(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \le x \le a \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } a < x \le 1. \end{cases}$$

FIGURA 3.18



La gráfica de k aparece en la Figura 3.18(iii). Obsérvese que hay una discontinuidad de salto en $x = a$. La función k está definida implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, ya que

$$x^2 + [k(x)]^2 = 1$$

para todo x en el dominio de k. Haciendo que a tome diferentes valores podemos obtener tantas funciones implícitas como queramos. Hay muchas otras funciones determinadas implícitamente por $x^2 + y^2 = 1$, y la gráfica de cada una de ellas es una parte de la gráfica de la ecuación. •

No es obvio que la ecuación

$$y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$$

defina una función implícita f en el sentido de que al sustituir y por $f(x)$,

$$[f(x)]^4 + 3[f(x)] - 4x^3 = 5x + 1$$

sea una identidad para todo x en el dominio de f. Se pueden enunciar condiciones en las cuales una función implícita existe y es derivable en algunos números de su dominio; sin embargo, se omite la demostración pues requiere métodos más avanzados. En los siguientes ejemplos se supone que una ecuación en x y y define una función derivable f tal que al sustituir y por $f(x)$ la ecuación se convierte en una identidad para todo x en el dominio de f. La derivada de f puede evaluarse por el método de **derivación implícita**.

EJEMPLO 2 Suponiendo que la ecuación $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ define implícitamente una función derivable f tal que $y = f(x)$, encontrar su derivada.

Solución Tomamos a y como un símbolo que denota a $f(x)$ y consideramos la ecuación como una identidad para todo x en el dominio de f. Entonces las derivadas de ambos lados son iguales; es decir,

$$D_x(y^4 + 3y - 4x^3) = D_x(5x + 1), \quad \text{o bien}$$

$$(*) \qquad D_x(y^4) + D_x(3y) - D_x(4x^3) = D_x(5x) + D_x(1).$$

Es importante recordar que en general $D_x y^4 \neq 4y^3$. Como $y = f(x)$, por medio de (3.29) obtenemos $D_x(y^4) = 4y^3 y'$. Análogamente, $D_x(3y) = 3D_x y = 3y'$. Sustituyendo en (*),

$$4y^3y' + 3y' - 12x^2 = 5 + 0.$$

Despejando y',

$$(4y^3 + 3)y' = 12x^2 + 5$$

y

$$y' = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}$$

siempre y cuando $4y^3 + 3 \neq 0$. En términos de f,

$$f'(x) = \frac{12x^2 + 5}{4(f(x))^3 + 3} \quad \bullet$$

Las dos últimas ecuaciones en la solución del Ejemplo 2, muestran una desventaja de la derivación implícita: la fórmula para y' (o $f'(x)$) puede tener la expresión y (o $f(x)$). Sin embargo, estas fórmulas son muy útiles para analizar f y su gráfica.

En el ejemplo siguiente se usa la derivación implícita para calcular la pendiente de la recta tangente al punto $P(a, b)$ de la gráfica de una ecuación. En los problemas de este tipo se supone que la ecuación define una función implícita f cuya gráfica coincide con la de la ecuación para todo x en algún intervalo abierto que contiene a a. Obsérvese que, como $P(a, b)$ es un punto de la gráfica, el par ordenado (a, b) debe ser solución de la ecuación.

EJEMPLO 3 Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$$y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$$

en el punto $P(1, -2)$.

Solución Nótese que $P(1, -2)$ está en la gráfica, ya que

$$(-2)^4 + 3(-2) - 4(1)^3 = 5(1) + 1.$$

La pendiente m de la recta tangente en $P(1, -2)$ es el valor de la derivada y' cuando $x = 1$ y $y = -2$. La ecuación dada es la misma que la del Ejemplo 2. Ahí encontramos que $y' = (12x^2 + 5)/(4y^3 + 3)$. Sustituyendo x por 1 y y por -2 obtenemos

$$m = \frac{12(1)^2 + 5}{4(-2)^3 + 3} = -\frac{17}{29} \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Suponiendo que $x^2 + y^2 = 1$ define una función f tal que $y = f(x)$, encontrar y'.

Solución Las funciones implícitas definidas por $x^2 + y^2 = 1$ se estudiaron en el Ejemplo 1. Como se hizo en el Ejemplo 2, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x y así

$$D_x(x^2) + D_x(y^2) = D_x(1).$$

Por lo tanto,

$$2x + 2yy' = 0 \quad \text{o bien} \quad yy' = -x$$

y

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \text{si } y \neq 0. \quad \bullet$$

El método de derivación implícita proporciona la derivada de *cualquier* función derivable definida por una ecuación en dos variables. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ determina muchas funciones implícitas (véase el Ejemplo 1). La pendiente de la recta tangente en un punto (x, y) de cualquiera de las gráficas de la Figura 3.18 está dada por $y' = -x/y$, siempre y cuando la derivada exista.

EJEMPLO 5 Encontrar y' suponiendo que $4xy^3 - x^2y + x^3 - 5x + 6 = 0$.

Solución Derivando ambos lados de la ecuación con respecto a x,

$$D_x(4xy^3) - D_x(x^2y) + D_x(x^3) - D_x(5x) + D_x(6) = D_x(0).$$

Como y denota a $f(x)$ para alguna función f, aplicaremos la Regla del Producto a $D_x(4xy^3)$ y $D_x(x^2y)$. De este modo,

$$\begin{aligned} D_x(4xy^3) &= 4x\, D_x(y^3) + y^3\, D_x(4x) \\ &= 4x(3y^2y') + y^3(4) \\ &= 12xy^2y' + 4y^3 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_x(x^2y) &= x^2\, D_x y + y\, D_x(x^2) \\ &= x^2y' + y(2x). \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la primera ecuación de la solución y derivando los otros términos obtenemos

$$(12xy^2y' + 4y^3) - (x^2y' + 2xy) + 3x^2 - 5 = 0.$$

Reuniendo los términos que contienen y' y pasando los restantes al lado derecho de la ecuación resulta

$$(12xy^2 - x^2)y' = 5 - 3x^2 + 2xy - 4y^3.$$

Por lo tanto,

$$y' = \frac{5 - 3x^2 + 2xy - 4y^3}{12xy^2 - x^2}$$

siempre que $12xy^2 - x^2 \neq 0$. $\bullet$

EJERCICIOS 3.6

Ejercicios 1-8: Encuentre al menos una función f definida implícitamente por la ecuación dada y especifique el dominio de f.

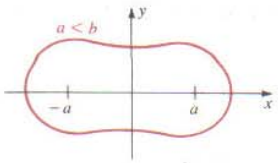
1. $3x - 2y + 4 = 2x^2 + 3y - 7x$
2. $x^3 - xy + 4y = 1$
3. $x^2 + y^2 - 16 = 0$
4. $3x^2 - 4y^2 = 12$
5. $x^2 - 2xy + y^2 = x$
6. $3x^2 - 4xy + y^2 = 0$
7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
8. $|x - y| = 2$

Ejercicios 9-20: Encuentre y' suponiendo que la ecuación define una función derivable f tal que $y = f(x)$.

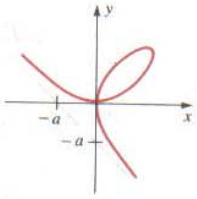
9. $8x^2 + y^2 = 10$
10. $4x^3 - 2y^3 = x$
11. $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$
12. $5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$
13. $5x^2 - xy - 4y^2 = 0$
14. $x^4 + 4x^2y^2 - 3xy^3 + 2x = 0$
15. $(1/x^2) + (1/y^2) = 1$
16. $x = y + 2y^2 + 3y^3$
17. $x^2y^3 + 4xy + x - 6y = 2$
18. $4 - 7xy = (y^2 + 4)^5$
19. $(y^2 - 9)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$
20. $(1 + xy)^3 = 2x^2 - 9$

Ejercicios 21-24: Se dan la ecuación de una curva clásica y un croquis de su gráfica para algunos valores positivos de las constantes a y b. (Para mayor información consulte libros de geometría analítica.) Calcule la pendiente de la recta tangente en el punto P para los valores dados de a y b.

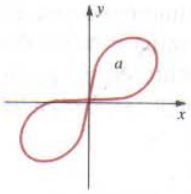
21. *Óvalos de Cassini:* $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4$; $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $P(2, \sqrt{2})$.



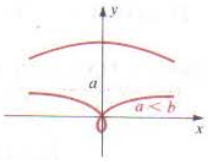
22. *Folio de Descartes:* $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; $a = 4$, $P(6, 6)$.



23. *Lemniscata de Bernoulli:* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$; $a = \sqrt{2}$, $P(1, 1)$.



24. *Concoide de Nicomedes:* $(y - a)^2(x^2 + y^2) = b^2y^2$; $a = 2$, $b = 4$, $P(\sqrt{15}, 1)$.



Ejercicios 25-28: Encuentre una ecuación para la recta tangente en el punto P a la gráfica de la ecuación dada.

25. $xy + 16 = 0$, $P(-2, 8)$
26. $y^2 - 4x^2 = 5$, $P(-1, 3)$
27. $2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0$, $P(2, -3)$
28. $(1/x) + (3/y) = 1$, $P(2, 6)$
29. Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no define una función f tal que $y = f(x)$.
30. Demuestre que la ecuación $y^2 = x$ determina un número infinito de funciones implícitas. Trace las gráficas de cuatro de esas funciones.
31. ¿Cuántas funciones implícitas quedan definidas por cada una de las ecuaciones?
 (a) $x^4 + y^4 - 1 = 0$
 (b) $x^4 + y^4 = 0$
 (c) $y^2 + \sqrt{x} + 4 = 0$

32. Utilice la derivación implícita para tornar patente que si P es cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, la recta tangente en P es perpendicular a OP.

33. Suponga que $3x^2 - x^2y^3 + 4y = 12$ define una función derivable f tal que $y = f(x)$. Use diferenciales para estimar el incremento de $f(x)$ cuando x varía de 2 a 1.97, suponiendo que $f(2) = 0$.

34. Considere que $x^3 + xy + y^4 = 19$ define una función diferenciable f tal que $y = f(x)$. Suponiendo que $P(1, 2)$ es un punto de la gráfica de f, use diferenciales para estimar la ordenada b del punto de la gráfica $Q(1.10, b)$.

3.7 POTENCIAS Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La regla de la potencia (3.10) se puede ampliar al caso de exponentes *racionales*. Si

$$y = x^{m/n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$, entonces

$$y^n = x^m.$$

Suponiendo que y' existe y que los denominadores no se anulan, derivando implícitamente se obtiene que

$$D_x y^n = D_x x^m$$

o bien

$$ny^{n-1} D_x y = mx^{m-1}.$$

Por lo tanto,

$$D_x y = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \frac{m}{n} x^{m-1} y^{1-n} = \frac{m}{n} x^{m-1} (x^{m/n})^{1-n}.$$

El lado derecho se puede simplificar con las leyes de los exponentes, con lo que se llega a la **Regla de la Potencia para Exponentes Racionales:** *Si m y n son enteros y $n \neq 0$, entonces*

$$D_x (x^{m/n}) = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}.$$

Ésta es una demostración incompleta de la fórmula pues en ella se supone que y' existe. Puede darse una demostración completa mediante la definición de derivada.

EJEMPLO 1 Encontrar y' si $y = 6\sqrt[3]{x^4} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

Solución Utilizando exponentes racionales podemos escribir $y = 6x^{4/3} + 4x^{-1/2}$. Aplicando la Regla de la Potencia,

$$\begin{aligned} y' &= 6(\tfrac{4}{3})x^{(4/3)-1} + 4(-\tfrac{1}{2})x^{-(1/2)-1} \\ &= 8x^{1/3} - 2x^{-3/2} \\ &= 8x^{1/3} - \frac{2}{x^{3/2}} \end{aligned}$$

y en términos de radicales,

$$y' = 8\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}.$$

La Regla de la Potencia para Funciones (3.27) es válida para cualquier exponente *racional*. El siguiente ejemplo ilustra esta regla.

EJEMPLO 2 Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt[3]{5x^2 - x + 4}$.

Solución Escribiendo $f(x) = (5x^2 - x + 4)^{1/3}$ y usando la Regla de la Potencia para Funciones con $n = \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{3}(5x^2 - x + 4)^{-2/3} D_x(5x^2 - x + 4) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(5x^2 - x + 4)^{2/3}}(10x - 1) \\ &= \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 4)^2}} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Hallar dy/dx si $y = (3x + 1)^6\sqrt{2x - 5}$.

Solución Como $y = (3x + 1)^6(2x - 5)^{1/2}$, aplicando las reglas del Producto y de la Potencia obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (3x + 1)^6\tfrac{1}{2}(2x - 5)^{-1/2}(2) + (2x - 5)^{1/2}6(3x + 1)^5(3) \\ &= \frac{(3x + 1)^6}{\sqrt{2x - 5}} + 18(3x + 1)^5\sqrt{2x - 5} \\ &= \frac{(3x + 1)^6 + 18(3x + 1)^5(2x - 5)}{\sqrt{2x - 5}} \\ &= \frac{(3x + 1)^5(39x - 89)}{\sqrt{2x - 5}} \end{aligned}$$

El interés del siguiente ejemplo radica en que ilustra el hecho de que para obtener una derivada, a veces hay que aplicar la Regla de la Potencia más de una vez.

EJEMPLO 4 Determinar $f'(x)$ para $f(x) = (7x + \sqrt{x^2 + 6})^4$.

Solución Aplicando la citada regla para las potencias,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(7x + \sqrt{x^2 + 6})^3 D_x(7x + \sqrt{x^2 + 6}) \\ &= 4(7x + \sqrt{x^2 + 6})^3[D_x(7x) + D_x\sqrt{x^2 + 6}]. \end{aligned}$$

Aplicando otra vez la Regla de la Potencia,

$$D_x\sqrt{x^2+6} = D_x(x^2+6)^{1/2} = \tfrac{1}{2}(x^2+6)^{-1/2}\,D_x(x^2+6)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+6}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = 4(7x+\sqrt{x^2+6})^3\left[7+\frac{x}{\sqrt{x^2+6}}\right]. \bullet$$

EJEMPLO 5 La tripulación de un barco divisa desde cubierta una ballena y calcula que tiene una longitud L de 32 pie con un error posible de ± 2 pie. Las investigaciones sobre las ballenas han mostrado que su peso W (en toneladas métricas) se relaciona con L según la fórmula $W = 0.000137L^{3.18}$. Usar diferenciales para estimar el error en el cálculo del peso de la ballena con una precisión de un décimo de tonelada métrica. ¿Cuánto vale aproximadamente el error porcentual?

Solución Para utilizar los métodos del cálculo debemos suponer que W es una función derivable de L. Usando la fórmula para hallar W con $L = 32$ obtenemos

$$W = (0.000137)32^{3.18} \approx (0.000137)(61{,}147.25) \approx 8.4 \text{ toneladas métricas.}$$

Denotemos por ΔL el error en la medición de L y por ΔW el error correspondiente en el valor calculado de W. Podemos estimar estos errores usando dL y dW, como se hizo en la Sección 3.4. Aplicando la Definición (3.22)(ii) y la Regla de la Potencia para Exponentes Racionales,

$$dW = \left(\frac{dW}{dL}\right)dL = (0.000137)(3.18)L^{2.18}\,dL$$
$$= 0.00043566L^{2.18}\,dL.$$

Sustituyendo $L = 32$ y $dL = \pm 2$, y usando calculadora, se ve que el error en la estimación de W es aproximadamente

$$dW = (0.00043566)32^{2.18}(\pm 2)$$
$$\approx (0.00043566)(1910.85)(\pm 2) \approx \pm 1.7 \text{ toneladas métricas.}$$

Por la Definición (3.25),

$$\text{Error medio} = \frac{\Delta W}{W} \approx \frac{dW}{W} \approx \pm\frac{1.7}{8.4} \approx \pm 0.20$$

y

$$\text{Error porcentual} \approx \pm(0.20)(100\%) = \pm 20\%. \bullet$$

Cuando se deriva una función f, se obtiene otra función f'. Cuando f' tiene derivada, ésta se denota por f'' y se la llama **segunda derivada** de f. Así

$$f''(x) = D_x[f'(x)] = D_x[D_x(f(x))] = D_x^2 f(x).$$

Como está indicado, puede utilizarse el operador D_x^2 para denotar segundas derivadas. La **tercera derivada** f''' de f es la derivada de la segunda derivada. Concretamente,

$$f'''(x) = D_x[f''(x)] = D_x[D_x^2 f(x)] = D_x^3 f(x).$$

En general, si n es un entero positivo, entonces $f^{(n)}$ denota la ***n*-ésima derivada** de f, la cual se calcula tomando f y derivando n veces sucesivamente. Con la notación de operadores, $f^{(n)}(x) = D_x^n f(x)$. El entero n se denomina **orden** de la derivada $f^{(n)}(x)$. A continuación se presenta un resumen de las diversas notaciones que se utilizan para estas **derivadas de orden superior** de $y = f(x)$.

NOTACIONES PARA LAS DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR (3.30)

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{(4)}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x)$$
$$D_x y,\ D_x^2 y,\ D_x^3 y,\ D_x^4 y,\ \ldots,\ D_x^n y$$
$$y',\ y'',\ y''',\ y^{(4)},\ \ldots,\ y^{(n)}$$
$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

La notación diferencial d^ny/dx^n para derivadas de orden superior *no* debe interpretarse como un cociente.

EJEMPLO 6 Sea $f(x) = 4x^2 - 5x + 8 - (3/x)$. Encontrar las primeras cuatro derivadas de $f(x)$.

Solución Como $f(x) = 4x^2 - 5x + 8 - 3x^{-1}$.

$$f'(x) = 8x - 5 + 3x^{-2} = 8x - 5 + \frac{3}{x^2}$$

$$f''(x) = 8 - 6x^{-3} = 8 - \frac{6}{x^3}$$

$$f'''(x) = 18x^{-4} = \frac{18}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = -72x^{-5} = -\frac{72}{x^5}$$

El siguiente ejemplo muestra como pueden evaluarse las derivadas de orden superior de las funciones implícitas.

EJEMPLO 7 Hallar y'' para $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$.

Solución Ya estudiamos esta ecuación en el Ejemplo 2 de la Sección 3.6, donde encontramos que

$$y' = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}.$$

Por lo tanto, $$y'' = D_x(y') = D_x\left(\frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}\right).$$

Ahora derivamos implícitamente empleando la Regla del Cociente como sigue:

$$y'' = \frac{(4y^3 + 3)\,D_x(12x^2 + 5) - (12x^2 + 5)\,D_x(4y^3 + 3)}{(4y^3 + 3)^2}$$

$$= \frac{(4y^3 + 3)(24x) - (12x^2 + 5)(12y^2y')}{(4y^3 + 3)^2}.$$

Sustituyendo y' obtenemos

$$y'' = \frac{(4y^3 + 3)(24x) - (12x^2 + 5)\cdot 12y^2\left(\frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}\right)}{(4y^3 + 3)^2}$$

$$= \frac{(4y^3 + 3)^2(24x) - 12y^2(12x^2 + 5)^2}{(4y^3 + 3)^3}$$

En la Definición (3.18) se definió la aceleración en el movimiento rectilíneo como la segunda derivada s'' de la función de posición s. En el siguiente capítulo se estudiarán algunas otras aplicaciones de las derivadas de orden superior.

EJERCICIOS 3.7

Ejercicios 1-24: Derive la función dada.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x^3}$
2. $f(x) = 10\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^5}$
3. $k(r) = \sqrt[3]{8r^3 + 27}$
4. $h(z) = (2z^2 - 9z + 8)^{-2/3}$
5. $F(v) = 5/\sqrt[3]{v^5 - 32}$
6. $k(s) = 1/\sqrt{3s - 4}$
7. $f(x) = \sqrt{2x}$
8. $g(x) = \sqrt[3]{1/x}$
9. $f(z) = 10\sqrt{z^3} + (3/\sqrt[3]{z})$
10. $f(t) = \sqrt[3]{t^2} - (1/\sqrt{t^3})$
11. $g(w) = (w^2 - 4w + 3)/w^{3/2}$
12. $K(x) = 8x^2\sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x}$
13. $M(x) = \sqrt{4x^2 - 7x + 4}$
14. $F(s) = \sqrt[3]{5s - 8}$
15. $f(t) = 4/(9t^2 + 16)^{2/3}$
16. $k(v) = 1/\sqrt{(v^4 + 7v^2)^3}$
17. $H(u) = \sqrt{\dfrac{3u + 8}{2u + 5}}$
18. $G(x) = \left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)^{5/2}$
19. $k(s) = \sqrt[4]{s^2 + 9}(4s + 5)^4$
20. $g(y) = (15y + 2)(y^2 - 2)^{3/4}$
21. $h(x) = (x^2 + 4)^{5/3}(x^3 + 1)^{3/5}$
22. $f(w) = \sqrt{w^3(9w + 1)^5}$
23. $f(x) = (7x + \sqrt{x^2 + 3})^6$
24. $p(z) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2z}}$

Ejercicios 25-26: Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto P.

25. $y = \sqrt{2x^2 + 1}$, $P(-1, \sqrt{3})$
26. $y = (5x - 8)^{1/3}$, $P(7, 3)$
27. Determine el punto P de la gráfica de $y = \sqrt{2x - 4}$ para el que su recta tangente pasa por el origen.
28. Determine los puntos de la gráfica de $y = x^{5/3} + x^{1/3}$ para los que su recta tangente es perpendicular a la recta $2y + x = 7$.

Ejercicios 29-32: Evalúe y' suponiendo que la ecuación dada define una función f tal que $y = f(x)$.

29. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 100$ **30.** $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

31. $6x + \sqrt{xy} - 3y = 4$ **32.** $xy^2 + \sqrt[3]{xy} + x^4 = 7$

33. Los pinnípedos, como las focas y las morsas, son un suborden de los mamíferos acuáticos carnívoros cuyas extremidades se han convertido en aletas. La relación entre la longitud y el peso durante su crecimiento fetal está dada por $W = (6 \times 10^{-5})L^{2.74}$, donde la longitud L se mide en centímetros y el peso W en kilogramos. Usando la Regla de la Cadena encuentre una fórmula para la tasa de crecimiento del peso con respecto al tiempo t, suponiendo que L es una función derivable de t. Si una foca pesa 0.5 kg y crece a razón de 0.4 kg por mes, ¿cuál es la tasa de crecimiento de su longitud?

34. La fórmula para la expansión adiabática del aire es $pv^{1.4} = c$, donde p es la presión, v el volumen y c una constante. Obtenga una fórmula para la tasa de cambio de la presión con respecto al volumen.

35. El área S de la superficie curva de un cono circular recto de altura h y radio r está dada por $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Un cono con radio $r = 6$ cm, tiene una altura de 8 cm, con un error máximo en la medición de 0.1 cm. Calcule S a partir de estas medidas y use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo. Calcule también el error porcentual.

36. El periodo T de un péndulo simple de longitud l se puede calcular con la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde g es una constante. Use diferenciales para estimar el cambio en l que provoca un incremento de 1% en T.

Ejercicios 37-40: Determine $f'(x)$ aprovechando el hecho de que $|a| = \sqrt{a^2}$. Halle también el dominio de f' y trace la gráfica de f.

37. $f(x) = |1 - x|$ **38.** $f(x) = |x^3 - x|$

39. $f(x) = |1 - x^2|$ **40.** $f(x) = x/|x|$

Ejercicios 41-46: Determine la primera y la segunda derivadas.

41. $g(z) = \sqrt{3z + 1}$

42. $k(s) = (s^2 + 4)^{2/3}$

43. $k(r) = (4r + 7)^5$

44. $f(x) = \sqrt[5]{10x + 7}$

45. $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + x - 2$

46. $g(x) = 3x^8 - 2x^5$

Ejercicios 47-50: Determine $D_x^3 y$.

47. $y = 2x^5 + 3x^3 - 4x + 1$ **48.** $y = \sqrt{2 - 5x}$

49. $y = (2x - 3)/(3x + 1)$ **50.** $y = (3x + 1)^4$

Ejercicios 51-54: Suponiendo que la ecuación define una función f tal que $y = f(x)$, encuentre y'' si es que existe.

51. $x^3 - y^3 = 1$

52. $x^2y^3 = 1$

53. $x^2 - 3xy + y^2 = 4$

54. $\sqrt{xy} - y + x = 0$

55. Sea $f(x) = 1/x$. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ para todo entero positivo n. Halle el valor de $f^{(n)}(1)$.

56. Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ para todo entero positivo n.

57. Demuestre que si $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $f^{(k)}(x) = 0$ para $k > n$.

58. Sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$, donde f y g tienen derivadas de todos los órdenes. Sea también $y = uv$. Demuestre que

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
$$y^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}.$$

Proponga una fórmula para $y^{(n)}$. (*Sugerencia:* Use el Teorema del Binomio (3.9).)

59. Sea $y = f(g(x))$, donde f'' y g'' existen. Aplique la Regla de la Cadena para expresar $D_x^2 y$ en términos de la primera y la segunda derivadas y de f y g.

60. Suponga que f tiene segunda derivada. Demuestre (a) que si f es una función par entonces f'' es par, y (b) que si f es una función impar entonces f'' es impar. Ejemplifique estos resultados con funciones polinomiales.

3.8 RAPIDECES DE VARIACIÓN RELACIONADAS

En las aplicaciones frecuentemente aparecen dos variables x y y que son funciones derivables del tiempo t; por ejemplo $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Además, x y y pueden estar relacionadas entre sí por medio de una ecuación como la siguiente

$$x^2 - y^3 - 2x + 7y^2 - 2 = 0.$$

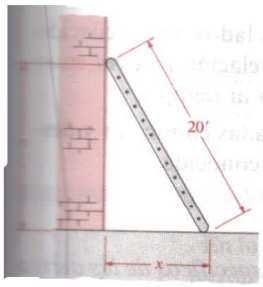
Derivando con respecto a t y usando la Regla de la Cadena se obtiene una ecuación en la que aparecen las razones de cambio respecto al tiempo dx/dt y dy/dt:

$$2x\frac{dx}{dt} - 3y^2\frac{dy}{dt} - 2\frac{dx}{dt} + 14y\frac{dy}{dt} = 0.$$

Las derivadas dx/dt y dy/dt se llaman **rapideces de variación relacionadas** ya que están vinculadas o relacionadas efectivamente por medio de una ecuación. Tal ecuación puede usarse para evaluar una de las derivadas cuando se conoce la otra. Esto tiene muchas aplicaciones prácticas como se verá en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Una escalera de 20 pie de largo está apoyada contra la pared de un edificio. La base de la escalera se desliza horizontalmente a razón de 10 pie/s. ¿Con qué rapidez resbala el otro extremo de la escalera cuando se encuentra a 12 pie del suelo?

FIGURA 3.19



Solución Comenzamos por representar esquemáticamente la posición de la escalera en la Figura 3.19 usando la variable x para denotar la distancia del edificio a la base de la escalera y otra variable y para denotar la altura sobre el suelo del otro extremo de la misma.

Como x aumenta a razón de 2 pie/s,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ pie/s}.$$

Nuestro objetivo es hallar dy/dt, la rapidez de cambio de la altura del extremo superior de la escalera en el momento en que $y = 12$ pie.

Se puede encontrar una relación entre x y y aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por la pared, el suelo y la escalera (véase la Figura 3.19). Esto da

$$x^2 + y^2 = 400.$$

Derivando ambos lados de la ecuación con respecto a t,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

o bien, si $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$

Esta última ecuación es una fórmula *general* que relaciona las dos derivadas dx/dt y dy/dt. Consideremos ahora el caso especial en que $y = 12$. El valor correspondiente de x se puede obtener de

$$x^2 + 144 = 400 \quad \text{o bien} \quad x^2 = 400 - 144 = 256.$$

Por lo tanto $x = \sqrt{256} = 16$ cuando $y = 12$. Sustituyendo en la fórmula general de dy/dt obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{16}{12}(2) = -\frac{8}{3} \text{ pie/s.}$$

A continuación se dan algunas recomendaciones que pueden servir de guía para problemas de rapidez de variación como el del Ejemplo 1.

GUÍA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE RAPIDECES DE VARIACIÓN RELACIONADAS (3.31)

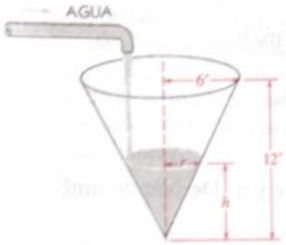
1. Leer cuidadosamente el problema varias veces y pensar en los datos y en las cantidades que se desea calcular.
2. Hacer un croquis o esquema apropiado y dar nombre a las variables y a las cantidades desconocidas.
3. Escribir los hechos conocidos expresando las rapideces de variación dadas y las desconocidas como derivadas de las variables.
4. Encontrar una ecuación *general* que relacione las variables.
5. Derivar con respecto a t ambos lados de la ecuación del punto 4 para obtener una relación *general* entre las razones de cambio respecto al tiempo.
6. Sustituir los valores y las derivadas *conocidas* y despejar la rapidez de cambio desconocida.

Un error que se comete frecuentemente es usar los valores específicos de las derivadas y las variables demasiado pronto en la resolución. Recuérdese siempre obtener una fórmula *general* que correlacione las rapideces de variación para *todo* tiempo t. Los valores específicos de las variables deben sustituirse solamente en los últimos pasos de la resolución.

EJEMPLO 2 Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto de 12 pie de alto y 6 pie de radio en la base. Si se suministra agua al tanque a razón de 10 galones por minuto (gal/min), ¿cuál será la rapidez de cambio del nivel del agua cuando la profundidad es de 3 pie? (1 gal $\approx$ 0.1337 pie^3).

Solución Aplicando el punto 2 de la Guía, comenzamos por esquematizar el tanque como se ve en la Figura 3.20, usando r para denotar el radio de la superficie del agua cuando la profundidad es h. Adviértase que r y h son funciones del tiempo t.

FIGURA 3.20



Siguiendo el consejo 3, se expresan las relaciones conocidas entre V, r y h. Sabemos que $dV/dt = 10$ gal/min y se desea encontrar dh/dt cuando $h = 3$ pie. El volumen V del agua en el tanque que corresponde a una profundidad h es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Esta fórmula para V relaciona V, r y h (véase el consejo 4 de la Guía). Antes de derivar con respecto a t debe expresarse V en términos de una variable. Consultando la Figura 3.20, por triángulos semejantes obtenemos

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{12} \quad \text{o bien} \quad r = \frac{h}{2}.$$

Por lo tanto, cuando la profundidad es h,

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3.$$

Derivando con respecto a t (véase el punto 5 de la Guía) se obtiene la siguiente relación general entre las derivadas de V y h en todo tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Cuando $h \neq 0$ se puede despejar dh/dt y obtener una fórmula equivalente:

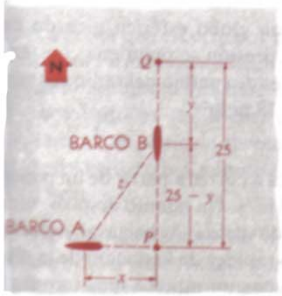
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

Por último (véase el punto 6 de la Guía), sustituimos $h = 3$ y $dV/dt = 10$ gal/min ≈ 1.337 pie^3/min, obtenemos

$$\frac{dh}{dt} \approx \frac{4}{\pi(9)}(1.337) \approx 0.189 \text{ pie/min}.$$

En los ejemplos restantes ya no se hará referencia a las recomendaciones de la Guía. El lector podrá reconocerlas al estudiar las soluciones.

FIGURA 3.21



EJEMPLO 3 A las 13:00 horas el barco A se encuentra a 25 millas al sur del barco B. Suponiendo que A navega hacia el oeste a razón de 16 mi/h, y que B navega hacia el sur a 20 mi/h, evaluar la rapidez de cambio o variación de la distancia entre los dos barcos a las 13:30.

Solución En la Figura 3.21 aparece un croquis del problema. En ella se han usado x y y para denotar las millas recorridas por los barcos A y B, respectivamente, t horas después de la una de la tarde (13:00). Los puntos P y Q marcan las posiciones a las 13 horas y z denota la distancia entre las embarcaciones al tiempo t.

Sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = 16 \text{ mi/h} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 20 \text{ mi/h}.$$

Deseamos determinar dz/dt. Por el Teorema de Pitágoras,

$$z^2 = x^2 + (25 - y)^2.$$

Ésta es una ecuación *general* que relaciona las variables x, y y z. Derivando ambos lados con respecto a t,

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(25 - y)\left(-\frac{dy}{dt}\right)$$

o bien

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + (y - 25)\frac{dy}{dt}.$$

A las 13:30 los barcos han navegado durante media hora y así

$$x = 8, \quad y = 10, \quad \text{y} \quad 25 - y = 15.$$

Por lo tanto,

$$z^2 = 64 + 225 = 289 \quad \text{o bien} \quad z = 17.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación en la que aparece dz/dt, obtenemos

$$17\frac{dz}{dt} = 8(16) + (-15)(20)$$

o bien

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{172}{17} \approx -10.12 \text{ mi/h}.$$

El signo negativo indica que a las 13:30 horas la distancia entre los barcos va disminuyendo.

Otro método para resolver el problema consiste en escribir $x = 16t$, $y = 20t$, y

$$z = [x^2 + (25 - y)^2]^{1/2} = [256t^2 + (25 - 20t)^2]^{1/2}.$$

La derivada dz/dt puede evaluarse directamente y, sustituyendo t por $\frac{1}{2}$, se obtiene la rapidez de variación deseada. •

EJERCICIOS 3.8

1. Una escalera de 20 pie de largo está apoyada contra la pared de un edificio. La base de la escalera resbala alejándose de la pared a razón de 3 pie/s. ¿Con qué rapidez desciende el extremo superior de la escalera cuando se encuentra a 8 pie del piso?

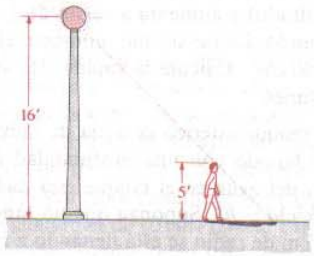
2. Cuando un disco metálico circular se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿Cuál es la rapidez de cambio del área de uno de sus lados?

3. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3/min. ¿Si la presión se mantiene constante, cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 18 pulg?

4. Una niña comienza a correr a partir de un punto A hacia el este, a 3 m/s. Un minuto después, otra niña sale corriendo desde A hacia el norte a 2 m/s. ¿Cuál es la rapidez de variación de la distancia entre las niñas un minuto más tarde?

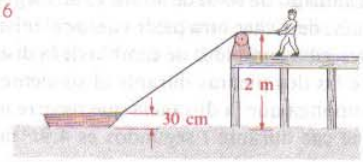
5. Un farol se encuentra en lo alto de un poste de 16 pie de altura. Un niño de 5 pie de estatura se aleja del poste a una velocidad de 4 pie/s (véase la figura). ¿Con qué rapidez se mueve la extremidad de su sombra cuando él se encuentra a 18 pie del poste? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de su sombra?

EJERCICIO 5



6. Un hombre que está en un muelle tira de una cuerda atada a la proa de un bote que se halla 30 cm sobre el nivel del agua. La cuerda pasa sobre una polea simple que se encuentra en el muelle a 2 m del agua (véase la figura). Si tira de la cuerda a razón de 1 m/s, ¿con qué rapidez se acerca el bote al muelle en el momento en que la proa está a 6 m del punto sobre el agua que se encuentra directamente abajo de la polea.

EJERCICIO 6

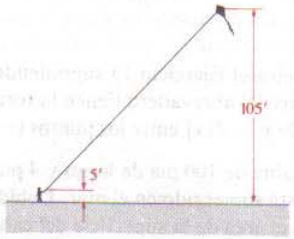


7. La cubierta de un silo tiene la forma de un hemisferio de 6 m de diámetro. En dicha cubierta se deposita una capa de hielo de 5 cm de grueso que disminuye a razón de 0.5 cm/h. ¿Cuál es la rapidez de variación del volumen de hielo?

8. La arena que escurre por un agujero de un recipiente forma un montículo cónico cuya altura es igual al radio de su base. Cuando la altura del montículo es de 25 cm, aumenta a razón de 15 cm/min. Calcule el volumen de arena que sale del agujero por minuto, cuando la altura es de 25 cm.

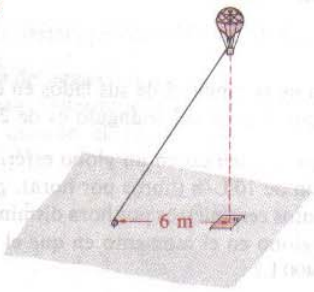
9. Un niño que hace volar una cometa sostiene el cordel a 5 pie del suelo y lo va soltando a razón de 2 pie/s, mientras la cometa se mueve horizontalmente a una altura de 105 pie (véase la figura). Suponiendo que el hilo se mantiene recto, encuentre la rapidez con la que se mueve la cometa cuando se han soltado 125 pie del hilo.

EJERCICIO 9



10. Un globo de aire caliente se eleva en forma vertical y una cuerda atada a la base del globo se va soltando a razón de 1.5 m/s. El torno desde el cual se suelta la cuerda está a 6 m de la plataforma de abordaje. ¿Si se han soltado 150 m de cuerda, con qué rapidez asciende el globo?

EJERCICIO 10

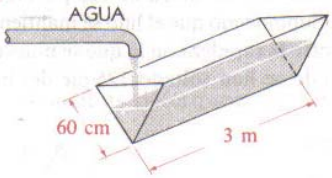


11. La ley de Boyle de los gases asevera que $pv = c$, donde p es la presión, v el volumen y c una constante. En cierto momento el volumen es de 75 pulg^3, la presión es de 30 lb/pulg^2 y ésta disminuye a razón de 2 lb/pulg^2 por minuto. ¿Cuál es la rapidez de cambio del volumen en ese momento?

12. Una bola esférica de nieve se derrite de manera que su radio disminuye con rapidez constante, de 30 a 20 cm en 45 min. ¿Cuál era la rapidez de cambio del volumen en el momento en que el radio medía 25 cm?

13. Los extremos de un abrevadero de 3 m de largo tienen la forma de triángulo equilátero, con lados de 60 cm. Se suministra agua al abrevadero a razón de 20 L/min. ¿Cuál es la rapidez de cambio o variación del nivel del agua cuando la profundidad es 20 cm? [1 L (litro) = 1000 cm^3.]

EJERCICIO 13



14. Resuelva el Ejercicio 13 suponiendo que los extremos del abrevadero tienen la forma de la gráfica de $y = 2|x|$ entre los puntos $(-1, 2)$ y $(1, 2)$.

15. Un cable de 100 pie de largo y 4 pulg de diámetro está sumergido en el mar. Debido a la corrosión, el área de la superficie del cable disminuye a razón de 750 pulg^2/año. Encuentre la rapidez con la que decrece el diámetro, despreciando la corrosión en los extremos del cable.

16. Un incendio que comenzó en un terreno seco se extiende formando un círculo. El radio del círculo crece a razón de 1.8 m/min. Calcule la rapidez con que crece el área del círculo cuando el radio es de 45 m.

17. El área de un triángulo equilátero disminuye a razón de 4 cm^2/min. Calcule la rapidez de variación de la longitud de sus lados en el momento en que el área del triángulo es de 200 cm^2.

18. El gas contenido en un globo esférico escapa a razón de 10 L/h (libros por hora). ¿A razón de cuántos centímetros por hora disminuye el radio del globo en el momento en que el volumen es de 400 L?

19. Se lanza una piedra a un lago y produce ondas circulares cuyos radios crecen a razón de 0.5 m/s. ¿A razón de cuántos metros por segundo aumenta el perímetro de una onda cuando su radio mide 4 m?

20. El "diamante" de un campo de *softball* tiene la forma de un cuadrado de 60 pie de lado. Una jugadora corre de segunda a tercera base a 25 pie/s. ¿A razón de cuántos pies por segundo va cambiando su distancia a "home plate" cuando está a 20 pie de la tercera base?

21. Cuando dos resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo (véase la figura), la resistencia total R está dada por $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$. Si R_1 y R_2 aumentan a razón de 0.01 Ω/s (ohms por segundo) y 0.02 Ω/s, respectivamente, ¿a razón de cuántos ohms por segundo varía R en el momento en que $R_1 = 30\,\Omega$ y $R_2 = 90\,\Omega$?

EJERCICIO 21



22. La fórmula de la expansión adiabática del aire es $pv^{1.4} = c$, donde p es la presión, v es el volumen y c es una constante. En cierto momento la presión es 40 din/cm^2 (dinas por centímetro cuadrado) y aumenta a razón de 3 din/cm^2 por segundo. En ese mismo momento el volumen es de 60 cm^3. Calcule la rapidez de variación del volumen.

23. Un tanque esférico de agua de radio a contiene este líquido con una profundidad h y el volumen del agua en el tanque está dado por $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h)$. Suponga que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando a razón de 400 L/min. Calcule a razón de cuántos metros por segundo se eleva el nivel del agua cuando $h = 1.25$ m.

24. Un tanque esférico está cubierto por una capa uniforme de hielo de 2 pulg de grueso. El volumen de hielo se derrite con una rapidez directamente proporcional al área de la superficie. Demuestre que es constante la rapidez de cambio del diámetro exterior.

25. Un niño deja caer una piedra a un lago desde un acantilado de 60 m de altura y, dos segundos después, deja caer otra piedra desde el mismo lugar. Describa la rapidez de cambio de la distancia entre las dos piedras durante el siguiente segundo (suponga que la distancia que recorre un cuerpo que cae durante t segundos es $4.9t^2$ m).

26. Una barra de metal tiene la forma de un cilindro circular recto. Cuando se calienta, su longitud y su diámetro aumentan a razón de 0.005 cm/min y 0.002 cm/min, respectivamente. ¿A razón de cuántos centímetros cúbicos por minuto aumenta el volumen de la barra en el momento en que mide 40 cm de largo y 3 cm de diámetro?

27. Un avión vuela con velocidad constante de 500 km/h y con una inclinación de 45° hacia arriba. Encuentre la rapidez de cambio de la distancia del avión a una torre de control en tierra, un minuto después de que éste pasó directamente a 3 km arriba de ella (desprecie la altura de la torre).

28. Una carretera A que va de norte a sur y otra B que va de este a oeste se cruzan en un punto P.

28. A las 10:00 horas un automóvil pasa por P viajando hacia el norte por la carretera A a 80 km/h. En ese mismo momento, un avión que vuela hacia el este a 320 km/h y a 8000 m de altura, se encuentra directamente arriba de un punto en la carretera B que se halla 160 km al oeste de P. Si ambos mantienen la misma velocidad y la misma dirección, ¿cuál es la rapidez de cambio de la distancia entre el avión y el automóvil a las 10:15 horas?

29. Un vaso de papel con agua tiene la forma de un cono circular recto truncado de 15 cm de altura con radios de la base y de la orilla libre de 2 cm y 4 cm, respectivamente. El agua se fuga del vaso a razón de 100 cm^3/h. ¿A razón de cuántos centímetros por hora disminuye la profundidad del agua cuando es de 10 cm? (*Nota:* El volumen V de un cono circular recto truncado de altura h y radios a y b en los extremos está dado por $V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + b^2 + ab)$.)

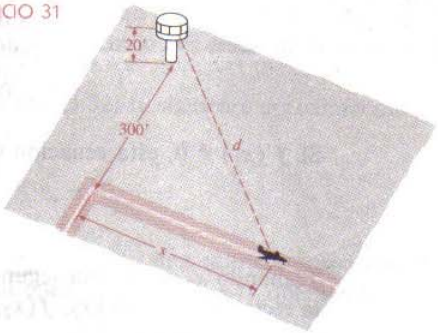
30. La orilla de una piscina es un rectángulo de 60 pie de largo y 30 pie de ancho. Su profundidad aumenta uniformemente de 4 a 9 pie en un tramo horizontal de 40 pie y después continúa al mismo nivel los 20 pie restantes, como se ilustra en la figura, la cual representa una sección transversal. La piscina se está llenando a razón de 500 gal/min de agua. Calcule aproximadamente la rapidez de cambio del nivel del agua en el momento en que la profundidad en la parte más honda es de 4 pie (1 gal $\approx$ 0.1337 pie^3).

EJERCICIO 30



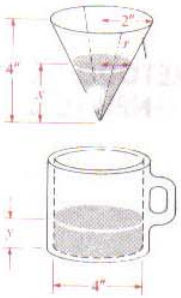
31. En la figura se muestran las posiciones relativas de una pista de aeropuerto y una torre de control de 20 pie de altura. El principio de la pista está a una distancia perpendicular de 300 pie de la base de la torre. Un avión alcanza una velocidad de 100 mi/h después de recorrer 300 pie sobre la pista. Calcule la rapidez de cambio de la distancia entre el avión y la cabina de la torre de control.

EJERCICIO 31



32. A través de un filtro de papel cónico escurre agua a una taza, como se muestra en la figura. Sea x la altura del agua en el filtro y y la altura del agua en la taza. Determine la relación entre dy/dt y dx/dt, cuando el filtro contiene 10 $pulg^3$ de agua.

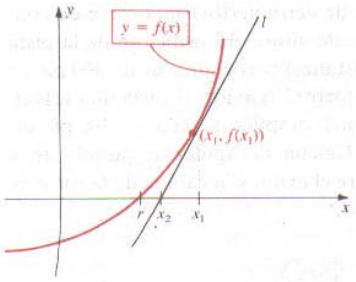
EJERCICIO 32



3.9 EL MÉTODO DE NEWTON

En esta sección se expone un método para calcular aproximadamente un cero real de una función derivable f, es decir, un número real r tal que $f(r) = 0$. Para usar el método se comienza tomando una primera aproximación x_1 al cero r. Como r es la abscisa de la intersección de la gráfica de f con el eje x, la aproximación x_1 se puede escoger observando un croquis de la gráfica de f. Sea l la recta tangente a la gráfica

FIGURA 3.22



de f en el punto $(x_1, f(x_1))$. Si x_1 está suficientemente cercano a r entonces, como se ilustra en la Figura 3.22, la abscisa x_2 de la intersección de l con el eje x debe ser una mejor aproximación a r.

Como la pendiente de l es $f'(x_1)$,

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

es una ecuación para la recta tangente. Como x_2 es la abscisa de la intersección con el eje x (o intercepción x), corresponde al punto $(x_2, 0)$ de l, se obtiene así

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, esta ecuación es equivalente a

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Tomando x_2 como una segunda aproximación a r se puede repetir el proceso usando la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$. Si $f'(x_2) \neq 0$, puede obtenerse una tercera aproximación x_3, dada por

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

El proceso se puede continuar hasta alcanzar el grado de precisión que se desee. Este método de aproximaciones sucesivas a los ceros reales se llama **Método de Newton**. A continuación se enuncia formalmente.

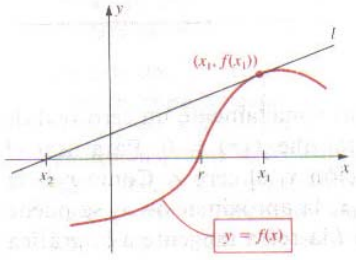
MÉTODO DE NEWTON (3.22)

Sea f una función derivable y sea r un cero real de f. Si x_n es una aproximación a r, entonces la siguiente aproximación x_{n+1} está dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

siempre y cuando $f'(x_n) \neq 0$.

FIGURA 3.23



El Método de Newton no garantiza que x_{n+1} sea una mejor aproximación a r que x_n para todo n. Se debe tener cuidado al elegir la primera aproximación x_1. Si x_1 no está suficientemente cerca de r, es posible que la segunda aproximación x_2 sea menos adecuada que x_1, como se ilustra en la Figura 3.23. Es evidente que no se debe elegir un número x_n para el cual $f'(x_n)$ sea casi cero porque entonces la recta tangente l es casi horizontal.

Al aplicar el Método de Newton usaremos la siguiente regla: Si se desea una aproximación de k cifras decimales calcularemos cada uno de los números $x_2, x_3, \ldots$ con una precisión de k cifras decimales, y se continuará el proceso hasta que dos aproximaciones consecutivas sean iguales. Esto se ilustra en los ejemplos siguientes.

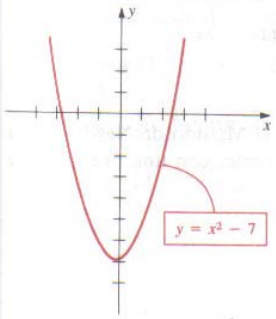
EJEMPLO 1 Estimar $\sqrt{7}$ con cinco cifras decimales, usando el Método de Newton.

Solución El problema equivale al de estimar el cero real positivo r de $f(x) = x^2 - 7$. En la Figura 3.24 se tiene la gráfica de f. Como $f(2) = -3$ y $f(3) = 2$, de la continuidad de f resulta que $2 < r < 3$. Más aún, como f es creciente en el intervalo $(2, 3)$, solamente puede haber un cero en él.

Si x_n es una aproximación a r, entonces por (3.32) la siguiente aproximación x_{n+1} está dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 7}{2x_n}.$$

FIGURA 3.24



Escojamos $x_1 = 2.5$ como una primera aproximación. Usando la fórmula para x_{n+1} con $n = 1$ obtenemos

$$x_2 = 2.5 - \frac{(2.5)^2 - 7}{2(2.5)} = 2.65000$$

Aplicando de nuevo la fórmula con $n = 2$ resulta la siguiente aproximación

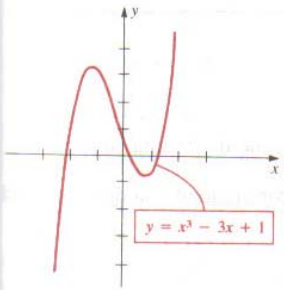
$$x_3 = 2.65000 - \frac{(2.65000)^2 - 7}{2(2.65000)} \approx 2.64575$$

Repitiendo el procedimiento (con $n = 3$),

$$x_4 = 2.64575 - \frac{(2.64575)^2 - 7}{2(2.64575)} \approx 2.64575$$

Como ya tenemos dos valores consecutivos de x_n que son iguales (con el grado de precisión deseado), se tiene que $\sqrt{7} \approx 2.64575$. Es posible demostrar que, con una precisión de nueve cifras decimales, $\sqrt{7} \approx 2.645751311$. •

FIGURA 3.25



EJEMPLO 2 Calcular la mayor raíz positiva real de $x^3 - 3x + 1 = 0$ con una precisión de cuatro cifras decimales.

Solución Si definimos $f(x) = x^3 - 3x + 1$, entonces el problema es equivalente a encontrar el mayor *cero* real positivo de f. La gráfica de f se tiene en la Figura 3.25. Obsérvese que f tiene tres ceros reales. Deseamos calcular el cero que se encuentra entre 1 y 2. Como $f'(x) = 3x^2 - 3$, la fórmula para x_{n+1} en el Método de Newton es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}.$$

Usando la gráfica tomamos como primera aproximación $x_1 = 1.5$ y se procede como sigue:

$$x_2 = 1.5 - \frac{(1.5)^3 - 3(1.5) + 1}{3(1.5)^2 - 3} \approx 1.5333$$

$$x_3 = 1.5333 - \frac{(1.5333)^3 - 3(1.5333) + 1}{3(1.5333)^2 - 3} \approx 1.5321$$

$$x_4 = 1.5321 - \frac{(1.5321)^3 - 3(1.5321) + 1}{3(1.5321)^2 - 3} \approx 1.5321$$

Por lo tanto, la aproximación deseada es 1.5321. Las otras dos raíces reales se pueden estimar de manera parecida (véase el Ejercicio 15). •

EJERCICIOS 3.9

Ejercicios 1-2: Utilice el Método de Newton para estimar el número dado con una precisión de cuatro cifras decimales.

1. $\sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt[3]{3}$

Ejercicios 3-8: Use el Método de Newton para estimar la raíz real con una precisión de cuatro cifras decimales.

3. La raíz positiva de $x^3 + 5x - 3 = 0$.
4. La mayor raíz de $2x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$.
5. La raíz de $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ que está entre 1 y 2.
6. La raíz de $x^4 - 5x^2 + 2x - 5 = 0$ que está entre 2 y 3.
7. La raíz de $x^5 + x^2 - 9x - 3 = 0$ que se halla entre -2 y -1.
8. La raíz de $x^5 + x^3 + 2x - 5 = 0$ que se halla entre 1 y 2.

Ejercicios 9-10: Estime el mayor cero de $f(x)$ con una precisión de cinco cifras decimales.

9. $f(x) = x^4 - 11x^2 - 44x - 24$
10. $f(x) = x^3 - 36x - 84$

Ejercicios 11-18: Utilice el Método de Newton para calcular todas las raíces reales con una precisión de dos cifras decimales.

11. $x^4 = 125$
12. $10x^2 - 1 = 0$
13. $x^4 - x - 2 = 0$
14. $x^5 - 2x^2 + 4 = 0$
15. $x^3 - 3x + 1 = 0$
16. $x^3 + 2x^2 - 8x - 3 = 0$
17. $x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0$
18. $4x^3 - 4x + 1 = 0$

3.10 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. La derivada de una función.
2. Función derivable.
3. Función derivable en un intervalo.
4. Derivada por la derecha de una función.
5. Derivada por la izquierda de una función.
6. Relación entre la continuidad y la derivabilidad de una función.
7. Regla de la Potencia.

8. Regla del Producto.
9. Regla del Cociente.
10. La derivada como una tasa de variación o razón de cambio.
11. La aceleración en el movimiento rectilíneo.
12. Aplicaciones de la derivada en economía y administración.
13. Notación de incrementos.
14. Diferenciales.
15. Error medio en una medición.
16. Error porcentual.
17. Regla de la Cadena.
18. Regla de la Potencia para Funciones.
19. Recta tangente a una gráfica.
20. Derivación implícita.
21. Derivadas de orden superior.
22. Rapideces de variación relacionadas.
23. Método de Newton.

EJERCICIOS 3.10

Ejercicios 1-2: Encuentre $f'(x)$ directamente a partir de la definición de derivada.

1. $f(x) = 4/(3x^2 + 2)$
2. $f(x) = \sqrt{5 - 7x}$

Ejercicios 3-30: Determine la primera derivada.

3. $f(x) = 2x^3 - 7x + 2$
4. $k(x) = \dfrac{1}{x^4 - x^2 + 1}$
5. $g(t) = \sqrt{6t + 5}$
6. $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{6t + 5}}$
7. $F(z) = \sqrt[3]{7z^2 - 4z + 3}$
8. $f(w) = \sqrt[3]{3w^2}$
9. $G(x) = \dfrac{6}{(3x^2 - 1)^4}$
10. $H(x) = \dfrac{(3x^2 - 1)^4}{6}$
11. $F(y) = (y^2 - y^{-2})^{-2}$
12. $h(z) = [(z^2 - 1)^5 - 1]^5$
13. $g(x) = \sqrt[5]{(3x + 2)^4}$
14. $P(x) = (x + x^{-1})^2$
15. $r(s) = \left(\dfrac{8s^2 - 4}{1 - 9s^3}\right)^4$
16. $g(w) = \dfrac{(w - 1)(w - 3)}{(w + 1)(w + 3)}$
17. $F(x) = (x^6 + 1)^5(3x + 2)^3$
18. $k(z) = [z^2 + (z^2 + 9)^{1/2}]^{1/2}$
19. $g(y) = (7y - 2)^{-2}(2y + 1)^{2/3}$
20. $p(x) = \dfrac{2x^4 + 3x^2 - 1}{x^2}$
21. $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$
22. $H(t) = (t^6 + t^{-6})^6$
23. $h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
24. $K(r) = \sqrt{r}\sqrt{r + 1}\sqrt{r + 2}$
25. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x + 3}}{\sqrt{3x + 2}}$
26. $f(x) = 6x^2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$
27. $g(z) = (9z^{5/3} - 5z^{3/5})^3$
28. $F(t) = \dfrac{5t^2 - 7}{t^2 + 2}$
29. $k(s) = (2s^2 - 3s + 1)(9s - 1)^4$
30. $f(w) = \sqrt{(2w + 5)/(7w - 9)}$

Ejercicios 31-34: Evalúe y' suponiendo que la ecuación define una función derivable f tal que $y = f(x)$.

31. $5x^3 - 2x^2y^2 + 4y^3 - 7 = 0$
32. $3x^2 - xy^2 + y^{-1} = 1$
33. $\dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{y} + 1} = y$
34. $y^2 - \sqrt{xy} + 3x = 2$

Ejercicios 35-38: Encuentre ecuaciones para las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto P.

35. $y = 2x - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $P(4, 6)$

36. $y = (x^3 + 2)^5$, $P(-1, 1)$

37. $x^2y - y^3 = 8$, $P(-3, 1)$

38. $x = y^{2/3}$, $P(0, 0)$

39. Calcule la abscisa de todos los puntos de la gráfica de $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ en los que la recta tangente es perpendicular a la recta $4x + 2y = 5$.

40. Sea $y = 2x^3 - x^2 - 3x$. (a) Calcule la abscisa de todos los puntos de la gráfica en los que la recta tangente es horizontal. (b) Calcule la pendiente de la recta tangente en los puntos donde la gráfica corta al eje x.

Ejercicios 41-42: Evalúe y', y'' y y'''.

41. $y = 5x^3 + 4\sqrt{x}$ **42.** $y = (1/x^2) + (1/x)$

43. Calcule y'' por derivación implícita suponiendo que $x^2 + 4xy - y^2 = 8$.

44. Sea $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$,

(a) Halle la abscisa de todos los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es paralela a la que pasa por $A(-3, 2)$ y $B(1, 14)$.

(b) Halle el valor de f'' en cada uno de los ceros de f'.

45. Sea $f(x) = 1/(1 - x)$. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ para todo entero positivo n.

46. Sea $y = 5x/(x^2 + 1)$. Obtenga dy y úsela para estimar el incremento de y cuando x cambia de 2 a 1.98. ¿Cuál es el incremento exacto de y?

47. Se calcula que el lado de un triángulo equilátero es de 4 pulg con un error máximo de 0.03 pulg. Use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo del área del triángulo. Calcule el error porcentual.

48. Sean $s = 3r^2 - 2\sqrt{r + 1}$ y $r = t^3 + t^2 + 1$. Use la Regla de la Cadena para obtener el valor de ds/dt en $t = 1$.

49. Sean $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ y $g(x) = x^5 + 4x^3 + 2x$. Use diferenciales para estimar el incremento de $g(f(x))$ cuando x varía de -1 a -1.01.

50. Utilice diferenciales para estimar $\sqrt[3]{64.2}$. (*Sugerencia:* Considere $y = \sqrt[3]{x}$.)

51. Suponga que f y g son funciones tales que $f(2) = -1$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = -2$, $g(2) = -3$, $g'(2) = 2$ y $g''(2) = 1$. Calcule los valores de las siguientes funciones en $x = 2$:

(d) $(fg)''$ (e) $\left(\frac{f}{g}\right)'$ (f) $\left(\frac{f}{g}\right)''$

52. La función de costo por la producción de un componente para un microprocesador está dada por $C(x) = 1000 + 2x + 0.005x^2$. Suponiendo que se fabrican 2000 unidades, calcule el costo, el costo medio, el costo marginal y el costo medio marginal.

53. Un fabricante de hornos de microondas determina que el costo de producir x unidades está dado por

$$C(x) = 4000 + 100x + 0.05x^2 + 0.0002x^3$$

Compare el costo marginal de producir 100 hornos con el costo en la producción del centésimo primero.

54. El volumen y el área de la superficie de un globo esférico se denotan por V y S, respectivamente. El diámetro es de 8 cm y el volumen aumenta en 12 cm^3. Aplique diferenciales para estimar el incremento en S.

55. Según la ley de Stefan, la energía de radiación emitida por la superficie de un cuerpo está dada por $R = kT^4$, donde R es la emisión por unidad de área, T es la temperatura (en kelvins, °K) y k es una constante. Suponiendo que el error en la medición de T es 0.5%, evalúe el error porcentual correspondiente en el cálculo del valor de R.

56. La iluminación producida por una fuente de luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Un estudiante trabaja en un escritorio que está a cierta distancia de una lámpara. Use diferenciales para calcular el cambio porcentual en la distancia que aumentará la iluminación en 10%.

57. La función de posición de un punto que se mueve a lo largo de una recta coordenada está dada por $s(t) = (t^2 + 3t + 1)/(t^2 + 1)$. Calcule la velocidad y la aceleración al tiempo t y describa el movimiento del punto durante el intervalo de tiempo $[-2, 2]$.

58. Un punto $P(x, y)$ se mueve sobre la gráfica de $y^2 = 2x^3$ de manera que $dy/dt = x$ para el tiempo t. Calcule dx/dt en el punto $(2, 4)$.

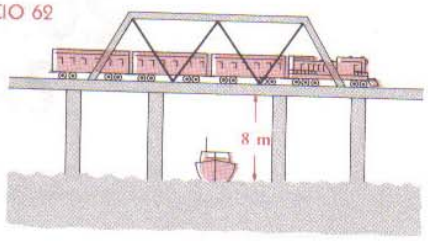
59. Los extremos de un abrevadero horizontal de 10 pie de largo son trapecios isósceles cuya base inferior mide 3 pie, la superior 5 pie y la altura es de 2 pie. El nivel de agua sube a razón de $\frac{1}{4}$ de pulgada por minuto cuando la profundidad es de 1 pie. ¿Qué cantidad de agua por minuto entra al abrevadero?

60. Dos automóviles A y B viajan hacia un cruce o intersección por carreteras perpendiculares. A se desplaza a 40 km/h, y B, a 80 km/h. En cierto momento A está a 400 m de la intersección y B a 800 m. Calcule la rapidez con que los automóviles se acercan en ese momento.

61. La ley de Boyle dice que $pv = c$, donde p es la presión, v el volumen y c es una constante. Obtenga una fórmula para la razón de cambio de p con respecto a v.

62. Un puente de ferrocarril pasa por arriba de un río a 8 m de él. Una persona a bordo de un tren que corre a 100 km/h pasa por el centro del puente en el momento en que otra pasa por debajo del centro del puente en una lancha de motor que va a 30 km/h (véase la figura). ¿A qué velocidad se alejan las dos personas 10 segundos después?

EJERCICIO 62



63. Utilice el Método de Newton para calcular la raíz de $7x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 7x - 5 = 0$ que se encuentra entre 0 y -1 con una precisión de cuatro cifras decimales.

64. Aplique el Método de Newton para estimar $\sqrt[4]{5}$ con una precisión de tres cifras decimales.

160 en blanco

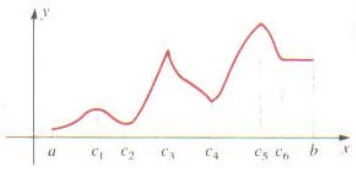
CAPÍTULO 4

VALORES EXTREMOS Y ANTIDERIVADAS

En este capítulo se usa la derivada para investigar los valores máximos y mínimos de las funciones, las aplicaciones de los valores extremos y los conceptos gráficos de ***concavidad*** *y* ***puntos de inflexión****. En la Sección 4.6 se discuten los límites infinitos, en particular los de las funciones racionales. En la última sección se presenta el concepto de* ***antiderivada*** *y se aplica a los problemas de movimiento.*

4.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES DE LAS FUNCIONES

FIGURA 4.1



Supongamos que la gráfica de la Figura 4.1 fue trazada por cierto instrumento que mide y registra alguna cantidad física. El eje x representa el tiempo y las ordenadas representan las magnitudes de la cantidad física medida por el instrumento, que pueden ser la temperatura, resistencia en un circuito eléctrico, presión arterial de una persona, cantidad de alguna solución química o el número de bacterias en un cultivo.

La gráfica indica que la cantidad aumentó durante el intervalo de tiempo $[a, c_1]$, disminuyó durante $[c_1, c_2]$, aumentó durante $[c_2, c_3]$, etcétera. *Si sólo se considera el intervalo* $[c_1, c_4]$, *se ve que la cantidad tuvo su mayor valor* (o su máximo) en c_3 y su valor más pequeño (o mínimo) en c_2. En otros intervalos hubo diferentes máximos y mínimos. Por ejemplo, el máximo sobre todo el intervalo $[a, b]$ se da en c_5 y el mínimo en a.

La terminología que se usa para describir la variación de cantidades físicas se aplica también a las funciones.

DEFINICIÓN (4.1)

Sea f una función definida en un intervalo I y sean x_1, x_2 dos números que están en I.

(i) f es **creciente** en I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

(ii) f es **decreciente** en I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

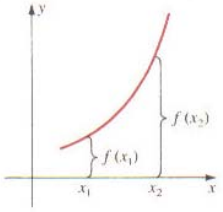
(iii) f es **constante** en I si $f(x_1) = f(x_2)$ para todo x_1 y x_2.

La Figura 4.2 ilustra gráficamente la Definición (4.1).

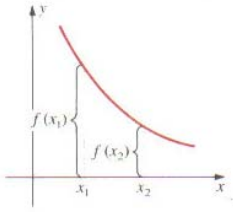
A lo largo del texto, las frases *f es creciente* y *$f(x)$ es creciente* tienen el mismo significado. Lo mismo ocurre con el término *decreciente*. Si una función es creciente, entonces su gráfica sube o asciende cuando x aumenta. Si una función es decreciente entonces su gráfica baja o desciende cuando x aumenta. Si la Figura 4.1 representa la gráfica de una función f, entonces f es creciente en los intervalos $[a, c_1]$, $[c_2, c_3]$ y

FIGURA 4.2

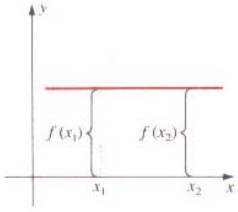
(i) Función creciente



(ii) Función decreciente



(iii) Función constante



$[c_4, c_5]$. Es decreciente en $[c_1, c_2]$, $[c_3, c_4]$ y $[c_5, c_6]$. La función es constante en el intervalo $[c_6, b]$.

La siguiente definición presenta la terminología que se usa para denotar los valores más grandes y los más pequeños de una función en un intervalo.

DEFINICIÓN (4.2)

Sea f una función definida en un intervalo I y sea c un número en I.

(i) $f(c)$ es el **máximo (o valor máximo)** de f en I si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en I.

(ii) $f(c)$ es el **mínimo (o valor mínimo)** de f en I si $f(x) \geq f(c)$ para todo x en I.

Las Figuras 4.3 y 4.4 muestran un máximo y un mínimo. En ellas se representa I como un intervalo cerrado $[a, b]$, pero la Definición (4.2) puede aplicarse a cualquier intervalo. Aunque las gráficas que se muestran tienen tangentes horizontales en el punto $(c, f(c))$, los máximos y mínimos también pueden darse en puntos donde la gráfica tiene picos o saltos, o en los extremos del dominio de la función.

FIGURA 4.3

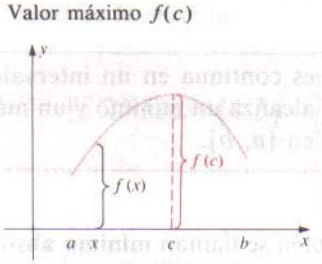
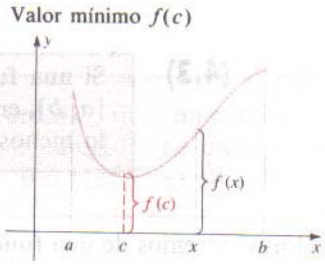


FIGURA 4.4

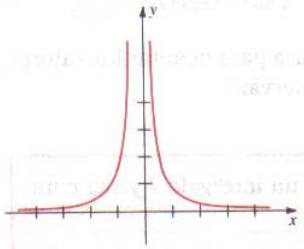


Si $f(c)$ es el máximo de f en I, se dice que f *alcanza* su máximo en c, y en ese caso, el punto $(c, f(c))$ es el punto más alto de la gráfica. Si $f(c)$ es el mínimo de f en I, se dice que f *alcanza* su mínimo en c, y en ese caso, $(c, f(c))$ es el punto más bajo de la gráfica. Los máximos y mínimos son los **valores extremos** de f. Una función puede alcanzar un máximo o un mínimo más de una vez. Si f es una función constante, entonces $f(c)$ es a la vez un máximo y un mínimo que f alcanza en *todo* número real c.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 1/x^2$. Determinar si f es creciente o decreciente en los siguientes intervalos y encontrar sus máximos y mínimos en cada intervalo:

$[1, 2]$ $(1, 2]$ $(1, 2)$ $(-2, -1]$ $[-1, 2]$

FIGURA 4.5



Solución Por inspección de la gráfica de f mostrada en la Figura 4.5, obtenemos la siguiente tabla.

Intervalo	f	Máximo de f	Mínimo de f
$[1, 2]$	decreciente	$f(1) = 1$	$f(2) = \frac{1}{4}$
$(1, 2]$	decreciente	no tiene	$f(2) = \frac{1}{4}$
$(1, 2)$	decreciente	no tiene	no tiene
$(-2, -1]$	creciente	$f(-1) = 1$	no tiene
$[-1, 2]$	ni uno ni otro	no tiene	$f(2) = \frac{1}{4}$

Nótese que f no tiene un máximo en $(1, 2]$, pues si a es cualquier número en $(1, 2]$ y si $1 < c < a$, entonces $f(c) > f(a)$. En el intervalo abierto $(1, 2)$, f *no alcanza* un máximo ni un mínimo.

La función no es continua en $[-1, 2]$. Aunque f es creciente en $[-1, 0)$ y decreciente en $(0, 2]$, no se puede decir de f ninguna de las dos cosas en el intervalo $[-1, 2]$. •

El ejemplo anterior muestra que la existencia de máximos y mínimos puede depender del tipo de intervalo y de la continuidad de la función. El siguiente teorema enuncia condiciones bajo las cuales una función alcanza un máximo y un mínimo en un intervalo. La demostración se puede consultar en textos de cálculo más avanzados.

TEOREMA (4.3)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un mínimo y un máximo por lo menos una vez en $[a, b]$.

Los valores extremos de una función también se llaman **mínimo absoluto** y **máximo absoluto** de f en un intervalo. Los *máximos* y *mínimos locales* de una función también son importantes y se definen como sigue.

DEFINICIÓN (4.4)

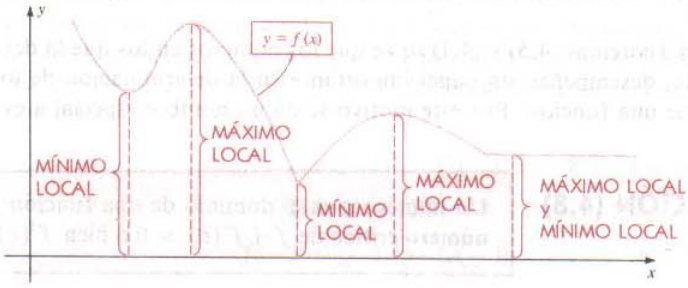
Sea c un número en el dominio de una función f.

(i) $f(c)$ es un **máximo local** de f si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo x en (a, b).

(ii) $f(c)$ es un **mínimo local** de f si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo x en (a, b).

La palabra *local* se refiere a que estos máximos y mínimos lo son en *relación con una región*, un intervalo abierto pequeño que contiene a c. Fuera de ese intervalo abier-

FIGURA 4.6



to f puede tomar valores mayores o menores. También se puede hablar de máximos y mínimos *relativos* en vez de *locales*. Los máximos o mínimos locales se denominan **valores extremos locales** de f. En la Figura 4.6 se ilustran varios ejemplos de valores extremos locales. Como se indica en la figura, un mínimo local puede ser *mayor* que un máximo local.

Los máximos y mínimos locales pueden no incluir entre ellos a los máximos y mínimos absolutos de f. Por ejemplo, en la Figura 4.1, $f(a)$ es el mínimo absoluto de f en $[a, b]$ pero no es un mínimo local ya que no existe un intervalo *abierto* I contenido en $[a, b]$ en el que $f(a)$ es el menor valor de f en I.

En los puntos correspondientes a los extremos locales de la función cuya gráfica aparece en la Figura 4.6, la recta tangente es horizontal, o bien la gráfica tiene un pico. Las abscisas de estos puntos son números en los que la derivada es cero o no existe. El siguiente teorema muestra que esto es cierto en general. La demostración se da al final de la sección.

TEOREMA (4.5)

Si una función f tiene un máximo local o un mínimo local en un número c de un intervalo abierto, entonces $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del Teorema (4.5).

COROLARIO (4.6)

Si $f'(c)$ existe y $f'(c) \neq 0$, entonces $f(c)$ no es ni un máximo local ni un mínimo local de la función f.

Hay un resultado similar al Teorema (4.5) para los máximos y mínimos *absolutos* de una función que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que los alcanza en el intervalo *abierto* (a, b). Este resultado se enuncia como sigue.

TEOREMA (4.7)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y alcanza su máximo o su mínimo en un número c del intervalo abierto (a, b), entonces $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

La demostración del Teorema (4.7) es idéntica a la de (4.5) pero omitiendo la palabra local.

De los Teoremas (4.5) y (4.7) se ve que los números en los que la derivada es cero o no existe, desempeñan un papel importante en la determinación de los máximos y mínimos de una función. Por este motivo se da un nombre especial a estos números.

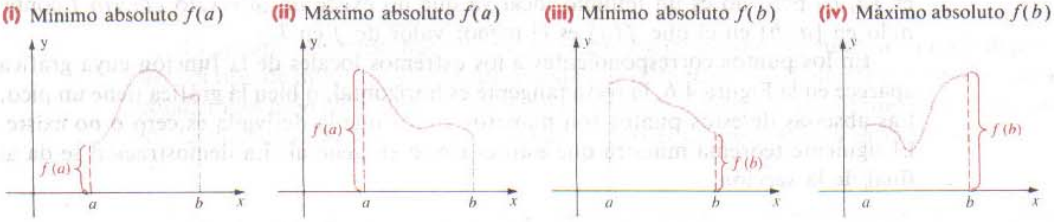
DEFINICIÓN (4.8)

Un número c en el dominio de una función f se llama **número crítico** de f si $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

De acuerdo con el Teorema (4.7), resulta que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el máximo y el mínimo absolutos se alcanzan en un número crítico de f o en los extremos a o b del intervalo. Si $f(a)$ o $f(b)$ es un valor extremo absoluto de f en $[a, b]$, se llama **valor extremo en la frontera**. Los croquis de la Figura 4.7 ilustran este concepto.

FIGURA 4.7

Valores extremos en la frontera de f sobre $[a, b]$



De la discusión anterior se obtiene lo siguiente:

GUÍA PARA DETERMINAR EL MÁXIMO Y EL MÍNIMO ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN f EN UN INTERVALO CERRADO $[a, b]$ (4.9)

1. Encontrar todos los números críticos de f.
2. Calcular $f(c)$ para cada número crítico c.
3. Calcular $f(a)$ y $f(b)$.
4. El máximo y el mínimo absolutos de f en $[a, b]$ son, respectivamente, el mayor y el menor de los valores de la función determinados en los pasos 2 y 3.

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = x^3 - 12x$. Calcular el máximo y el mínimo absolutos de f en el intervalo cerrado $[-3, 5]$. Trazar la gráfica de f.

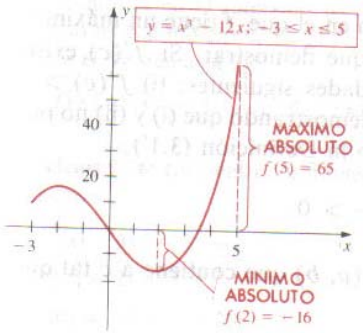
Solución Siguiendo la Guía (4.9), comenzamos por encontrar los números críticos de f. Derivando,

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x + 2)(x - 2).$$

Como la derivada existe para todo x, los únicos números críticos son aquellos en los que la derivada es cero, a saber, -2 y 2. Como f es continua en $[-3, 5]$, de la discusión anterior se deduce que el máximo y el mínimo absolutos se encuentran entre los números $f(-2)$, $f(2)$, $f(-3)$ y $f(5)$. Calculando estos valores (pasos 2 y 3 de la guía) obtenemos

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 = 16$$
$$f(2) = 2^3 - 12(2) = 8 - 24 = -16$$
$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) = -27 + 36 = 9$$
$$f(5) = 5^3 - 12(5) = 125 - 60 = 65$$

FIGURA 4.8



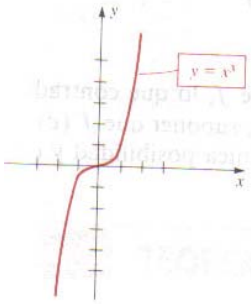
Por el paso 4 de la guía, el mínimo de f en $[-3, 5]$ es $f(2) = -16$ y el máximo es el valor extremo en la frontera $f(5) = 65$.

Usando los valores calculados de la función y trazando algunos puntos adicionales se obtiene el trazo de la Figura 4.8, en el que las escalas de los ejes x y y son diferentes. La recta tangente es horizontal en los puntos correspondientes a los números críticos -2 y 2. De lo que se verá en la Sección 4.4 puede deducirse que $f(-2) = 16$ es un máximo *local* de f, como se indica en la gráfica. •

A veces se hace referencia a los máximos y mínimos de manera incorrecta. Nótese que en el Ejemplo 2 el mínimo se da *en* $x = 2$ pero el mínimo *es* $f(2) = -16$. Cuando se pide calcular un mínimo (o un máximo) no basta encontrar el valor de x donde éste se alcanza: *Asegúrese de completar el problema calculando el valor de la función.*

Del Teorema (4.5) se ve que si una función tiene un valor extremo *local*, éste *debe* darse en un número crítico; sin embargo, no en cualquier número crítico se da un valor extremo local, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 4.9



EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^3$. Demostrar que f no tiene máximos y mínimos locales.

Solución En la Figura 4.9 aparece un croquis de la gráfica de f. La derivada es $f'(x) = 3x^2$, que existe para todo x y es cero solamente si $x = 0$. Por lo tanto, el único número crítico es 0. Sin embargo, $f(x)$ es negativa para $x < 0$ y $f(x)$ es positiva para $x > 0$. Por lo tanto, $f(0)$ no es un máximo local ni un mínimo local. Como los valores extremos locales *deben* darse en los números críticos (véase el Teorema (4.5)), resulta que f no tiene valores extremos locales. Nótese que la recta tangente en el punto $(0, 0)$ es horizontal y cruza ahí a la gráfica. •

EJEMPLO 4 Encontrar los números críticos de la función f dada por $f(x) = (x + 5)^2 \sqrt[3]{x - 4}$.

Solución Derivando $f(x) = (x + 5)^2(x - 4)^{1/3}$, obtenemos

$$f'(x) = (x + 5)^2 \tfrac{1}{3}(x - 4)^{-2/3} + 2(x + 5)(x - 4)^{1/3}.$$

Para encontrar los números críticos simplificamos $f'(x)$ como sigue:

$$f'(x) = \frac{(x + 5)^2}{3(x - 4)^{2/3}} + 2(x + 5)(x - 4)^{1/3} = \frac{(x + 5)^2 + 6(x + 5)(x - 4)}{3(x - 4)^{2/3}}$$

$$= \frac{(x + 5)[(x + 5) + 6(x - 4)]}{3(x - 4)^{2/3}} = \frac{(x + 5)(7x - 19)}{3(x - 4)^{2/3}}$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si $x = -5$ o bien $x = \frac{19}{7}$. La derivada $f'(x)$ no existe en $x = 4$. Entonces f tiene tres números críticos: -5, $\frac{19}{7}$ y 4. •

Demostración del Teorema (4.5) Sea c un número en el que f tiene un máximo o un mínimo local. Si $f'(c)$ no existe, no hay nada que demostrar. Si $f'(c)$ existe, entonces sucede una y sólo una de las tres posibilidades siguientes: (i) $f'(c) > 0$, (ii) $f'(c) < 0$ o bien (iii) $f'(c) = 0$. Se llegará a (iii) demostrando que (i) y (ii) no pueden ser ciertas. Supongamos que $f'(c) > 0$. Usando la Definición (3.1'),

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

y por el Teorema (2.12), existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

para todo x en (a, b) diferente de c. Esta última desigualdad implica que si $a < x < b$ y $x \neq c$, entonces $f(x) - f(c)$ y $x - c$ son ambos positivos o ambos negativos, es decir,

$$\begin{cases} f(x) - f(c) < 0 & \text{siempre que } x - c < 0, \quad \text{y} \\ f(x) - f(c) > 0 & \text{siempre que } x - c > 0. \end{cases}$$

Otra manera de enunciar esto es: Si x está en (a, b) y $x \neq c$, entonces

$$\begin{cases} f(x) < f(c) & \text{siempre que } x < c, \quad \text{y} \\ f(x) > f(c) & \text{siempre que } x > c. \end{cases}$$

Resulta que $f(c)$ no es un máximo local ni un mínimo local de f, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, (i) no puede ser cierta. Análogamente, suponer que $f'(c) < 0$ lleva a una contradicción. De donde, por fuerza, (iii) es la única posibilidad y con esto el teorema queda demostrado. • •

EJERCICIOS 4.1

Ejercicios 1-4: Calcule el máximo y el mínimo absolutos de f en los intervalos indicados.

1. $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3$, $[-3, 1]$
2. $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$, $[-1, 3]$
3. $f(x) = 1 - x^{2/3}$, $[-1, 8]$
4. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, $[0, 2]$

5. (a) Sea $f(x) = x^{1/3}$. Demuestre que el único número crítico de f es 0 y que $f(0)$ no es un valor extremo local.
 (b) Sea $f(x) = x^{2/3}$. Demuestre que el único número crítico de f es 0 y que $f(0)$ es un mínimo local de f.

6. Sea $f(x) = |x|$. Demuestre que el único número crítico de f es 0, que $f(0)$ es un mínimo local de f y que la gráfica de f no tiene recta tangente en el punto $(0, 0)$.

Ejercicios 7-8: Demuestre que f no tiene máximos ni mínimos locales. Trace la gráfica de f. Demuestre que f es continua en el intervalo $(0, 1)$ pero no tiene máximo ni mínimo en $(0, 1)$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema (4.3)?

7. $f(x) = x^3 + 1$ 8. $f(x) = 1/x^2$

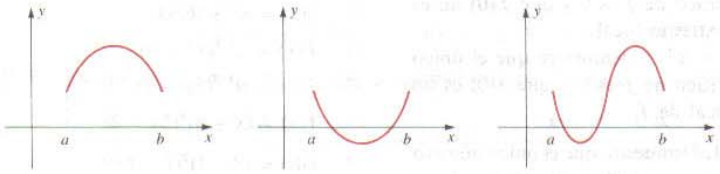
Ejercicios 9-26: Encuentre los números críticos de la función.

9. $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$
10. $g(x) = 2x + 5$
11. $s(t) = 2t^3 + t^2 - 20t + 4$
12. $K(z) = 4z^3 + 5z^2 - 42z + 7$
13. $F(w) = w^4 - 32w$
14. $k(r) = r^5 - 2r^3 + r - 12$
15. $f(z) = \sqrt{z^2 - 16}$
16. $M(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 2}$
17. $g(t) = t^2\sqrt[3]{2t - 5}$
18. $T(v) = (4v + 1)\sqrt{v^2 - 16}$
19. $G(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 9}$
20. $f(s) = \dfrac{s^2}{5s + 4}$
21. $f(t) = (t^3 - 9t)^3$
22. $g(x) = x^3 + (6/x)$
23. $F(x) = x^{2/3}(x^2 - 9)$
24. $H(u) = u^{1/3}(5u - 2)$
25. $f(x) = (x + 5)^4(2x - 3)^3$
26. $G(r) = (r - 1)^2(1 - 6r)^{2/3}$
27. Demuestre que un polinomio de grado 1 no tiene máximos ni mínimos absolutos en el intervalo $(-\infty, \infty)$. ¿Qué se puede decir de los máximos y mínimos en un intervalo cerrado $[a, b]$?
28. Demuestre que si f es una función constante y (a, b) es cualquier intervalo abierto, entonces para todo número c de (a, b) se tiene que $f(c)$ es a la vez un valor extremo local y absoluto de f.
29. Sea f la función mayor entero. Demuestre que todos los números reales son números críticos de f.
30. Sea f una función definida por las siguientes condiciones: $f(x) = 0$ si x es racional y $f(x) = 1$ si x es irracional. Demuestre que todos los números reales son números críticos de f.
31. Demuestre que una función cuadrática tiene uno y sólo un número crítico en $(-\infty, \infty)$.
32. Demuestre que un polinomio de grado 3 puede tener dos números críticos o uno o ninguno en $(-\infty, \infty)$. Trace gráficas que ilustren cómo puede darse cada una de estas posibilidades.
33. Sea $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Demuestre que f tiene un valor extremo local en $(-\infty, \infty)$ si n es par, y no tiene ninguno si n es impar. Trace una gráfica típica que ilustre cada caso.
34. Pruebe que un polinomio de grado n puede tener a lo más $n - 1$ valores extremos locales en $(-\infty, \infty)$.

4.2 TEOREMA DE ROLLE Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO

A veces puede ser muy difícil determinar los números críticos de una función. De hecho, no siempre hay números críticos. El siguiente teorema, que se atribuye al matemático francés Michel Rolle (1652-1719), da condiciones suficientes para la existencia de un número crítico. El teorema se enuncia para una función f que es continua en un

FIGURA 4.10



intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$. La Figura 4.10 muestra las gráficas de algunas funciones de este tipo.

Al examinar las gráficas de la Figura 4.10, parece razonable esperar que haya al menos un número c entre a y b tal que la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ sea horizontal o, equivalentemente, que $f'(c) = 0$. Ésta es precisamente la conclusión del siguiente teorema.

TEOREMA DE ROLLE (4.10)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Demostración La función f debe satisfacer al menos una de las tres condiciones siguientes:

(i) $f(x) = f(a)$ *para todo* x *en* (a, b). En este caso f es una función constante y entonces $f'(x) = 0$ para todo x. Por lo tanto, *todo* número c en (a, b) es un número crítico.

(ii) $f(x) > f(a)$ *para algún* x *en* (a, b). En este caso el máximo de f en $[a, b]$ es mayor que $f(a)$ o $f(b)$ y por lo tanto, se alcanza en algún número c del intervalo *abierto* (a, b). Como la derivada existe en todo (a, b), del Teorema (4.7) se deduce que $f'(c) = 0$.

(iii) $f(x) < f(a)$ *para algún* x *en* (a, b). En este caso, el mínimo de f en $[a, b]$ es menor que $f(a)$ o $f(b)$ y se alcanza en algún número c de (a, b). Como en (ii), $f'(c) = 0$.

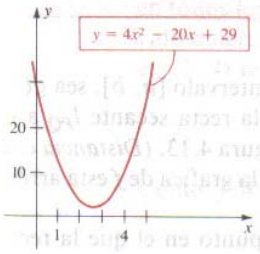
COROLARIO (4.11)

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) = f(b)$, entonces f tiene al menos un número crítico en el intervalo abierto (a, b).

Demostración Si f' no existe en algún número c de (a, b), entonces, por la Definición (4.8), c es un número crítico. Por otro lado, si f' existe en todo (a, b), entonces, por el Teorema de Rolle, también existe algún número crítico. • •

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 4x^2 - 20x + 29$. Demostrar que f satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 4]$ y encontrar todos los números reales c en el intervalo abierto $(1, 4)$ tales que $f'(c) = 0$.

FIGURA 4.11



Solución Como f es un polinomio, es también una función continua y derivable para todo x. En particular, es continua en $[1, 4]$ y derivable en $(1, 4)$. Además,

$$f(1) = 4 - 20 + 29 = 13$$

$$f(4) = 64 - 80 + 29 = 13$$

y por lo tanto, $f(1) = f(4)$. Entonces f satisface las hipótesis del Teorema de Rolle en $[1, 4]$.

Derivando,

$$f'(x) = 8x - 20.$$

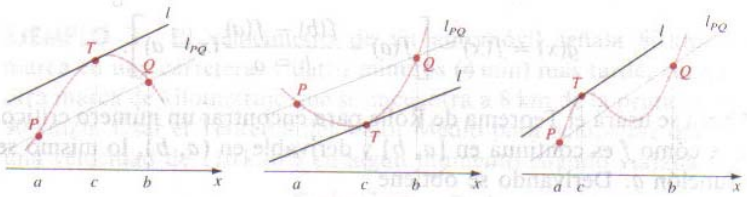
Resolviendo $f'(x) = 0$ obtenemos $8x = 20$ o bien $x = \frac{5}{2}$. Por lo tanto,

$$f'(\tfrac{5}{2}) = 0 \quad \text{y} \quad 1 < \tfrac{5}{2} < 4.$$

La gráfica de f (una parábola) se tiene en la Figura 4.11. Como $f'(\frac{5}{2}) = 0$, la recta tangente en el vértice $(\frac{5}{2}, 4)$ es horizontal. •

El Teorema de Rolle se puede generalizar al caso en que $f(a) \neq f(b)$. Consideremos los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$ en las gráficas de f que se ilustran en la Figura 4.12.

FIGURA 4.12



Si f' existe en todo el intervalo abierto (a, b), existe al menos un punto $T(c, f(c))$ de la gráfica en el que la recta tangente l es paralela a la recta secante l_{PQ} que pasa por P y Q. En términos de las pendientes,

$$\text{pendiente de } l = \text{pendiente de } l_{PQ}$$

o bien

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

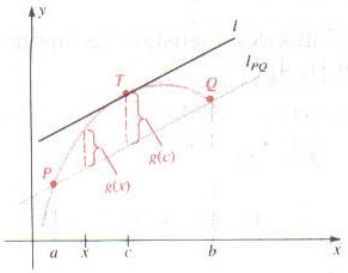
Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $b - a$ se obtiene la fórmula del siguiente teorema.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO (4.12)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

FIGURA 4.13



Demostración Para todo x en el intervalo $[a, b]$, sea $g(x)$ la distancia vertical (con signo) de la recta secante l_{PQ} a la gráfica de f, como se ilustra en la Figura 4.13. (*Distancia con signo* significa que $g(x)$ es positiva si la gráfica de f está arriba de l_{PQ}, y negativa si está abajo.)

Se ve que si $T(c, f(c))$ es un punto en el que la recta tangente l es paralela a l_{PQ}, entonces la distancia $g(c)$ es un valor extremo local de g. Esto sugiere buscar los números críticos de la función g.

Se puede obtener una fórmula para $g(x)$ como sigue. Primero, de la Forma de Punto y Pendiente (1.15), se tiene que

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o, equivalentemente,

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

es una ecuación para la recta secante l_{PQ}. Como se ilustra en la Figura 4.13, $g(x)$ es la diferencia de las distancias del eje x a la gráfica de f y a la recta l_{PQ}, es decir,

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right].$$

Ahora se usará el Teorema de Rolle para encontrar un número crítico de g. Obsérvese que como f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), lo mismo se puede decir de la función g. Derivando se obtiene

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ahora, por sustitución directa, se ve que $g(a) = g(b) = 0$ y entonces la función g satisface las hipótesis del Teorema de Rolle. Por lo tanto, existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $g'(c) = 0$ o, equivalentemente,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Esta última ecuación se puede escribir en la forma de la conclusión del teorema. • •

El Teorema del Valor Medio, llamado también **Teorema de la Media**, se utilizará más adelante para demostrar varios resultados importantes.

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = x^3 - 8x - 5$. Demostrar que f satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[1, 4]$ y encontrar un número c en el intervalo abierto $(1, 4)$ que satisfaga la conclusión del teorema.

Solución Como f es un polinomio, también es una función continua y derivable en todos los números reales. En particular, es continua en $[1, 4]$ y derivable en el intervalo abierto $(1, 4)$. De acuerdo con el Teorema del Valor Medio, existe un número c en $(1, 4)$ tal que

$$f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1).$$

Como $f(4) = 27$, $f(1) = -12$ y $f'(x) = 3x^2 - 8$, esto equivale a

$$27 - (-12) = (3c^2 - 8)(3) \quad \text{o sea} \quad 39 = 3(3c^2 - 8).$$

Se deja al lector demostrar que la última ecuación implica que $c = \pm\sqrt{7}$. Por lo tanto, el número buscado en el intervalo $(1, 4)$ es $c = \sqrt{7}$. •

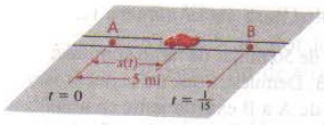
En estadística, *media* es nombre dado al *promedio* de un conjunto de números. Esta palabra tiene una connotación parecida en *Teorema del Valor Medio*. Por ejemplo, si un punto P se mueve sobre una recta coordenada y $s(t)$ denota su coordenada en el tiempo t entonces, por la Definición (2.4), la velocidad media de P en el intervalo $[a, b]$ es

$$v_{\text{med}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

El Teorema del Valor Medio dice que esta velocidad media es igual a la velocidad $v'(c)$ para algún tiempo c entre a y b.

EJEMPLO 3 El velocímetro de un automóvil señala 80 km/h al pasar por una marca en una carretera. Cuatro minutos (4 min) más tarde, cuando el automóvil pasa otra marca de kilometraje que se encuentra a 8 km de la primera, el velocímetro indica 90 km/h. Usar el Teorema del Valor Medio para demostrar que el automóvil excedió una velocidad de 110 km/h en algún momento cuando viajaba entre las dos marcas.

FIGURA 4.14



Solución Podemos suponer que el vehículo va a lo largo de una carretera recta y que las marcas se encuentran en los puntos A y B, como se ilustra en la Figura 4.14. Denotemos por t el tiempo transcurrido (en horas) desde que el automóvil pasa por A y denotemos por $s(t)$ su distancia (en kilómetros) a A en el tiempo t. Como el auto pasa por B en $t = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ horas, la velocidad media durante el trayecto entre A y B es

$$v_{\text{med}} = \frac{s(1/15) - s(0)}{(1/15) - 0} = \frac{8}{(1/15)} = 120 \text{ km/h}.$$

Si suponemos que s es una función derivable, entonces aplicando a s el Teorema del Valor Medio (4.12), con $a = 0$ y $b = \frac{1}{15}$, resulta que hay un tiempo c en el intervalo

$[0, \frac{1}{15}]$ en el que la velocidad $s'(c)$ del automóvil es de 110 km/h. Nótese que las velocidades en A y B no desempeñan ningún papel. •

EJERCICIOS 4.2

1. Sea $f(x) = |x|$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$ pero $f'(c) \neq 0$ para todo número c en el intervalo abierto $(-1, 1)$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Rolle?

2. Sea $f(x) = 5 + 3(x-1)^{2/3}$. Demuestre que aunque $f(0) = f(2)$, $f'(c) \neq 0$ para todo número c en el intervalo abierto $(0, 2)$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Rolle?

3. Sea $f(x) = 4/x$. Demuestre que no existe ningún número c tal que $f(4) - f(-1) = f'(c)[4 - (-1)]$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema del Valor Medio aplicado al intervalo $[-1, 4]$?

4. Sean f la función mayor entero y a y b dos números reales tales que $b - a \geq 1$. Demuestre que no existe ningún número c tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema del Valor Medio?

Ejercicios 5-8: Demuestre que f satisface las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$ y encuentre todos los números c en (a, b) para los que $f'(c) = 0$.

5. $f(x) = 3x^2 - 12x + 11$, $[0, 4]$
6. $f(x) = 5 - 12x - 2x^2$, $[-7, 1]$
7. $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$, $[-3, 3]$
8. $f(x) = x^3 - x$, $[-1, 1]$

Ejercicios 9-18: Determine si la función f satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[a, b]$. Si es así, encuentre todos los números c en (a, b) para los que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

9. $f(x) = x^3 + 1$, $[-2, 4]$
10. $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$, $[1, 3]$
11. $f(x) = x + (4/x)$, $[1, 4]$
12. $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 15x$, $[-1, 1]$
13. $f(x) = x^{2/3}$, $[-8, 8]$
14. $f(x) = 1/(x-1)^2$, $[0, 2]$
15. $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$, $[1, 5]$
16. $f(x) = 1 - 3x^{1/3}$, $[-8, -1]$
17. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$, $[-1, 1]$
18. $f(x) = |x - 3|$, $[-1, 4]$

19. Demuestre que si f es una función lineal entonces f satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ y que *cualquier* número c satisface la conclusión del teorema.

20. Sea f una función cuadrática y $[a, b]$ un intervalo cerrado arbitrario. Demuestre que existe solamente un número c en el intervalo (a, b) que satisface la conclusión del Teorema del Valor Medio.

21. Demuestre que si f es un polinomio de grado 3 y $[a, b]$ es un intervalo cerrado arbitrario, entonces hay a lo más dos números en (a, b) que satisfacen la conclusión del Teorema del Valor Medio. Trace gráficas que ilustren las diversas posibilidades. Generalice este resultado a polinomios de grado 4 e ilústrelo con esquemas. Generalice el resultado para polinomios de cualquier grado n, donde n es un entero positivo.

22. Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3. Utilice el Teorema de Rolle para demostrar que f tiene a lo más tres raíces reales. Generalice este resultado para polinomios de grado n.

Ejercicios 23-29: Use el Teorema del Valor Medio para cada una de las demostraciones.

23. Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b), entonces $f(x) = k$ para algún número real k.

24. Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y $f'(x) = c$ para todo x en (a, b), entonces $f(x) = cx + d$ para algún número real d.

25. Una carretera de 50 millas de largo comunica dos ciudades A y B. Demuestre que no se puede viajar en automóvil de A a B exactamente en una hora sin que el velocímetro marque 50 mi/h al menos una vez.

26. Sea T la temperatura (en °F) al tiempo t (en horas). Si la temperatura disminuye, entonces dT/dt es la *tasa* (o *rapidez*) *de enfriamiento*. La mayor variación de temperatura durante un pe-

riodo de 12 horas que se ha registrado documentalmente en Estados Unidos, ocurrió en el estado de Montana en 1916, cuando la temperatura bajó de 44°F a −56°F. Demuestre que la tasa o rapidez de enfriamiento excedió −8°F/h en algún momento durante el periodo del cambio.

27. Si W es el peso (en libras) de una persona y t el tiempo (en meses), entonces dW/dt es la rapidez de ganancia o pérdida de peso (en lb/mes). El récord mundial de rapidez de pérdida de peso corresponde a un cambio de 487 lb a 130 lb en un periodo de ocho meses. Demuestre que la tasa de pérdida de peso excedió 44 lb/mes en algún momento durante dicho periodo.

28. La carga eléctrica Q de un capacitor (o condensador) aumenta de 2 mC (milicoulombs) a 10 mC en 15 ms (milisegundos). Demuestre que la corriente $I = dQ/dt$ pasa de 0.5 A (ampere) en algún momento durante este pequeño intervalo de tiempo. (*Nota:* 1 A = 1 C/s.)

29. Demuestre que $\sqrt{1+h} < 1 + \frac{1}{2}h$ para $h > 0$.

4.3 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

El siguiente teorema muestra cómo puede usarse la derivada para determinar los intervalos en los que una función es creciente o decreciente.

TEOREMA (4.13)

Sea f una función que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

(i) Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.

(ii) Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Demostración Para demostrar (i), supongamos que $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b). Sean x_1 y x_2 dos números en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Hay que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$. Aplicando el Teorema del Valor Medio (4.12) en el intervalo $[x_1, x_2]$,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(w)(x_2 - x_1)$$

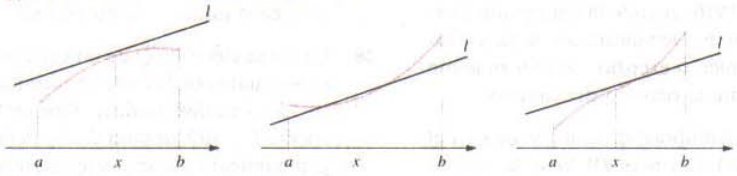
para algún número w en el intervalo abierto (x_1, x_2). Como $x_2 - x_1 > 0$ y por hipótesis $f'(w) > 0$, el lado derecho de la ecuación anterior es positivo, es decir, $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Por lo tanto $f(x_2) > f(x_1)$, que es lo que había que demostrar. La demostración de (ii) es parecida y se deja como ejercicio. • •

Las gráficas de la Figura 4.15 ilustran el Teorema (4.13). Si $f'(x) > 0$, la recta tangente l asciende y también la gráfica de f. Si $f'(x) < 0$, tanto la tangente como la gráfica descienden.

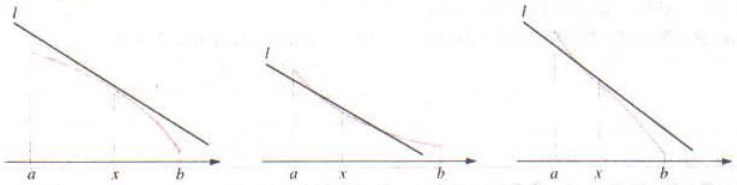
También se puede demostrar que si $f'(x) > 0$ en todo un intervalo infinito $(-\infty, a)$ o bien (b, ∞), entonces f es creciente en $(-\infty, a]$ o $[b, \infty)$, respectivamente, siempre

FIGURA 4.15

(i) $f'(x) > 0$; f es creciente en $[a, b]$



(ii) $f'(x) < 0$; f es decreciente en $[a, b]$



y cuando f sea continua en estos intervalos. Se tiene así un resultado análogo para funciones decrecientes cuando $f'(x) < 0$.

Para aplicar el Teorema (4.13), hay que encontrar los intervalos en los que $f'(x)$ es siempre positiva o siempre negativa. El Teorema (2.29) es útil para esto. En efecto, si la *derivada* f' es continua en un intervalo y no tiene ceros en él, entonces $f'(x) > 0$ o bien $f'(x) < 0$ para todo x en el intervalo. Por lo tanto, si se escoge *cualquier* número k en el intervalo y si se tiene que $f'(k) > 0$, entonces $f'(x) > 0$ para *todo* x en el intervalo. Análogamente, si $f'(k) < 0$, entonces $f'(x) < 0$ en todo el intervalo. Recuerde que $f'(k)$ es un *valor de prueba* de $f'(x)$ para el intervalo.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$. Encontrar los intervalos en los que f es creciente y aquéllos en los que f es decreciente. Trazar la gráfica de f.

Solución Derivando,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x + 5)(x - 1).$$

Gracias al Teorema (4.13), basta encontrar los intervalos en los que $f'(x) > 0$ y también aquéllos en los que $f'(x) < 0$. La expresión factorizada de $f'(x)$ y los números críticos $-\frac{5}{3}$ y 1 sugieren los intervalos $(-\infty, -\frac{5}{3})$, $(-\frac{5}{3}, 1)$ y $(1, \infty)$. En cada uno de estos intervalos f' es continua y no tiene ceros. Por lo tanto $f'(x)$ mantiene el mismo signo en todo el intervalo. El signo se puede determinar escogiendo un valor de prueba adecuado para el intervalo.

Escogiendo -2 en el intervalo $(-\infty, -\frac{5}{3})$, obtenemos el valor de prueba

$$f'(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 5 = 12 - 4 - 5 = 3.$$

Como 3 es positivo, $f'(x)$ es positivo en todo $(-\infty, -\frac{5}{3})$.

Eligiendo 0 en $(-\frac{5}{3}, 1)$, se obtiene el valor de prueba

$$f'(0) = 3(0)^2 + 2(0) - 5 = -5.$$

Como -5 es negativo, $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-\frac{5}{3}, 1)$.

Finalmente, tomando 2 en $(1, \infty)$, obtenemos

$$f'(2) = 3(2)^2 + 2(2) - 5 = 12 + 4 - 5 = 11.$$

Como 11 es positivo, $f'(x) > 0$ en todo el intervalo $(1, \infty)$.

A partir de ahora se exhibirán los resultados del análisis en una tabla como la siguiente. El último renglón se deduce del Teorema (4.13).

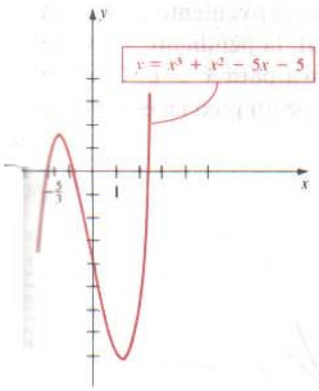
Intervalo	$(-\infty, -\frac{5}{3})$	$(-\frac{5}{3}, 1)$	$(1, \infty)$
k	-2	0	2
Valor de prueba $f'(k)$	3	-5	11
Signo de $f(x)$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	creciente en $(-\infty, -\frac{5}{3}]$	decreciente en $[-\frac{5}{3}, 1]$	creciente en $[1, \infty)$

Nótese que

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 5x - 5 \\ &= x^2(x + 1) - 5(x + 1) \\ &= (x^2 - 5)(x + 1) \end{aligned}$$

y por lo tanto las intercepciones x de la gráfica son $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ y -1. La intercepción y es $f(0) = -5$. Los puntos correspondientes a los números críticos son $(-\frac{5}{3}, \frac{40}{27})$ y $(1, -8)$. Situando estos seis puntos y usando la información de la tabla se puede trazar el croquis de la Figura 4.16. •

FIGURA 4.16



El Teorema (4.13) sirve para justificar los resultados acerca de la dirección (o sentido) del movimiento que se usaron anteriormente (véase el Ejemplo 2 de la Sección 3.3). Así, si $s(t)$ es la coordenada de un punto P en una recta coordenada al tiempo t y si la velocidad $v(t)$ es positiva en un intervalo de tiempo I, entonces $s'(t) > 0$ y por lo tanto, por el Teorema (4.13), $s(t)$ es creciente, es decir, P se mueve según el sentido positivo. Análogamente, si $v(t)$ es negativa, P se mueve según el sentido negativo.

Como $v(t) = s'(t)$, los tiempos en los que la velocidad es cero son números críticos para la función de posición s y, por lo tanto, pueden dar máximos y mínimos locales de s. Si hay un máximo o un mínimo local de s en t_1, entonces frecuentemente t_1 es un tiempo en el que P cambia de dirección.

En la Sección 4.1 se vio que si una función tiene un valor extremo local, éste debe darse en un número crítico, pero no todo número crítico corresponde a un valor extremo local (véase el Ejemplo 3 de la Sección 4.1). Para calcular los máximos y mínimos locales, se comienza por localizar todos los números críticos de la función. Luego se prueba cada número crítico para ver si corresponde a un valor extremo local. Hay varios métodos para realizar estas pruebas. El que proporciona el siguiente teorema se

basa en el signo de la primera derivada de f. En el enunciado del teorema, la frase f' *cambia de positiva a negativa en* c significa que hay un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que $f'(x) > 0$ si $a < x < c$ y también $f'(x) < 0$ si $c < x < b$. La frase f' *cambia de negativa a positiva en* c tiene un significado análogo.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA (4.14)

Sea f una función que es continua en un número crítico c y derivable en un intervalo abierto I que contiene a c, excepto posiblemente en c mismo.

(i) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces $f(c)$ es un máximo local de f.

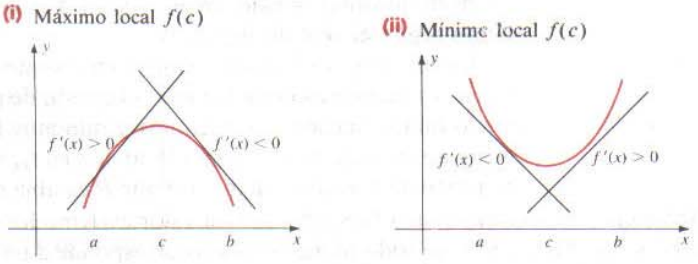
(ii) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local de f.

(iii) Si $f'(x) > 0$ o bien si $f'(x) < 0$ para todo x en I, excepto para $x = c$, entonces $f(c)$ no es un valor extremo local de f.

Demostración Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ y también $f'(x) < 0$ para $c < x < b$. Además, se puede escoger (a, b) de manera que f sea continua en $[a, b]$. Entonces por el Teorema (4.13), f es creciente en $[a, c]$ y decreciente en $[c, b]$. Por lo tanto, $f(x) < f(c)$ para todo x en (a, b) diferente de c; es decir, $f(c)$ es un máximo local de f. Esto demuestra (i). Las demostraciones de (ii) y (iii) son similares. • •

Para recordar el criterio de la primera derivada es conveniente considerar en las gráficas de la Figura 4.17. Cuando hay un máximo local, la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente en $P(x, f(x))$ es positiva para $x < c$ y negativa para $x > c$. Cuando hay un mínimo local ocurre lo contrario. Cuando la gráfica tiene un pico en el punto $(c, f(c))$ se pueden trazar unas gráficas parecidas.

FIGURA 4.17



EJEMPLO 2 Calcular los valores extremos locales de la función f dada por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$.

Solución Esta función es la misma que se consideró en el Ejemplo 1. Sus números críticos son $-\frac{5}{3}$ y 1. De la tabla en el Ejemplo 1 se ve que el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo cuando x rebasa $-\frac{5}{3}$. Entonces por el Criterio de la Primera Derivada, f tiene un máximo local en $-\frac{5}{3}$. El valor de este máximo es $f(-\frac{5}{3}) = \frac{40}{27}$ (véase la Figura 4.16).

Hay un mínimo local en 1 porque el signo de $f'(x)$ cambia de negativo a positivo cuando x rebasa 1. El valor de este mínimo es $f(1) = -8$. •

EJEMPLO 3 Calcular los máximos y mínimos locales de la función f dada por $f(x) = x^{1/3}(8 - x)$. Trazar la gráfica de f.

Solución Por la Regla del Producto,

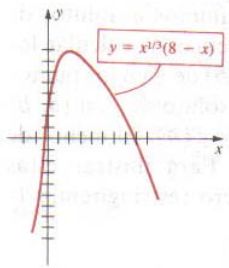
$$f'(x) = x^{1/3}(-1) + (8 - x)\tfrac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{-3x + (8 - x)}{3x^{2/3}} = \frac{4(2 - x)}{3x^{2/3}}$$

y por tanto los números críticos de f son 0 y 2. Esto indica que, como en el Ejemplo 1, hay que considerar los signos de $f'(x)$ en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. Como f' es continua y no tiene ceros en cada intervalo, puede determinarse el signo de $f'(x)$ usando un valor de prueba $f'(k)$ apropiado. La siguiente tabla exhibe los resultados del análisis (verifíquese cada dato).

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
k	-1	1	8
Valor de prueba $f'(k)$	4	$\frac{4}{3}$	-2
Signo de $f(x)$	+	+	−
Comportamiento de f	creciente en $(-\infty, 0]$	creciente en $[0, 2]$	decreciente en $[2, \infty)$

FIGURA 4.18



Para el intervalo $(2, \infty)$ se escogió el número 8 porque $8^{2/3}$ es un entero. Por supuesto, se podría haber elegido *cualquier* número k en $(2, \infty)$ y evaluar $f'(k)$ con una calculadora.

Por el Criterio de la Primera Derivada, f tiene un máximo local en 2 pues f' cambia de positiva a negativa en 2. Por lo tanto,

Máximo local: $f(2) = 2^{1/3}(8 - 2) = 6\sqrt[3]{2} \sim 7.6$.

La función no tiene un valor extremo en 0 porque f' no cambia de signo en 0.

Para graficar f trazamos primero los puntos correspondientes a los números críticos. De la expresión para $f(x)$ se deduce que las abscisas en el origen de la gráfica son 0 y 8. En la Figura 4.18 se tiene la gráfica. •

EJEMPLO 4 Calcular los valores extremos locales de la función f dada por $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$. Trazar la gráfica de f.

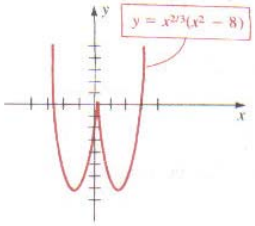
Solución Por la Regla del Producto,

$$f'(x) = x^{2/3}(2x) + (x^2 - 8)(\tfrac{2}{3}x^{-1/3}) = \frac{6x^2 + 2(x^2 - 8)}{3x^{1/3}} = \frac{8(x^2 - 2)}{3x^{1/3}}.$$

Los números críticos son las soluciones de $x^2 - 2 = 0$ y $x^{1/3} = 0$; es decir, $-\sqrt{2}$, 0 y $\sqrt{2}$. Esto sugiere obtener el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, \infty)$. Exhibimos ahora los resultados del análisis en una tabla como en los ejemplos anteriores.

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
k	-8	-1	1	8
Valor de prueba $f'(k)$	$-\frac{248}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{248}{3}$
Signo de $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}]$	creciente en $[-\sqrt{2}, 0]$	decreciente en $[0, \sqrt{2}]$	creciente en $[\sqrt{2}, \infty)$

FIGURA 4.19



Por el Criterio de la Primera Derivada, f tiene dos mínimos locales en $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ y un máximo local en 0. Los valores correspondientes de la función son:

Máximo local: $f(0) = 0$

Mínimo local: $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -6\sqrt[3]{2} \approx -7.56$.

Nótese que $f'(0)$ no existe. En la Figura 4.19 se tiene la gráfica. •

Como se vio en la Sección 4.1, los máximos y mínimos *absolutos* de una función pueden no encontrarse entre los máximos y mínimos locales. Recuérdese de (4.9) que si se desea determinar los máximos y mínimos absolutos de una función f que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, además de calcular los máximos y mínimos locales hay que obtener los valores $f(a)$ y $f(b)$ de f en los puntos de frontera (o extremos) a y b del intervalo $[a, b]$. El máximo absoluto de f en $[a, b]$ es el mayor entre los valores extremos locales y los valores $f(a)$ y $f(b)$. El menor de todos estos números es el mínimo absoluto de f en $[a, b]$. Para ilustrar estas observaciones consideraremos la función del ejemplo anterior pero restringiremos la atención a ciertos intervalos.

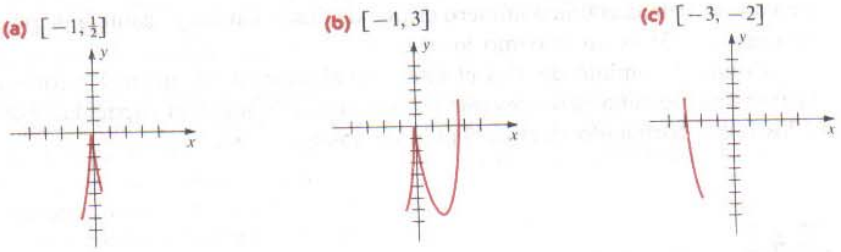
EJEMPLO 5 Sea $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$. Calcular el máximo y el mínimo absolutos de f en cada uno de los siguientes intervalos:

(a) $[-1, \frac{1}{2}]$ **(b)** $[-1, 3]$ **(c)** $[-3, -2]$

Solución La gráfica de la Figura 4.19 indica los valores extremos locales y los intervalos en los que f es creciente o decreciente. La Figura 4.20 muestra las partes de la gráfica de f correspondientes a cada uno de los intervalos (a), (b) y (c).

FIGURA 4.20

(a) $[-1, \frac{1}{2}]$ (b) $[-1, 3]$ (c) $[-3, -2]$



A partir de estos croquis se obtiene la tabla siguiente (verifíquese cada dato).

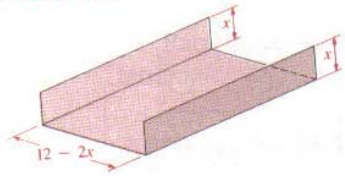
Intervalo	Mínimo absoluto	Máximo absoluto
$[-1, \frac{1}{2}]$	$f(-1) = -7$	$f(0) = 0$
$[-1, 3]$	$f(\sqrt{2}) = -6\sqrt[3]{2}$	$f(3) = \sqrt[3]{9}$
$[-3, -2]$	$f(-2) = -4\sqrt[3]{4}$	$f(-3) = \sqrt[3]{9}$

Adviértase que en algunos intervalos el máximo o el mínimo de f es también un valor extremo local, pero en otros casos no es así. •

En las aplicaciones, una cantidad física Q suele describirse en términos de una fórmula $Q = f(x)$, donde f es una función derivable. (Por supuesto, se pueden usar otros símbolos para las variables.) Luego es posible usar la derivada $D_x Q$ como ayuda para calcular los máximos y mínimos de Q. A veces es necesario obtener una fórmula adecuada para Q, como en el ejemplo siguiente (véanse también los Ejercicios 33 y 34). En la Sección 4.5 se darán muchas otras aplicaciones de este tipo.

EJEMPLO 6 Una larga lámina rectangular de metal de 12 pulg de ancho, se va a convertir en un canalón para lluvia doblando dos lados hacia arriba, de manera que queden perpendiculares al resto de la lámina. ¿De cuántas pulgadas debe ser lo doblado para dar al canalón la máxima capacidad?

FIGURA 4.21



Solución La Figura 4.21 muestra el canalón. En ella x denota el ancho de la parte doblada a cada lado. El ancho de la pieza es $12 - 2x$ pulgadas. La capacidad será máxima cuando el área del rectángulo con lados de longitud x y $12 - 2x$ lo sea. Denotando el área por $f(x)$,

$$f(x) = x(12 - 2x) = 12x - 2x^2.$$

Nótese que $0 < x < 6$ porque si $x = 0$ o $x = 6$, no se forma un canalón (el área del rectángulo sería $f(0) = 0 = f(6)$).

Derivando,

$$f'(x) = 12 - 4x = 4(3 - x)$$

y en consecuencia el único número crítico de f es 3. Como f' cambia de positiva a negativa en 3, $f(3)$ es un máximo local de f.

Como el dominio de f es el intervalo abierto (0, 6), no hay valores extremos en la frontera. Resulta entonces que para alcanzar la máxima capacidad hay que doblar a los lados formando tiras de 3 pulg de ancho. •

EJERCICIOS 4.3

Ejercicios 1-16: Calcule los máximos y mínimos locales de f. Describa los intervalos en los que f es creciente o decreciente y trace la gráfica de f.

1. $f(x) = 5 - 7x - 4x^2$
2. $f(x) = 6x^2 - 9x + 5$
3. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x + 1$
4. $f(x) = x^3 - x^2 - 40x + 8$
5. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$
6. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$
7. $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$
8. $f(x) = x^{2/3}(8 - x)$
9. $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2 - 4}$
10. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$
11. $f(x) = x^{2/3}(x - 7)^2 + 2$
12. $f(x) = 4x^3 - 3x^4$
13. $f(x) = x^3 + (3/x)$
14. $f(x) = 8 - \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$
15. $f(x) = 10x^3(x - 1)^2$
16. $f(x) = (x^2 - 10x)^4$

Ejercicios 17-22: Calcule los máximos y mínimos locales de f.

17. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$
18. $f(x) = x^2/\sqrt{x + 7}$
19. $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^4$
20. $f(x) = x^2(x - 5)^4$
21. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x + 3}$
22. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

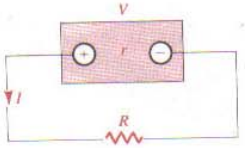
23 -26. Calcule el máximo y el mínimo absolutos de las funciones definidas en los Ejercicios 1-4, en cada uno de los siguientes intervalos:

(a) $[-1, 1]$ (b) $[-4, 2]$ (c) $[0, 5]$

Ejercicios 27-28: Trace la gráfica de una función derivable f que satisfaga las condiciones dadas.

27. $f'(-5) = 0$; $f'(0) = 0$; $f'(5) = 0$; $f'(x) > 0$ si $|x| > 5$; $f'(x) < 0$ si $0 < |x| < 5$.
28. $f'(a) = 0$ para $a = 1, 2, 3, 4, 5$ y $f'(x) > 0$ para todos los otros valores de x.
29. Un hato de 100 venados se transporta a una isla pequeña. El rebaño crece rápidamente pero los recursos alimenticios de la isla comienzan a escasear y la población disminuye. Suponga que el número $N(t)$ de venados que hay a los t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$.
 (a) ¿Cuándo deja de crecer el hato? ¿Cuál es su tamaño máximo? ¿Cuándo se extingue la población?
 (b) Trace la gráfica de N para $t \geq 0$.
30. (a) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halle valores de a, b, c y d para los que f tenga un máximo local 2 en $x = -1$, y un mínimo local -1 en $x = 1$.
 (b) Sea $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Halle valores de a, b, c, d y e para los que f tenga un máximo local 2 en $x = 0$, y dos mínimos locales -14 en $x = -2$ y en $x = 2$, respectivamente.
31. Una pila eléctrica que tiene un voltaje fijo V y una resistencia interna fija r se conecta a un circuito que tiene resistencia variable R (véase la figura). Por la ley de Ohm, la corriente I en el

EJERCICIO 31



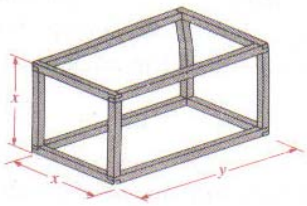
circuito es $I = V/(R + r)$. La potencia de salida P está dada por $P = I^2R$. Demuestre que la potencia máxima se alcanza cuando $R = r$.

32. La potencia de salida P de una batería o acumulador de automóvil está dada por $P = VI - I^2r$, donde V es el voltaje, I la corriente y r la resistencia interna de la batería. ¿Qué valor de la corriente corresponde a la potencia máxima?

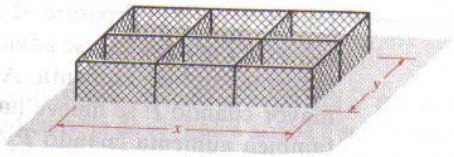
33. Se va a construir una armazón para embalaje con un trozo de madera con sección cuadrada de 2 por 2 pulgadas y 24 pie de largo. El embalaje va a tener extremos cuadrados, como se muestra en la figura. Calcule las dimensiones que producen el máximo volumen exterior. (*Sugerencia:* Exprese primero y como función de x y luego V como función de x.)

34. Se van a usar 300 m de tela de alambre para construir seis jaulas de un zoológico, como se muestra en la figura. Calcule las dimensiones para las que el área que abarcan las jaulas es máxima. (*Sugerencia:* Exprese primero y como función de x y luego A como función de x.)

EJERCICIO 33



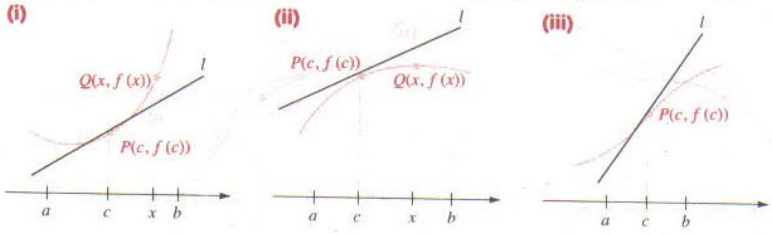
EJERCICIO 34



4.4 CONCAVIDAD Y CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

El concepto de *concavidad* es útil para describir la gráfica de una función derivable f. Si $f'(c)$ existe, entonces la gráfica de f tiene una recta tangente l con pendiente $f'(c)$ en el punto $P(c, f(c))$. La Figura 4.22 ilustra tres casos que pueden ocurrir cuando $f'(c) > 0$. Hay situaciones similares cuando $f'(c) < 0$ o bien $f'(c) = 0$. Para la gráfica de la Figura 4.22(i), se dice que en el intervalo (a, b), la gráfica está *arriba* de la recta tangente en P. En (ii), la gráfica está *abajo* de la recta tangente. En (iii), la gráfica no está ni arriba ni abajo de la recta tangente para cualquier intervalo abierto (a, b) que contenga a c, sino que la *corta* en ese punto.

FIGURA 4.22



Para describir las gráficas que se ilustran en la Figura 4.22 se usa la siguiente terminología.

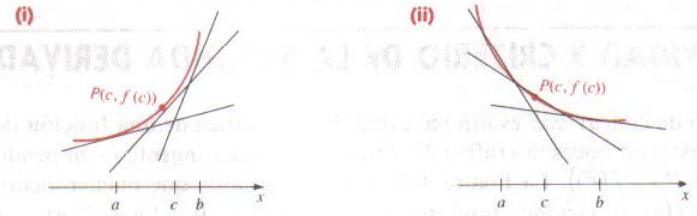
DEFINICIÓN (4.15) Sea f una función que es derivable en un número c.

(i) La gráfica de f tiene **concavidad hacia arriba** en el punto $P(c,\ f(c))$ si existe un intervalo abierto $(a,\ b)$ que contiene a c, tal que en $(a,\ b)$ la gráfica de f está por encima de la recta tangente en P.

(ii) La gráfica de f tiene **concavidad hacia abajo** en el punto $P(c,\ f(c))$ si existe un intervalo abierto $(a,\ b)$ que contiene a c, tal que en $(a,\ b)$ la gráfica de f está por debajo de la recta tangente en P.

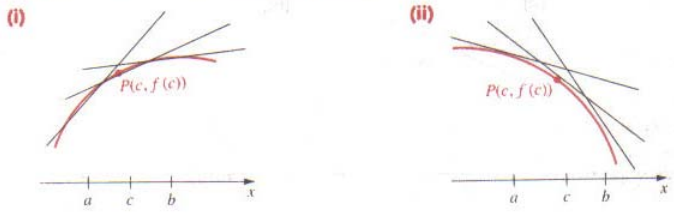
Consideremos una función f cuya gráfica tiene concavidad hacia arriba en el punto $P(c,\ f(c))$. Como en la Figura 4.22(i), existe un intervalo abierto $(a,\ b)$ que contiene a c, tal que en $(a,\ b)$ la gráfica de f está por encima de la recta tangente en P. Si f es derivable en $(a,\ b)$, entonces la gráfica de f tiene una recta tangente en todos los puntos $Q(x,\ f(x))$ para $a < x < b$. Si se consideran varias de estas rectas tangentes (véase la Figura 4.23), se advierte que cuando x aumenta, la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente también aumenta. Así, en la Figura 4.23(i), se obtiene una pendiente positiva mayor cuando P se mueve hacia la derecha. En (ii), la pendiente de la recta tangente también aumenta cuando P se mueve hacia la derecha, haciéndose menos negativa.

FIGURA 4.23 Concavidad hacia arriba



Análogamente, si la gráfica de f tiene concavidad hacia abajo en $P(c,\ f(c))$, entonces se obtienen gráficas como las de la Figura 4.24. En ellas la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente *disminuye* cuando P se mueve hacia la derecha.

FIGURA 4.24 Concavidad hacia abajo



Recíprocamente, se puede esperar que si la derivada $f'(x)$ aumenta cuando x crece pasando por c, entonces la gráfica tiene concavidad hacia arriba en $P(c,\ f(c))$ y si $f'(x)$ disminuye, entonces la gráfica tiene concavidad hacia abajo. Según el Teorema (4.13), si la derivada de una función es positiva en un intervalo, entonces la función es creciente.

Por lo tanto, si los valores de la *segunda derivada* f'' son positivos en un intervalo, entonces la *primera* derivada f' crece. Análogamente, si f'' es negativa, f'' decrece. Esto indica que el signo de f'' puede servir para averiguar la concavidad, como se enuncia en el siguiente teorema del cual se da una demostración al finalizar la sección.

PRUEBA DE LA CONCAVIDAD (4.16)

Sea f una función derivable en un intervalo abierto que contiene a c, tal que $f''(c)$ existe.

(i) Si $f''(c) > 0$, la gráfica tiene concavidad hacia arriba en $P(c, f(c))$.

(ii) Si $f''(c) < 0$, la gráfica tiene concavidad hacia abajo en $P(c, f(c))$.

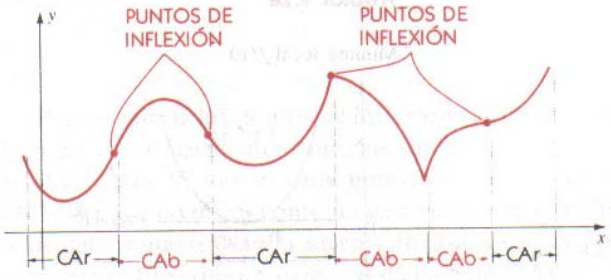
Si la segunda derivada $f''(x)$ cambia de signo cuando x aumenta y pasa por un número k, entonces por (4.16) la concavidad cambia de ser hacia arriba a ser hacia abajo, o bien de ser hacia abajo a ser hacia arriba. El punto $(k, f(k))$ se llama *punto de inflexión* de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN (4.17)

Un punto $P(k, f(k))$ en la gráfica de una función f es un **punto de inflexión** si f'' existe en un intervalo abierto (a, b) que contiene a k y f'' cambia de signo en k.

El croquis de la Figura 4.25 exhibe algunos puntos de inflexión típicos en una gráfica. Se dice que una gráfica es **cóncava hacia arriba** (o **hacia abajo) en un intervalo**, si tiene concavidad hacia arriba (o hacia abajo) en todos los números del intervalo. Aquellos intervalos en los que la gráfica de la Figura 4.25 es cóncava hacia arriba o hacia abajo se señalan por CAr o CAb, respectivamente. Obsérvese que un pico puede ser o no un punto de inflexión.

FIGURA 4.25



EJEMPLO 1 Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$. Encuentre los intervalos en los que la gráfica de f tiene concavidad hacia arriba y aquéllos en los que tiene concavidad hacia abajo.

FIGURA 4.26



Solución En los Ejemplos 1 y 2 de la sección anterior consideramos esta función. Como $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$,

$$f''(x) = 6x + 2 = 2(3x + 1).$$

Por lo tanto, $f''(x) < 0$ si $3x + 1 < 0$, es decir, si $x < -\frac{1}{3}$. Aplicando la Prueba de la Concavidad (4.16) vemos que la gráfica tiene concavidad hacia abajo en el intervalo infinito $(-\infty, -\frac{1}{3})$. Análogamente, $f''(x) > 0$ si $x > -\frac{1}{3}$, y por tanto la gráfica tiene concavidad hacia arriba en $(-\frac{1}{3}, \infty)$. Según la Definición (4.17), el punto $P(-\frac{1}{3}, -\frac{88}{27})$ en el que f'' cambia de signo (y la concavidad de ser hacia abajo a ser hacia arriba) es un punto de inflexión. La gráfica de f que se obtuvo previamente se exhibe de nuevo en la Figura 4.26 para indicar el punto de inflexión. •

Si $P(c, f(c))$ es un punto de inflexión sobre la gráfica de f, y f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a c, entonces necesariamente $f''(c) = 0$. Esto se puede demostrar aplicando el Teorema del Valor Intermedio (2.28) a la función f''. Entonces, para localizar los puntos de inflexión de una función cuya segunda derivada es continua, se comienza por encontrar todos los números x para los que $f''(x) = 0$. Luego se prueba cada uno de estos números para determinar si es la abscisa de un punto de inflexión. Antes de dar un ejemplo, enunciamos el siguiente criterio para distinguir máximos y mínimos locales.

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA (4.18)

Sea f una función derivable en un intervalo abierto que contiene a c y tal que $f'(c) = 0$.

(i) Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.

(ii) Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.

FIGURA 4.27

Máximo local $f(c)$

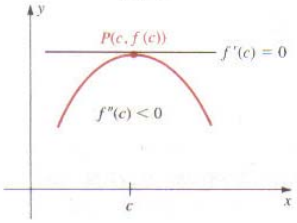
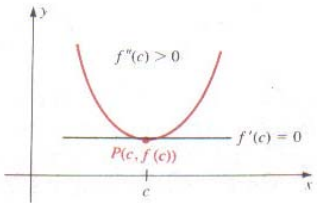


FIGURA 4.28

Mínimo local $f(c)$



Demostración Si $f'(c) = 0$, entonces la recta tangente a la gráfica en $P(c, f(c))$ es horizontal. Si además $f''(c) < 0$ entonces la gráfica tiene concavidad hacia abajo en c y existe un intervalo (a, b) que contiene a c en el que la gráfica se encuentra abajo de la recta tangente en P. Por lo tanto, $f(c)$ es un máximo local de f, como se ilustra en la Figura 4.27. Esto demuestra (i). Se puede dar una demostración similar para el caso (ii), que se ilustra en la Figura 4.28. • •

El Criterio de la Segunda Derivada no se puede aplicar cuando $f''(c) = 0$. En tales casos se debe usar el Criterio de la Primera Derivada (véase el Ejemplo 3).

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$. Usar el Criterio de la Segunda Derivada para calcular los máximos y mínimos locales de f. Discutir la concavidad, encontrar los puntos de inflexión y trazar la gráfica de f.

Solución Comenzamos por encontrar la primera y la segunda derivadas y factorizarlas como sigue:

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$$
$$f''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1 - 3x^2)$$

Se emplea la expresión de $f'(x)$ para encontrar los números críticos 0, 1 y -1. Los valores de f'' en estos números son

$$f''(0) = 4 > 0, \quad f''(1) = -8 < 0 \quad \text{y} \quad f''(-1) = -8 < 0.$$

Entonces por el Criterio de la Segunda Derivada, la función tiene un mínimo local en 0 y dos máximos locales, en 1 y -1. Los valores correspondientes de la función son $f(0) = 12$ y $f(1) = 13 = f(-1)$. La siguiente tabla resume los resultados.

Número crítico c	$f''(c)$	Signo de $f''(c)$	Conclusión
-1	-8	$-$	Máximo local: $f(-1) = 13$
0	4	$+$	Mínimo local: $f(0) = 12$
1	-8	$-$	Máximo local: $f(1) = 13$

Para localizar los puntos de inflexión resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$, es decir, $4(1 - 3x^2) = 0$. Evidentemente, las soluciones son $-\sqrt{3}/3$ y $\sqrt{3}/3$. Esto sugiere analizar el signo de $f''(x)$ en cada uno de los intervalos $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$, $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ y $(\sqrt{3}/3, \infty)$. Como f'' es continua y no tiene ceros en estos intervalos, el signo de $f''(x)$ puede determinarse usando valores de prueba. Se disponen los resultados en una tabla como sigue. El último renglón se deduce de (4.18).

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3, \infty)$
k	-1	0	1
Valor de prueba $f''(k)$	-8	4	-8
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$	$-$
Concavidad	hacia abajo	hacia arriba	hacia abajo

FIGURA 4.29



Como $f''(x)$ cambia de signo en $-\sqrt{3}/3$ y $\sqrt{3}/3$, los puntos correspondientes sobre la gráfica $(\pm\sqrt{3}/3, 113/9)$ son puntos de inflexión. Estos son los puntos en los que la concavidad cambia. Como se indica en la tabla, la gráfica tiene concavidad hacia arriba en el intervalo $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3},3)$, y concavidad hacia abajo fuera de $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$. La Figura 4.29 muestra un croquis de la gráfica. •

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^5 - 5x^3$. Usar el Criterio de la Segunda Derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de f. Discutir la concavidad, encontrar los puntos de inflexión y trazar la gráfica de f.

Solución Derivando,

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$$
$$f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x(2x^2 - 3).$$

Resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$ obtenemos los números críticos 0, $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$. Como en el Ejemplo 2, resulta así la tabla siguiente (verifíquese cada dato).

Número crítico c	$f''(c)$	Signo de $f''(c)$	Conclusión
$-\sqrt{3}$	$-30\sqrt{3}$	$-$	Máximo local: $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$
0	0	ninguno	Ninguna
$\sqrt{3}$	$30\sqrt{3}$	$+$	Mínimo local: $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$

Como $f''(0) = 0$, el Criterio de la Segunda Derivada no puede aplicarse en 0 y por lo tanto aplicamos el Criterio de la Primera Derivada. Usando valores de prueba puede demostrarse que si $-\sqrt{3} < x < 0$, entonces $f'(x) < 0$, y si $0 < x < \sqrt{3}$, entonces $f'(x) < 0$. Como $f'(x)$ no cambia de signo, no hay valores extremos.

Para encontrar los puntos de inflexión consideramos la ecuación $f''(x) = 0$, es decir, $10x(2x^2 - 3) = 0$. Las soluciones de esta ecuación en orden creciente son $-\sqrt{6}/2$, 0 y $\sqrt{6}/2$. Es posible construir la tabla siguiente:

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{6}/2)$	$(-\sqrt{6}/2, 0)$	$(0, \sqrt{6}/2)$	$(\sqrt{6}/2, \infty)$
k	-2	-1	1	2
Valor de prueba $f''(k)$	-100	10	-10	100
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Concavidad	hacia abajo	hacia arriba	hacia abajo	hacia arriba

FIGURA 4.30



Debido a que el signo de $f''(x)$ cambia cuando x pasa por $-\sqrt{6}/2$, 0 y $\sqrt{6}/2$, los puntos (0, 0), $(-\sqrt{6}/2, 21\sqrt{6}/8)$ y $(\sqrt{6}/2, -21\sqrt{6}/8)$ *son puntos de inflexión. La gráfica está en* la Figura 4.30, en la que los ejes x y y tienen diferente escala. •

La derivada f'' es continua en todos los ejemplos anteriores. Si $f'(c)$ o $f''(c)$ no existen, entonces $(c, f(c))$ también puede ser un punto de inflexión, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Sea $f(x) = 1 - x^{1/3}$. Calcular los valores extremos locales, discutir la concavidad, encontrar los puntos de inflexión y trazar la gráfica de f.

Solución Derivando,

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-2/3} = -\frac{1}{3x^{2/3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-5/3} = \frac{2}{9x^{5/3}}.$$

La primera derivada no existe en $x = 0$ que es el único número crítico de f. Como $f''(0)$ no está definido, no puede aplicarse el Criterio de la Segunda Derivada. Sin embargo, si $x \neq 0$ entonces $x^{2/3} > 0$ y $f'(x) = -1/(3x^{2/3}) < 0$, lo que significa que f es decreciente en todo su dominio. Por lo tanto, $f(0)$ no es un valor extremo local.

El hecho de que f'' no esté definida en $x = 0$ sugiere que el punto (0, 1) de la gráfica de f podría ser un punto de inflexión. Apliquemos la Definición (4.17) con $k = 0$. Si $x < 0$, entonces $x^{5/3} < 0$. Por lo tanto,

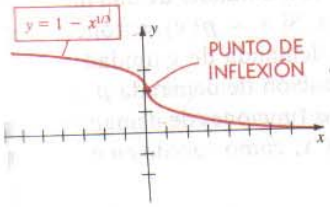
$$f''(x) = \frac{2}{9x^{5/3}} < 0 \qquad \text{si } x < 0$$

lo cual implica que la gráfica de f tiene concavidad hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 0)$. Si $x > 0$, entonces $x^{5/3} > 0$. Por lo tanto,

$$f''(x) = \frac{2}{9x^{5/3}} > 0 \qquad \text{si } x > 0$$

lo cual significa que la gráfica tiene concavidad hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$. Entonces por (4.19), el punto (0, 1) es un punto de inflexión. Usando esta información y trazando algunos puntos obtenemos el croquis de la Figura 4.31. •

FIGURA 4.31



En la Sección 3.3 se discutieron problemas de economía que involucran las funciones de costo, de costo medio, de ingreso y de utilidades: C, c, R y P. Sus derivadas, C', c', R' y P' (llamadas costo marginal, costo medio marginal, ingreso marginal y utilidades marginales), se usan para determinar máximos y mínimos, como se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Una fábrica de muebles calcula que el costo semanal de producir x reproducciones terminadas a mano de un escritorio colonial, está dado por $C(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$. Cada escritorio producido se vende en \$2800 (dólares). ¿Qué producción mensual rendirá las máximas utilidades? ¿Cuál es la mayor ganancia posible por semana?

Solución Como el ingreso que se obtiene al vender x escritorios es $2800x$, la función de ingreso R está dada por $R(x) = 2800x$. La función de utilidades P es la diferencia entre la función de ingreso R y la función de costo C, es decir,

$$P(x) = R(x) - C(x) = 2800x - (x^3 - 3x^2 - 80x + 500)$$

o bien

$$P(x) = -x^3 + 3x^2 + 2880x - 500.$$

Para evaluar la ganancia máxima se deriva y

$$P'(x) = -3x^2 + 6x + 2880 = -3(x^2 - 2x - 960).$$

Los números críticos de P son las soluciones de

$$x^2 - 2x - 960 = 0 \quad \text{o bien} \quad (x - 32)(x + 30) = 0,$$

es decir, $x = 32$ o $x = -30$. Como la solución negativa no tiene sentido, basta considerar $x = 32$.

La segunda derivada de la función de utilidades P es

$$P''(x) = -6x + 6$$

Por lo tanto,

$$P''(32) = -6(32) + 6 = -176 < 0.$$

Entonces, por el Criterio de la Seguna Derivada, la máxima ganancia se obtiene si se producen y se venden 32 escritorios semanalmente. La ganancia máxima por semana es

$$P(32) = -(32)^3 + 3(32)^2 + 2880(32) - 500 = \$61\,964. \quad \bullet$$

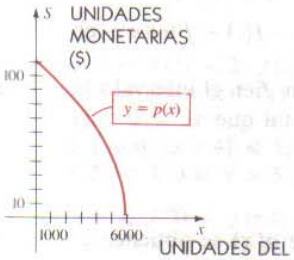
Al final de la Sección 3.3 se presentó la noción de *función de demanda* p, donde $p(x)$ es el precio por unidad cuando hay una demanda de x unidades de una mercancía. Entonces el ingreso $R(x)$ está dado por $R(x) = xp(x)$. Si $S = p(x)$, entonces S es el precio de venta de una unidad correspondiente a una demanda de x unidades. Como normalmente al disminuir S entonces x aumenta, la función de demanda p por lo común es decreciente, es decir, $p'(x) < 0$ para todo x. Las funciones de demanda a veces están definidas implícitamente por una ecuación en S y x, como sucede en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 La demanda x y el precio de venta S de un producto están relacionados por la ecuación $2x + S^2 - 12\,000 = 0$. Encontrar la función de demanda, la función de demanda marginal, la función de ingreso y la función de ingreso marginal. Hallar también el número de unidades y el precio por unidad que producen el ingreso máximo. ¿Cuál es este ingreso máximo?

Solución Como $S^2 = 12\,000 - 2x$, y S es positivo, vemos que la función de demanda S está dada por

$$S = p(x) = \sqrt{12\,000 - 2x}.$$

FIGURA 4.32



El dominio de p consta de todos los números x tales que $12\,000 - 2x > 0$ o, equivalentemente, $2x < 12\,000$. Por lo tanto, $0 \le x < 6000$. La gráfica de p está en la Figura 4.32. Teóricamente, cuando el precio es $\sqrt{12\,000}$ o aproximadamente \$109.54, no hay ventas, y cuando el precio se acerca a \$0 la demanda se acerca a 6000.

La función de demanda marginal p' está dada por

$$p'(x) = \frac{-1}{\sqrt{12\,000 - 2x}}.$$

El signo negativo indica que una disminución en el precio está asociada a un aumento en la demanda.

La función de ingreso R está dada por

$$R(x) = xp(x) = x\sqrt{12\,000 - 2x}.$$

Derivando y simplificando, se obtiene la función de ingreso marginal R' que es

$$R'(x) = \frac{12\,000 - 3x}{\sqrt{12\,000 - 2x}}.$$

La función de ingreso R tiene un número crítico $x = 12\,000/3 = 4000$. Como $R'(x)$ es positivo si $0 \le x < 4000$ y negativo si $4000 < x < 6000$, el ingreso máximo se alcanza cuando se producen y se venden 4000 unidades. Esto corresponde a un precio de venta de

$$p(4000) = \sqrt{12\,000 - 2(4000)} \approx \$63.25.$$

El ingreso máximo, que se obtiene al vender 4000 unidades a este precio, es

$$4000(63.25) = \$253\,000. \quad \bullet$$

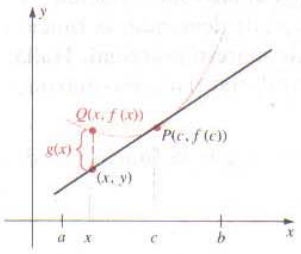
Demostración de la Prueba de la Concavidad (4.16) Aplicando la Definición (3.1′) a la función f',

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

Si $f''(c) > 0$, entonces por el Teorema (2.12), existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

FIGURA 4.33



para todo x en (a, b) diferente de c; es decir, $f'(x) - f'(c)$ y $x - c$ tienen ambos el mismo signo. A continuación se demuestra que esto implica la concavidad hacia arriba.

Para todo x en el intervalo (a, b), sea y la ordenada en x de la recta tangente en $P(c, f(c))$ y sea $Q(x, f(x))$ el punto sobre la gráfica de f (véase la Figura 4.33). Si se define $g(x) = f(x) - y$, la concavidad hacia arriba se obtendrá demostrando que $g(x)$ es positivo para todo x tal que $x \neq c$.

Como $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ es la ecuación de la recta tangente en P, resulta que la ordenada del punto (x, y) de la recta tangente está dada por $y = f(c) + f'(c)(x - c)$. Por lo tanto,

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c).$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio (4.12) a la función f en el intervalo $[x, c]$, se ve que existe un número w en el intervalo abierto (x, c) tal que

$$f(x) - f(c) = f'(w)(x - c).$$

Sustituyendo este valor de $f(x) - f(c)$ en la fórmula de $g(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} g(x) &= [f(x) - f(c)] - f'(c)(x - c) \\ &= f'(w)(x - c) - f'(c)(x - c). \end{aligned}$$

Esto puede factorizarse como sigue:

$$g(x) = [f'(w) - f'(c)](x - c)$$

Como w está en el intervalo (a, b), del primer párrafo de la demostración se sabe que $f'(w) - f'(c)$ y $w - c$ tienen el mismo signo. Maś aún, como w está entre x y c, $w - c$ y $x - c$ tienen el mismo signo. Por lo tanto, $f'(w) - f'(x)$ y $x - c$ tienen el mismo signo para todo x en (a, b) tal que $x \neq c$. De la expresión factorizada para $g(x)$ se deduce que $g(x)$ es positivo si $x \neq c$, que es lo que se quería demostrar. La parte (ii) se puede demostrar de manera parecida. • •

EJERCICIOS 4.4

Ejercicios 1-18: Use el Criterio de la Segunda Derivada (cuando se pueda aplicar) para calcular los valores extremos de f. Discuta la concavidad, encuentre las abscisas de los puntos de inflexión y trace la gráfica de f.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
2. $f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x - 50$
3. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$
4. $f(x) = 8x^2 - 2x^4$
5. $f(x) = 2x^6 - 6x^4$
6. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
7. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
8. $f(x) = x - (16/x)$
9. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$
10. $f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt{x}}$
11. $f(x) = x^2 - (27/x^2)$
12. $f(x) = x^{2/3}(1 - x)$
13. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

15. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(3x + 10)$

16. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

17. $f(x) = 8x^{1/3} + x^{4/3}$

18. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

Ejercicios 19-26: Trace la gráfica de una función continua f que satisfaga todas las condiciones dadas.

19. $f(0) = 1$; $f(2) = 3$; $f'(0) = f'(2) = 0$; $f'(x) < 0$ si $|x - 1| > 1$; $f'(x) > 0$ si $|x - 1| < 1$; $f''(x) > 0$ si $x < 1$; $f''(x) < 0$ si $x > 1$.

20. $f(0) = 4$; $f(2) = 2$; $f(5) = 6$; $f'(0) = f'(2) = 0$; $f'(x) > 0$ si $|x - 1| > 1$; $f'(x) < 0$ si $|x - 1| < 1$; $f''(x) < 0$ si $x < 1$ o si $|x - 4| < 1$; $f''(x) > 0$ si $|x - 2| < 1$ o si $x > 5$.

21. $f(0) = 2$; $f(2) = f(-2) = 1$; $f'(0) = 0$; $f'(x) > 0$ si $x < 0$; $f'(x) < 0$ si $x > 0$; $f''(x) < 0$ si $|x| < 2$; $f''(x) > 0$ si $|x| > 2$.

22. $f(1) = 4$; $f'(x) > 0$ si $x < 1$; $f'(x) < 0$ si $x > 1$; $f''(x) > 0$ para todo $x \neq 1$.

23. $f(-2) = f(6) = -2$; $f(0) = f(4) = 0$; $f(2) = f(8) = 3$; f' no está definida en 2 ni en 6; $f'(0) = 1$; $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 2)$ y $(6, \infty)$; $f'(x) < 0$ si $|x - 4| < 2$; $f''(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$, $(4, 6)$ y $(6, \infty)$; $f''(x) > 0$ en $(0, 2)$ y $(2, 4)$.

24. $f(0) = 2$; $f(2) = 1$; $f(4) = f(10) = 0$; $f(6) = -4$; $f'(2) = f'(6) = 0$; $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$ y $(10, \infty)$; $f'(x) > 0$ en $(6, 10)$; $f'(4)$ y $f'(10)$ no existen; $f''(x) > 0$ en $(-\infty, 2)$, $(4, 10)$ y $(10, \infty)$; $f''(x) < 0$ en $(2, 4)$.

25. Si n es un entero impar, entonces $f(n) = 1$ y $f'(n) = 0$. Si n es un entero par, entonces $f(n) = 0$ y $f'(n)$ no existe. Si n es cualquier entero, entonces
(a) $f'(x) > 0$ si $2n < x < 2n + 1$;
(b) $f'(x) < 0$ si $2n - 1 < x < 2n$;
(c) $f''(x) < 0$ si $2n < x < 2n + 2$.

26. $f(x) = x$ si $x = -1, 2, 4$ u 8; $f'(x) = 0$ si $x = -1, 4, 6$ u 8; $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -1)$, $(4, 6)$ y $(8, \infty)$; $f'(x) > 0$ en $(-1, 4)$ y $(6, 8)$; $f''(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$, $(2, 3)$ y $(5, 7)$; $f''(x) < 0$ en $(0, 2)$, $(3, 5)$ y $(7, \infty)$.

27. Demuestre que la gráfica de una función cuadrática no tiene puntos de inflexión. Enuncie condiciones en las cuales la gráfica siempre tiene (a) concavidad hacia arriba (b) concavidad hacia abajo. Ilustre con esquemas.

28. Demuestre que la gráfica de un polinomio de grado 3 tiene exactamente un punto de inflexión. Ilustre con esquemas.

29. Demuestre que la gráfica de un polinomio de grado $n > 2$ tiene a lo más $n - 2$ puntos de inflexión.

30. Sea $f(x) = x^n$ para $n > 1$. Demuestre que la gráfica de f tiene un punto de inflexión si n es impar y no tiene ninguno si n es par. Ilustre esto con croquis.

Ejercicios 31-32: Encuentre (a) la función de demanda marginal, (b) la función de ingreso, (c) la función de utilidades, (d) la función de utilidades marginales, (e) las utilidades máximas y (f) el costo marginal cuando la demanda es de 10 unidades, para las funciones de demanda y de costo dadas.

31. $p(x) = 50 - (x/10)$; $C(x) = 10 + 2x$

32. $p(x) = 80 - \sqrt{x - 1}$; $C(x) = 75x + 2\sqrt{x - 1}$

33. Una agencia de viajes calcula que para vender x "paquetes de vacaciones", el precio del paquete debe ser de $1800 - 2x$ unidades monetarias para $1 \leq x \leq 100$. El costo para la agencia de x paquetes es $1000 + x + 0.01x^2$. Encuentre (a) la función de ingreso, (b) la función de ganancia (o de utilidades), (c) el número de paquetes que producen la máxima ganancia y (d) la ganancia máxima.

34. Un fabricante determina que para vender x unidades de un producto el precio de venta de una unidad debe ser $400 - 0.05x$ unidades monetarias. El costo de producción de x unidades es $500 + 10x$. Encuentre (a) la función de ingreso, (b) la función de ganancia (o de utilidades), (c) el número de unidades que producen la ganancia máxima y (d) el precio por unidad cuando el ingreso marginal es 300.

35. Una compañía especialista en cocinas determina que el costo de producir y empacar x molinillos de pimienta al día es de $500 + 0.02x + 0.001x^2$ unidades monetarias. Si cada molinillo se vende

a $8.00 (dólares), ¿cuál será la producción diaria que proporcione la ganancia máxima? ¿Cuál es la ganancia máxima diaria?

36. Una compañía que ofrece paseos guiados sabe que cuando el precio del paseo es de $9.00 (dólares) por persona tiene un promedio de 1000 clientes por semana y que cuando el precio se reduce a $7.00, el promedio de clientes aumenta a 1500 por semana. Suponiendo que la función de demanda es lineal, ¿qué precio debe cobrar para obtener la máxima ganancia semanal posible?

4.5 APLICACIONES DE LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Los métodos para calcular los máximos y mínimos de las funciones se pueden aplicar a la solución de algunos problemas prácticos. Estos problemas pueden expresarse verbalmente o por escrito. Para resolverlos hay que transformar sus enunciados en fórmulas, funciones o ecuaciones. Como hay muchos tipos de problemas en las aplicaciones, es difícil enunciar reglas específicas para encontrar sus soluciones. Sin embargo, puede desarrollarse una estrategia general para abordar tales problemas. La siguiente guía es de utilidad.

GUÍA PARA RESOLVER (4.19) PROBLEMAS APLICADOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1. Leer cuidadosamente el problema varias veces y pensar en los hechos dados y en las cantidades desconocidas que se tratan de encontrar.
2. De ser posible, hacer un croquis o un diagrama que incluya los datos pertinentes introduciendo variables para las cantidades desconocidas. Las palabras como *qué, encontrar, cuánto, dónde* o *cuándo* suelen estar asociadas a las cantidades desconocidas.
3. Enunciar los hechos conocidos y las relaciones entre las variables.
4. Determinar de cuál de las variables se desea encontrar el máximo o el mínimo y expresar esta variable como una función de *una* de las otras variables.
5. Encontrar los números críticos de la función obtenida en el paso 4 e investigar si corresponden a máximos o mínimos.
6. Verificar si hay máximos o mínimos en la frontera del dominio de la función que se obtuvo en el paso 4.
7. No desanimarse si no se puede resolver algún problema. Adquirir habilidad para resolver problemas aplicados toma una gran cantidad de esfuerzo y práctica. ¡Hay que seguir intentando!

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la Guía (4.19).

EJEMPLO 1 Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 16 cm de ancho y 21 cm de largo, recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.

Solución Aplicando el paso 2 de la Guía, comenzamos por trazar un croquis del cartón como se muestra en la Figura 4.34, en donde la letra x denota la longitud del lado del cuadrado que se va a recortar en cada esquina. Nótese que $0 \leq x \leq 8$. Usando el paso 3, escribimos los datos conocidos (el tamaño del rectángulo) en los lugares apropiados de la figura.

FIGURA 4.34

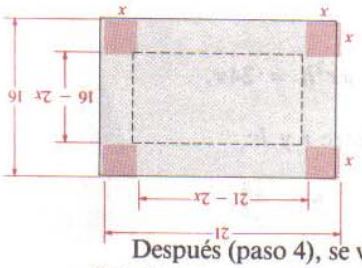
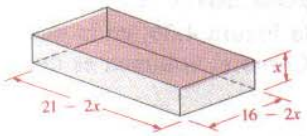


FIGURA 4.35



Después (paso 4), se ve que la cantidad cuyo máximo hay que encontrar es el volumen V de la caja que se formará doblando a lo largo de las líneas de trazos (véase la Figura 4.35). Continuando con el paso 4 de la Guía, expresamos V como una función de la variable x. De la Figura 4.35,

$$V = x(16 - 2x)(21 - 2x) = 2(168x - 37x^2 + 2x^3).$$

Esta ecuación expresa V como una función de x y buscamos ahora los números críticos para probar si son máximos o mínimos (paso 5). Derivando con respecto a x,

$$\begin{aligned} D_x V &= 2(168 - 74x + 6x^2) \\ &= 4(3x^2 - 37x + 84) \\ &= 4(3x - 28)(x - 3). \end{aligned}$$

Entonces, los números críticos solamente pueden ser $\frac{28}{3}$ y 3. Como $\frac{28}{3}$ está fuera del dominio de x, el único número crítico es 3.

Ahora se aplica el Criterio de la Segunda Derivada para los valores extremos. La segunda derivada de V es

$$D_x^2 V = 2(-74 + 12x) = 4(6x - 37).$$

Sustituyendo x por el número crítico 3 obtenemos

$$D_x^2 V = 4(18 - 37) = -76 < 0$$

y por lo tanto, V tiene un máximo local en $x = 3$.

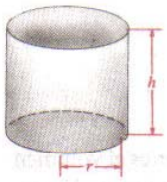
Finalmente, se ve si hay valores extremos en la frontera (paso 6). Como $0 \leq x \leq 8$ y $V = 0$ para $x = 0$ y $x = 8$, el valor máximo de V no se alcanza en una frontera del dominio de x. Por lo tanto, para obtener una caja de volumen máximo debe recortarse un cuadrado de 3 cm de lado en cada esquina de la hoja de cartón.

En los siguientes ejemplos, no siempre se señalan los pasos de la Guía cuando se utilizan, pero el lector debe poder reconocerlos al estudiar las soluciones.

EJEMPLO 2 Se desea elaborar un pequeño recipiente cilíndrico sin tapa que tenga un volumen de 24π cm^3. El material que se usa para la base cuesta tres veces más que el que se emplea para la parte cilíndrica. Suponiendo que en la construcción no se desperdicia material, evaluar las dimensiones para las que es mínimo el costo del material de fabricación.

Solución Comenzamos por trazar un esquema del recipiente, como se muestra en la Figura 4.36, en la que r denota el radio de la base (en cm), y h, la altura (en cm). Como el volumen es de 24π cm^3,

FIGURA 4.36



$$\pi r^2 h = 24\pi.$$

Esto da una relación entre r y h:

$$h = \frac{24}{r^2}$$

El objetivo es minimizar el costo C del material utilizado para construir el recipiente.

Si a denota el costo por centímetro cuadrado (cm^2) del material a emplear para la parte curva, entonces el centímetro cuadrado del material que se use para la base costará $3a$ por cm^2. Por lo tanto, el costo del material para la parte cilíndrica es $a(2\pi rh)$ y el del material para la base es $3a(\pi r^2)$. El costo C de todo el material es

$$C = 3a(\pi r^2) + a(2\pi rh) = a\pi(3r^2 + 2rh)$$

o, como $h = 24/r^2$,

$$C = a\pi\left(3r^2 + \frac{48}{r}\right).$$

Como a es fijo, esta ecuación expresa C como una función de una variable r, como se recomienda en el paso 4 de la Guía. Para encontrar el valor de r que corresponde al valor mínimo de C, buscamos los números críticos. Derivando la ecuación anterior con respecto a r,

$$D_r C = a\pi\left(6r - \frac{48}{r^2}\right) = 6a\pi\left(\frac{r^3 - 8}{r^2}\right).$$

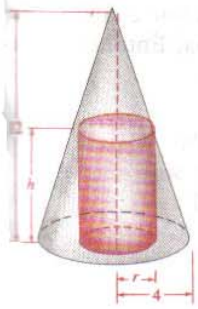
Como $D_r C = 0$ si $r = 2$, resulta que 2 es el único número crítico. (El número 0 no es número crítico porque C no está definido para $r = 0$.) Como $D_r C < 0$ para $r < 2$ y también $D_r C > 0$ para $r > 2$, del Criterio de la Primera Derivada se deduce que C también alcanza su valor mínimo cuando el radio del cilindro es de 2 cm. El valor correspondiente a la altura (que se obtiene de $h = 24/r^2$) es $\frac{24}{4}$ o sea 6 cm.

Ya que el dominio de la variable r es el intervalo infinito $(0, \infty)$, no puede haber valores extremos de frontera. •

EJEMPLO 3 Calcular el volumen máximo del cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de 12 cm de altura y 4 cm de radio en la base, de manera que los ejes del cilindro y del cono coincidan.

Solución El problema se ilustra en la Figura 4.37. La Figura 4.38 representa una sección transversal del cono y del cilindro que pasa por el eje de ambos. El volumen V del cilindro es $V = \pi r^2 h$. Para expresar V como función de una sola variable (paso 4 de la Guía), hay que obtener una relación entre r y h. Mediante los triángulos semejantes en la Figura 4.38 vemos que

FIGURA 4.37



$$\frac{h}{4-r} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{o bien} \quad h = 3(4-r).$$

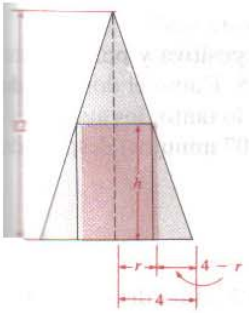
Por lo tanto,

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2[3(4-r)] = 3\pi r^2(4-r).$$

Si $r = 0$ o $r = 4$ entonces $V = 0$ y, así el volumen máximo no se alcanza en la frontera, de modo que basta analizar los máximos locales. Como $V = 3\pi(4r^2 - r^3)$,

$$D_r V = 3\pi(8r - 3r^2) = 3\pi r(8 - 3r).$$

FIGURA 4.38



Entonces, los números críticos de V son $r = 0$ y $r = \frac{8}{3}$. Apliquemos ahora el Criterio de la Segunda Derivada para $r = \frac{8}{3}$. Derivando $D_r V$ resulta

$$D_r^2 V = 3\pi(8 - 6r).$$

Sustituyendo r por $\frac{8}{3}$,

$$D_r^2 V = 3\pi[8 - 6(\tfrac{8}{3})] = 3\pi(8 - 16) = -24\pi < 0$$

lo que significa que el máximo se alcanza en $r = \frac{8}{3}$. El valor correspondiente para $h = 3(4 - r)$ es

$$h = 3(4 - \tfrac{8}{3}) = 3(\tfrac{4}{3}) = 4.$$

Por lo tanto, el volumen máximo del cilindro inscrito es

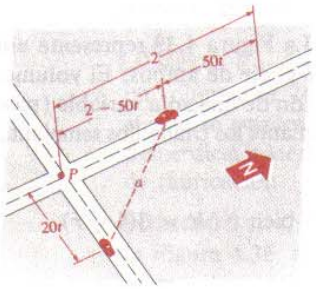
$$V = \pi\left(\frac{8}{3}\right)^2(4) = \pi\left(\frac{64}{9}\right)(4) = \frac{256\pi}{9} \approx 89.4 \text{ cm}^3 \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Una carretera que va de norte a sur y otra que va de este a oeste se cruzan en un punto P. Un vehículo que viaja hacia el este a 20 km/h, pasa por P a las 10:00 A.M. En ese mismo momento un automóvil que viaja hacia el sur a 50 km/h se encuentra

2 km al norte de P. Calcular cuándo se encuentran los dos vehículos más cerca uno del otro y cuál es la distancia mínima entre ellos.

Solución La Figura 4.39 muestra la posición de los automóviles al tiempo t (horas) después de las 10:00 A.M. El más lento está $20t$ km al este de P y el más veloz se halla $50t$ km al sur de la posición que tenía a las 10:00 A.M. y por lo tanto, su distancia a P es $2 - 50t$. Por el Teorema de Pitágoras, la distancia d entre los vehículos es

FIGURA 4.39



$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(2 - 50t)^2 + (20t)^2} \\ &= \sqrt{4 - 200t + 2500t^2 + 400t^2} \\ &= \sqrt{4 - 200t + 2900t^2}. \end{aligned}$$

Evidentemente, d alcanza su valor mínimo cuando la expresión dentro del signo radical es mínima. Entonces podemos simplificar el trabajo estableciendo

$$f(t) = 4 - 200t + 2900t^2$$

y buscando el valor de t para el que f tiene un mínimo. Como

$$f'(t) = -200 + 5800t$$

el único número crítico de f es

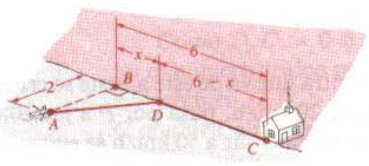
$$t = \frac{200}{5800} = \frac{1}{29}.$$

Como además $f''(t) = 5800$, la segunda derivada es siempre positiva y por lo tanto f tiene un mínimo local en $t = \frac{1}{29}$; de modo que $f(\frac{1}{29}) \approx 0.55$. Como el dominio de t es $[0, \infty)$ y $f(0) = 4$, no hay valor extremo en la frontera. Por lo tanto, los automóviles están más cerca uno del otro $\frac{1}{29}$ horas (aproximadamente 2.07 minutos) después de las 10:00 A.M. La distancia mínima es

$$\sqrt{f(\tfrac{1}{29})} \approx \sqrt{0.55} \approx 0.74 \text{ km}. \quad \bullet$$

EJEMPLO 5 Un hombre que navega en una barca de remos a 2 millas del punto más cercano de una costa recta, desea llegar a su casa, la cual está en la citada costa a 6 millas de dicho punto. El hombre puede remar a razón de 3 mi/h y caminar a 5 mi/h. ¿Qué debe hacer para llegar a su casa en el menor tiempo posible?

FIGURA 4.40



Solución La Figura 4.40 ilustra el problema: A denota la posición de la barca, B el punto más cercano de la costa y C la casa; D es el punto donde el remero va a desembarcar y x denota la distancia de B a D. Entonces, los valores de x se restringen al intervalo $[0, 6]$.

Por el Teorema de Pitágoras, la distancia entre A y D es $\sqrt{x^2 + 4}$. Usando la fórmula *tiempo = distancia/veloci-*

dad, el tiempo que lleva al hombre remar de A a D es $\sqrt{x^2+4}/3$, y el tiempo que le toma caminar de D a C es $(6-x)/5$. Por lo tanto, el tiempo total T del recorrido es

$$T = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{6-x}{5}$$

o, equivalentemente, $$T = \tfrac{1}{3}(x^2+4)^{1/2} + \tfrac{6}{5} - \tfrac{1}{5}x.$$

Deseamos encontrar el valor mínimo de T. Nótese que $x = 0$ corresponde al caso extremo en que la persona rema directamente hasta B y luego camina toda la distancia de B a su casa. Si $x = 6$, el hombre rema directamente de A a su casa. Estos números se pueden considerar los extremos del dominio de T. Si $x = 0$, entonces de la fórmula para T,

$$T = \frac{\sqrt{4}}{3} + \frac{6}{5} - 0 = \frac{28}{15} \approx 1.87$$

que es aproximadamente 1 hora con 52 minutos. Si $x = 6$, entonces

$$T = \frac{\sqrt{40}}{3} + \frac{6}{5} - \frac{6}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \approx 2.11$$

que son aproximadamente 2 horas 7 minutos.

Derivando la fórmula general de T vemos que

$$D_x T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2}(2x) - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{x}{3(x^2+4)^{1/2}} - \frac{1}{5}.$$

Para encontrar los números críticos se hace $D_x T = 0$. Esto lleva a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x}{3(x^2+4)^{1/2}} = \frac{1}{5}$$

$$5x = 3(x^2+4)^{1/2}$$

$$25x^2 = 9(x^2+4)$$

$$16x^2 = 36$$

$$x^2 = \tfrac{36}{16}$$

$$x = \tfrac{6}{4} = \tfrac{3}{2}$$

Por lo tanto, $\frac{3}{2}$ es el único número crítico. Ahora se utiliza el Criterio de la Segunda Derivada. Aplicando la Regla del Cociente a la fórmula $D_x T$,

$$D_x^2 T = \frac{3(x^2+4)^{1/2} - x \cdot 3(\frac{1}{2})(x^2+4)^{-1/2}(2x)}{9(x^2+4)}$$

$$= \frac{3(x^2+4) - 3x^2}{9(x^2+4)^{3/2}} = \frac{4}{3(x^2+4)^{3/2}}$$

que es positiva en $x = \frac{3}{2}$. Entonces, T tiene un mínimo local en $x = \frac{3}{2}$. El tiempo T correspondiente a $x = \frac{3}{2}$ es

$$T = \tfrac{1}{3}(\tfrac{9}{4} + 4)^{1/2} + \tfrac{6}{5} - \tfrac{3}{10} = \tfrac{26}{15}$$

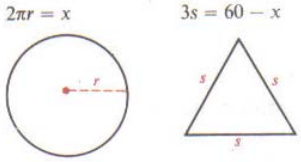
o de modo equivalente, 1 hora 44 minutos.

Anteriormente examinamos los valores de T en los extremos del dominio obteniendo tiempos de 1 hora 52 minutos y más de 2 horas. Entonces, el valor mínimo de T se alcanza con $x = \frac{3}{2}$ y, por lo tanto, el hombre debe desembarcar entre B y C a $1\frac{1}{2}$ millas de B. El Ejercicio 6 es un problema parecido en el que el tiempo mínimo se alcanza en uno de los extremos del dominio. •

EJEMPLO 6 Un alambre de 60 cm de largo se va a partir en dos trozos. Una de las partes va a doblarse en forma de circunferencia y la otra en forma de triángulo equilátero. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas del círculo y del triángulo que se forman sea máxima, y cómo se debe cortar para que sea mínima?

Solución Denotemos por x la longitud de una de las partes del alambre. Entonces la longitud de la otra parte es $60 - x$. Supongamos que el trozo de longitud x es el que se dobla para formar una circunferencia y que r es el radio de la misma. Entonces $2\pi r = x$, o $r = x/2\pi$ (véase la Figura 4.41). Si al otro trozo se le da forma de triángulo equilátero y s es la longitud de cada lado, entonces $3s = 60 - x$ o sea $s = (60 - x)/3$. El área del círculo es

FIGURA 4.41



$$\pi r^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)x^2$$

y el área del triángulo equilátero es

$$\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{60 - x}{3}\right)^2.$$

La suma de las áreas, A, está dada por

$$A = \left(\frac{1}{4\pi}\right)x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{36}\right)(60 - x)^2.$$

Ahora se buscan los números críticos. Derivando,

$$D_x A = \left(\frac{1}{2\pi}\right)x - \left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)(60 - x)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)x - \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

De manera que $D_x A = 0$ si y sólo si

$$x = \frac{10\sqrt{3}/3}{(1/2\pi) + (\sqrt{3}/18)} \approx 22.61.$$

La segunda derivada

$$D_x^2 A = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{18}$$

es siempre positiva y por lo tanto el número crítico indicado corresponde a un mínimo de A. Este valor mínimo es aproximadamente

$$A \approx \frac{1}{4\pi}(22.61)^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}(60 - 22.61)^2 \approx 107.94 \text{ cm}^2.$$

Como no hay otros números críticos, A debe alcanzar su máximo en la frontera. Si $x = 0$, entonces todo el alambre se usa para formar un triángulo y

$$A = \frac{\sqrt{3}}{36}(60)^2 \approx 173.21 \text{ cm}^2.$$

Si $x = 60$, entonces todo el alambre se usa para formar la circunferencia y

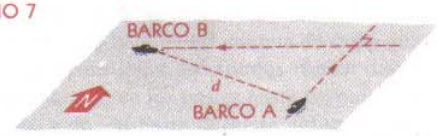
$$A = \frac{1}{4\pi}(60)^2 \approx 268.48 \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, A alcanza su valor máximo si el alambre no se parte sino que se usa todo para formar la circunferencia. •

EJERCICIOS 4.5

1. Se quiere construir una caja de base cuadrada y sin tapa que tenga un volumen de 4 dm^3 (decímetros cúbicos). Encuentre las dimensiones que minimicen la cantidad de material necesario (desprecie el espesor del material y lo que se desperdicia en la construcción).
2. Resuelva el Ejercicio 1 suponiendo que la caja ha de tener tapa.
3. Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal sin tapa que tenga una capacidad de 1 m^3 (metro cúbico). Encuentre las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material sea mínima, suponiendo que no se desperdicia nada en la construcción.
4. La base circular del recipiente del Ejercicio 3 se corta de una hoja cuadrada y el metal restante se desperdicia. Calcule las dimensiones del recipiente para las cuales la cantidad de material necesario en la construcción sea mínima.
5. Un veterinario cuenta con 30 m de tela de alambre y quiere construir 6 jaulas para perros levantando primero una cerca alrededor de una región rectangular, y dividiendo luego la región en seis rectángulos iguales mediante cinco rejas paralelas a uno de los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la zona rectangular para las que el área total es máxima?
6. Consulte el Ejemplo 5 de esta sección. Si el hombre tiene una lancha de motor que puede viajar a 15 mi/h, ¿qué debe hacer para llegar en el menor tiempo posible?
7. A la 1:00 P.M. el barco A se encuentra 30 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 mi/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 mi/h. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones? (Véase la figura.)

EJERCICIO 7

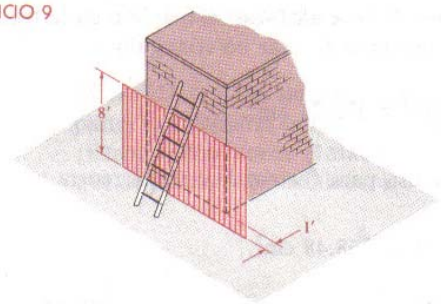


8. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Halle las dimensio-

nes de la ventana que permiten admitir más luz suponiendo que el perímetro debe ser de 5 m.

9. Una cerca de 8 pie de alto al nivel del suelo va paralela a un edificio alto (véase la figura). La cerca dista 1 pie del edificio. Calcule la longitud de la escalera más corta que se puede apoyar entre el suelo y el edificio por encima de la reja. (*Sugerencia:* Utilice triángulos semejantes.)

EJERCICIO 9

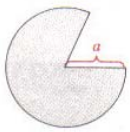


10. Se desea que las páginas de un libro tengan un área de 900 cm^2 con márgenes de 2.5 cm abajo y a los lados, y de 1.5 cm arriba. Determine las dimensiones de la página que darán la mayor área posible para el texto.

11. Se desea construir un almacén con un volumen de 100 m^3 que tenga techo plano y base rectangular cuya anchura sea tres cuartas partes de su longitud. El costo por metro cúbico de los materiales es de \$36 (dólares) para el piso, \$54 para los lados y \$27 para el techo. ¿Qué dimensiones minimizan el costo?

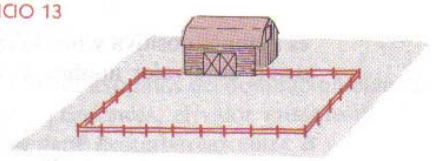
12. Se va a construir un vaso de papel en forma de cono circular recto quitando un sector circular a una hoja de papel con forma de círculo y radio a, y uniendo después las dos orillas rectas del papel restante (véase la figura). Calcule el volumen del vaso más grande que se pueda construir.

EJERCICIO 12



13. Un granjero tiene 150 m de material para cercar un campo con forma rectangular y quiere usar un granero como parte de uno de los lados del rreno (véase la figura). Demuestre que el área cercada es máxima cuando en vez de rectángulo se tiene un cuadrado.

EJERCICIO 13



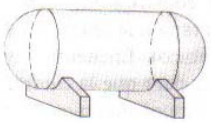
14. Consulte el Ejercicio 13. Suponga que el granjero desea cercar un área rectangular de A metros cuadrados. Demuestre que la figura que requiere menos material para la cerca es un cuadrado.

15. Un hotel que cobra \$80 (dólares) diarios por habitación da precios especiales a grupos que reserven entre 30 y 60 habitaciones. Si se ocupan más de 30 cuartos, el precio disminuye en \$1 por cada cuarto arriba de los 30. En estas condiciones, ¿la ocupación de cuántas habitaciones por un grupo producirá el ingreso máximo para el hotel?

16. Consulte el Ejercicio 15. Suponga que cada cuarto ocupado cuesta al hotel \$6 al día por limpieza y mantenimiento. En este caso, ¿cuántas habitaciones ocupadas por un grupo producen el ingreso neto máximo?

17. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos (véase la figura) para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble del de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π pie^3?

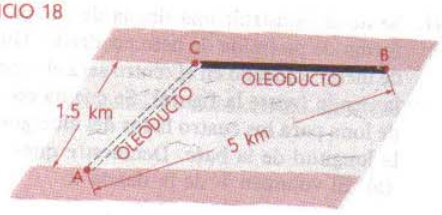
EJERCICIO 17



18. Se desea construir un oleoducto de un punto A a otro punto B que distan 5 km y se encuentran en riberas opuestas de un río de cauce recto de 1.5 km de ancho. El oleoducto irá bajo el agua de A a un punto C en la ribera opuesta y luego sobre el suelo de C a B. El costo por kilómetro de tubería bajo el agua es cuádruple del costo sobre tierra. Calcule la posición de C que mini-

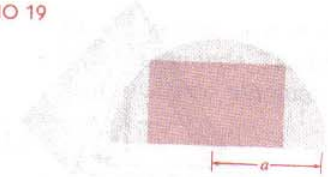
mizará el costo (desprecie la pendiente del lecho del río).

EJERCICIO 18



19. Determine las dimensiones del rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio A de manera que dos de sus vértices estén sobre el diámetro (véase la figura).

EJERCICIO 19



20. Encuentre las dimensiones del mayor rectángulo que se puede inscribir en un triángulo equilátero de lado a, de manera que dos de sus vértices estén en un mismo lado del triángulo.

21. Calcule el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio a.

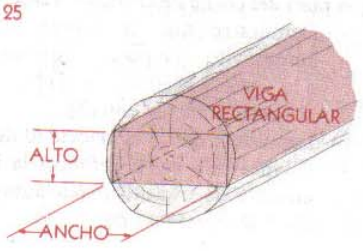
22. Calcule las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de radio a.

23. Encuentre el punto de la gráfica de $y = x^2 + 1$ más cercano al punto (3, 1).

24. Encuentre el punto de la gráfica de $y = x^3$ más cercano al punto (4, 0).

25. La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Halle las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de radio a (véase la figura).

EJERCICIO 25



26. La iluminación producida por una fuente de luz es directamente proporcional a la intensidad luminosa de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la misma. Dos fuentes de luz de intensidades S_1 y S_2 están separadas una distancia d. ¿En qué punto del segmento que las une es mínima la iluminación?

27. Un mayorista vende zapatos para correr a \$20 (dólares) el par si le piden menos de 50 pares. Si le piden más de 50 (hasta 600), el precio por par se reduce en \$0.02 multiplicados por el volumen del pedido. ¿cuál es el pedido que produce el mayor ingreso para el mayorista?

28. Se desea construir un vaso de papel en forma de cono circular recto que tenga un volumen de 36π cm^3. Encuentre las dimensiones que requieren menor cantidad de papel (desprecie cualquier desperdicio en la construcción).

29. Un alambre de 36 cm de largo se va a partir en dos trozos. Una de las partes se ha de doblar en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de un rectángulo cuya longitud es el doble de su anchura. ¿Cómo se debe partir el alambre para que la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo sea (a) mínima y (b) máxima?

30. Un triángulo isósceles tiene base b y lados iguales de longitud a. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en el triángulo de manera que uno de sus lados coincida con la base del triángulo?

31. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Encuentre las dimensiones del rectángulo para el cual el área de la ventana es máxima, si el perímetro de la misma debe ser de 12 pie.

32. Dos postes verticales de 3 y 4 metros se hallan clavados en un suelo a nivel y sus bases distan 5 m. Calcule la longitud mínima de cable que se necesita para tener dos tramos rectos: desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo, y de ahí hasta la punta del otro poste.

33. Demuestre que el rectángulo de mayor área con un perímetro dado p es un cuadrado.

34. Girando un rectángulo de perímetro p alrededor de uno de sus lados, se genera un cilindro circular recto. Calcule las dimensiones del rectángulo que producen el cilindro de mayor volumen.

35. El propietario de un huerto de manzanas calcula que si siembra 24 árboles por acre, entonces cada árbol adulto dará 600 manzanas al año. Por cada tres árboles más que se planten por acre, el número de manzanas que produce cada árbol disminuye en 12 al año. ¿Cuántos árboles se deben plantar por acre para obtener al mayor número posible de manzanas al año?

36. Una compañía inmobiliaria posee 180 apartamentos pequeños que están todos ocupados cuando la renta o alquiler es de \$300 al mes. La compañía calcula que por cada incremento de \$10 en la renta, se desocuparán cinco apartamentos. ¿Qué renta debe cobrar para obtener la mayor ganancia bruta?

37. Para que un paquete pueda enviarse por correo es necesario que la suma de su longitud y el perímetro de su base no exceda de 108 pulg. Encuentre las dimensiones de la caja con base cuadrada de mayor volumen que se puede enviar por correo.

38. Una carretera A que va de norte a sur y otra carretera B que va de este a oeste se cruzan en un punto P. A las 10:00 A.M. un automóvil pasa por P viajando hacia el norte sobre A a 80 km/h. En ese mismo momento, un avión que vuela hacia el este a 320 km/h y a una altura de 8500 m, pasa exactamente por arriba del punto de la carretera B que se encuentra 160 km al oeste de P. Suponiendo que el automóvil y el avión mantienen la misma velocidad y dirección, ¿a qué hora se encontrarán más cerca uno del otro?

39. Dos fábricas A y B que se encuentran a 4 millas una de la otra, emiten humo con partículas que contaminan el aire de la región. Suponga que el número de partículas provenientes de cada fábrica es directamente proporcional a la cantidad de humo e inversamente proporcional al cubo de la distancia desde la fábrica. ¿Qué punto entre A y B tendrá la menor contaminación si la fábrica A emite el doble de humo que la fábrica B?

40. Un campo petrolero tiene ocho pozos que producen un total de 1600 barriles de crudo al día. Por cada pozo nuevo que se tiene, la producción media por pozo disminuye en 10 barriles diarios. ¿Cuántos pozos adicionales se deben formar para obtener la mayor producción de crudo al día?

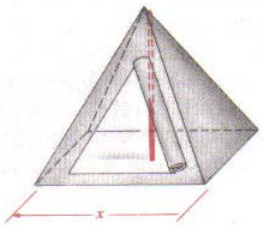
41. Se desea construir una tienda de campaña con forma de pirámide de base cuadrada. Un poste de metal colocado en el centro será el soporte de la tienda (véase la figura). Se cuenta con S pie^2 de lona para los cuatro lados del albergue y x es la longitud de la base. Demuestre que

(a) El volumen V de la tienda es

$$V = \tfrac{1}{6}x\sqrt{S^2 - x^4}.$$

(b) V alcanza un valor máximo cuando $x = \sqrt{2}$ veces la longitud del poste.

EJERCICIO 41



42. Un barco debe navegar 100 millas río arriba contra una corriente de 10 mi/h. Sea v la velocidad del barco (en mi/h). El número de galones de gasolina que consume la nave es directamente proporcional a v^2.

(a) Demuestre que si se mantiene la velocidad constante de v mi/h, entonces el número total y de galones de combustible que se consumen está dado por $y = 100kv^2/(v - 10)$, donde $v > 10$ y K una constante positiva.

(b) Calcule la velocidad que minimiza el número de galones de gasolina que se consumen durante el viaje.

43. Unos autómoviles recorren un puente de 1 milla de longitud. Cada vehículo mide 12 pie de largo y debe mantenerse a una distancia mínima d (en pies) del coche de enfrente (véase la figura).

(a) Demuestre que el mayor número de automóviles que pueden estar en el puente a la vez es $[\![5280/(12 + d)]\!]$ ($[\![\]\!]$ denota la función mayor entero).

(b) Demuestre que si la velocidad de los automóviles es v mi/h entonces la intensidad máxima de tránsito F (en autos/hora) es $F = 5280v/(12 + d)$.

(c) La distancia de frenado (en pies) de un coche que va a v mi/h es aproximadamente $0.05v^2$. Sea $d = 0.025v^2$. Determine la velocidad para la que se logra la máxima circulación.

EJERCICIO 43

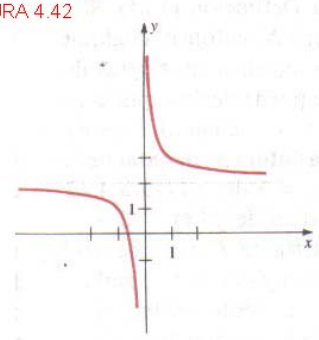


44. Demuestre que la distancia mínima de un punto (x_1, y_1) a la gráfica de una función derivable f se alcanza a lo largo de una recta normal a la gráfica, es decir, sobre una perpendicular a la tangente.

4.6 LÍMITES AL INFINITO Y LÍMITES INFINITOS

En esta sección se consideran funciones cuyos valores se "estabilizan" cuando $|x|$ se hace muy grande. También se consideran funciones que no tienen un mínimo absoluto ni un máximo absoluto, pero tienen en cambio, la propiedad de que $|f(x)|$ puede tomar valores arbitrariamente grandes. Cuando los resultados del análisis se aplican a la derivada f' se obtiene información acerca de las rectas verticales tangentes a la gráfica de f.

FIGURA 4.42



Consideremos primero la gráfica de $f(x) = 2 + (1/x)$ que aparece en la Figura 4.42 y estudiemos los valores de $f(x)$ para x grande y positiva. Por ejemplo,

$$f(100) = 2.01$$
$$f(1000) = 2.001$$
$$f(10\,000) = 2.0001$$
$$f(100\,000) = 2.00001$$

Puede lograrse que $f(x)$ se acerque a 2 tanto como se quiera o, equivalentemente, que $|f(x) - 2|$ sea arbitrariamente pequeño, si se escoge x suficientemente grande. Este comportamiento de $f(x)$ se expresa por

$$\lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$$

lo cual se lee: *el límite de* $2 + (1/x)$ *cuando* x *tiende a* ∞ *es* 2.

Es importante recordar que no se puede sustituir nunca la variable x por ∞ (infinito) puesto que éste no es un número real. Entonces la expresión x *tiende a* ∞ no significa que la variable x tienda o se acerque a algún número real, sino que x crece indefinidamente o se le asignan valores arbitrariamente grandes. Más adelante, en la Definición (4.25) se utiliza el símbolo ∞ en un contexto diferente.

A continuación se define $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ para una función arbitraria f. Como se hizo en el Capítulo 2, se da primero una definición informal y después una formal. Se supone que f está definida en un intervalo infinito (c, ∞) para algún número real c.

DEFINICIÓN (4.20) INFORMAL

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que $f(x)$ se puede acercar arbitrariamente a L escogiendo x suficientemente grande.

DEFINICIÓN (4.21)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

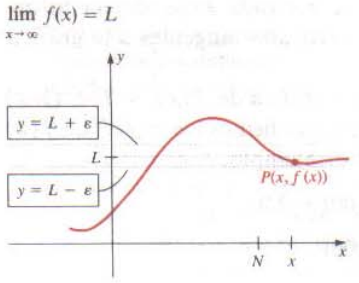
significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número positivo N tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > N.$$

Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es L.**

A continuación se da una interpretación geométrica de la Definición (4.21). Supóngase que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ y consideremos dos rectas horizontales $y = L \pm \varepsilon$ (véase la Figura 4.43). De acuerdo con la Definición (4.21), si x es mayor que cierto número positivo N, entonces cualquier punto $P(x, f(x))$ de la gráfica se encuentra entre estas dos rectas horizontales. Informalmente puede decirse que la gráfica de f se va acercando a la recta $y = L$ cuando x crece cada vez más. La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f. Por ejemplo, la recta $y = 2$ de la Figura 4.42, es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x) = 2 + (1/x)$.

FIGURA 4.43



En la Figura 4.43, la gráfica de f se acerca desde abajo a la asíntota $y = L$, es decir con $f(x) < L$. También podría una gráfica acercarse a $y = L$ desde arriba, es decir con $f(x) > L$. Asimismo, podría acercarse la gráfica a la recta horizontal de modo oscilante, es decir, a veces desde arriba y a veces desde abajo de ella.

La siguiente definición abarca el caso en que $|x|$ es grande pero x es *negativa*. Se supone que f está definida en un intervalo infinito $(-\infty, c)$ para algún número real c.

DEFINICIÓN (4.22)

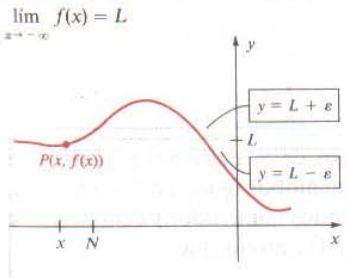
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número negativo N tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x < N$$

Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ es L.** La Figura 4.44 ilustra la Definición (4.22). Si se consideran dos rectas horizontales $y =$

FIGURA 4.44



$L \pm \varepsilon$, entonces cuando x es *menor* que cierto número negativo N, todos los puntos $P(x, f(x))$ de la gráfica se encuentran entre ellas. Como antes, la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Pueden obtenerse teoremas sobre límites análogos a los del Capítulo 2 para estos límites al infinito. En particular, el Teorema (2.15) sobre límites de sumas, productos y cocientes es válido también para los casos $x \to \infty$ o bien $x \to -\infty$. Análogamente, el Teorema (2.21) que se refiere al límite de $\sqrt[n]{f(x)}$ también es cierto para $x \to \infty$ o bien $x \to -\infty$. Finalmente, es trivial demostrar que

$$\lim_{x \to \infty} c = c \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} c = c.$$

El teorema que sigue es importante para el cálculo de límites específicos.

TEOREMA (4.23)

Sean k un número racional positivo y c un número real arbitrario. Entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^k} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

siempre y cuando x^k esté definido.

Demostración Para deducir que $\lim_{x \to \infty} (c/x^k) = 0$ a partir de (4.21), debe demostrarse que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número positivo N tal que

$$\left| \frac{c}{x^k} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > N.$$

Si $c = 0$, se puede usar cualquier $N > 0$. Si $c \neq 0$, las siguientes cuatro desigualdades son equivalentes para $x > 0$:

$$\left| \frac{c}{x^k} - 0 \right| < \varepsilon, \qquad \frac{|x|^k}{|c|} > \frac{1}{\varepsilon}, \qquad |x|^k > \frac{|c|}{\varepsilon}, \qquad x > \left(\frac{|c|}{\varepsilon} \right)^{1/k}$$

La última desigualdad da una idea para elegir N. Tomando $N = (|c|/\varepsilon)^{1/k}$ se ve que para $x > N$, la cuarta desigualdad se satisface, y por lo tanto también la primera, que es lo que se quería demostrar. La segunda parte del teorema se demuestra de manera análoga. (N es entero positivo.) • •

Si f es una función racional, pueden calcularse los límites cuando $x \to \infty$ o bien $x \to -\infty$ dividiendo primero el numerador y el denominador de $f(x)$ entre una potencia adecuada de x y aplicando después el Teorema (4.23). Concretamente, supongamos que $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios y se desea analizar $f(x) = g(x)/h(x)$. Si el grado k de $h(x)$ es mayor que o igual al de $g(x)$, hay que dividir el numerador y el denominador

entre x^k. Si el grado de $g(x)$ es mayor que el de $h(x)$, puede demostrarse que $f(x)$ no tiene límite cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.

EJEMPLO 1 Analizar $\lim_{x \to -\infty} = \dfrac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2}$.

Solución Como sólo interesan los valores negativos de x, podemos suponer que $x \neq 0$. Los grados del numerador y del denominador son ambos iguales a 2 y entonces, siguiendo la regla enunciada en el párrafo anterior, dividimos numerador y denominador entre x^2 y luego se aplican los teoremas sobre límites. De modo que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - (5/x^2)}{3 + (1/x) + (2/x^2)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} [2 - (5/x^2)]}{\lim\limits_{x \to -\infty} [3 + (1/x) + (2/x^2)]}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - \lim\limits_{x \to -\infty} (5/x^2)}{\lim\limits_{x \to -\infty} 3 + \lim\limits_{x \to -\infty} (1/x) + \lim\limits_{x \to -\infty} (2/x^2)}$$

$$= \frac{2 - 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto, la recta $y = \frac{2}{3}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f. •

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = 4x/(x^2 + 9)$. Determinar las asíntotas horizontales, obtener los máximos y mínimos locales y los puntos de inflexión, analizar la concavidad y trazar luego la gráfica de f.

Solución Como el grado del número rador (1) es menor que el grado del denominador (2), dividimos el numerador y el denominador entre x^2 y usamos los teoremas sobre límites como sigue:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2 + 9} = \lim_{x \to \infty} \frac{(4/x)}{1 + (9/x^2)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} (4/x)}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} (9/x^2)} = \frac{0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Por lo tanto, $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica de f. Análogamente, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Podemos verificar que

$$f'(x) = \frac{4(9 - x^2)}{(x^2 + 9)^2} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{8x(x^2 - 27)}{(x^2 + 9)^3}.$$

Los números críticos de f son las soluciones de $f'(x) = 0$ y por lo tanto, son ± 3. Usando el Criterio de la Primera Derivada o el de la Segunda Derivada puede demostrarse que $f(-3)$ es un mínimo local y que $f(3)$ es un máximo local.

FIGURA 4.45



Usando $f''(x)$ vemos que los puntos de inflexión tienen abscisas 0 y $\pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$. El signo de $f''(x)$ indica que la gráfica tiene concavidad hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -3\sqrt{3})$ y $(0, 3\sqrt{3})$, y concavidad hacia arriba en $(-3\sqrt{3}, 0)$ y $(3\sqrt{3}, \infty)$. La gráfica se tiene en la Figura 4.45 con escalas diferentes en los ejes. •

EJEMPLO 3 Analizar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x}$.

Solución Si x es grande y positiva, el numerador $\sqrt{9x^2+2}$ se acerca a $\sqrt{9x^2}$, o bien $3x$. Esto sugiere dividir entre x el numerador y el denominador. Como $x = \sqrt{x^2}$ para valores positivos de x, entonces

$$\frac{\sqrt{9x^2+2}}{x} = \frac{\sqrt{9x^2+2}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{9x^2+2}{x^2}} = \sqrt{9+\frac{2}{x^2}}$$

y

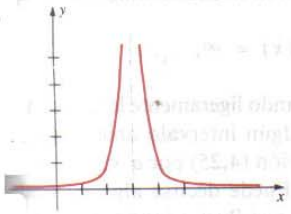
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9+(2/x^2)}}{(3/x)-4} = \frac{\lim_{x\to\infty} \sqrt{9+(2/x^2)}}{\lim_{x\to\infty} [(3/x)-4]}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty} [9+(2/x^2)]}}{\lim_{x\to\infty} (3/x) - \lim_{x\to\infty} 4} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 9 + \lim_{x\to\infty} (2/x^2)}}{0-4}$$

$$= \frac{\sqrt{9+0}}{-4} = -\frac{3}{4}$$

•

FIGURA 4.46



Sea $f(x) = 1/(x-3)^2$. La gráfica de f está en la Figura 4.46. Si x se acerca a 3 (pero $x \neq 3$), el denominador $(x-3)^2$ se acerca a cero y por lo tanto, $f(x)$ es muy grande. Por ejemplo,

$$f(2.9) = 100 \qquad f(3.1) = 100$$
$$f(2.99) = 10\,000 \qquad f(3.01) = 10\,000$$
$$f(2.999) = 1\,000\,000 \qquad f(3.001) = 1\,000\,000$$

Evidentemente, podemos lograr que $f(x)$ tome valores tan grandes como queramos escogiendo x suficientemente cercano a 3. Esto se expresa simbólicamente así:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty.$$

La siguiente definición es un enunciado informal de este tipo de comportamiento para una función arbitraria f.

DEFINICIÓN INFORMAL (4.24)

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

significa que $f(x)$ se puede hacer tan grande como se quiera escogiendo x suficientemente cerca de a.

La definición formal, que puede servir para demostrar teoremas, se puede enunciar como sigue.

DEFINICIÓN (4.25)

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. La afirmación **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es ∞**, que se escribe

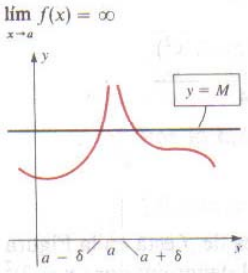
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

significa que a todo número positivo M le corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } f(x) > M.$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, a veces se dice que $f(x)$ *tiende a infinito cuando x tiende hacia a* o que *crece indefinidamente cuando x tiende hacia a*. Si se considera la recta horizontal $y = M$ en la Figura 4.47, entonces cuando x está en un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ adecuado, y $x \neq a$, los puntos $P(x, f(x))$ de la gráfica de f se encuentran *arriba* de la recta horizontal.

FIGURA 4.47



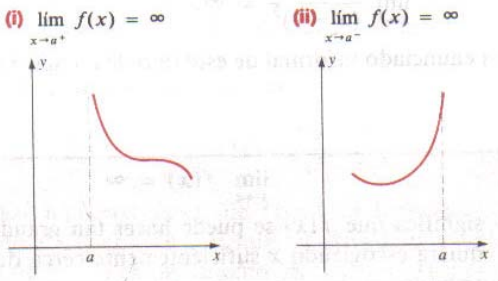
Recuérdese que el símbolo ∞ no representa un número real. En particular, $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ *no significa que el límite existe cuando x tiende a a*. La notación de límite se utiliza solamente para denotar el tipo de comportamiento de $f(x)$ descrito en el párrafo anterior.

La noción de que $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a a por la derecha o por la izquierda se escribe simbólicamente

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty,$$

respectivamente. Estos conceptos se pueden definir modificando ligeramente la Definición (4.25). Así, para $x \to a^+$ se supone que $f(x)$ existe en algún intervalo abierto (a, c) y se cambia la desigualdad $0 < |x - a| < \delta$ de la Definición (4.25) por $a < x < a + \delta$, es decir, x sólo puede tomar valores *mayores* que a. Puede decirse algo parecido acerca de $x \to a^-$. La Figura 4.48 muestra unas gráficas que ilustran estas nociones.

FIGURA 4.48



La siguiente definición es la análoga a la Definición (4.25) para el caso en que $|f(x)|$ es muy grande y $f(x)$ es negativa cuando x tiende a a.

DEFINICIÓN (4.26)

Sea f una función definida en todo un intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. La afirmación **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $-\infty$**, que se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que a todo número negativo M le corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) < M.$$

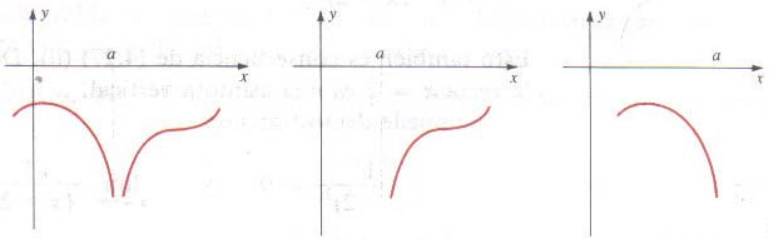
Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, se dice a veces que $f(x)$ *tiende a menos infinito* o que *disminuye indefinidamente, cuando x tiende hacia a.*

La Figura 4.49 presenta gráficas que ilustran la Definición (4.26) incluyendo los casos $x \to a^+$ y $x \to a^-$.

La recta $x = a$ en las Figuras 4.47-4.49 es una **asíntota vertical** de la gráfica de f. Nótese que f tiene una *discontinuidad infinita* en $x = a$ (véase la Sección 2.5).

FIGURA 4.49

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ (ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ (iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



Aunque se usa la notación de límite para describir el comportamiento de las funciones f correspondientes a las gráficas de la Figura 4.49, los límites cuando x tiende a a no existen. En el Ejemplo 3 de la Sección 2.3 se demostró que $\lim_{x \to 0} (1/x)$ no existe. Usando la nueva notación, este hecho (la inexistencia del límite) se denota por

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

El siguiente teorema, que se enuncia sin demostración, es útil para analizar los límites de las funciones racionales.

TEOREMA (4.27)

(i) Si n es un entero positivo par, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$$

(ii) Si n es un entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty.$$

Si n es un entero positivo y $f(x) = 1/(x-a)^n$ entonces, por el Teorema (4.27), la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f. Nótese también que como $\lim_{x \to \infty} 1/(x-a)^n = 0$, el eje x es una asíntota horizontal.

EJEMPLO 4 Sea $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^3}$. Analizar $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y trazar la gráfica de f.

Solución Para x cercano a 2 pero mayor que 2, $x - 2$ es un número positivo pequeño y entonces $1/(x-2)^3$ es un número positivo grande. Por lo tanto, es evidente que

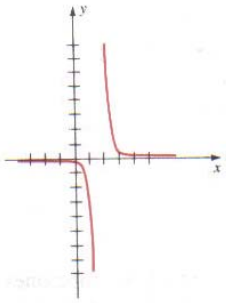
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = \infty.$$

Esto también se puede deducir del Teorema (4.27) (ii) con $a = 2$ y $n = 3$.

Para x cercano a 2 pero *menor* que 2, $x - 2$ es *negativo* y está cerca de 0. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty.$$

FIGURA 4.50



Esto también es consecuencia de (4.27) (ii). De modo que, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Se puede demostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x-2)^3} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(x-2)^3} = 0.$$

Entonces $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal.

La gráfica de f se tiene en la Figura 4.50. Nótese que f no tiene un máximo absoluto ni un mínimo absoluto. •

A continuación se enunciarán algunas propiedades de las sumas, productos y cocientes de las funciones que tienden a infinito. Hay resultados análogos para los casos $x \to a^+$ y $x \to a^-$.

TEOREMA (4.28)

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$ para algún número c, entonces:

(i) $\lim_{x\to a} [g(x) + f(x)] = \infty$

(ii) Si $c > 0$, entonces $\lim_{x\to a} [g(x)f(x)] = \infty$ y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

(iii) Si $c < 0$, entonces $\lim_{x\to a} [g(x)f(x)] = -\infty$ y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Las conclusiones del Teorema (4.28) son intuitivamente evidentes. En (i), por ejemplo, si $g(x)$ tiende a c y $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a a, entonces $g(x) + f(x)$ se puede hacer tan grande como se quiera escogiendo x suficientemente cercano a a.

En (iii), si $\lim_{x\to a} g(x) = c < 0$ entonces $g(x)$ es negativa cuando x está cerca de a. Por tanto, si $f(x)$ es grande y positiva entonces cuando x está cercana a a, el producto $g(x)f(x)$ es *negativo* y $|g(x)f(x)|$ es grande. Esto indica que $\lim_{x\to a} g(x)f(x) = -\infty$.

No daremos una demostración formal del Teorema (4.28). Se puede enunciar un teorema análogo para $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. También pueden demostrarse teoremas para operaciones con más de dos funciones.

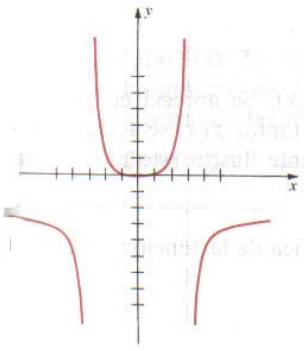
Las gráficas de funciones racionales suelen tener asíntotas verticales y horizontales. Las Figuras 4.42, 4.45, 4.46 y 4.50 y también el siguiente ejemplo, ilustran estos conceptos.

EJEMPLO 5 Sea $f(x) = 2x^2/(9 - x^2)$. Encontrar las asíntotas verticales y horizontales y trazar la gráfica de f.

Solución Comenzamos por factorizar el denominador, obteniendo así

$$f(x) = \frac{2x^2}{(3 - x)(3 + x)}.$$

FIGURA 4.51



El denominador es cero en $x = 3$ y $x = -3$. Las rectas correspondientes podrían ser asíntotas verticales. Como

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{3 - x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2}{3 + x} = 3$$

del Teorema (4.28) (ii) se ve que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \left(\frac{1}{3 - x}\right)\left(\frac{2x^2}{3 + x}\right) = \infty.$$

Además, como

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{3 - x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2}{3 + x} = 3 > 0,$$

deducimos que

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(\frac{1}{3-x}\right)\left(\frac{2x^2}{3+x}\right) = -\infty.$$

Este comportamiento de $f(x)$ cerca de la asíntota vertical $x = 3$ se ilustra en la Figura 4.51.

Como

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{1}{3+x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -3^-} \frac{2x^2}{3-x} = 3 > 0,$$

concluimos que

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \left(\frac{1}{3+x}\right)\left(\frac{2x^2}{3-x}\right) = -\infty.$$

Análogamente,

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{3+x} = \infty \quad \text{implica que} \quad \lim_{x\to -3^+} f(x) = \infty.$$

Este comportamiento de $f(x)$ cerca de $x = -3$ se ilustra en la Figura 4.51.

Para encontrar las asíntotas verticales consideramos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{9-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{(9/x^2)-1} = -2.$$

Cuando $x \to -\infty$ el límite es el mismo. La recta $y = -2$ es una asíntota horizontal. Usando esta información y situando algunos puntos podemos obtener el croquis de la Figura 4.51.

Si queremos más información sobre la gráfica, es posible usar la primera derivada para demostrar que f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(-3, 0]$, que es creciente en $[0, 3)$ y $(3, \infty)$, y que tiene un mínimo en $x = 0$, como se señala en la figura. Para analizar la concavidad puede usarse la segunda derivada. •

Si $f(x) = g(x)/h(x)$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios y *si el grado de $g(x)$ es igual al grado de $h(x)$ más uno*, entonces la gráfica de f tiene una **asíntota oblicua** con ecuación $y = ax + b$ para algunos números reales a y b; es decir, la gráfica tiende a esta recta cuando x tiende a más o menos infinito. Para demostrar este hecho puede usarse la división de polinomios y expresar $f(x)$ en la forma

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = (ax + b) + \frac{r(x)}{h(x)}$$

con $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ menor que el de $h(x)$. Se aprecia entonces que $\lim_{x\to\infty} r(x)/h(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} r(x)/h(x) = 0$. Por lo tanto, $f(x)$ se acerca a $ax + b$ cuando x tiende a ∞ o bien a $-\infty$. El ejemplo siguiente ilustra este método para encontrar las asíntotas oblicuas.

EJEMPLO 6 Hallar todas las asíntotas y trazar la gráfica de la función f dada por

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 4}$$

FIGURA 4.52

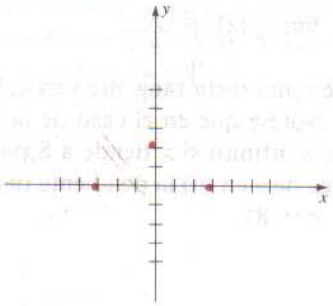
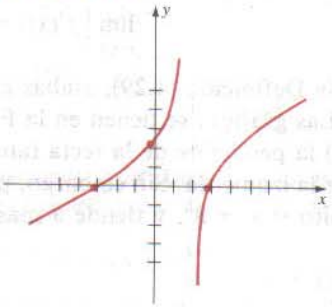


FIGURA 4.53



Solución Hay una asíntota vertical con ecuación $2x - 4 = 0$, es decir, $x = 2$. Además, como el grado del numerador $x^2 - 9$ es igual al grado del denominador $2x - 4$ más uno, la gráfica tiene una asíntota oblicua. Dividiendo polinomios,

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 4} = (\tfrac{1}{2}x + 1) - \frac{5}{2x - 4}.$$

De acuerdo con la discusión anterior a este ejemplo, la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ es una asíntota oblicua. Esta recta y la asíntota vertical $x = 2$ se tienen (con líneas de trazos) en la Figura 4.52.

Las abscisas en el origen de la gráfica son las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$, es decir 3 y -3. La ordenada en el origen es $f(0) = \frac{9}{4}$. En la Figura 4.52 están marcados estos puntos. Es fácil ver que la gráfica tiene la forma indicada en la Figura 4.53. •

Los límites infinitos sirven también para definir las rectas tangentes verticales. Si se considera una recta tangente l como la posición límite de una recta secante (véase la Figura 2.4), entonces l puede ser vertical. En tales casos, cuando la secante tiende hacia l su pendiente tiende a más o menos infinito. Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN (4.29)

La gráfica de una función f tiene una **recta tangente vertical** en el punto $P(a, f(a))$ si f es continua en a y

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty.$$

EJEMPLO 7 Sean $f(x) = (x - 8)^{1/3} + 1$ y $g(x) = (x - 8)^{2/3} + 1$. Demostrar que las gráficas de f y g tienen rectas tangentes verticales en $P(8, 1)$. Trazar las gráficas mostrando las rectas tangentes en P.

Solución Se tiene que f y g son ambas continuas en 8. Derivando,

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x - 8)^{-2/3} = \frac{1}{3(x - 8)^{2/3}}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}(x - 8)^{-1/3} = \frac{2}{3(x - 8)^{1/3}}.$$

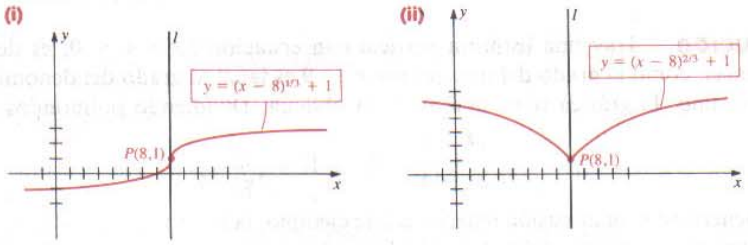
Es claro que

$$\lim_{x \to 8} |f'(x)| = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 8} |g'(x)| = \infty.$$

Por la Definición (4.29), ambas gráficas tienen una recta tangente vertical en $P(8, 1)$.

Las gráficas se tienen en la Figura 4.54. Nótese que en el caso de la gráfica de f en (i) la pendiente de la recta tangente tiende a infinito si x tiende a 8 por la derecha o por la izquierda. Sin embargo, para la gráfica de g en (ii) la pendiente tiende a menos infinito si $x \to 8^-$, y tiende a más infinito si $x \to 8^+$.

FIGURA 4.54



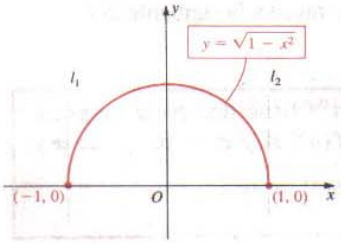
El número 8 es un número crítico de ambas funciones. Del Criterio de la Primera Derivada se deduce que $f(8) = 1$ no es un valor extremo de f y que $g(8) = 1$ es un mínimo absoluto de g. •

La Definición (4.29) puede ser modificada para considerar rectas tangentes verticales en los extremos del dominio de la función. Entonces, si f es una función continua en $[a, b]$ y no está definida fuera de este intervalo, la gráfica tiene una recta vertical en $P(a, f(a))$ o $Q(b, f(b))$ si

$$\lim_{x \to a^+} |f'(x)| = \infty \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to b^-} |f'(x)| = \infty,$$

respectivamente. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ entonces la gráfica de f es la mitad superior de una circunferencia unitaria con centro en el origen. Hay rectas tangentes verticales l_1 y l_2 en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente (véase la Figura 4.55).

FIGURA 4.55



EJERCICIOS 4.6

Ejercicios 1-8: Calcule el límite.

1. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 4x - 7}$
2. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - x + 1}{6x^3 + 2x^2 - 7}$
3. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4 - 7x}{2 + 3x}$
4. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{(3x + 4)(x - 1)}{(2x + 7)(x + 2)}$
5. $\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\dfrac{8 + x^2}{x(x + 1)}}$
6. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$
7. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{4x + 1}}{10 - 3x}$
8. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^3 + 1}$

Ejercicios 9-18: Efectúe el cálculo de $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$. Determine las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de f, calcule los máximos y mínimos locales de f y trace la gráfica.

9. $f(x) = \dfrac{5}{x-4}$, $a = 4$

10. $f(x) = \dfrac{5}{4-x}$, $a = 4$

11. $f(x) = \dfrac{8}{(2x+5)^3}$, $a = -\frac{5}{2}$

12. $f(x) = \dfrac{-4}{7x+3}$, $a = -\frac{3}{7}$

13. $f(x) = \dfrac{3x}{(x+8)^2}$, $a = -8$

14. $f(x) = \dfrac{3x^2}{(2x-9)^2}$, $a = \frac{9}{2}$

15. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-x-2}$, $a = -1$, $a = 2$

16. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-4x+3}$, $a = 1$, $a = 3$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x(x-3)^2}$, $a = 0$, $a = 3$

18. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $a = -1$

Ejercicios 19-28: Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de f y trácela.

19. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

20. $f(x) = \dfrac{5x}{4-x^2}$

21. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

22. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

23. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2-6x}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{16-x^2}$

25. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2-5x}{x^2-25}$

27. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-16}$

28. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{16-x^2}}{4-x}$

Ejercicios 29-34: Encuentre las asíntotas verticales y oblicuas de la gráfica de f y trácela.

29. $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x+1}$

30. $f(x) = \dfrac{2x^2-x-3}{x-2}$

31. $f(x) = \dfrac{8-x^3}{2x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-9}$

33. $f(x) = \dfrac{x^4-4}{x^3-1}$

34. $f(x) = \dfrac{1-x^4}{2x^3-8x}$

Ejercicios 35-38: Determine los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es vertical.

35. $f(x) = x(x+2)^{3/5}$

36. $f(x) = \sqrt{x+2}$

37. $f(x) = \sqrt{16-9x^2} + 3$

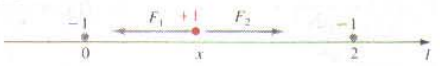
38. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 5$

39. A un tanque que contiene una cantidad inicial de 200 L (litros) de agua pura, le llega agua salada con una concentración de 50 g (gramos) de sal por litro.
 (a) Si llegan al tanque 20 L de agua salada por minuto, ¿cuál es el volumen $V(t)$ del agua y cuál es la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el tiempo t?
 (b) Demuestre que la concentración $c(t)$ de sal al tiempo t está dada por
 $$c(t) = t/(10t + 100).$$
 (c) Describa el comportamiento de $c(t)$ cuando $t \to \infty$.

40. Uno de los problemas importantes en la ciencia pesquera es la predicción para el año siguiente de la población adulta R con capacidad de reproducción a partir de la población S que está desovando. Para algunas especies (como el arenque del mar del Norte) R está dada en función de S por $R = aS/(S + b)$. ¿Cómo se puede interpretar la constante a? Muestre que para valores grandes de S, entonces R es más o menos constante.

41. La ley de Coulomb de la electrostática dice que la fuerza de atracción F entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Una partícula con carga $+1$ se coloca sobre una recta coordenada l entre otras dos partículas de carga -1 (véase la figura).
 (a) Demuestre que la fuerza resultante sobre la partícula con carga $+1$ está dada por
 $$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2}$$
 donde k es una constante positiva.
 (b) Trace la gráfica de F para $0 < x < 2$, tomando $k = 1$.

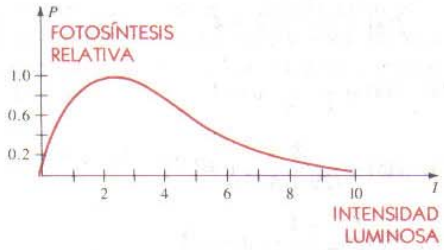
EJERCICIO 41



(a) $P = \dfrac{aI}{b+I}$ (b) $P = \dfrac{aI}{b+I^2}$

42. Los biomatemáticos han propuesto muchas funciones diferentes para describir el efecto de la luz sobre la intensidad con la que se produce la fotosíntesis. Para que la función sea realista debe mostrar el *efecto de fotoinhibición*, es decir, la rapidez de producción P de la fotosíntesis debe tender a cero cuando la intensidad luminosa I alcanza altos niveles (véase la figura). ¿Cuál de las fórmulas siguientes, en las que a y b son constantes, puede servir para evaluar P? Explique su respuesta.

EJERCICIO 42



4.7 ANTIDERIVADAS

En el Capítulo 3 se estudiaron algunos problemas enunciados en la forma: *Dada una función g, determinar la derivada g'*. Ahora se considera el problema inverso, es decir, *dada una derivada g', determinar la función g*. Una manera equivalente de enunciar el problema inverso es:

Dada una función f, encontrar una función F tal que $F' = f$.

Por ejemplo, sea $f(x) = 8x^3$. En este caso es fácil hallar una función F tal que $F'(x) = f(x)$. Sabemos que al derivar una potencia de x se *reduce* en uno el exponente, y por lo tanto, para obtener F hay que *aumentar* en uno el exponente dado. Así, $F(x) = ax^4$ para algún número a. Derivando, se obtiene $F'(x) = 4ax^3$ y para que sea igual a $f(x)$, a debe ser igual a 2. Entonces, la función F definida por $F(x) = 2x^4$ tiene la propiedad de que $F' = f$. De acuerdo con la siguiente definición, F es una *antiderivada de f*.

DEFINICIÓN (4.30) Una función F es una **antiderivada** de otra función f si $F' = f$.

A veces se llama **funciones primitivas** a las antiderivadas. El proceso de encontrar una antiderivada se llama **antiderivación**. La frase *$F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$* significa lo mismo que *F es una antiderivada de f*. Normalmente no se especificará el dominio de las antiderivadas. Del Teorema Fundamental del Cálculo (5.21) se deduce que cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ en el que f es continua, es un dominio adecuado para F.

Las reglas de derivación pueden aplicarse para obtener fórmulas de antiderivadas, como se demuestra a continuación.

TEOREMA (4.31)

Sean $F(x)$ y $G(x)$ antiderivadas de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Entonces

(i) $F(x) + G(x)$ es una antiderivada de $f(x) + g(x)$.

(ii) $kF(x)$ es una antiderivada de $kf(x)$ para cualquier número real k.

Demostración Por hipótesis, $D_x[F(x)] = f(x)$ y $D_x[G(x)] = g(x)$. Por lo tanto,

$$D_x[F(x) + G(x)] = D_x[F(x)] + D_x[G(x)] = f(x) + g(x).$$

Esto demuestra (i). Para demostrar (ii) basta notar que

$$D_x[kF(x)] = kD_x[F(x)] = kf(x) \quad \bullet\bullet$$

El Teorema (4.31) (i) se puede generalizar a la suma de cualquier número finito de funciones. Este hecho puede enunciarse como sigue: *La suma de antiderivadas es una antiderivada de la suma*. Al trabajar con varias funciones a la vez el dominio se restringe a la intersección de sus dominios. Para diferencias de funciones hay un resultado análogo.

Las antiderivadas nunca son únicas. Como la derivada de una constante es cero, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, también lo es $F(x) + C$ para cualquier número C. Por ejemplo, si $f(x) = 8x^3$ entonces las funciones definidas por $2x^4 + 7$, $2x^4 - 3$ y $2x^4 + \frac{3}{5}$ son antiderivadas de f. El siguiente teorema muestra que las funciones de este tipo son las *únicas* antiderivadas de $f(x)$ que existen.

TEOREMA (4.32)

Si F_1 y F_2 son funciones derivables tales que $F_1'(x) = F_2'(x)$ para todo x en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $F_2(x) = F_1(x) + C$ para algún número C y para todo x en $[a, b]$.

Demostración Definiendo la función g por medio de

$$g(x) = F_2(x) - F_1(x),$$

se obtiene

$$g'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = 0$$

para todo x en $[a, b]$. Si x es cualquier número tal que $a < x \leq b$, entonces, aplicando el Teorema del Valor Medio (4.12) a la función g en el intervalo cerrado $[a, x]$, existe un número z en el intervalo abierto (a, x) tal que

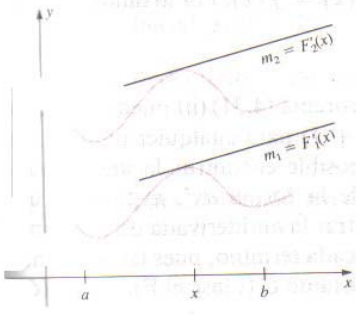
$$g(x) - g(a) = g'(z)(x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0.$$

Por lo tanto, $g(x) = g(a)$ para todo x en $[a, b]$. Sustituyendo en la primera ecuación de esta demostración se obtiene

$$g(a) = F_2(x) - F_1(x).$$

Sumando $F_1(x)$ a ambos lados de la igualdad se obtiene la conclusión deseada con $C = g(a)$. $\bullet\bullet$

FIGURA 4.56



En la Figura 4.56 se ilustra gráficamente el significado geométrico del Teorema (4.32). La figura muestra que si las pendientes $m_1 = F_1'(x)$ y $m_2 = F_2'(x)$ de las rectas tangentes a las gráficas de F_1 y F_2, son iguales para todo x en $[a, b]$, entonces a partir de una de las gráficas puede obtenerse la otra mediante un desplazamiento vertical de $|C|$ unidades.

El Teorema (4.32) sirve para demostrar el siguiente

TEOREMA (4.33)

Si f es una función tal que $f'(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces f es una función constante en $[a, b]$.

Demostración Geométricamente, la conclusión es evidente, pues si f es continua y la pendiente de la recta tangente es cero en todos los puntos de la gráfica, es de esperar que la gráfica sea una recta horizontal (la gráfica de una función constante). Para demostrar este hecho, sea F_2 igual a f y sea F_1 la función definida por $F_1(x) = 0$ para todo x. Como $F_1'(x) = 0$ y $F_2'(x) = f'(x) = 0$, se ve que $F_1'(x) = F_2'(x)$ para todo x en $[a, b]$. Aplicando el Teorema (4.32), se ve que existe un número C tal que $F_2(x) = F_1(x) + C$; es decir, $f(x) = 0 + C$ para todo x en $[a, b]$. Por lo tanto, f es una función constante. • •

Si F_1 y F_2 son antiderivadas de una misma función f, entonces $F_1' = f = F_2'$, y por el Teorema (4.32), $F_2(x) = F_1(x) + C$ para algún C positivo. En otras palabras, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces cualquier otra antiderivada tiene la forma $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria, o sea, un número real no especificado. $F(x) + C$ se llama **antiderivada más general** de $f(x)$.

A lo largo del libro se usará muchas veces la siguiente regla.

REGLA DE LA POTENCIA PARA LAS ANTIDERIVADAS (4.34)

Sea r un número racional tal que $r \neq -1$.

La derivada más general de x^r es $\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$, donde C es una constante arbitraria.

Demostración Sean $f(x) = x^r$ y $F(x) = x^{r+1}/(r + 1)$. Usando la Regla de la Potencia para las *derivadas*, se puede demostrar que $F'(x) = f(x)$. Por lo tanto, $F(x) + C$ es la antiderivada más general de $f(x)$. • •

A partir de la Regla de la Potencia (4.34) y del Teorema (4.31) (ii) puede deducirse que la antiderivada más general de ax^r es $ax^{r+1}/(r + 1)$ para cualquier número real a y para $r \neq -1$. Usando el Teorema (4.31) (i) es posible encontrar la antiderivada más general de una *suma* arbitraria de términos de la forma ax^r, evaluando una antiderivada para cada uno de los términos. Al encontrar la antiderivada de una suma, no hace falta introducir una constante arbitraria para cada término, pues las constantes pueden ser sumadas todas para producir una sola constante C (véase el Ejemplo 1(d)).

EJEMPLO 1 Encontrar la antiderivada más general de $f(x)$:

(a) $f(x) = 4x^5$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

(c) $f(x) = 1/x^2$ (d) $f(x) = 8x^3 - 3x + 7$

Solución Las antiderivadas aparecen en la siguiente tabla. Nótese que para encontrar una antiderivada de x^r, *se aumenta* en uno el exponente r, obteniendo $r + 1$, y luego se divide entre $r + 1$.

$f(x)$	**Antiderivada más general de $f(x)$**
$4x^5$	$4\left(\frac{x^6}{6}\right) + C = \frac{2}{3}x^6 + C$
$\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$	$\frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{3}{5}x^{5/3} + C$
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\frac{x^{-1}}{(-1)} + C = -\frac{1}{x} + C$
$8x^3 - 3x + 7$	$8\left(\frac{x^4}{4}\right) - 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + 7x + C = 2x^4 - \frac{3}{2}x + 7x + C$

Para evitar errores algebraicos deben verificarse las soluciones de los problemas de antiderivación, derivando la antiderivada. En cada caso se debe obtener la expresión dada. En el Ejemplo 1(d),

$$\begin{aligned} D_x(2x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 + 7x + C) &= D_x(2x^4) - D_x(\tfrac{3}{2}x^2) + D_x(7x) + D_x(C) \\ &= 8x^3 - 3x + 7 + 0 = f(x). \end{aligned}$$

Una **ecuación diferencial** contiene derivadas de una función desconocida. Una función f es una **solución** de una ecuación diferencial si satisface la citada ecuación; es decir, si al sustituir f por la función desconocida se obtiene una igualdad. **Resolver** una ecuación diferencial significa encontrar todas sus soluciones. A veces, además de la ecuación diferencial, se conoce también un valor de la función f que se llama **condición inicial**, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación diferencial $f'(x) = 6x^2 + x - 5$ con la condición inicial $f(0) = 2$.

Solución De los comentarios sobre antiderivadas,

$$f(x) = 2x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 5x + C$$

para algún número C. Tomando $x = 0$ y usando la condición inicial dada, obtenemos

$$f(0) = 0 + 0 - 0 + C = 2$$

y así, $C = 2$. Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial con la condición inicial dada es

$$f(x) = 2x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 5x + 2. \quad \bullet$$

La expresión *ecuación diferencial* surge del hecho de que puede tener diferenciales en vez de derivadas. Así, la ecuación diferencial del Ejemplo 2 se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + x - 5 \qquad \text{o bien} \qquad dy = (6x^2 + x - 5)\,dx$$

para $y = f(x)$.

Si un punto P se mueve a lo largo de una recta coordenada, entonces su función de posición s es una antiderivada de su función de velocidad v, es decir, $s'(t) = v(t)$. Análogamente, como $v'(t) = a(t)$, la función de velocidad es una antiderivada de la función de aceleración. Si se conoce la velocidad o la aceleración y se tienen suficientes condiciones iniciales, entonces puede determinarse la función de posición.

EJEMPLO 3 Una lancha de motor se aleja del muelle a lo largo de una línea recta con una aceleración al tiempo t dada por $a(t) = 12t - 4$ pie/s^2. En el tiempo $t = 0$ la lancha tenía una velocidad de 8 pie/s y se encontraba a 15 pie del muelle. Calcular su distancia $s(t)$ al embarcadero al cabo de t segundos.

Solución Como $v'(t) = 12t - 4$, antiderivando obtenemos

$$v(t) = 6t^2 - 4t + C$$

para algún número C. Tomando $t = 0$ y usando el hecho de que $v(0) = 8$, obtenemos $8 = 0 - 0 + C$ y por lo tanto, $C = 8$. Entonces

$$v(t) = 6t^2 - 4t + 8$$

o, equivalentemente

$$s'(t) = 6t^2 - 4t + 8.$$

La antiderivada más general de $s'(t)$ es

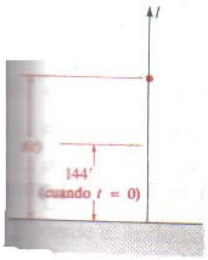
$$s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 8t + D$$

donde D es un número arbitrario. Tomando $t = 0$ y usando el hecho de que $s(0) = 15$, se obtiene $15 = 0 - 0 + 0 + D$. Por lo tanto, $D = 15$ y

$$s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 8t + 15. \quad \bullet$$

Sobre cualquier objeto que se encuentre cerca de la superficie de la Tierra actúa una fuerza, llamada *fuerza de gravedad*, la cual produce una aceleración constante que se denota por g. El valor aproximado de g que se utiliza en la mayoría de los problemas es de 9.8 m/s^2 o 980 cm/s^2 o 32 pie/s^2. El uso de esta importante constante de la física se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde una altura de 144 pie sobre el suelo con una velocidad inicial de 96 pie/s. Despreciando la resistencia del aire, determinar su altura desde el suelo a los t segundos. ¿Durante qué intervalo de tiempo la piedra sube? ¿En qué momento y con qué velocidad choca la piedra contra el suelo al descender?



Solución El movimiento de la piedra puede representarse por un punto que se mueve sobre una recta vertical l que tiene su origen al nivel del suelo y dirección positiva hacia arriba (véase la Figura 4.57). La altura desde el piso al tiempo t es $s(t)$ y las condiciones iniciales son $s(0) = 144$ y $v(0) = 96$. Como la velocidad va disminuyendo, $v'(t) < 0$; es decir, la aceleración es negativa. Entonces, de los comentarios anteriores a este ejemplo,

$$a(t) = -32.$$

Como v es una antiderivada de a,

$$v(t) = -32t + C$$

donde C es un número arbitrario. Sustituyendo t por 0 y usando el hecho de que $v(0) = 96$, obtenemos que $96 = 0 + C = C$ y por lo tanto,

$$v(t) = -32t + 96.$$

Como $s'(t) = v(t)$, antiderivando queda

$$s(t) = -16t^2 + 96t + D$$

donde D es un número arbitrario. Tomando $t = 0$ y aplicando el hecho de que $s(0) = 144$, obtenemos $144 = 0 + 0 + D = D$. Resulta así que la altura que alcanza la piedra al tiempo t está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 96t + 144.$$

El objeto lanzado sube hasta que $v(t) = 0$, es decir, hasta que $-32t + 96 = 0$, o bien $t = 3$. La piedra choca con el suelo cuando $s(t) = 0$, o sea $-16t^2 + 96t + 144 = 0$. Equivalentemente, $t^2 - 6t - 9 = 0$. Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, $t = 3 \pm 3\sqrt{2}$. La solución $3 - 3\sqrt{2}$ no tiene sentido pues t no puede ser negativo. Por lo tanto, la piedra choca contra el piso a los $3 + 3\sqrt{2}$ s. La velocidad en tal momento es

$$\begin{aligned} v(3 + 3\sqrt{2}) &= -32(3 + 3\sqrt{2}) + 96 \\ &= -96\sqrt{2} \approx -135.8 \text{ pie/s}. \end{aligned}$$

En las aplicaciones a la economía, una función se puede obtener a partir de su función marginal por antiderivación, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Un fabricante sabe que el costo marginal correspondiente a la producción de x unidades de cierto componente de una fotocopiadora está dado por $30 - 0.02x$. Si el costo de producir una unidad es de \$35 (dólares), ¿cuál será el costo de producir 100 unidades?

Solución Si C es la función de costo, entonces el costo marginal es la razón de cambio de C con respecto a x, es decir,

$$C'(x) = 30 - 0.02x.$$

Antiderivando obtenemos

$$C(x) = 30x - 0.01x^2 + K$$

donde K es un número arbitrario. Tomando $x = 1$ y usando $C(1) = 35$, obtenemos

$$35 = 30 - 0.01 + K$$

y por lo tanto, $K = 5.01$. Entonces,

$$C(x) = 30x - 0.01x^2 + 5.01.$$

En particular, el costo de producir 100 unidades es

$$C(100) = 3000 - 100 + 5.01 = \$2\,905.01. \quad \bullet$$

EJERCICIOS 4.7

Ejercicios 1-22: Encuentre la antiderivada más general de la función dada.

1. $f(x) = 9x^2 - 4x + 3$
2. $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$
3. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$
4. $f(x) = 10x^4 - 6x^3 + 5$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{4}{x^7} - \dfrac{7}{x^4} + x$
7. $f(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
8. $f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 5$
9. $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{6} + 7$
10. $f(x) = 3x^5 - x^{5/3}$
11. $f(x) = 2x^{5/4} + 6x^{1/4} + 3x^{-4}$
12. $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$
13. $f(x) = (3x + 4)^2/x^4$
14. $f(x) = (2x + 1)^3$
15. $f(x) = (3x - 1)^2$
16. $f(x) = (2x - 5)(3x + 1)$
17. $f(x) = \dfrac{8x - 5}{\sqrt[3]{x}}$
18. $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{\sqrt{x}}$
19. $f(x) = \sqrt[5]{32x^4}$
20. $f(x) = \sqrt[3]{64x^5}$
21. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
22. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x - 2}$

Ejercicios 23-28: Resuelva la ecuación diferencial sujeta a las condiciones dadas.

23. $f'(x) = 12x^2 - 6x + 1,\ f(1) = 5$

24. $f'(x) = 9x^2 + x - 8,\ f(-1) = 1$

25. $f''(x) = 4x - 1,\ f'(2) = -2,\ f(1) = 3$

26. $f'''(x) = 6x,\ f''(0) = 2,\ f'(0) = -1,\ f(0) = 4$

27. $f'''(t) = 3/\sqrt{t},\ f(1) = 4,\ f'(1) = 2,\ f''(1) = 8$

28. $f''(t) = \sqrt[3]{t^2},\ f'(1) = 2,\ f(1) = 3$

Ejercicios 29-32: Un punto se mueve sobre una recta coordenada sujeto a las condiciones dadas. Determine $s(t)$.

29. $a(t) = 2 - 6t,\ v(0) = -5,\ s(0) = 4$

30. $a(t) = 3t^2,\ v(0) = 20,\ s(0) = 5$

31. $a(t) = -32,\ v(0) = 80,\ s(0) = 240$

32. $a(t) = -980,\ v(0) = -100,\ s(0) = 400$

33. Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad de 1600 pie/s. Despreciando la resistencia del aire, calcule su altura o distancia desde el suelo $s(t)$ al tiempo t. ¿Cuál es su altura máxima?

34. Un objeto se deja caer desde una altura de 300 m. Despreciando la resistencia del aire, calcule la distancia que recorre en t segundos. ¿Cuál es la velocidad a los 3 s (segundos)? ¿Cuándo llegará al suelo?

35. Se lanza una piedra directamente hacia abajo desde una altura de 96 pie con una velocidad inicial de 16 pie/s. Halle (a) su distancia al suelo a los t segundos, (b) el momento en que llegará al piso y (c) la velocidad con la que llega a tierra.

36. La aceleración de la gravedad para objetos cerca de la superficie de la Luna vale 1.62 m/s^2.
 (a) Determine la altura máxima de una piedra que es lanzada directamente hacia arriba por un astronauta en la Luna con una velocidad de 18 m/s.
 (b) Encuentre la altura máxima de una piedra que es lanzada directamente hacia arriba por el mismo astronauta y con la misma velocidad, pero en la Tierra.

37. Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde una altura s_0 pies sobre el piso con una velocidad v_0 pie/s. Demuestre que si se desprecia la resistencia del aire, entonces la altura $s(t)$ a los t segundos está dada por $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, donde g es la aceleración de la gravedad.

38. Una pelota rueda cuesta abajo sobre un plano inclinado con una aceleración de 0.6 m/s^2. Si a la pelota no se le da ninguna velocidad inicial, ¿qué distancia recorre en t segundos? ¿Qué velocidad inicial debe dársele a la bola para que recorra 30 m en 5 s?

39. Si un automóvil parte del reposo, ¿qué aceleración constante le permitirá recorrer 180 m en 10 s?

40. Si un automóvil viaja con una velocidad de 100 km/h, ¿qué aceleración (negativa) le permitirá detenerse en 9 s?

41. Si C y F denotan las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit, respectivamente, entonces la tasa de variación de F con respecto a C está dada por $dF/dC = \frac{9}{5}$. Si $F = 32$ cuando $C = 0$, use antiderivadas para obtener un fórmula general para F en términos de C.

42. La rapidez de cambio de la temperatura T (en °C) de una solución está dada por $dT/dt = \frac{1}{4}t + 10$, donde t es el tiempo (en minutos). Suponiendo que $T = 5$°C en $t = 0$, encuentre una fórmula para T al tiempo t.

43. El volumen V de un globo cambia con respecto al tiempo con una rapidez dada por $dV/dt = 3\sqrt{t} + \frac{1}{4}t$ pie^3/s. Al tiempo $t = 4$, el volumen es 20 pie^3. Exprese V como una función de t.

44. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto P de la gráfica de cierta ecuación es igual al cuadrado de la abscisa de P. Encuentre una ecuación suponiendo que la gráfica pasa (a) por el origen, (b) por el punto (3, 6), (c) por el punto (-1, 1). Trace la gráfica en cada caso.

45. Un pequeño país tiene una reserva de gas natural de 100 000 millones de pies cúbicos. Si $A(t)$ denota la cantidad total de gas natural que se ha consumido en t años, entonces dA/dt es la *rapidez o tasa de consumo*. Se predice que dicha rapidez será de $5000 + 10t$ millones de pies cúbicos al año. ¿En cuántos años se agotarán las reservas de gas natural de esa nación?

46. Consulte el Ejercicio 45. De acuerdo con las estadísticas de la secretaría de Energía del gobierno de Estados Unidos, el consumo anual de gasolina en aquel país es de aproximadamente $dA/dt = 2.74 - 0.11t - 0.01t^2$ miles de millones de galones, donde $t = 0$ corresponde al año 1980. Calcule el número de galones que se consumieron entre 1980 y 1984.

47. Un fabricante de ropa deportiva sabe que el costo marginal de producir x prendas es $20 - 0.015x$

y el costo de producir una es \$25 (dólares). Encuentre la función de costo y el costo de producir 50 unidades.

48. La función de costo marginal de un producto está dada por $2/x^{1/3}$ y el costo de producir 8 unidades es \$20. Encuentre la función de costo y el costo de producir 64 unidades.

49. La función de ingreso marginal de un producto está dada por $x^2 - 6x + 15$. Determine la función de ingreso y la función de demanda marginal.

50. Repita el Ejercicio 49 suponiendo que la función de ingreso marginal está dada por $x + (4/\sqrt{x})$.

4.8 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Función creciente o decreciente.
2. Máximo absoluto o mínimo absoluto de una función.
3. Máximo local o mínimo local de una función.
4. Números críticos de una función.
5. Máximos y mínimos en la frontera.
6. Teorema de Rolle.
7. Teorema del Valor Medio.
8. Criterio de la Primera Derivada.
9. Concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo.
10. Criterios para determinar la concavidad.
11. Punto de inflexión.
12. Criterio de la Segunda Derivada.
13. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.
14. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
15. Asíntotas verticales y horizontales.
16. La antiderivada de una función.
17. Regla de la Potencia para las Antiderivadas.
18. Ecuación diferencial.

EJERCICIOS 4.8

1. Sea $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Encuentre un número c que satisfaga la conclusión del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, 4]$.
2. El límite de velocidad en una autopista de peaje de 200 km de largo es de 120 km/h. Al entrar a la autopista, un conductor recibe una tarjeta que tiene marcada la hora exacta de entrada. Si el conductor termina el recorrido en 1 hora con 40 minutos o menos, se le impone una multa por exceso de velocidad al momento de pagar el peaje. Use el Teorema del Valor Medio para justificar esta medida.

Ejercicios 3-5: Use el Criterio de la Primera Derivada para calcular los máximos y mínimos locales de f. Describa los intervalos en los que f es creciente o decreciente y trace la gráfica de f.

3. $f(x) = -4x^3 + 9x^2 + 12x$
4. $f(x) = 1/(1 + x^2)$
5. $f(x) = (4 - x)x^{1/3}$

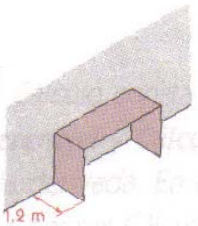
Ejercicios 6-9: Use el Criterio de la Segunda Derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de f. Analice la concavidad, encuentre las abscisas de los puntos de inflexión y trace la gráfica de f.

6. $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$
7. $f(x) = 1/(1 + x^2)$
8. $f(x) = 40x^3 - x^6$
9. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 6$
10. Determine los máximos y mínimos locales, analice la concavidad y trace la gráfica de la función f dada por $f(x) = |x^3 - 6x|$.
11. Una persona desea cercar un campo rectangular y luego subdividirlo en tres lotes más pequeños colocando dos cercas paralelas a uno de los lados. ¿Qué dimensiones le permitirán abarcar mayor

área si su presupuesto le permite comprar sólo 1000 m de material?

12. Un cobertizo rectangular que consta de dos paredes o lados verticales de 1.2 m de ancho y un techo plano, se va a agregar a una estructura ya existente, como se ilustra en la figura. El techo se hará de un material que cuesta \$45 el metro cuadrado. Los dos lados se construirán de un material que cuesta \$18 el metro cuadrado. Si se cuenta con un presupuesto de \$400 para la construcción, ¿qué dimensiones proporcionarán el volumen máximo?

EJERCICIO 12



13. Se desea construir un canalón con sección en forma de "V" con dos láminas de metal rectangulares de 25 cm de ancho. Demuestre que la capacidad del canalón es máxima cuando las láminas se colocan perpendiculares una a la otra.

14. Calcule la altura del cilindro circular recto de mayor área que se puede inscribir en una esfera de radio a.

15. El interior de una pista de carreras de 400 m consta de un rectángulo con dos semicírculos en dos de los lados opuestos. Encuentre las dimensiones con las que se obtiene la mayor área del rectángulo.

16. Una compañía de televisión por cable da servicio a 5000 hogares y cobra \$20 (dólares) al mes. Una investigación de mercado indica que si se reduce el precio en \$1, se obtendrían 500 clientes nuevos. Calcule el precio mensual que dará el mayor ingreso a la compañía.

17. Un alambre de 5 pie de largo se va a dividir en dos partes. A una de las piezas se le dará la forma de una circunferencia y a la otra la de un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas del círculo y el cuadrado sea (a) máxima, (b) mínima?

18. Una compañía de instrumentos electrónicos sabe que el costo de producir x calculadoras al día es $C(x) = 500 + 6x + 0.02x^2$. Cada calculadora se vende en \$18 (dólares). Encuentre (a) la función de ingreso, (b) la función de utilidad (o ganancia, (c) la producción diaria que dará la máxima utilidad y (d) la ganancia diaria máxima.

Ejercicios 19-26: Determine el límite, si es que existe.

19. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{(2x-5)(3x+1)}{(x+7)(4x-9)}$

20. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+11}{\sqrt{x+1}}$

21. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{6-7x}{(3+2x)^4}$

22. $\lim_{x\to-3} \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x^3+27}}$

23. $\lim_{x\to 2/3^+} \dfrac{x^2}{4-9x^2}$

24. $\lim_{x\to 3/5^-} \dfrac{1}{5x-3}$

25. $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

26. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}}$

Ejercicios 27-30: Encuentre las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, y trace la gráfica de f.

27. $f(x) = \dfrac{3x^2}{9x^2-25}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x+3}$

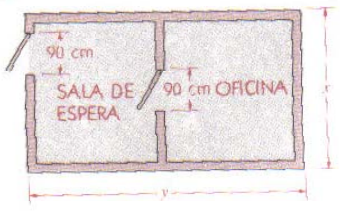
30. $f(x) = \dfrac{x^4-16}{x^3}$

31. En la bioquímica, la respuesta química R correspondiente a una concentración S de una sustancia, está dada por $R = kS^n/(S^n + a^n)$, donde k, n y a son constantes positivas. Un ejemplo es la rapidez R con que el hígado extrae alcohol de la sangre, donde S es la concentración alcohólica. Demuestre que R es una función creciente de S y que $R = k$ es una asíntota horizontal de la curva respectiva.

32. Un pequeño edificio debe tener 120 m^2 de planta. La figura muestra un plano de la edificación. Los muros cuestan \$300 (dólares) el metro lineal y el costo del espacio encima de las puertas es despreciable.
(a) Demuestre que el costo $C(x)$ de los muros es

$$C(x) = 100[3x - 6 + (1000/x)].$$

EJERCICIO 32



(b) Encuentre las asíntotas verticales y oblicuas, y trace la gráfica de $C(x)$ para $x > 0$.
(c) Halle el diseño que minimice el costo.

Ejercicios 33-38: Encuentre la antiderivada más general de f.

33. $f(x) = \dfrac{8x^2 - 4x + 5}{x^4}$

34. $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - x$

35. $f(x) = 100$

36. $f(x) = x^{3/5}(2x - \sqrt{x})$

37. $f(x) = (2x + 1)^3$

38. $f(x) = 0$

39. Resuelva la ecuación diferencial $f''(x) = x^{1/3} - 5$ con $f'(1) = 2$ y $f(1) = -8$.

40. Se lanza una piedra directamente hacia abajo desde una altura de 300 m con una velocidad inicial de 10 m/s. Encuentre su distancia al suelo a los t segundos. ¿Cuál es su velocidad a los 5 s? ¿Cuándo hará contacto con el suelo?

CAPÍTULO **5**

LA INTEGRAL DEFINIDA

*El Cálculo consta de dos partes principales, llamadas **Cálculo diferencial** y **Cálculo integral**. El Cálculo diferencial está basado en la derivada. En este capítulo se define el concepto que es la base para el Cálculo integral: la **integral definida**. Uno de los resultados más importantes que se discutirán es el **Teorema Fundamental del Cálculo**. Dicho teorema muestra que el Cálculo diferencial y el Cálculo integral están estrechamente relacionados.*

5.1 DETERMINACIÓN DEL ÁREA

Para el desarrollo de la integral definida usaremos sumas de muchos números. Para expresar tales sumas en forma compacta es conveniente utilizar la **notación de sumatoria.** Por ejemplo, dado un conjunto de números $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$ representa su suma indicada o sumatoria. Es decir,

(5.1)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

La letra griega sigma mayúscula $\sum$ denota la sumatoria y a_k representa el k-ésimo término. La letra k se llama **índice de sumatoria** o **variable de sumatoria** y adquiere valores enteros sucesivos. Los enteros 1 y n denotan los valores extremos del índice de la sumatoria.

EJEMPLO 1 Calcular $\sum_{k=1}^{4} k^2(k-3)$.

Solución En este caso, $a_k = k^2(k-3)$. Para evaluar la suma sustituimos k por 1, 2, 3 y 4 y se suman los términos resultantes. Así,

$$\sum_{k=1}^{4} k^2(k-3) = 1^2(1-3) + 2^2(2-3) + 3^2(3-3) + 4^2(4-3)$$
$$= (-2) + (-4) + 0 + 16 = 10$$

Para denotar el índice de una sumatoria se pueden usar otras letras además de k. Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{4} k^2(k-3) = \sum_{i=1}^{4} i^2(i-3) = \sum_{j=1}^{4} j^2(j-3) = 10.$$

Si $a_k = c$ para todo k, entonces

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = c + c = 2c = \sum_{k=1}^{2} c$$
$$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = c + c + c = 3c = \sum_{k=1}^{3} c.$$

En general, el siguiente resultado es válido para todo entero positivo n.

TEOREMA (5.2)
$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

El dominio del índice de sumatoria no tiene que comenzar en 1. Por ejemplo,

$$\sum_{k=4}^{8} a_k = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8.$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{(k+1)}$.

Solución

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{(k+1)} = \frac{2^0}{(0+1)} + \frac{2^1}{(1+1)} + \frac{2^2}{(2+1)} + \frac{2^3}{(3+1)}$$

$$= 1 + 1 + \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{3}.$$

TEOREMA (5.3)

Sea n un entero positivo y sean $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ dos conjuntos de números reales. Entonces

(i) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ para todo número real c.

(iii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k.$

Demostración Para demostrar (i) comenzamos con

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Reordenando los términos del lado derecho,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Para (ii),

$$\sum_{k=1}^{n} (ca_k) = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

La demostración de (iii) se deja como ejercicio. • •

La definición de la integral definida está íntimamente relacionada con las áreas de ciertas regiones en un plano coordenado. Se puede calcular fácilmente el área de una región si la misma está acotada por rectas. Por ejemplo, el área de un rectángulo es el producto de su longitud y su anchura. El área de un triángulo es la mitad del producto de una de sus alturas por la base correspondiente. El área de un polígono se puede calcular dividiéndolo en triángulos.

FIGURA 5.1

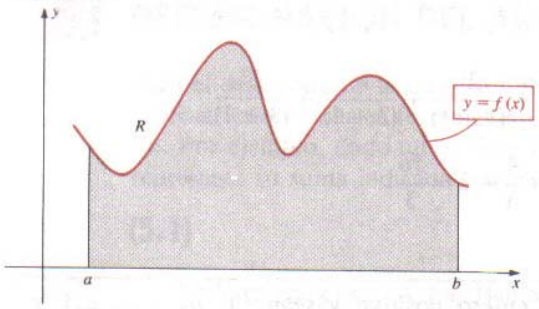
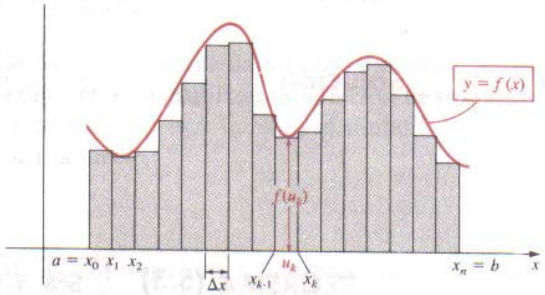


FIGURA 5.2



Para calcular las áreas de regiones más complicadas, cuyas fronteras están dadas por gráficas de funciones, es necesario utilizar un proceso de límite y aplicar los métodos del cálculo. En particular, sea R una región de un plano coordenado acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, por el eje x y por la gráfica de una función f que es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$. La Figura 5.1 ilustra una región de este tipo. Como $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, ninguna parte de la gráfica está abajo del eje x. Por conveniencia, se denominará R **la región bajo la gráfica de f entre a y b**. A continuación se define el área de R.

Sea n un entero positivo arbitrario. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la misma amplitud $(b - a)/n$. Esto se hace escogiendo números $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ con $a = x_0$, $b = x_n$, y

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b - a}{n}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. Si la amplitud $(b - a)/n$ de los subintervalos se denota por Δx, entonces para cada k,

$$\Delta x = x_k - x_{k-1} \quad \text{y} \quad x_k = x_{k-1} + \Delta x,$$

como se ilustra en la Figura 5.2.

Nótese que

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\,\Delta x, \quad \ldots,$$

$$x_k = a + k\,\Delta x, \quad \ldots, \quad x_n = a + n\,\Delta x = b.$$

Como f es continua en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, f alcanza un mínimo en algún número u_k de $[x_{k-1}, x_k]$ (véase el Teorema (4.3)). Para cada k se construye un rectángulo de anchura $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ y altura igual a la distancia mínima $f(u_k)$ del eje x a la gráfica de f, como se ilustra en la Figura 5.2. El área del k-ésimo rectángulo es $f(u_k)\,\Delta x$. La frontera de la región formada por todos estos rectángulos es el **polígono rectangular inscrito** correspondiente a la subdivisión de $[a, b]$ en n subintervalos iguales. El área de este polígono inscrito es la suma de las áreas de los n rectángulos componentes, es decir,

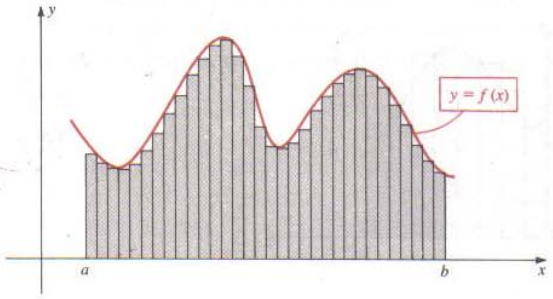
$$f(u_1)\,\Delta x + f(u_2)\,\Delta x + \cdots + f(u_n)\,\Delta x.$$

Usando la notación de sumatoria

$$\text{Área del polígono rectangular inscrito} = \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\,\Delta x$$

donde $f(u_k)$ es el mínimo de f en $[x_{k-1}, x_k]$.

FIGURA 5.3



La Figura 5.3 indica que si n es muy grande o, equivalentemente, si Δx es muy pequeño, entonces la suma de las áreas de los rectángulos debe ser casi igual al área total de la región R. Desde el punto de vista intuitivo, si existe un número A tal que la suma $\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\,\Delta x$ tiende hacia A cuando Δx tiende a cero (pero $\Delta x \neq 0$), entonces A será el **área** de R y se puede escribir

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\,\Delta x.$$

El significado de este *límite de sumas* no es el mismo que el de un límite de una función que se examinó en el Capítulo 2. Para llegar a una definición satisfactoria de A, hay que adoptar un punto de vista ligeramente distinto. Si A denota el área de R, entonces la diferencia

$$A - \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\,\Delta x$$

es el área de la porción *no sombreada* que se encuentra bajo la gráfica de f y arriba del polígono rectangular inscrito en las Figuras 5.2 o 5.3. Este número se puede considerar como el error que se comete al usar el área del polígono rectangular para estimar el área A. Se ve que tal error puede hacerse tan pequeño como se quiera escogiendo rectángulos de anchura Δx suficientemente pequeña. Esto es lo que motiva la siguiente definición del área A de la región R. Se usa la misma notación que en el análisis anterior.

DEFINICIÓN (5.4)

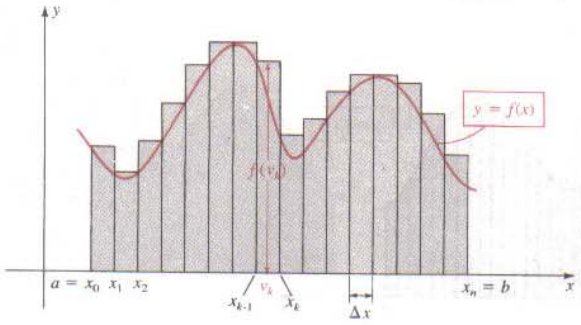
Sea f una función continua y no negativa en $[a, b]$. Sean A un número real y $f(u_k)$ el valor mínimo de f en $[x_{k-1}, x_k]$. Entonces,

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\,\Delta x$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < \Delta x < \delta$, entonces

$$A - \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\,\Delta x < \varepsilon.$$

FIGURA 5.4

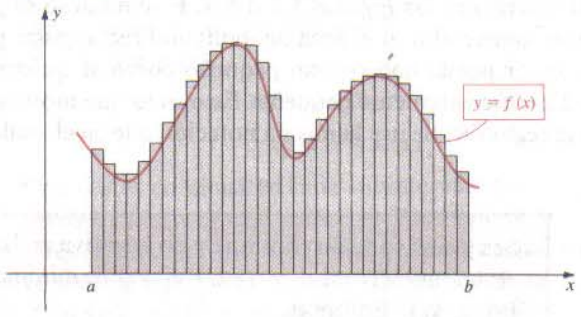


Si A es el límite indicado y se toma $\varepsilon = 10^{-9}$, entonces la Definición (5.4) establece que tomando rectángulos de anchura Δx suficientemente pequeña, puede lograrse que la diferencia entre A y el área del polígono inscrito sea menor que una milmillonésima (10^{-9}) parte de una unidad cuadrada. Análogamente, si $\varepsilon = 10^{-12}$, la diferencia se puede hacer menor que este número, que es la billonésima (10^{-12}) parte de una unidad cuadrada. En general, la diferencia puede hacerse menor que *cualquier* número previamente asignado ε.

Si f es continua en $[a, b]$, entonces (como se muestra en libros más avanzados) efectivamente, existe un número A que satisface la Definición (5.4). Tal número A se denomina **área bajo la gráfica de f entre a y b.**

También se puede evaluar el área A usando **polígonos rectangulares circunscritos**, como los que se muestran en la Figura 5.4. En este caso, se escoge un número v_k en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ tal que $f(v_k)$ es el *máximo* de f en $[x_{k-1}, x_k]$. La Figura 5.5 ilustra esto con un valor de n relativamente grande (correspondiente a Δx pequeño).

FIGURA 5.5



Usando la notación de sumatoria,

$$\text{Área del polígono rectangular circunscrito} = \sum_{k=1}^{n} f(v_k)\,\Delta x.$$

El límite de estas sumas cuando $\Delta x \to 0$ se define en (5.4). El único cambio es que ahora

$$\sum_{k=1}^{n} f(v_k)\,\Delta x - A < \varepsilon,$$

porque esta diferencia no es negativa. Puede demostrarse que se obtiene el mismo número A usando rectángulos inscritos o circunscritos.

En los siguientes ejemplos que sirven para ilustrar la Definición (5.4) se usarán las fórmulas siguientes, que pueden demostrarse por inducción matemática (véase el Apéndice I).

(5.5)

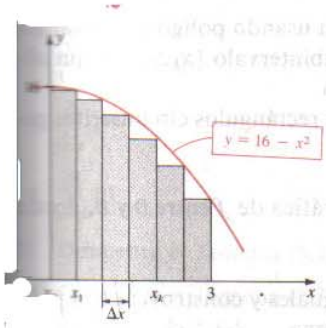
$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Los dos ejemplos siguientes muestran cómo es posible usar las propiedades de las sumas y la Definición (5.4) para determinar las áreas de ciertas regiones en un plano coordenado.

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = 16 - x^2$. Calcular el área de la región bajo la gráfica de f entre 0 y 3.



Solución La Figura 5.6 ilustra esta región (se utilizan diferentes escalas en el eje x y en el eje y). Si se divide el intervalo [0, 3] en n subintervalos iguales, entonces la longitud Δx de cada subintervalo es $3/n$. Utilizando la misma notación que en la Figura 5.2, con $a = 0$ y $b = 3$,

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\,\Delta x, \quad \ldots, \quad x_k = k\,\Delta x, \quad \ldots,$$

$x_n = n\,\Delta x = 3$. Ya que $\Delta x = 3/n$,

$$x_k = k\,\Delta x = k\frac{3}{n} = \frac{3k}{n}.$$

Como f es decreciente en [0, 3], el número u_k en $[x_{k-1}, x_k]$ en el que f alcanza su mínimo es siempre el extremo derecho x_k del subintervalo, es decir, $u_k = x_k = 3k/n$. Por lo tanto,

$$f(u_k) = f\left(\frac{3k}{n}\right) = 16 - \left(\frac{3k}{n}\right)^2 = 16 - \frac{9k^2}{n^2}$$

y la suma en la Definición (5.4) es

$$\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left(16 - \frac{9k^2}{n^2}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{48}{n} - \frac{27k^2}{n^3}\right).$$

Con ayuda de los Teoremas (5.3) y (5.2) esta última suma se puede escribir como sigue:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{48}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{27k^2}{n^3} = \left(\frac{48}{n}\right)n - \frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Ahora, aplicando (5.5) (ii) obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\,\Delta x = 48 - \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= 48 - \frac{9}{2n^3}[2n^3 + 3n^2 + n].$$

Para calcular el área de la región hacemos tender Δx a 0. Como $\Delta x = 3/n$, esto puede lograrse haciendo tender n a infinito. Aunque los límites en infinito que se estudiaron en la Sección 4.6 se referían a una variable real x, se puede tratar de manera parecida el caso en que la variable es un entero n. Aceptando esto, sustituimos $\Delta x \to 0$ por $n \to \infty$ y así

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left\{48 - \frac{9}{2n^3}[2n^3 + 3n^2 + n]\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 48 - \frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}\right]$$

$$= 48 - \frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right]$$

$$= 48 - \tfrac{9}{2}[2 + 0 + 0] = 48 - 9 = 39.$$

Por lo tanto, el área de la región mide 39 unidades cuadradas. •

El área del ejemplo anterior puede calcularse también usando polígonos rectangulares circunscritos. Para ello hay que escoger en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, un número $v_k = (k-1)(3/n)$ en el que f alcanza su máximo.

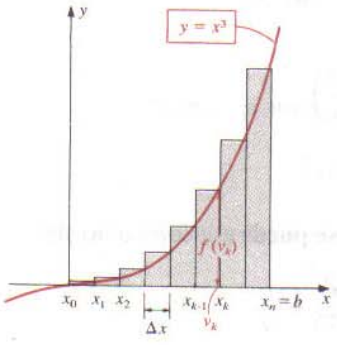
El siguiente ejemplo muestra cómo se pueden usar los rectángulos circunscritos para evaluar un área.

EJEMPLO 4 Sea $f(x) = x^3$. Calcular el área bajo la gráfica de f entre 0 y b, donde b es cualquier número real positivo.

Solución Dividiendo el intervalo $[0, b]$ en n partes iguales y construyendo el polígono rectangular circunscrito (véase la Figura 5.7), se tiene

$$\Delta x = \frac{b}{n} \quad \text{y} \quad x_k = k\,\Delta x.$$

FIGURA 5.7



Como f es una función creciente, el valor máximo $f(v_k)$ en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ lo alcanza en el extremo derecho, es decir,

$$v_k = x_k = k\,\Delta x = k\frac{b}{n} = \frac{bk}{n}.$$

La suma de las áreas de los rectángulos circunscritos es

$$\sum_{k=1}^{n} f(v_k)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{bk}{n}\right)^3\left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{b^4}{n^4}k^3$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

El último paso se deduce de (5.5) (iii). Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} f(v_k)\,\Delta x = \frac{b^4}{4}\left(\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{n^4}\right) = \frac{b^4}{4}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Si hacemos tender Δx a 0, entonces n tiende a infinito y la expresión entre paréntesis tiende a 1. Por lo tanto, el área bajo la gráfica es

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(v_k)\,\Delta x = \frac{b^4}{4}. \quad \bullet$$

EJERCICIOS 5.1

Ejercicios 1-10: Calcule la suma.

1. $\sum_{k=1}^{5} (3k - 10)$
2. $\sum_{k=1}^{6} (9 - 2k)$
3. $\sum_{j=1}^{4} (j^2 + 1)$
4. $\sum_{n=1}^{10} [1 + (-1)^n]$
5. $\sum_{k=0}^{5} k(k - 1)$
6. $\sum_{k=0}^{4} (k - 2)(k - 3)$
7. $\sum_{i=1}^{8} 2^i$
8. $\sum_{s=1}^{6} (5/s)$
9. $\sum_{i=1}^{50} 10$
10. $\sum_{k=1}^{1000} 2$

11. Demuestre el Teorema (5.3) (iii).

12. Generalice el Teorema (5.3) (i) a $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k)$.

13. Calcule $\sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 5)$. (*Sugerencia:* Escriba la suma como $\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 5$ y use (5.5) y (5.2).)

14. Calcule $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 2k + 1)$.

15. Determine $\sum_{k=1}^{n} (2k - 3)^2$.

16. Calcule $\sum_{k=1}^{n} (k^3 + 2k^2 - k + 4)$.

Ejercicios 17-26: Calcule el área bajo la gráfica de f entre a y b usando (a) rectángulos inscritos, (b) rectángulos circunscritos. Trace la gráfica y unos rectángulos típicos y marque las dimensiones con los nombres adecuados, como en las Figuras 5.6 y 5.7.

17. $f(x) = 2x + 3;\ a = 0,\ b = 4$
18. $f(x) = 8 - 3x;\ a = 0,\ b = 2$
19. $f(x) = x^2;\ a = 0,\ b = 5$
20. $f(x) = x^2 + 2;\ a = 1,\ b = 3$
21. $f(x) = 3x^2 + 5;\ a = 1,\ b = 4$
22. $f(x) = 7;\ a = -2,\ b = 6$
23. $f(x) = 9 - x^2;\ a = 0,\ b = 3$
24. $f(x) = 4x^2 + 3x + 2;\ a = 1,\ b = 5$
25. $f(x) = x^3 + 1;\ a = 1,\ b = 2$
26. $f(x) = 4x + x^3;\ a = 0,\ b = 2$

27. Use la Definición (5.4) para demostrar que el área de un triángulo rectángulo de altura h y base b es bh. (*Sugerencia:* Considere el área bajo la gráfica de $f(x) = (h/b)x$ entre 0 y b.)

28. Ejecute la demostración de que si $f(x) = px^2 + qx + r$ y $f(x) \geq 0$ para todo x, entonces el área de la gráfica de f entre 0 y b es

$$p(b^3/3) + q(b^2/2) + rb.$$

29. Demuestre (5.5) usando inducción matemática.

30. Demuestre (5.5) (i) escribiendo

$$S = 1 + 2 + \cdots + n$$
$$S = n + (n - 1) + \cdots + 1$$

y sumando los lados correspondientes de estas ecuaciones.

5.2 LA INTEGRAL DEFINIDA

En la Sección 5.1 se definió el área bajo la gráfica de una función f entre a y b como un límite de la forma

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x.$$

Restringiendo f y Δx como sigue:

1. La función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. $f(x)$ es no negativa para todo x en $[a, b]$.
3. Todos los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ tienen la misma longitud Δx.
4. El número w_k se escoge de manera que $f(w_k)$ es siempre el mínimo (o el máximo) de f en $[x_{k-1}, x_k]$.

Hay muchas aplicaciones de estos límites en los que no se satisfacen algunas de estas condiciones. Es conveniente permitir los siguientes cambios en **1-4**:

1′. La función f puede ser discontinua en algunos números de $[a, b]$.
2′. $f(x)$ puede ser negativa para algunos x en $[a, b]$.
3′. La amplitud de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ puede ser diferente.
4′. El número w_k puede ser *cualquier* número de $[x_{k-1}, x_k]$.

Para comenzar introducimos una nueva notación y terminología. Una **partición** P de un intervalo cerrado $[a, b]$ es cualquier división de $[a, b]$ en subintervalos de la forma

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

donde n es un entero positivo y los números x_k son tales que

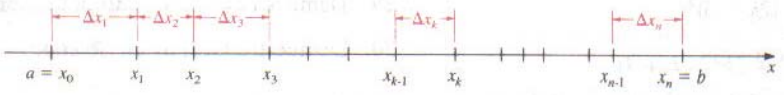
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La amplitud del k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se denotará por Δx_k, es decir,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

En la Figura 5.8 se ilustra una partición típica de $[a, b]$. El mayor de los números Δx_1, Δx_2, $\ldots$, Δx_n se llama la **norma** de la partición P y se denota por $\|P\|$.

FIGURA 5.8



El siguiente concepto, denominado en honor del matemático G.F.B. Riemann (1826-1866), es de importancia fundamental para la definición de la integral definida.

DEFINICIÓN (5.6)

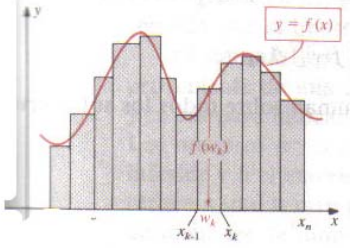
Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$. Una **suma de Riemann** de f (o de $f(x)$) para P, es una expresión R_P de la forma

$$R_P = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k$$

donde w_k es un número en $[x_{k-1}, x_k]$ y $k = 1, 2, \ldots, n$.

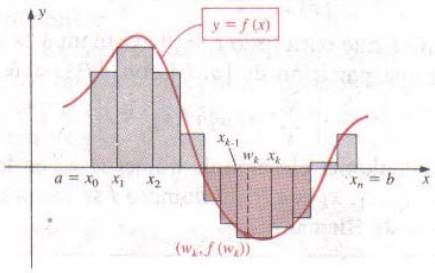
En la Definición (5.6), $f(w_k)$ no es necesariamente el máximo o el mínimo de f en $[x_{k-1}, x_k]$. Si se construye el rectángulo de altura $f(w_k)$ y anchura Δx_k, como se muestra en la Figura 5.9, éste puede no estar inscrito ni circunscrito. Además, como $f(x)$ puede ser negativo para algún x, algunos de los términos de la suma de Riemann R_P pueden ser negativos. Por lo tanto, R_P no siempre representa una suma de áreas de rectángulos.

FIGURA 5.9



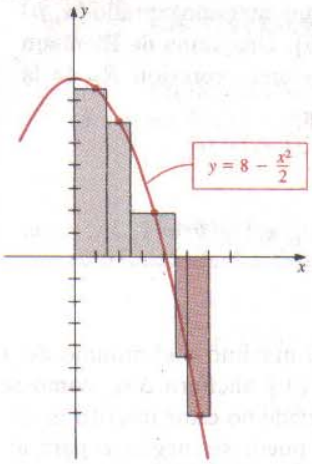
Puede interpretarse geométricamente la suma de Riemann R_P en (5.6) como sigue. Para cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se hace pasar un segmento horizontal por el punto $(w_k, f(w_k))$, obteniéndose así un conjunto de rectángulos. Si $f(w_k)$ es positivo, el rectángulo se encuentra arriba del eje x como los rectángulos en gris que se muestran en la Figura 5.10 y el producto $f(w_k)\,\Delta x_k$ es el área del rectángulo. Si $f(w_k)$ es negativo, entonces el rectángulo se encuentra abajo del eje x, como los rectángulos coloreados en la Figura 5.10. En este caso el producto $f(w_k)\,\Delta x_k$ es *el negativo* del área del rectángulo (es decir, el área del rectángulo multiplicada por -1). Entonces, R_P es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x *menos* la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran abajo del eje x.

FIGURA 5.10



EJEMPLO Sea $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$ y sea P una partición de $[0, 6]$ en cinco subintervalos determinados por $x_0 = 0$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.5$, $x_3 = 4.5$, $x_4 = 5$ y $x_5 = 6$. Calcular la norma de la partición y la suma de Riemann R_P para $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3.5$, $w_4 = 5$ y $w_5 = 5.5$.

FIGURA 5.11



Solución La gráfica de f está en la Figura 5.11. En ella también se muestran los puntos correspondientes a w_k y los rectángulos de alturas $|f(w_k)|$ para $k = 1, 2, 3, 4$ y 5. Entonces,

$$\Delta x_1 = 1.5, \quad \Delta x_2 = 1, \quad \Delta x_3 = 2, \quad \Delta x_4 = 0.5, \quad \Delta x_5 = 1.$$

La norma $\|P\|$ de la partición es Δx_3, o sea 2.

Por la Definición (5.6),

$$\begin{aligned} R_P &= f(w_1)\,\Delta x_1 + f(w_2)\,\Delta x_2 + f(w_3)\,\Delta x_3 + f(w_4)\,\Delta x_4 + \\ &\quad f(w_5)\,\Delta x_5 \\ &= f(1)(1.5) + f(2)(1) + f(3.5)(2) + f(5)(0.5) + f(5.5)(1) \\ &= (7.5)(1.5) + (6)(1) + (1.875)(2) + (-4.5)(0.5) + (-7.125)(1) \\ &= 11.625. \end{aligned}$$

No siempre se especifica el número n de subintervalos de una partición P de $[a, b]$. En ese caso la suma de Riemann (5.6) se escribe

$$R_P = \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k .$$

y se supone que los términos de la forma $f(w_k)$ se suman sobre todos los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de la partición P.

Se puede definir

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k = I$$

donde I es un número real, de manera parecida a la Definición (5.4). Intuitivamente, este límite significa que si la norma $\|P\|$ de la partición P está suficientemente cerca de 0, entonces *cualquier* suma de Riemann para P está cerca de I.

DEFINICIÓN (5.7)

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y sea I un número real. Entonces,

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k = I$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si P es una partición de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k - I \right| < \varepsilon$$

para cualquier elección de números w_k en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de P. El número I se llama **límite de las sumas de Riemann.**

Nótese que para todo $\delta > 0$ hay una infinidad de particiones P con $\|P\| < \delta$. Más aún, para cada partición P hay una infinidad de elecciones posibles de los números w_k en $[x_{k-1}, x_k]$. Por lo tanto, hay un número infinito de sumas de Riemann diferentes asociadas a *cada* partición P. Si el límite I existe, entonces para todo $\varepsilon > 0$, si la norma

de la partición es suficientemente pequeña, cualquier suma de Riemann dista de I menos que ε unidades. Aunque la Definición (5.7) difiere de la definición de límite de una función, puede darse una demostración parecida a la del Teorema de Unicidad que se tiene en el Apéndice II para demostrar que si el límite I existe, entonces es único.

A continuación se define la *integral definida* como un límite de sumas de Riemann.

DEFINICIÓN (5.8)

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La **integral definida de f entre a y b** se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$ y está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k$$

siempre y cuando el límite exista.

Si existe la integral definida de f entre a y b (o de a a b), entonces se dice que f es **integrable** en $[a, b]$ y que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ **existe**. Determinar el número representado por el límite se llama **evaluar la integral**.

El símbolo $\int$ en la Definición (5.8) es el **símbolo de integral.** Se puede considerar proveniente de una letra S (la letra inicial de la palabra *suma* escrita muy alargada) y se usa para indicar la relación entre las integrales definidas y las sumas de Riemann. Los números a y b se llaman **extremos** (o **límites**) **de integración**, siendo a el **extremo inferior** y b el **extremo superior**. En este contexto, cuando se usa el término *límite* se refiere a uno u otro extremos del intervalo $[a, b]$ y no tiene ninguna relación con las definiciones de límite que se han dado. La expresión $f(x)$ que aparece a la derecha del símbolo de integración (o *bajo* el símbolo de integral) se llama **integrando**. El símbolo diferencial dx a continuación de $f(x)$ está relacionado con el incremento Δx_k de una suma de Riemann de f. Esta relación se aprovechará más adelante en las aplicaciones.

Pueden usarse letras diferentes de x en la notación de integral definida. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt$$

etcétera. Es por esto que a la letra x en la Definición (5.8) se la llama **variable ficticia** (o "muda").

Cuando se usa un intervalo $[a, b]$ se supone que $a < b$. Por lo tanto la Definición (5.8) no toma en cuenta los casos en que el extremo inferior de integración es mayor que o igual al extremo superior. Se puede extender la definición para incluir estos casos como sigue.

DEFINICIÓN (5.9)

Si $c > d$, entonces $\int_c^d f(x)\,dx = -\int_d^c f(x)\,dx$.

La Definición (5.9) dice: *Intercambiar los límites de integración equivale a cambiar el signo de la integral.* Al considerar el Teorema Fundamental del Cálculo (5.22), se entenderá una de las razones por las que se da la Definición (5.9) en esta forma.

El caso en que el extremo inferior de integración es igual al extremo superior queda cubierto por la siguiente definición.

DEFINICIÓN (5.10) Si $f(a)$ existe, entonces $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Si f es integrable, entonces el límite en la Definición (5.8) existe independientemente de cómo se elige w_k en $[x_{k-1}, x_k]$. Esto permite tomar valores especiales x_k si así se desea. Por ejemplo, siempre puede elegirse w_k como el extremo izquierdo x_{k-1} del subintervalo, como el extremo derecho x_k o como el punto medio, o como un número en donde la función alcanza su máximo o su mínimo en $[x_{k-1}, x_k]$, etcétera. Más aún, como el extremo es independiente de las particiones P de $[a, b]$ (siempre y cuando $\|P\|$ tienda a 0), se pueden tomar siempre las particiones correspondientes a subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de la misma amplitud Δx. Una partición de este tipo se llama **partición uniforme**.

Si una partición uniforme de $[a, b]$ tiene n subintervalos, entonces $\Delta x = (b - a)/n$. En este caso, el símboio $\|P\| \to 0$ es equivalente a $\Delta x \to 0$ o bien $n \to \infty$, y la Definición (5.8) toma la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x.$$

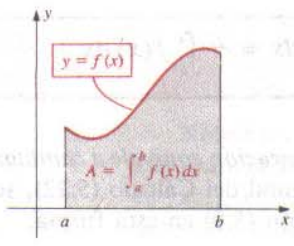
El siguiente teorema es una primera aplicación de estas sumas de Riemann especiales. En el Capítulo 6 se presentan muchas otras aplicaciones.

TEOREMA (5.11) Si f es una función integrable y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área A de la región bajo la gráfica de f entre a y b es

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración El área A es el límite de las sumas $\Sigma_k f(u_k)\,\Delta x$, para el mínimo $f(u_k)$ de f en $[x_{k-1}, x_k]$ (véase la Definición (5.4)). Como éstas son sumas de Riemann, la conclusión se deduce de la Definición (5.8). • •

FIGURA 5.12



El Teorema (5.11) se ilustra en la Figura 5.12. Es importante notar que el cálculo de áreas es apenas nuestra primera aplicación de la integral definida. *Hay muchos casos en los que* $\int_a^b f(x)\,dx$ *no representa el área de una región*. De hecho, si $f(x) < 0$ para algunos x en $[a, b]$, entonces la integral definida puede ser negativa o cero.

El siguiente teorema afirma que las funciones que son continuas en intervalos cerrados, son integrables. Este resultado desempeña un papel muy importante en la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo en la Sección 5.4.

TEOREMA (5.12) Si una función f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

La demostración del Teorema (5.12) puede encontrarse en libros de cálculo avanzado.

Las integrales definidas de funciones discontinuas pueden o no existir, dependiendo del tipo de discontinuidad. En particular, *las funciones que tienen discontinuidades infinitas en un intervalo cerrado no son integrables en ese intervalo*. Por ejemplo, sea f la función con dominio [0, 2] definida parte por parte como sigue:

$$f(x) = 0 \text{ si } x = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{1}{x} \text{ si } 0 < x \leq 2.$$

La gráfica de f se tiene en la Figura 5.13. Nótese que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$. Si M es cualquier número positivo (grande), entonces en el primer subintervalo $[x_0, x_1]$ de cualquier partición P de $[a, b]$, se puede encontrar un número w_1 tal que $f(w_1) > M/\Delta x_1$ o, equivalentemente, $f(w_1)\,\Delta x_1 > M$. Resulta que hay sumas de Riemann $\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k$ que son arbitrariamente grandes y por lo tanto, el límite en la Definición (5.8) no existe. Entonces, f no es integrable. Se puede tener un razonamiento similar para *cualquier* función que tiene una discontinuidad infinita en $[a, b]$. Por lo tanto, *si una función f es integrable en $[a, b]$, entonces es acotada en $[a, b]$*, es decir, existe un número real M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x en $[a, b]$.

Como ejemplo de una función discontinua que *es* integrable, consideremos la función f con dominio [0, 2] definida parte por parte como sigue:

$$f(x) = 4 \text{ si } x = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = x^3 \text{ si } 0 < x \leq 2.$$

La gráfica de f está en la Figura 5.14. Nótese que f tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$. Del Ejemplo 4 de la Sección 5.1, el área bajo la gráfica de $y = x^3$ entre 0 y 2 es $2^4/4 = 2$. Entonces por el Teorema (5.11), $\int_0^2 x^3\,dx = 2$. También puede demostrarse que f es integrable y que $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$.

Hemos visto que una función discontinua en un intervalo cerrado puede ser integrable o no. Sin embargo, por el Teorema (5.12), las funciones *continuas* en un intervalo cerrado son *siempre* integrables.

FIGURA 5.13

Función discontinua no integrable

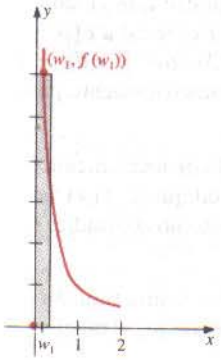


FIGURA 5.14

Función discontinua integrable



EJERCICIOS 5.2

Ejercicios 1-4: Los números $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ determinan una partición P del intervalo $[a, b]$. Encuentre $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ y la norma $\|P\|$ de la partición.

1. $[0, 5]$; $\{0, 1.1, 2.6, 3.7, 4.1, 5\}$
2. $[2, 6]$; $\{2, 3, 3.7, 4, 5.2, 6\}$
3. $[-3, 1]$; $\{-3, -2.7, -1, 0.4, 0.9, 1\}$
4. $[1, 4]$; $\{1, 1.6, 2, 3.5, 4\}$

Ejercicios 5-6: Calcule la suma de Riemann R_P de f correspondiente a la partición uniforme P de $[1, 5]$ en los cuatro subintervalos determinados por $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, eligiendo
(a) w_k como el extremo derecho x_k de $[x_{k-1}, x_k]$.
(b) w_k como el extremo izquierdo x_{k-1} de $[x_{k-1}, x_k]$.
(c) w_k como el punto medio de $[x_{k-1}, x_k]$.

5. $f(x) = 2x + 3$
6. $f(x) = 3 - 4x$
7. Sea $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$. Calcule la suma de Riemann R_P de f para la partición uniforme P de $[0, 6]$ en los seis subintervalos iguales determinados por $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$, eligiendo w_k como el punto medio del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.
8. Sea $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$. Halle la suma de Riemann R_P de f para la partición P de $[0, 6]$ en los cuatro subintervalos determinados por $x_0 = 0$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4.5$, $x_4 = 6$, eligiendo $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 4$ y $w_4 = 5$.
9. Sean $f(x) = x^3$ y P la partición de $[-2, 4]$ en los cuatro subintervalos determinados por $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 4$. Calcule la suma de Riemann R_P para $w_1 = -1$, $w_2 = 1$, $w_3 = 2$ y $w_4 = 4$.
10. Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y P la partición de $[1, 16]$ en los cinco subintervalos determinados por $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 9$ y $x_5 = 16$. Evalúe la suma de Riemann de R_P para $w_1 = 1$, $w_2 = 4$, $w_3 = 5$, $w_4 = 9$ y $w_5 = 9$.

Ejercicios 11-14: Use la Definición (5.8) para expresar cada límite como una integral sobre el intervalo $[a, b]$.

11. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (3w_k^2 - 2w_k + 5)\,\Delta x_k$; $[-1, 2]$
12. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi(w_k^2 - 4)\,\Delta x_k$; $[2, 3]$
13. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi w_k(1 + w_k^3)\,\Delta x_k$; $[0, 4]$
14. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt[3]{w_k} + 4w_k)\,\Delta x_k$; $[-4, -3]$
15. Suponiendo que $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{14}{3}$, calcule $\int_4^1 \sqrt{x}\,dx$.
16. Evalúe $\int_3^3 x^2\,dx$.
17. Suponiendo que $\int_1^2 (5x^4 - 1)\,dx = 30$, calcule $\int_1^2 (5r^4 - 1)\,dr$.
18. Suponiendo que $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{s}\,ds = \frac{45}{4}$, calcule $\int_8^{-1} \sqrt[3]{t}\,dt$.

Ejercicios 19-22: Calcule la integral definida considerándola como el área bajo la gráfica de la función f.

19. $\int_{-3}^{2} (2x + 6)\,dx$
20. $\int_{-1}^{2} (7 - 3x)\,dx$
21. $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$
22. $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, $a > 0$
23. Calcule $\int_0^b x^3\,dx$. (*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 4 de la Sección 5.1.)
24. Sea c un número real arbitrario y $f(x) = c$ para todo x. Sea P una partición arbitraria de $[a, b]$. Demuestre que cualquier suma de Riemann R_P de f es igual a $c(b - a)$. Usando este hecho demuestre que $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$. Interprete esto geométricamente para el caso en que $c > 0$.
25. Dé un ejemplo de una función continua en el intervalo $(0,1)$ tal que $\int_0^1 f(x)\,dx$ no exista. Explique por qué esto no contradice el Teorema (5.12).
26. Dé un ejemplo de una función que no sea continua en el intervalo $[0, 1]$ tal que $\int_0^1 f(x)\,dx$ exista.

5.3 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Esta sección contiene algunas propiedades fundamentales de la integral definida. La mayoría de las demostraciones son más bien técnicas y están en el Apéndice II.

TEOREMA (5.13) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$; donde c es una constante.

Demostración Sea f la función constante definida por $f(x) = c$ para todo x en $[a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$. Entonces, para todas las sumas de Riemann de f,

$$\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k = \sum_k c\,\Delta x_k = c\sum_k \Delta x_k = c(b-a).$$

(La última igualdad es válida porque la suma $\sum_k \Delta x_k$ es la amplitud del intervalo $[a, b]$.) Por lo tanto,

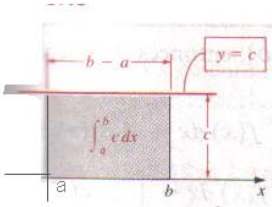
$$\left|\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k - c(b-a)\right| = |c(b-a) - c(b-a)| = 0,$$

que es menor que cualquier número positivo ε *independientemente* de la magnitud de $\|P\|$. Entonces, por la Definición (5.7), con $I = c(b-a)$,

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k c\,\Delta x_k = c(b-a).$$

De acuerdo con la Definición (5.8), esto significa que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a). \quad \bullet\bullet$$



El Teorema (5.13) coincide con lo que se vio acerca de áreas en la Sección 5.1, pues, si $c > 0$, entonces como se ilustra en la Figura 5.15, la gráfica de f es la recta horizontal $y = c$ y la región bajo la gráfica entre a y b es un rectángulo con lados de longitud c y $b - a$. Por lo tanto, el área $\int_a^b f(x)\,dx$ del rectángulo es $c(b-a)$.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int_{-2}^{3} 7\,dx$.

Solución Usando el Teorema (5.13),

$$\int_{-2}^{3} 7\,dx = 7[3-(-2)] = 7(5) = 35. \quad \bullet$$

Cuando $c = 1$ en el Teorema (5.13), el integrando se abrevia como sigue

$$\int_a^b dx = b - a.$$

Si una función f es integrable en $[a, b]$ y c es un número real, entonces por el Teorema (5.3) (ii), una suma de Riemann de la función cf se puede escribir

$$\sum_k cf(w_k)\,\Delta x_k = c\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k.$$

Se puede demostrar que el límite de las sumas al lado izquierdo es igual a c multiplicado por el límite de las sumas en el lado derecho. Enunciando lo anterior en términos de integrales definidas se obtiene el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en el Apéndice II.

TEOREMA (5.14) Si f es integrable en $[a, b]$ y c es un número real arbitrario, entonces cf es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

A veces el Teorema (5.14) se enuncia diciendo que *un factor constante del integrando se puede sacar del signo de integral. No* se pueden sacar expresiones con variables del símbolo de integración.

Si f y g son dos funciones definidas en $[a, b]$, entonces por el Teorema (5.3) (i), una suma de Riemann de $f + g$ se puede escribir

$$\sum_k [f(w_k) + g(w_k)]\,\Delta x_k = \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k + \sum_k g(w_k)\,\Delta x_k.$$

Puede demostrarse que si f y g son integrables, entonces el límite de las sumas a la izquierda es igual a la suma de los límites de las dos sumas a la derecha. Este hecho se enuncia con integrales en (i) del siguiente teorema. En el Apéndice II se encuentra una demostración de (i). En (ii) del teorema se enuncia un resultado análogo para la resta. La demostración se deja como ejercicio.

TEOREMA (5.15) Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ y $f - g$ son integrables en $[a, b]$ y

(i) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$

El Teorema (5.15) (i) se puede extender a sumas de cualquier número finito de funciones. Así, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son integrables en $[a, b]$, entonces también lo es la suma y

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

EJEMPLO 2 Se podrá deducir de los resultados de la Sección 5.5 que

$$\int_0^2 x^3\,dx = 4 \quad \text{y} \quad \int_0^2 x\,dx = 2.$$

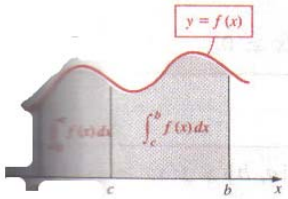
Usar estos resultados para evaluar $\displaystyle\int_0^2 (5x^3 - 3x + 6)\,dx.$

Solución Procedemos como sigue:

$$\int_0^2 (5x^3 - 3x + 6)\,dx = \int_0^2 5x^3\,dx - \int_0^2 3x\,dx + \int_0^2 6\,dx$$
$$= 5\int_0^2 x^3\,dx - 3\int_0^2 x\,dx + 6(2-0)$$
$$= 5(4) - 3(2) + 12 = 26. \quad \bullet$$

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces por el Teorema (5.11), la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área bajo la gráfica de f entre a y b. Análogamente, si $a < c < b$, entonces las integrales $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son las áreas bajo la gráfica de f entre a y c y entre c y b, respectivamente, como se ilustra en la Figura 5.16. Como el área entre a y b es la suma de las dos áreas menores, se tiene

FIGURA 5.16



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

El siguiente resultado muestra que esta igualdad es válida según hipótesis más generales. La demostración está en el Apéndice II.

TEOREMA (5.16)

Si $a < c < b$ y f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

El siguiente resultado es una generalización del Teorema (5.16) al caso en que c no está necesariamente entre a y b.

TEOREMA (5.17)

Si f es una función integrable en un intervalo cerrado y a, b, c son tres números del intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Demostración Si a, b, c son todos diferentes, entonces hay seis ordenaciones posibles de estos tres números. El teorema se debe verificar para cada uno de estos casos y también para aquellos en que dos o los tres números son iguales. Aquí verificaremos sólo uno de los casos dejando los restantes como ejercicio. Supongamos que $c < a < b$. Por el Teorema (5.16),

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

que también se puede escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

La conclusión del teorema puede obtenerse ahora del hecho de que intercambiar los límites de integración cambia el signo de la integral (véase la Definición (5.9)). • •

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área bajo la gráfica de f entre a y b es mayor que o igual al área bajo la gráfica de g entre a y b. El corolario del siguiente teorema es una generalización de este hecho para funciones integrables arbitrarias. La demostración del teorema se tiene en el Apéndice II.

TEOREMA (5.18)

Si f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

COROLARIO (5.19)

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces

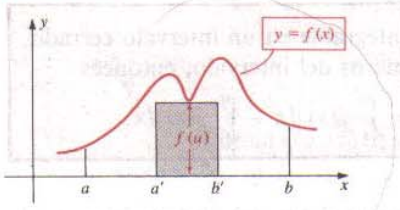
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demostración Por el Teorema (5.15), $f - g$ es integrable. Además, $f(x) - g(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$. Entonces por el Teorema (5.18),

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geq 0.$$

Aplicando el teorema (5.15) (ii) se obtiene la conclusión deseada. • •

FIGURA 5.17



Supongamos que en el Teorema (5.18) f es continua y además de la condición $f(x) \geq 0$ se tiene $f(c) > 0$ para algún c en $[a, b]$. En este caso, $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ y por el Teorema (2.12), existe un subintervalo $[a', b']$ de $[a, b]$ donde $f(x)$ es positiva. Si $f(u)$ es el mínimo de f en $[a', b']$ (véase la Figura 5.17), entonces el área bajo la gráfica de f entre a y b es mayor que o igual al área $f(u)(b' - a')$ del rectángulo indicado. Por lo tanto, $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Entonces, como en la demostración del Corolario (5.19), puede demostrarse que si f y g son continuas en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$, y si además $f(x) > g(x)$ para algún x en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$. Este hecho se utiliza en la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA LA INTEGRAL DEFINIDA (5.20)

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número z en el intervalo abierto (a, b) tal que

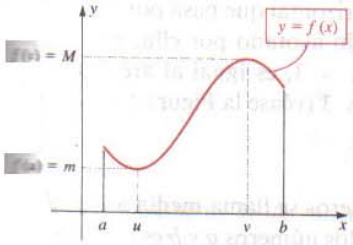
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(z)(b - a).$$

Demostración Si f es una función constante, entonces $f(x) = c$ para algún número c y por el Teorema (5.13),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a) = f(z)(b-a)$$

para *cualquier* número z en (a, b).

FIGURA 5.18



Ahora supongamos que f no es constante y que m y M son respectivamente el mínimo y el máximo de f en $[a, b]$. Sean u y v en $[a, b]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$. Esto se ilustra en la Figura 5.18 para el caso en que $f(x)$ es positivo en todo $[a, b]$. Como f no es una función constante, $m < f(x) < M$ para algún x en $[a, b]$, y por el comentario anterior al teorema,

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx.$$

Aplicando el Teorema (5.13),

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

Dividiendo entre $b - a$ y recordando que $m = f(u)$ y $M = f(v)$, se obtiene

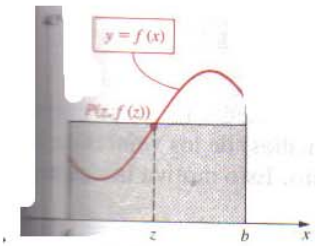
$$f(u) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < f(v).$$

Como $[1/(b-a)]\int_a^b f(x)\,dx$ es un número entre $f(u)$ y $f(v)$, del Teorema del Valor Intermedio (2.28) se deduce que existe un número z, con $u < z < v$, tal que

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Multiplicando ambos lados por $b - a$ se obtiene la conclusión del teorema. • •

FIGURA 5.19

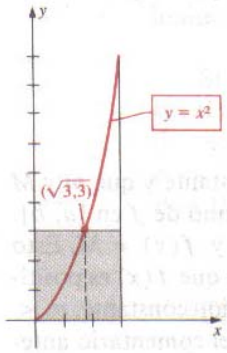


El número z del Teorema (5.20) no es necesariamente único; sin embargo, el teorema garantiza que la igualdad se satisface para *algún* número z.

El Teorema del Valor Medio tiene una interpretación geométrica interesante para el caso en que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. En este caso $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área bajo la gráfica de f entre a y b. Si se traza una recta horizontal que pase por el punto $P(z, f(z))$, como en la Figura 5.19, entonces el área del rectángulo acotado por esta recta, por el eje x y por las rectas $x = a$ y $x = b$, es $f(z)(b-a)$ que, según el Teorema (5.20), es igual al área bajo la gráfica de f entre a y b.

EJEMPLO 3 A partir de los resultados de la Sección (5.4) se podrá demostrar que $\int_0^3 x^2\,dx = 9$. Encontrar un número z que satisfaga la conclusión del Teorema del Valor Medio (5.20) para esta integral definida.

FIGURA 5.20



Solución La gráfica de $f(x) = x^2$ se tiene en la Figura 5.20 para $0 \le x \le 3$. Por el Teorema del Valor Medio, existe un número z entre 0 y 3 tal que

$$\int_0^3 x^2\,dx = f(z)(3-0) = z^2(3).$$

Esto implica que

$$9 = 3z^2 \quad \text{y} \quad z^2 = 3.$$

Por lo tanto, $z = \sqrt{3}$ satisface la conclusión del teorema.

Si se considera la recta horizontal que pasa por $P(\sqrt{3}, 3)$, entonces el área del rectángulo acotado por ella, por el eje x y por las rectas $x = 0$ y $x = 3$, es igual al área bajo la gráfica de f entre $x = 0$ y $x = 3$ (véase la Figura 5.20). •

En estadística, el **promedio** de un conjunto de números se llama **media aritmética**, o simplemente **media**. Entonces la media aritmética de dos números a y b es $(a + b)/2$, la media de tres números a, b y c es $(a + b + c)/3$, etcétera. La relación entre la noción de media aritmética y el calificativo *medio* que figura en el Teorema del Valor Medio se puede ver expresando la conclusión de (5.20) como

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

y la integral definida como un límite de sumas. Tomando el caso especial en la Definición (5.8) en que las particiones P son uniformes con n subintervalos, entonces

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f(w_k)\frac{\Delta x}{b-a}\right]$$

donde w_k son números arbitrarios en el k-ésimo subintervalo de P y $\Delta x = (b-a)/n$. Como $\Delta x/(b-a) = 1/n$, se obtiene

$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f(w_k)\frac{\Delta x}{b-a}\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f(w_k)\frac{1}{n}\right]$$

o bien

$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(w_1) + f(w_2) + \cdots + f(w_n)}{n}\right].$$

Esto demuestra que el número $f(z)$ en el Teorema del Valor Medio (5.20) se puede considerar como el límite de las medias aritméticas (o promedios) de los valores de la función $f(w_1), f(w_2), \ldots, f(w_n)$ cuando n tiende a infinito. Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN (5.21) Sea f continua en $[a, b]$. El **valor medio** (o **promedio**) f_{med} de f en $[a, b]$ es

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Como ejemplo de la Definición (5.21), sea $f(x) = x^2$ en [0, 3]. Nótese que en este intervalo los valores de la función van de $f(0) = 0$ a $f(3) = 9$. Del Ejemplo 3, se ve que $f_{\text{med}} = f(\sqrt{3}) = 3$.

EJERCICIOS 5.3

Ejercicios 1-6: Evaluar la integral definida.

1. $\int_{-2}^{3} 5\,dx$
2. $\int_{1}^{10} \sqrt{2}\,dx$
3. $\int_{0}^{3} dx$
4. $\int_{4}^{-3} dx$
5. $\int_{-1}^{1} dx$
6. $\int_{2}^{2} 100\,dx$

Ejercicios 7-10: A partir de los resultados de la Sección 5.4 puede demostrarse que

$$\int_{1}^{4} x^2\,dx = 21 \quad \text{y} \quad \int_{1}^{4} x\,dx = \tfrac{15}{2}.$$

Utilícense estos resultados para evaluar la integral.

7. $\int_{1}^{4} (3x^2 + 5)\,dx$
8. $\int_{1}^{4} (6x - 1)\,dx$
9. $\int_{1}^{4} (2 - 9x - 4x^2)\,dx$
10. $\int_{1}^{4} (3x + 2)^2\,dx$

Ejercicios 11-12: Verifique la desigualdad sin evaluar la integral.

11. $\int_{1}^{2} (3x^2 + 4)\,dx \geq \int_{1}^{2} (2x^2 + 5)\,dx$
12. $\int_{1}^{4} (3x^2 - 4\sqrt{x} + 2)\,dx > 0$

Ejercicios 13-16: Exprese la suma o la resta como una sola integral de la forma $\int_a^b f(x)\,dx$.

13. $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{5} f(x)\,dx$
14. $\int_{2}^{6} f(x)\,dx + \int_{6}^{4} f(x)\,dx$
15. $\int_{c}^{a} f(x)\,dx - \int_{c}^{b} f(x)\,dx$
16. $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx - \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

Ejercicios 17-22: A partir de los resultados de la Sección 5.5 se podrán verificar los valores da cada integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Encuentre (a) números que satisfagan la conclusión del Teorema del Valor Medio (5.20), y (b) el valor medio de f en $[a, b]$.

17. $\int_{0}^{3} 3x^2\,dx = 27$
18. $\int_{-1}^{3} (3x^2 - 2x + 3)\,dx = 32$
19. $\int_{-1}^{8} 3\sqrt{x + 1}\,dx = 54$
20. $\int_{-2}^{-1} 8x^{-3}\,dx = -3$
21. $\int_{1}^{2} (4x^3 - 1)\,dx = 14$
22. $\int_{1}^{4} (2 + 3\sqrt{x})\,dx = 20$
23. Demuestre el Teorema (5.15) (ii). (*Sugerencia:* Sea $f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$.)
24. Demuestre que si f y g son integrables en $[a, b]$, y p y q son dos números reales cualesquiera, entonces
$$\int_a^b [pf(x) + qg(x)]\,dx = p\int_a^b f(x)\,dx + q\int_a^b g(x)\,dx.$$
25. Demuestre que si f es continua en $[a, b]$, entonces
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$
26. Complete la demostración del Teorema (5.17) considerando todas las ordenaciones posibles de los números a, b y c.

5.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Esta sección contiene uno de los teoremas más importantes. Además de que sirve para evaluar integrales definidas, el teorema muestra la relación entre la derivada y la integral. Justamente llamado *Teorema Fundamental del Cálculo* fue descubierto indepen-

dientemente por sir Isaac Newton (1642-1727) en Inglaterra y por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en Alemania. Es principalmente por este descubrimiento que se considera a estos hombres como los inventores del Cálculo (o Cálculo infinitesimal).

Para evitar confusiones en esta sección, se usa t como la variable independiente y se denota la integral definida de f entre a y b por $\int_a^b f(t)\,dt$. Si f es continua en $[a, b]$ y $a \le x \le b$, entonces f es continua en $[a, x]$ y, por el Teorema (5.12), f es integrable en $[a, x]$. Por lo tanto, la fórmula

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

determina una función G con dominio $[a, b]$ que asocia a cada número x en $[a, b]$ un número único $G(x)$.

Para obtener una interpretación geométrica de $G(x)$, supongamos que $f(t) \ge 0$ para todo t en $[a, b]$. En este caso, del teorema (5.11) se ve que $G(x)$ es el área de la región bajo la gráfica de f entre a y x (véase la Figura 5.21).

Como ejemplo específico, consideremos $f(t) = t^3$ con $a = 0$ y $b > 0$ (véase la Figura 5.22). En el Ejemplo 4 de la Sección 5.1 se demostró que el área bajo la gráfica de f entre 0 y b es $\frac{1}{4}b^4$. Entonces, el área entre 0 y x es

$$G(x) = \int_0^x t^3\,dt = \frac{1}{4}x^4.$$

FIGURA 5.21

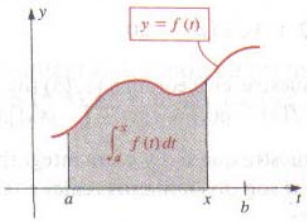
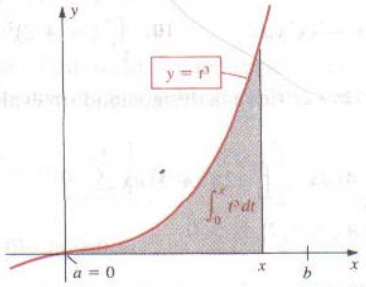


FIGURA 5.22



Esto da una forma explícita para la función G cuando $f(t) = t^3$. Nótese que en este caso,

$$G'(x) = D_x(\tfrac{1}{4}x^4) = x^3 = f(x).$$

Es decir, G es una antiderivada de f, de acuerdo con la Definición (4.30). Esto no es una casualidad. La Parte I del siguiente teorema enuncia el hecho notable de que si f es *cualquier* función continua, entonces $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de $f(x)$. La Parte II del teorema indica cómo se puede usar *cualquier* antiderivada para evaluar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (5.22)

Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Parte I Si la función G está definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

para todo x en $[a, b]$, entonces G es una antiderivada de f en $[a, b]$.

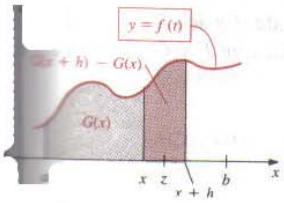
Parte II Si F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración Para probar la Parte I se debe verificar que si x está en $[a, b]$ entonces $G'(x) = f(x)$, es decir,

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} = f(x).$$

FIGURA 5.23



Antes de dar una demostración formal, consideremos algunos aspectos geométricos de este límite. Si $f(x) \geq 0$ en todo $[a, b]$, entonces $G(x)$ es el área bajo la gráfica de f entre a y x, como se ilustra en la Figura 5.23. Si $h > 0$, entonces $G(x + h) - G(x)$ es el área bajo la gráfica de f entre x y $x + h$, el número h es la amplitud del intervalo $[x, x + h]$. Se demostrará que

$$\frac{G(x + h) - G(x)}{h} = f(z)$$

para algún número z entre x y $x + h$. Aparentemente, si $h \to 0$, entonces $z \to x$ y $f(z) \to f(x)$, que es lo que se quiere demostrar.

A continuación se da una demostración rigurosa de que $G'(x) = f(x)$. Si x y $x + h$ están en $[a, b]$, entonces usando la definición de G, la Definición (5.9) y el Teorema (5.16), resulta

$$\begin{aligned} G(x + h) - G(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $h \neq 0$,

$$\frac{G(x + h) - G(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Para $h > 0$, por el Teorema del Valor Medio (5.20), existe un número z en el intervalo abierto $(x, x + h)$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(z)h$$

y por tanto, $$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(z).$$

Como $x < z < x + h$, de la continuidad de f se deduce que

$$\lim_{h\to 0^+} f(z) = \lim_{z\to x^+} f(z) = f(x)$$

y, así, $$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} f(z) = f(x).$$

Si $h < 0$ se puede demostrar de manera análoga que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x).$$

Los dos límites unilaterales anteriores implican que

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x).$$

Esto completa la demostración de la Parte I.

Para probar la Parte II, sea F cualquier antiderivada de f y sea G la antiderivada especial definida en la Parte I. Del Teorema (4.32), resulta que F y G difieren en una constante; es decir, existe un número C tal que

$$G(x) - F(x) = C$$

para todo x en $[a, b]$. Entonces de la definición de G,

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = C$$

para todo x en $[a, b]$. Si se toma $x = a$ y se usa el hecho de que $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, se obtiene $0 - F(a) = C$. Por lo tanto,

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = -F(a).$$

Como ésta es una identidad para todo x en $[a, b]$, se puede sustituir x por b y al hacerlo se obtiene

$$\int_a^b f(t)\,dt - F(b) = -F(a).$$

Sumando $F(b)$ a ambos lados de esta ecuación y reemplazando la variable t por x, se obtiene la conclusión de la Parte II. • •

La diferencia $F(b) - F(a)$ se denota por el símbolo $F(x)]_a^b$ o por el $[F(x)]_a^b$. La Parte II del Teorema Fundamental se puede expresar en esta notación como sigue.

COROLARIO (5.23)

Si f es continua en $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

La fórmula en el Corolario (5.23) también se cumple si $a \geq b$. Si $a > b$ entonces por la Definición (5.9),

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= -\int_b^a f(x)\,dx \\ &= -[F(a) - F(b)] \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Si $a = b$ entonces por la Definición (5.10),

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 = F(a) - F(a).$$

El Corolario (5.23) permite evaluar integrales definidas muy fácilmente si se conoce alguna antiderivada del integrando. Por ejemplo, como una de las antiderivadas de x^3 es $\frac{1}{4}x^4$, se tiene que

$$\int_0^b x^3\,dx = \tfrac{1}{4}x^4\Big]_0^b = \tfrac{1}{4}b^4 - \tfrac{1}{4}(0)^4 = \tfrac{1}{4}b^4.$$

Quienes duden de la importancia del Teorema Fundamental deben comparar esta fácil evaluación con la del límite de sumas que se dio en el Ejemplo 4 de la Sección 5.1.

El siguiente ejemplo ilustra una vez más el Corolario (5.23).

EJEMPLO 1 Evaluar $\int_{-2}^{3} (6x^2 - 5)\,dx$.

Solución Una de las antiderivadas de $6x^2 - 5$ está dada por $F(x) = 2x^3 - 5x$. Aplicando el Corolario (5.23),

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} (6x^2 - 5)\,dx &= \Big[2x^3 - 5x\Big]_{-2}^{3} \\ &= [2(3)^3 - 5(3)] - [2(-2)^3 - 5(-2)] \\ &= [54 - 15] - [-16 + 10] = 45. \quad \bullet\end{aligned}$$

Nótese que si en el Corolario (5.23) se usa $F(x) + C$ en vez de $F(x)$, obtiene el mismo resultado ya que

$$\begin{aligned}\Big[F(x) + C\Big]_a^b &= \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} \\ &= F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.\end{aligned}$$

Esto confirma el hecho de que en el Teorema Fundamental se puede usar *cualquier* antiderivada F. Nótese también que para cualquier número k,

$$\Big[kF(x)\Big]_a^b = kF(b) - kF(a) = k[F(b) - F(a)] = k\Big[F(x)\Big]_a^b,$$

es decir, que un factor constante se puede "sacar" del paréntesis (corchetes) cuando se usa esta notación. Éste es un resultado análogo al Teorema (5.14) para integrales definidas.

REGLA DE LA POTENCIA PARA LAS INTEGRALES DEFINIDAS (5.24)

Si r es un número racional y $r \neq -1$, entonces

$$\int_a^b x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\Big]_a^b = \frac{1}{r+1}(b^{r+1} - a^{r+1}).$$

Demostración Por la Regla de la Potencia para Derivadas, $x^{r+1}/(r+1)$ es una antiderivada de x^r siempre que estas expresiones estén definidas. La conclusión se obtiene aplicando el Corolario (5.23). • •

Puede usarse la Regla de la Potencia (5.24) y el Teorema (5.14) para obtener

$$\int_a^b k\,x^r\,dx = k\int_a^b x^r\,dx = k\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_a^b$$

siempre que $r \neq -1$. Para sumas de términos de la forma kx^r, la Regla de la Potencia (5.24) se aplica a cada término como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 2 Evaluar $\int_{-1}^{2} (x^3+1)^2\,dx$.

Solución Comenzamos por desarrollar el cuadrado del integrando y luego se aplica la Regla de la Potencia a cada término, como sigue:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} (x^3+1)^2\,dx &= \int_{-1}^{2} (x^6+2x^3+1)\,dx\\ &= \left[\frac{x^7}{7}+2\left(\frac{x^4}{4}\right)+x\right]_{-1}^{2}\\ &= \left[\frac{2^7}{7}+2\left(\frac{2^4}{4}\right)+2\right]-\left[\frac{(-1)^7}{7}+2\frac{(-1)^4}{4}+(-1)\right]\\ &= \frac{405}{14}. \quad \bullet\end{aligned}$$

Es importante notar que en el ejemplo anterior,

$$\int_{-1}^{2} (x^3+1)^2\,dx \neq \frac{(x^3+1)^3}{3}\Big]_{-1}^{2}.$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int_1^4 \left(5x - 2\sqrt{x} + \frac{32}{x^3}\right)dx$.

Solución Se empieza por cambiar la forma del integrando para poder aplicar la Regla de la Potencia a cada término. Así,

$$\begin{aligned}\int_1^4 (5x - 2x^{1/2} + 32x^{-3})\,dx &= \left[5\left(\frac{x^2}{2}\right)-2\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)+32\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)\right]_1^4\\ &= \left[\frac{5}{2}x^2-\frac{4}{3}x^{3/2}-\frac{16}{x^2}\right]_1^4\\ &= \left[\frac{5}{2}(4)^2-\frac{4}{3}(4)^{3/2}-\frac{16}{4^2}\right]-\left[\frac{5}{2}-\frac{4}{3}-16\right]\\ &= \frac{259}{6}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Determinar $\int_{-2}^{3} |x|\,dx$.

Solución Por la Definición (1.2), $|x| = -x$ si $x < 0$ y $|x| = x$ si $x \geq 0$. Esto sugiere usar el Teorema (5.16) para expresar la integral como una suma de dos integrales definidas, como sigue:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} |x|\,dx &= \int_{-2}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{3} |x|\,dx \\ &= \int_{-2}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3} \\ &= -\left[0 - \frac{4}{2}\right] + \left[\frac{9}{2} - 0\right] \\ &= 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}.\end{aligned}$$

El definir a una función por medio de una integral definida, como se hace en la Parte I del Teorema Fundamental del Cálculo (5.22), tendrá una aplicación muy importante en el Capítulo 7 (véase la Definición (7.4)). Recordemos de (5.22) que si f es una función continua en $[a, b]$ y $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para $a \leq x \leq b$, entonces G es una antiderivada de f, es decir, $D_x G(x) = f(x)$. Esto puede enunciarse con una integral como sigue:

$$D_x \int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Esta fórmula se generaliza en el siguiente teorema.

TEOREMA (5.25)

Sea f continua en $[a, b]$. Si $a \leq c \leq b$, entonces para todo x en $[a, b]$,

$$D_x \int_c^x f(t)\,dt = f(x).$$

Demostración Si F es una antiderivada de f, entonces

$$\begin{aligned}D_x \int_c^x f(t)\,dt &= D_x\,[F(x) - F(c)] \\ &= D_x F(x) - D_x F(c) \\ &= f(x) - 0 = f(x).\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Sea $G(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ y $x > 0$. Obtener $G'(x)$.

Solución Aplicaremos el Teorema (5.25) con $c = 1$ y $f(x) = 1/x$. Si escogemos a y b de manera que $0 < a \leq 1 \leq b$, entonces f es continua en $[a, b]$. Por el Teorema (5.25), para todo x en $[a, b]$,

$$G'(x) = D_x \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}. \quad \bullet$$

En (5.21) se definió el *valor medio* f_{med} de una función f en $[a, b]$ como sigue:

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

El ejemplo siguiente muestra que esta terminología es apropiada.

EJEMPLO 6 Sea P un punto que se mueve sobre una recta coordenada y tiene una función continua de velocidad v. Demostrar que el valor medio de v en $[a, b]$ es igual a la velocidad media durante el intervalo $[a, b]$.

Solución De la Definición (5.21),

$$v_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)\,dt.$$

Si s es la función de posición de P, de la Definición (3.18), $s'(t) = v$; es decir, $s(t)$ es una antiderivada de $v(t)$. Entonces, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b s'(t)\,dt = s(t)\Big]_a^b = s(b) - s(a).$$

Sustituyendo esto en la fórmula para v_{med}, obtenemos

$$v_{\text{med}} = \frac{s(b) - s(a)}{b-a},$$

que es la velocidad media de P en $[a, b]$ (véase (2.3)). •

Hay resultados parecidos al del Ejemplo 6 sobre aceleración media, costo marginal medio, ingreso marginal medio y muchas otras aplicaciones de la derivada (véanse los Ejercicios 43-48).

EJERCICIOS 5.4

Ejercicios 1-26: Evalúe la integral definida.

1. $\int_1^4 (x^2 - 4x - 3)\,dx$
2. $\int_{-2}^3 (5 + x - 6x^2)\,dx$
3. $\int_{-2}^3 (8z^3 + 3z - 1)\,dz$
4. $\int_0^2 (w^4 - 2w^3)\,dw$
5. $\int_7^{12} dx$
6. $\int_{-6}^{-1} 8\,dx$
7. $\int_1^2 [5/(8x^6)]\,dx$
8. $\int_1^4 \sqrt{16x^5}\,dx$
9. $\int_4^9 \dfrac{t-3}{\sqrt{t}}\,dt$
10. $\int_{-1}^{-2} \dfrac{2s-7}{s^3}\,ds$
11. $\int_{-8}^8 (\sqrt[3]{s^2} + 2)\,ds$
12. $\int_1^0 t^2(\sqrt[3]{t} - \sqrt{t})\,dt$
13. $\int_0^1 (2x-3)(5x+1)\,dx$
14. $\int_{-1}^1 (x^2+1)^2\,dx$
15. $\int_{-1}^0 (2w+3)^2\,dw$
16. $\int_5^5 \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x^5+1}}\,dx$
17. $\int_3^2 \dfrac{x^2-1}{x-1}\,dx$
18. $\int_0^{-1} \dfrac{x^3+8}{x+2}\,dx$

19. $\int_1^1 (4x^2 - 5)^{100}\, dx$

20. $\int_1^2 (4u^{-5} + 6u^{-4})\, du$

21. $\int_1^3 \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2}\, dx$

22. $\int_{-1}^{-1} \left(r - \dfrac{1}{r}\right)^2 dr$

23. $\int_{-3}^{6} |x - 4|\, dx$

24. $\int_{-1}^{1} (x + 1)(x + 2)(x + 3)\, dx$

25. $\int_0^4 \sqrt{3t}(\sqrt{t} + \sqrt{3})\, dt$

26. $\int_{-1}^{5} |2x - 3|\, dx$

Ejercicios 27-28: Verifique la identidad usando primero el Teorema Fundamental del Cálculo (5.22) y luego derivando (véase el Teorema (5.25)).

27. $D_x \int_0^x (t^3 - 4\sqrt{t} + 5)\, dt = x^3 - 4\sqrt{x} + 5$ si $x \geq 0$

28. $D_x \int_0^x (5t + 3)^2\, dt = (5x + 3)^2$

29. Encuentre $D_x \int_0^x \dfrac{1}{t + 1}\, dt$

30. Determine $D_x \int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$ para $|x| < 1$.

31. Sea $f(x) = x^2 + 1$. Halle el área de la región bajo la gráfica de f entre -1 y 2.

32. Sea $f(x) = x^3$. Halle el área de la región bajo la gráfica de f entre 1 y 3.

Ejercicios 33-36: Verifique la fórmula por derivación.

33. $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}\, dx = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}}\Bigg]_a^b$

34. $\displaystyle\int_a^b \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 1)^3} - \sqrt{x^2 + 1}\right]_a^b$

35. $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{(x^2 + c^2)^{n+1}}\, dx = \frac{-1}{2n(x^2 + c^2)^n}\Bigg]_a^b,\ n \neq 0$

36. $\displaystyle\int_a^b \frac{x^2}{(x^3 + c^3)^{n+1}}\, dx = \frac{-1}{3n(x^3 + c^3)^n}\Bigg]_a^b,\ n \neq 0$

Ejercicios 37-40: Encuentre un número que satisfaga la conclusión del Teorema del Valor Medio (5.20) para la integral definida que se da.

37. $\int_0^4 (\sqrt{x} + 1)\, dx$

38. $\int_{-1}^1 (2x + 1)^2\, dx$

39. $\int_{-1}^2 (3x^3 + 2)\, dx$

40. $\int_1^9 (3/x^2)\, dx$

Ejercicios 41-42: Calcule el valor medio de la función en el intervalo $[a, b]$.

41. $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $[-1, 2]$

42. $f(x) = x^3$, $[-1, 1]$

43. Un punto P se mueve sobre una recta coordenada con una función continua de aceleración a. La *aceleración media* en el intervalo $[t_1, t_2]$ es $[v(t_2) - v(t_1)]/(t_2 - t_1)$, donde v es la función de velocidad. Demuestre que la aceleración media es igual al valor medio de a en $[t_1, t_2]$.

44. Demuestre que si una función f tiene una derivada continua en $[a, b]$, entonces la tasa (o razón) media de variación de $f(x)$ con respecto a x en $[a, b]$ (véase la Definición (3.19)) es igual al valor medio de f' en $[a, b]$.

45. Sean C y c la función de costo y de costo medio de un producto, respectivamente. Demuestre que el valor medio de la función de costo marginal en $[0, n]$ es igual al costo medio $c(n)$.

46. Si R es la función de ingreso de un producto, entonces el ingreso medio al producir n unidades es $R(n)/n$. Demuestre que este ingreso medio es igual al valor medio de la función de ingreso marginal en $[0, n]$.

47. Una pelota se deja caer desde una altura de s_0 pies. Use la Definición (5.21) (y desprecie la resistencia del aire) para demostrar que la velocidad media del recorrido de la pelota hasta el suelo es $4\sqrt{s_0}$ pie/s. (*Sugerencia:* La distancia que recorre la pelota en t segundos es $16t^2$ pie.)

48. Un meteorólogo determina que la temperatura T (en °F) durante un frío día de invierno está dada por $T = 0.05t(t - 12)(t - 24)$ donde t es el tiempo (en horas) y $t = 0$ corresponde a la medianoche. Encuentre la temperatura media entre las 6:00 A.M. y el mediodía.

49. Pruebe que si g es derivable y f es continua para todo x, entonces $D_x \int_a^{g(x)} f(t)\, dt = f(g(x))g'(x)$. (*Sugerencia:* Use la Parte I del Teorema (5.22) y la Regla de la Cadena.)

50. Generalice la fórmula del Ejercicio 49 a

$$D_x \int_{k(x)}^{g(x)} f(t)\, dt = f(g(x))g'(x) - f(k(x))k'(x).$$

Ejercicios 51-54: Use los Ejercicios 49 y 50 para encontrar la derivada.

51. $D_x \int_2^{x^4} \dfrac{t}{\sqrt{t^3 + 2}}\, dt$

52. $D_x \int_0^{x^2} \sqrt[3]{t^4 + 1}\, dt$

53. $D_x \int_{3x}^{x^3} (t^3 + 1)^{10}\, dt$

54. $D_x \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \sqrt{t^4 + t^2 + 4}\, dt$

5.5 INTEGRAL INDEFINIDA Y CAMBIO DE VARIABLE

Debido a la relación que existe entre la antiderivada y la integral definida en virtud del Teorema Fundamental del Cálculo, frecuentemente se denotan las antiderivadas usando el signo de integral. Para distinguir las antiderivadas de las integrales definidas, no se ponen límites de integración en el signo de integral, como se especifica en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (5.26)

La **integral indefinida** $\int f(x)\,dx$ de f (o de $f(x)$) se define como

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde F es una antiderivada de f y C es una constante arbitraria.

Nótese que la integral indefinida no es más que otro simbolismo para la antiderivada más general de f (véase la página 220). En vez de llamar *antiderivación* al proceso de encontrar F para una f dada, se denominará **integración indefinida**. La constante arbitraria C es la **constante de integración**, $f(x)$ es el **integrando** y x es la **variable de integración**. También se llama a veces **encontrar la integral indefinida** al proceso de obtener $F(x) + C$ en la Definición (5.26). En general, el dominio de F no se señala explícitamente. Siempre se supone que se ha elegido un intervalo adecuado sobre el que f es integrable. En particular, puede usarse un intervalo cerrado en el que f sea continua. Igual que para las integrales definidas, no importa el símbolo que se emplee para la variable de integración ya que, por ejemplo, $\int f(t)\,dt$, $\int f(u)\,du$, etcétera, indican la misma función F que $\int f(x)\,dx$.

Como la integral indefinida de f es una antiderivada, el Teorema Fundamental del Cálculo relaciona las integrales definida e indefinida como sigue.

TEOREMA (5.27)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b.$$

Entonces, pueden evaluarse integrales definidas de una función f si se conoce su integral indefinida. En capítulos posteriores se desarrollan métodos para hallar las integrales indefinidas de muy diversas funciones. Por ahora se enuncian algunas reglas útiles. Se puede demostrar la siguiente *regla de la potencia para integrales indefinidas* derivando la expresión al lado derecho de la igualdad y mostrando que se obtiene el integrando.

REGLA DE LA POTENCIA PARA INTEGRALES INDEFINIDAS (5.28)

Si r es un número racional y $r \neq -1$, entonces

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C.$$

EJEMPLO 1 Evaluar: (a) $\int x^2\,dx$ (b) $\int \left(8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt$

Solución Basta encontrar una antiderivada para cada integrando y sumarle una constante arbitraria C. Usando la Regla de la Potencia (5.28),

(a) $$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{3}x^3 + C$$

(b) $$\int (8t^3 - 6t^{1/2} + t^{-2})\,dt = 8 \cdot \frac{t^4}{4} - 6 \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{t^{-1}}{-1} + C$$

$$= 2t^4 - 4t^{3/2} - \frac{1}{t} + C.$$

El siguiente teorema indica lo que sucede si se deriva una integral indefinida o viceversa.

TEOREMA (5.29)

(i) $D_x \int f(x)\,dx = f(x)$

(ii) $\int D_x[f(x)]\,dx = f(x) + C.$

Demostración Para demostrar (i) se usa la Definición (5.26) como sigue:

$$D_x \int f(x)\,dx = D_x[F(x) + C] = F'(x) = f(x).$$

La fórmula (ii) se satisface porque $f(x)$ es una antiderivada de $D_x[f(x)]$. • •

EJEMPLO 2 Verificar el Teorema (5.29) para el caso especial $f(x) = x^2$.

Solución

(i) Si primero se integra y luego se deriva,

$$D_x \int x^2\,dx = D_x\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2.$$

(ii) Si primero se deriva y luego se integra,

$$\int D_x(x^2)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C. \quad \bullet$$

El siguiente teorema es análogo a los Teoremas (5.14) y (5.15) para integrales definidas. La demostración se obtiene de los Teoremas (3.11) y (3.12) y del hecho de que dos antiderivadas difieren por una constante aditiva.

TEOREMA (5.30)

(i) $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$; c es una constante.

(ii) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

Toda regla de derivación se puede transformar en una regla correspondiente de integración indefinida. Por ejemplo,

$$D_x\sqrt{x^2+5} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \quad \text{implica que} \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx = \sqrt{x^2+5} + C.$$

De manera análoga, puede usarse la Regla de la Cadena para obtener una regla de integración indefinida. En efecto, sea F una antiderivada de f y sea g una función derivable tal que $g(x)$ está en el dominio de F para todo x en algún intervalo cerrado $[a, b]$. Se puede entonces considerar la función compuesta definida por $F(g(x))$ para todo x en $[a, b]$. Aplicando la Regla de la Cadena (3.26) y el hecho de que $F' = f$,

$$D_x F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Esto, a su vez, da la fórmula de integración

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \quad \text{con} \quad F' = f.$$

Hay un modo sencillo de recordar esta fórmula. Si se hace $u = g(x)$ y se sustituye formalmente $g'(x)\,dx$ por la diferencial du, se tiene

$$\int f(u)\,du = F(u) + C \quad \text{con} \quad F' = f,$$

que posee la misma forma que la Definición (5.26). Esto indica que $g'(x)\,dx$ puede considerarse como el producto de $g'(x)$ y dx. Ésta es una de las razones principales por las que se usa el símbolo dx en la notación de integral. Como se sustituye la variable x por una nueva variable u, este método para encontrar integrales indefinidas se llama **de cambio de variable** o **de sustitución**. Se puede resumir esta discusión como sigue, suponiendo que f y g tienen las propiedades previamente descritas.

EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN (5.31)

Dada la integral indefinida $\int f(g(x))g'(x)\,dx$, sea $u = g(x)$ y $du = g'(x)\,dx$. Si F es una antiderivada de f, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Como una primera aplicación, es posible generalizar el Teorema (5.28) a las potencias de funciones. Si $f(x) = x^r$ en (5.31), entonces $f(g(x)) = [g(x)]^r$. Si

$$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}, \quad \text{entonces } F(g(x)) = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1}$$

y la conclusión del Teorema (5.31) toma la forma siguiente.

REGLA DE LA POTENCIA PARA FUNCIONES (5.32)

$$\int [g(x)]^r g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C; \; r \neq -1.$$

También puede verificarse (5.32) derivando la expresión al lado derecho de la igualdad. Una manera conveniente de expresar la Regla de la Potencia es la siguiente.

REGLA DE LA POTENCIA (FORMA ALTERNATIVA) (5.33)

Sea $u = g(x)$, donde g es una función derivable. Si r es un número racional y $r \neq -1$, entonces

$$\int u^r \, du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C.$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int (2x^3 + 1)^7 x^2 \, dx$.

Solución Si un integrando contiene alguna expresión elevada a una potencia, como $(2x^3 + 1)^7$, se suele sustituir dicha expresión por una variable. En consecuencia,

$$u = 2x^3 + 1, \qquad du = 6x^2 \, dx.$$

Obsérvese que una vez que se ha decidido lo que es u, du (la diferencial de u) queda determinada por derivación. Para cambiar la forma de la integral a la de (5.32), es necesario multiplicar el integrando por 6 y compensar esto multiplicando la integral por $\frac{1}{6}$ (esto está justificado por el Teorema (5.30) (i). De aquí se obtiene

$$\int (2x^3 + 1)^7 x^2 \, dx = \tfrac{1}{6} \int (2x^3 + 1)^7 6x^2 \, dx.$$

Realizando la sustitución indicada y usando luego el Teorema (5.33),

$$\int (2x^3 + 1)^7 x^2 \, dx = \tfrac{1}{6} \int u^7 \, du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^8}{8} + K\right]$$

donde K es una constante. Ahora debe regresarse a la variable original x. Como $u = 2x^3 + 1$, la última igualdad da

$$\begin{aligned} \int (2x^3 + 1)^7 x^2 \, dx &= \frac{1}{6}\left[\frac{(2x^3 + 1)^8}{8} + K\right] \\ &= \tfrac{1}{48}(2x^3 + 1)^8 + \tfrac{1}{6}K. \end{aligned}$$

También puede escribirse este resultado como

$$\int (2x^3 + 1)^7 x^2 \, dx = \tfrac{1}{48}(2x^3 + 1)^8 + C$$

donde C es una constante arbitraria. •

La relación entre K y C en el Ejemplo 3 es $C = \frac{1}{6}K$; sin embargo, recordar este hecho no tiene ninguna importancia práctica. En lo que sigue, las constantes de integración se cambiarán unas por otras de varias formas sin mencionar explícitamente la relación entre ellas. Más aún, en el Ejemplo 3 se puede integrar como sigue:

$$\tfrac{1}{6} \int u^7 \, du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^8}{8}\right] + C.$$

Las sustituciones en las integrales indefinidas se pueden hacer de varias maneras. Así, el Ejemplo 3 puede ser resuelto por otro método tomando

$$u = 2x^3 + 1, \qquad du = 6x^2\,dx, \qquad \tfrac{1}{6}\,du = x^2\,dx.$$

Entonces, sustituimos $x^2\,dx$ por $\frac{1}{6}\,du$ como sigue:

$$\begin{aligned}\int (2x^3 + 1)^7 x^2\,dx &= \int u^7 \tfrac{1}{6}\,du = \tfrac{1}{6}\int u^7\,du \\ &= \tfrac{1}{48}u^8 + C = \tfrac{1}{48}(2x^3 + 1)^8 + C.\end{aligned}$$

El método del cambio de variable es un medio eficaz para evaluar integrales indefinidas. Para aplicarlo es necesario reconocer en el integrando la forma $f(g(x))g'(x)$ o bien $f(g(x))kg'(x)$ para un número real k. La capacidad para reconocer esta forma es directamente proporcional al número de ejercicios resueltos.

EJEMPLO 4 Encontrar $\int x\sqrt[3]{7 - 6x^2}\,dx$.

Solución Adviértase que el integrando contiene el término $x\,dx$. Si faltara el factor x el problema sería más complicado. Cuando el integrando tiene un radical, se suele sustituir por una variable la expresión bajo el radical. Por lo tanto, sean

$$u = 7 - 6x^2, \qquad du = -12x\,dx.$$

Ahora se multiplica el integrando por -12 y se compensa multiplicando la integral por $-\frac{1}{12}$ como sigue:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[3]{7 - 6x^2}\,dx &= -\tfrac{1}{12}\int \sqrt[3]{7 - 6x^2}(-12)x\,dx \\ &= -\tfrac{1}{12}\int \sqrt[3]{u}\,du = -\tfrac{1}{12}\int u^{1/3}\,du \\ &= -\frac{1}{12}\frac{u^{4/3}}{(4/3)} + C = -\tfrac{1}{16}u^{4/3} + C \\ &= -\tfrac{1}{16}(7 - 6x^2)^{4/3} + C.\end{aligned}$$

Como en los comentarios que siguen al Ejemplo 2, podría haberse escrito

$$u = 7 - 6x^2, \qquad du = -12x\,dx, \qquad -\tfrac{1}{12}\,du = x\,dx$$

y sustituido $x\,dx$ directamente. Entonces,

$$\int \sqrt[3]{7 - 6x^2}\,x\,dx = \int \sqrt[3]{u}(-\tfrac{1}{12})\,du = -\tfrac{1}{12}\int \sqrt[3]{u}\,du.$$

El resto de la solución es igual que antes. •

El método de sustitución se puede usar también para evaluar integrales definidas. Puede aplicarse el Teorema (5.31) para encontrar una integral indefinida (es decir, una antiderivada) y luego aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo. Otro método, que

a veces es más corto, consiste en cambiar los límites de integración. Utilizando (5.31) con el Teorema Fundamental, se obtiene la siguiente fórmula en la que $F' = f$:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b.$$

La expresión al lado derecho de la igualdad se puede escribir

$$F(g(b)) - F(g(a)) = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Esto da el siguiente resultado, siempre y cuando f y g' sean integrables.

TEOREMA (5.34) Si $u = g(x)$, entonces $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$.

El Teorema (5.34) afirma que una vez que se ha realizado la sustitución $u = g(x)$, pueden emplearse como límites de la integral con respecto a u los valores de g correspondientes a $x = a$ y $x = b$, respectivamente. No hace falta entonces regresar a la variable x después de la integración indefinida. El siguiente ejemplo ilustra este método.

EJEMPLO 5 Evaluar $\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx$.

Solución Comenzamos escribiendo la integral como

$$3\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x-1}}\,dx.$$

La forma del integrando sugiere la siguiente sustitución:

$$u = 5x - 1, \qquad du = 5\,dx.$$

Para cambiar los límites de integración, se observa de $u = 5x - 1$ que

$$\text{para } x = 2, \quad \text{entonces} \quad u = 9,$$

y

$$\text{para } x = 10, \quad \text{entonces} \quad u = 49.$$

Aplicando el Teorema (5.34),

$$\begin{aligned} 3\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x-1}}\,dx &= \frac{3}{5}\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x-1}}\,5\,dx \\ &= \frac{3}{5}\int_9^{49} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{3}{5}\int_9^{49} u^{-1/2}\,du \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\frac{u^{1/2}}{1/2}\Big]_9^{49} = \frac{6}{5}[49^{1/2} - 9^{1/2}] = \frac{24}{5}. \end{aligned}$$

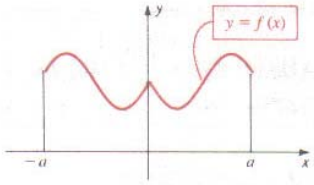
El siguiente ejemplo ilustra un método útil para evaluar algunas integrales definidas.

EJEMPLO 6 Sea f una función continua y par en $[-a, a]$. Demostrar que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Solución Si f es una función par, entonces su gráfica es simétrica con respecto al eje y (véase el Teorema (1.23)). En el caso especial de que $f(x) \geq 0$ para todo x en $[0, a]$, se tiene una situación similar a la de la Figura 5.24 y entonces el área bajo la gráfica de f entre $x = -a$ y $x = a$ es el doble que entre $x = 0$ y $x = a$. Esto da la fórmula de integración deseada.

FIGURA 5.24



Para demostrar que la fórmula es válida aun cuando $f(x) < 0$ para algunas x, procedemos como sigue. Usando sucesivamente el Teorema (5.16), la Definición (5.9) y el Teorema (5.14),

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{-a} f(x)(-dx) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Como f es par, $f(-x) = f(x)$ y la última igualdad se puede escribir

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{-a} f(-x)(-dx) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Si, en la primera integral del lado derecho, tomamos $u = -x$, $du = -dx$ y se observa que $u = a$ cuando $x = -a$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Las dos integrales del lado derecho son iguales ya que las variables son *ficticias* y por lo tanto,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \quad \bullet$$

Véase el Ejercicio 40 para el resultado correspondiente a una función f *impar*.

EJERCICIOS 5.5

Ejercicios 1-22: Evalúe la integral dada.

1. $\int (3x + 1)^4\,dx$
2. $\int (2x^2 - 3)^5 x\,dx$
3. $\int t^2\sqrt{t^3 - 1}\,dt$
4. $\int z\sqrt{9 - z^2}\,dz$
5. $\displaystyle\int \frac{x - 2}{(x^2 - 4x + 3)^3}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x}{(4 - 3x^2 - 2x^3)^4}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{s}{\sqrt[3]{1 - 2s^2}}\,ds$
8. $\int \sqrt[5]{t^4 - t^2}(10t^3 - 5t)\,dt$
9. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{u} + 3)^4}{\sqrt{u}}\,du$
10. $\displaystyle\int \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-3}\left(\frac{1}{u^2}\right)du$
11. $\int_{1}^{4} \sqrt{5 - x}\,dx$
12. $\int_{1}^{5} \sqrt[3]{2x - 1}\,dx$
13. $\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^3 t\,dt$
14. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{v^2}{(v^3 - 2)^2}\,dv$

15. $\int_0^1 \frac{1}{(3-2v)^2}\,dv$

16. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

17. $\int (x^2+1)^3\,dx$

18. $\int (3-x^3)^2 x\,dx$

19. $\int 5\sqrt{8x+5}\,dx$

20. $\int \frac{6}{\sqrt{4-5t}}\,dt$

21. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}\,dx$

22. $\int (3-x^4)^3 x^3\,dx$

Ejercicios 23-26: Determine la integral (a) por el método de sustitución y (b) desarrollando el integrando. ¿En qué difieren las constantes de integración?

23. $\int (x+4)^2\,dx$

24. $\int (x^2+4)^2 x\,dx$

25. $\int \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

26. $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

Ejercicios 27-28: Verifique la fórmula integrando primero y luego derivando.

27. $D_x \int x^3\sqrt{x^4+5}\,dx = x^3\sqrt{x^4+5}$

28. $D_x \int (3x+2)^7\,dx = (3x+2)^7$

29. Calcule $D_x \int \frac{1}{\sqrt{x^3+x+5}}\,dx$.

30. Halle $\int D_x \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

31. Obtenga $\int_0^3 D_x \sqrt{x^2+16}\,dx$.

32. Encuentre $D_x \int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,dx$.

33. Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$. Calcule el área de la región bajo la gráfica de f entre 0 y 3.

34. Sea $f(x) = x/(x^2+1)^2$. Calcule el área de la región bajo la gráfica de f entre 1 y 2.

Ejercicios 35-38: Encuentre (a) un número que satisfaga la conclusión del Teorema del Valor Medio (5.20) para la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, y (b) el valor medio de f en $[a, b]$.

35. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

36. $\int_{-2}^0 \sqrt[3]{x+1}\,dx$

37. $\int_0^5 \sqrt{x+4}\,dx$

38. $\int_{-3}^2 \sqrt{6-x}\,dx$

39. La distribución vertical de la velocidad del agua en un río muchas veces se puede representar aproximadamente por la fórmula $v = c(D-y)^{1/6}$, donde v es la velocidad (en m/s) a una profundidad de y metros bajo la superficie del agua, donde D es la profundidad del río y c es una constante positiva.
 (a) Establezca una fórmula para la velocidad media v_{med} en términos de D y c.
 (b) Demuestre que $v_{\text{med}} = \frac{6}{7}v_0$, donde v_0 es la velocidad en la superficie.

40. Sea f continua en $[-a, a]$. Demuestre que si f es una función impar, entonces $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$. Interprete gráficamente este resultado.

Ejercicios 41-42: Verifique la fórmula por derivación.

41. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3a^2x^3} + C$

42. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

5.6 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Para evaluar una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ usando el Teorema Fundamental del Cálculo, es necesario determinar una antiderivada de f. Cuando no puede encontrarse una antiderivada, se pueden utilizar métodos numéricos para evaluar la integral con la precisión que se desee. Por ejemplo, si la norma de una partición de $[a, b]$ es pequeña, entonces por la Definición (5.8), la integral definida puede estimarse con cualquier suma de Riemann de f. En particular, usando una partición uniforme con $\Delta x = (b-a)/n$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x$$

para cualquier número w_k en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de la partición. Por supuesto, la exactitud de la estimación depende de la naturaleza de f y del tamaño de Δx. Para obtener el grado de precisión deseado puede ser necesario tomar Δx muy pequeño, es decir, n muy grande y, por lo tanto, la suma puede tener muchos términos. La Figura 5.2 ilustra el caso en que $f(w_k)$ es el valor mínimo de f en $[x_{k-1}, x_k]$. En este caso, el error en la estimación es igual al área de la región sin sombrear que se encuentra bajo la gráfica de f y sobre los rectángulos inscritos.

Si $w_k = x_{k-1}$, es decir, si se evalúa f en el extremo izquierdo de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,\Delta x.$$

Si $w_k = x_k$, es decir, si se evalúa f en el extremo derecho de $[x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x.$$

Se puede obtener una estimación que generalmente es más precisa que estas dos, promediándolas, es decir,

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,\Delta x + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x\right].$$

Todos los valores $f(x_k)$ aparecen dos veces en la suma excepto $f(x_0)$ y $f(x_n)$. Por lo tanto, la expresión anterior puede escribirse como

$$\frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} 2f(x_k) + f(x_n)\right].$$

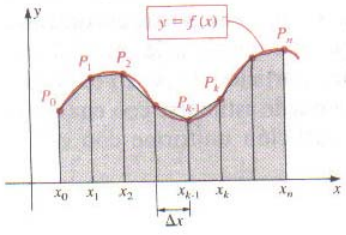
Puesto que $\Delta x = (b-a)/n$, esto da la siguiente regla.

REGLA DEL TRAPECIO (5.35)

Si f es continua en $[a, b]$ y si $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ determina una partición uniforme de $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

FIGURA 5.25



El nombre de esta regla viene del caso en el que $f(x)$ es no negativa en $[a, b]$. Como se ilustra en la Figura 5.25, si P_k es el punto de la gráfica de $y = f(x)$ con abscisa x_k, entonces para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, los puntos sobre el eje x con abscisas x_{k-1} y x_k, junto con P_{k-1} y P_k son los vértices de un trapecio con área

$$\frac{\Delta x}{2}\left[f(x_{k-1}) + f(x_k)\right].$$

La suma de las áreas de estos trapecios es la misma que la de la Regla del Trapecio (5:35). Por consiguiente, en térmi-

nos geométricos, la Regla del Trapecio da una estimación del área bajo la gráfica de f entre a y b por medio de trapecios en lugar de los rectángulos asociados a las sumas de Riemann.

El siguiente resultado brinda información acerca del error máximo que puede ocurrir al usar la Regla del Trapecio para estimar una integral definida. La demostración se omite.

ESTIMACIÓN DEL ERROR EN LA REGLA DEL TRAPECIO (5.36)

Si M es un número real positivo tal que $|f''(x)| \leq M$ para todo x en $[a, b]$, entonces el error que se comete al usar la Regla del Trapecio (5.35) no es mayor que $M(b-a)^3/(12n^2)$.

EJEMPLO 1 Usar la Regla del Trapecio con $n = 10$ para obtener un valor aproximado de $\int_1^2 (1/x)\,dx$. Calcular el error máximo de la aproximación.

Solución Es conveniente organizar el trabajo como sigue. Cada $f(x_k)$ se ha obtenido mediante una calculadora con una precisión de nueve decimales. La columna m contiene el coeficiente de $f(x_k)$ en la Regla del Trapecio (5.35). Así, $m = 1$ para $f(x_0)$ o bien $f(x_n)$ y $m = 2$ para los demás valores $f(x_h)$.

k	x_k	$f(x_k)$	m	$mf(x_k)$
0	1.0	1.000000000	1	1.000000000
1	1.1	0.909090909	2	1.818181818
2	1.2	0.833333333	2	1.666666666
3	1.3	0.769230769	2	1.538461538
4	1.4	0.714285714	2	1.428571428
5	1.5	0.666666667	2	1.333333334
6	1.6	0.625000000	2	1.250000000
7	1.7	0.588235294	2	1.176470588
8	1.8	0.555555556	2	1.111111112
9	1.9	0.526315790	2	1.052631580
10	2.0	0.500000000	1	0.500000000

La suma de los números en la última columna es 13.875428064.

Como

$$\frac{b-a}{2n} = \frac{2-1}{20} = \frac{1}{20},$$

de (5.35) resulta que

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{1}{20}(13.875428064) \approx 0.693771403.$$

El error de la aproximación se puede calcular usando (5.36). Como $f(x) = 1/x$, tenemos que $f'(x) = -1/x^2$ y $f''(x) = 2/x^3$. El valor de $f''(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ alcanzá su máximo en $x = 1$ y por lo tanto,

$$|f''(x)| \leq \frac{2}{(1)^3} = 2.$$

Aplicando (5.36) con $M = 2$, vemos que el error máximo no es mayor que

$$\frac{2(2-1)^3}{12(10)^2} = \frac{1}{600} < 0.002 .$$

En el Capítulo 7 se verá que la integral del Ejemplo 1 es igual al logaritmo natural de 2, que se denota por ln 2. En una calculadora se puede ver que ln 2 es aproximadamente igual a 0.693147181, con una precisión de nueve decimales. Para obtener esta aproximación usando la Regla del Trapecio se necesita emplear un valor muy grande de n.

La siguiente regla es por lo general más exacta que la del Trapecio.

REGLA DE SIMPSON (5.37)

Sean f continua en $[a, b]$ y n un entero par. Si $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$, determina una partición uniforme, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

La idea tras la demostración de la Regla de Simpson es usar porciones de parábolas o de rectas, es decir, de gráficas de ecuaciones de la forma $y = cx^2 + dx + e$, en vez de trapecios, como aproximaciones a la gráfica de f. Si $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos de una parábola tales que $x_0 < x_1 < x_2$, entonces sustituyendo sucesivamente las coordenadas de P_0, P_1 y P_2 en la ecuación, se obtienen tres ecuaciones para evaluar c, d y e. Como un caso especial, supongamos que h, y_0, y_1 y y_2 son positivos y consideremos los puntos $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ y $P_2(h, y_2)$, según se ilustra en la Figura 5.26.

$$A = \int_{-h}^{h} (cx^2 + dx + e)\,dx = \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^2}{2} + ex\Big]_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2ch^2 + 6e).$$

Puesto que las coordenadas de $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ y $P_2(h, y_2)$ son soluciones de $y = cx^2 + dx + e$, por sustitución, se tiene

$$y_0 = ch^2 - dh + e$$
$$y_1 = e$$
$$y_2 = ch^2 + dh + e.$$

En consecuencia,
$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ch^2 + 6e$$

y
$$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Si se trasladan horizontalmente los puntos P_0, P_1 y P_2, como se muestra en la Figura 5.27, el área bajo la gráfica no cambia. Por lo tanto, la fórmula anterior para A es válida para *cualesquiera* puntos P_0, P_1 y P_2, siempre y cuando $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$.

Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, la Regla de Simpson se obtiene considerando la integral definida como el área bajo la gráfica de f entre a y b. Así, sea n un entero par y

FIGURA 5.26

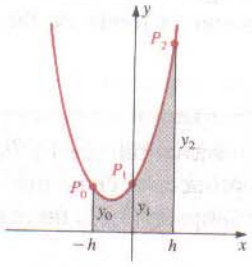
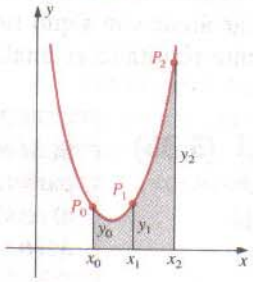
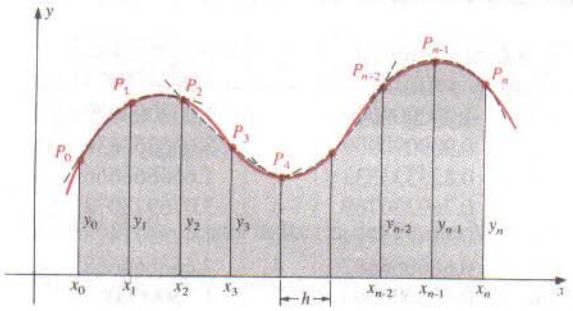


FIGURA 5.27



$h = (b - a)/n$. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud h escogiendo números $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$. Sea $P_k(x_k, y_k)$ el punto de la gráfica de f con abscisa x_k, como se presenta en la Figura 5.28.

FIGURA 5.28



Si el arco que pasa por P_0, P_1 y P_2 se aproxima por la gráfica de una ecuación $y = cx^2 + dx + e$ entonces, como se vio anteriormente, el área bajo la gráfica de f entre x_0 y x_2 es aproximadamente igual a

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Usando el arco que pasa por P_2, P_3 y P_4, se ve que el área bajo la gráfica de f entre x_2 y x_4 es aproximadamente igual a

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Se continúa de esta manera hasta llegar a la última tríada de puntos P_{n-2}, P_{n-1}, P_n y a la correspondiente estimación del área bajo la gráfica, que es

$$\frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Sumando estas estimaciones se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

que es la misma suma que en (5.37). Si f toma valores negativos para algunas x en $[a, b]$, se pueden usar áreas con signo negativo para establecer la Regla de Simpson.

El siguiente resultado es análogo a (5.36).

ESTIMACIÓN DEL ERROR EN LA REGLA DE SIMPSON (5.38)

Si M es un número real positivo tal que $|f^{(4)}(x)| \leq M$ para todo x en $[a, b]$, entonces el error que se comete al servirse de la Regla de Simpson (5.37) no es mayor que $M(b-a)^5/(180n^4)$.

EJEMPLO 2 Usar la Regla de Simpson con $n = 10$ para obtener un valor aproximado de $\int_1^2 (1/x)\,dx$. Calcular el error de la aproximación.

Solución Ésta es la misma integral del Ejemplo 1. Ordenamos el trabajo como sigue. La columna m contiene el coeficiente de $f(x_k)$ en la Regla de Simpson (5.37).

k	x_k	$f(x_k)$	m	$mf(x_k)$
0	1.0	1.000000000	1	1.000000000
1	1.1	0.909090909	4	3.636363636
2	1.2	0.833333333	2	1.666666666
3	1.3	0.769230769	4	3.076923078
4	1.4	0.714285714	2	1.428571428
5	1.5	0.666666667	4	2.666666668
6	1.6	0.625000000	2	1.250000000
7	1.7	0.588235294	4	2.352941176
8	1.8	0.555555556	2	1.111111112
9	1.9	0.526315790	4	2.105263160
10	2.0	0.500000000	1	0.500000000

La suma de los números en la última columna es 20.794506924. Como

$$\frac{b-a}{3n} = \frac{2-1}{30},$$

de (5.37) resulta que

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \left(\frac{1}{30}\right)(20.794506924) \approx 0.693150231.$$

Usaremos (5.38) para calcular el error de la aproximación. Si $f(x) = 1/x$, entonces $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Como $f^{(4)}(x)$ en el intervalo [1, 2] alcanza su máximo valor en $x = 1$; por lo tanto,

$$|f^{(4)}(x)| \leq \frac{24}{(1)^5} = 24.$$

Aplicando (5.38) con $M = 24$, se aprecia que el error máximo de la aproximación no es mayor que

$$\frac{24(2-1)^5}{180(10)^4} = \frac{2}{150000} < 0.00002.$$

Nótese que este error es mucho menor que el que se obtuvo con la Regla del Trapecio en el Ejemplo 1. •

Al principio de esta sección, se vio que una integral definida puede estimarse con sumas de Riemann $\sum_k f(w_k)\,\Delta x$ y se consideró el caso especial en que w_k era el extremo izquierdo (o el derecho) del k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de una partición uniforme de $[a, b]$. Otro método consiste en elegir w_k como el *punto medio* de $[x_{k-1}, x_k]$. Esto conduce a la siguiente regla.

REGLA DEL PUNTO MEDIO (5.39)

Si f es continua en $[a, b]$ y $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ determina una partición uniforme de $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)\right]$$

en donde $\bar{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ resulta ser el punto medio de $[x_{k-1}, x_k]$.

Para demostrar (5.39) basta notar que $\Delta x = (b-a)/n$ para todo k. Se puede probar que si M es un número real positivo y que $|f''(x)| \leq M$ para todo x en $[a, b]$, entonces el error que se comete al usar la Regla del Punto Medio no es mayor que $M(b-a)^3/(24n^2)$.

EJEMPLO 3 Usar la Regla del Punto Medio con $n = 10$ para obtener un valor aproximado de $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

Solución La integral es la misma que se consideró en los ejemplos anteriores. Como la partición está determinada por 1, 1.1, 1.2, ..., 1.9, 2, los puntos medios de los subintervalos son 1.05, 1.15, ..., 1.95 y la Regla del Punto Medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx 0.1\left[\frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.15} + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.35} + \frac{1}{1.45} + \frac{1}{1.55} + \frac{1}{1.65} + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{1.85} + \frac{1}{1.95}\right].$$

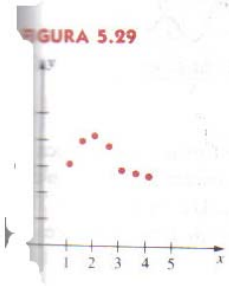
Puede verificarse que esto brinda un valor aproximado de 0.693. •

Uno de los aspectos importantes de la integración numérica es que se puede emplear para estimar la integral definida de una función descrita por medio de una tabla o de una gráfica. Por ejemplo, supongamos que experimentalmente se

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	3.1	4.0	4.2	3.8	2.9	2.8	2.7

descubre que dos variables físicas x y y están relacionadas como se muestra en la tabla precedente. En la Figura 5.29

FIGURA 5.29



se han marcado los puntos (x, y). Si se considera a y como una función de x, es decir, $y = f(x)$ con f continua, entonces la integral definida $\int_1^4 f(x)\,dx$ podría representar una cantidad física. En este caso, *la integral puede estimarse sin conocer una forma explícita para* $f(x)$. En particular, utilizando la Regla del Trapecio (5.35) con $n = 6$ y $(b - a)/(2n) = (4 - 1)/12 = 0.25$, se tiene

$$\int_1^4 f(x)\,dx \approx 0.25[3.1 + 2(4.0) + 2(4.2) + 2(3.8) + 2(2.9) + 2(2.8) + 2.7]$$
$$\approx 10.3.$$

Como el número de subdivisiones es par, también se podría estimar la integral por medio de la Regla de Simpson.

EJERCICIOS 5.6

Ejercicios 1-8: Use (a) la Regla del Trapecio y (b) la Regla de Simpson con el valor de n indicado, para estimar las integrales definidas. Aplique valores aproximados de $f(x_k)$ que tengan una precisión de cuatro decimales y redondee sus respuestas a dos decimales. (Se recomienda usar una calculadora en estos ejercicios.)

1. $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx,\ n = 6$
2. $\int_0^3 \frac{1}{1+x}\,dx,\ n = 8$
3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,\ n = 4$
4. $\int_2^3 \sqrt{1+x^3}\,dx,\ n = 4$
5. $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx,\ n = 10$
6. $\int_0^{0.6} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx,\ n = 6$
7. $\int_1^{5/2} \sqrt[3]{x^2+8}\,dx,\ n = 6$
8. $\int_1^3 \frac{x}{x^4+1}\,dx,\ n = 4$

9-12. Repita los Ejercicios 1-4 usando la Regla del Punto Medio.

13. Use la Regla del Trapecio con $(b - a)/n = 0.1$ para demostrar

$$\int_1^{2.7} \frac{1}{x}\,dx < 1 < \int_1^{2.8} \frac{1}{x}\,dx.$$

14. Encuentre cotas superiores para los errores en las partes (a) y (b) del Ejercicio 1.

Ejercicios 15-16: Suponga que las tablas representan valores de dos variables físicas x y y obtenidos experimentalmente. Suponiendo que $y = f(x)$ con f continua, estime $\int_2^4 f(x)\,dx$ por medio de (a) la Regla del Trapecio, (b) la Regla de Simpson.

15.

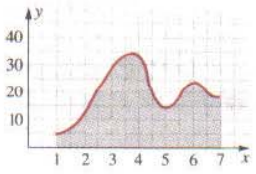
x	y
2.00	4.12
2.25	3.76
2.50	3.21
2.75	3.58
3.00	3.94
3.25	4.15
3.50	4.69
3.75	5.44
4.00	7.52

16.

x	y
2.0	12.1
2.2	11.4
2.4	9.7
2.6	8.4
2.8	6.3
3.0	6.2
3.2	5.8
3.4	5.4
3.6	5.1
3.8	5.9
4.0	5.6

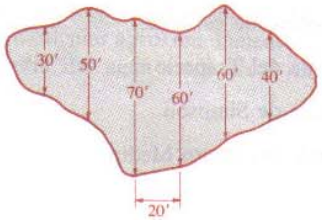
17. La gráfica de la figura fue trazada por un instrumento que mide una cantidad física. Estime las ordenadas de algunos puntos de la gráfica y calcule aproximadamente el área de la región sombreada sirviéndose de (con $n = 6$) (a) la Regla del Trapecio, (b) la Regla de Simpson, (c) la Regla del Punto Medio.

EJERCICIO 17



18. Un lago artificial tiene la forma que se indica en la figura. Las medidas marcadas se tomaron con una separación de 20 pie. Use la Regla del Trapecio para calcular aproximadamente el área de la superficie del lago.

EJERCICIO 18

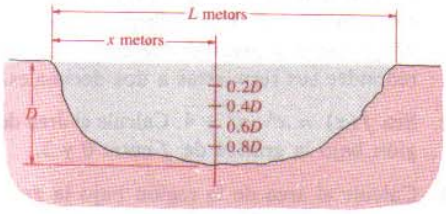


19. Uno de los aspectos importantes en la administración del agua es la producción de datos confiables sobre el *flujo de la corriente*, el número de metros cúbicos por segundo que pasan a través de una sección fluvial de la corriente. Un primer paso para hacer esto consiste en determinar la velocidad media $\bar{v}_x$ a una distancia de x metros de la ribera (véase la figura). Si D es la profundidad en un punto a x metros de la ribera y $v(y)$ es la velocidad (en m/s) a una profundidad de y metros, entonces

$$\bar{v}_x = \frac{1}{D}\int_0^D v(y)\,dy$$

(véase la Definición (5.21)). El *Método de los Seis Puntos* usa lecturas de la velocidad en la superficie, a profundidades $0.2D$, $0.4D$, $0.6D$, $0.8D$ y cerca del fondo del río, y luego utiliza la Regla del Trapecio para estimar $\bar{v}_x$. A partir de los datos de la tabla siguiente, calcule $\bar{v}_x$.

EJERCICIO 19



y (m)	0	$0.2D$	$0.4D$	$0.6D$	$0.8D$	D
$v(y)$ (m/s)	0.28	0.23	0.19	0.17	0.13	0.02

20. Consulte el Ejercicio 19. El flujo de la corriente F (en m^3/s) se puede calcular usando la fórmula

$$F = \int_0^L \bar{v}_x\, D(x)\,dx$$

en la que $D(x)$ es la profundidad del río a x metros de la ribera y L es la longitud de una sección transversal del río. A partir de los datos de la tabla siguiente, estime F valiéndose de la Regla de Simpson.

x (m)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$D(x)$ (m)	0	0.51	0.73	1.61	2.11	2.02	1.53	0.64	0
$\bar{v}_x$ (m/s)	0	0.09	0.18	0.21	0.36	0.32	0.19	0.11	0

Ejercicios 21-22: Encuentre el mínimo entero n para el que el error en la estimación de la integral definida sea menor que el valor indicado, si se emplea (a) la Regla del Trapecio, (b) la Regla de Simpson.

21. $\int_{1/2}^{1} (1/x)\,dx$; 0.0001

22. $\int_0^3 (1+x)^{-1}\,dx$; 0.001

23. Demuestre que si $f(x)$ es un polinomio de grado menor que cuatro, entonces la Regla de Simpson da el valor exacto de $f(x)\,dx$.

24. Demuestre que si f es continua, no negativa y $f''(x) > 0$ en todo $[a, b]$, entonces $f(x)\,dx$ es menor que el número dado por la Regla del Trapecio.

5.7 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. El área bajo la gráfica de una función continua no negativa f entre a y b.
2. Partición de $[a, b]$.
3. Norma de una partición.
4. Suma de Riemann.
5. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k = I$.
6. La integral definida de f entre a y b.
7. Límites inferior y superior de integración.
8. Integrando.
9. Propiedades de la integral definida.

10. Teorema del Valor Medio para Integrales Definidas.
11. Valor medio de una función.
12. Teorema Fundamental del Cálculo.
13. Integral indefinida.
14. Constante de integración.
15. Regla de la Potencia para integrales.
16. Cambio de variable.
17. Regla del Trapecio.
18. Regla de Simpson.
19. Regla del Punto Medio.

EJERCICIOS 5.7

Ejercicios 1-3: Calcule la suma.

1. $\sum_{k=1}^{5} (k^2 + 3)$
2. $\sum_{k=1}^{50} 8$
3. $\sum_{k=0}^{4} (-1/2)^{k-2}$

4. Sea $f(x) = 1 - x^2$ definida en el intervalo $[-2, 3]$ y sea P la partición uniforme de $[-2, 3]$ en cinco subintervalos iguales. Encuentre la suma de Riemann R_P si f se evalúa en el punto medio de cada subintervalo.
5. Repita el Ejercicio 4 para el caso en que f se evalúa en el extremo derecho de cada subintervalo.
6. Sea $\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\,dx$. Halle (a) números que satisfagan la conclusión del Teorema del Valor Medio (5.20) y (b) el valor medio de $x^2 + 2x - 5$ en $[1, 4]$.

Ejercicios 7-36: Evalúe la integral indicada:

7. $\int_0^1 \sqrt[3]{8x^7}\,dx$
8. $\int \sqrt[3]{5t + 1}\,dt$
9. $\int_0^1 \frac{z^2}{(1 + z^3)^2}\,dz$
10. $\int (x^2 + 4)^2\,dx$
11. $\int (1 - 2x^2)^3 x\,dx$
12. $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$
13. $\int_1^2 \frac{w + 1}{\sqrt{w^2 + 2w}}\,dw$
14. $\int_1^2 \frac{s^2 + 2}{s^2}\,ds$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}\,dx$
16. $\int_1^2 \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}\,dx$
17. $\int (3 - 2x - 5x^3)\,dx$
18. $\int (y + y^{-1})^2\,dy$
19. $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx$
20. $\int_1^1 3x^2\sqrt{x^3 + x}\,dx$
21. $\int (4t + 1)(4t^2 + 2t - 7)^2\,dt$
22. $\int \frac{\sqrt[4]{1 - v^{-1}}}{v^2}\,dv$
23. $\int (2x^{-3} - 3x^{-2})dx$
24. $\int_1^9 \sqrt{2r + 7}\,dr$
25. $\int_{-1}^2 D_x \sqrt{(x + 1)/(x + 2)}\,dx$
26. $\int D_x (2x^3 + 3x^2 - 4x - 5)\,dx$
27. $\int D_y \sqrt[3]{y^4 + 2y^2 + 1}\,dy$
28. $\int_0^7 D_x (x^2/\sqrt{3x + 4})\,dx$
29. $D_x \int_0^1 (x^3 + x^2 - 7)^5\,dx$
30. $D_z \int_0^z (x^2 + 1)^{10}\,dx$
31. Determine $\int_0^{10} \sqrt{1 + x^4}\,dx$ usando (a) la Regla del trapecio con $n = 5$ y (b) la Regla de Simpson con $n = 8$. Use valores aproximados de $f(x_k)$ con una precisión de cuatro decimales y redondee sus respuestas a dos decimales.
32. Sea $f(x) = x^4\sqrt{x^5 + 4}$. Calcule el área de la región bajo la gráfica de f entre 0 y 2.
33. Calcule el área de la región bajo la gráfica de $y = x^3/(x^4 + 1)^2$, entre $x = 1$ y $x = 2$.
34. Demuestre que el área de un triángulo rectángulo de altura a y base b es $\frac{1}{2}ab$, usando una integral definida. (*Sugerencia:* Ponga los vértices en los puntos $(0, 0)$, $(b, 0)$ y (b, a).)
35. Para registrar la contaminación térmica de un río, un biólogo toma lecturas de la temperatura (en °F) cada hora entre las 9 A.M. y las 5 P.M. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

Hora del día	9	10	11	12	1	2	3	4	5
Temperatura	75.3	77.0	83.1	84.8	86.5	86.4	81.1	78.6	75.1

Haga uso de la Regla de Simpson y la Definición (5.21) para calcular aproximadamente la temperatura media del agua entre las 9 A.M. y las 5 P.M.

36. Sea G la función de ganancia de un producto. Demuestre que la ganancia media $G(n)/n$ al producir n unidades, es igual al valor medio de la función de ganancia marginal en $[0, n]$.

CAPÍTULO 6

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida es útil para resolver amplia variedad de problemas. En este capítulo estudiaremos su aplicación a problemas sobre área, volumen, longitud de una curva, superficies de revolución, trabajo, fuerza ejercida por un líquido, centro de masa y sobre muchos otros campos de la física, la ingeniería, la biología y la economía.

6.1 ÁREA

Si f es una función continua y no negativa en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces por el Teorema (5.11), el área bajo la gráfica de f entre a y b está dada por $\int_a^b f(x)\,dx$. Si g es otra de estas funciones y si $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área A de la región acotada por las gráficas de f, g, $x = a$ y $x = b$ (véase la Figura 6.1) se puede calcular restando el área bajo la gráfica de g al área bajo la gráfica de f, es decir,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Esta fórmula para A es válida también cuando f o g son negativas para algunos x en $[a, b]$, como se ilustra en la Figura 6.2. Para verificar esto, se escoge un número negativo d menor que el mínimo de g en $[a, b]$ y se definen las dos funciones f_1 y g_1 por

$$f_1(x) = f(x) - d, \qquad g_1(x) = g(x) - d$$

para todo x en $[a, b]$. Como d es negativo, los valores de f_1 y g_1 se obtienen sumando el número positivo $-d$ a los valores de f y g, respectivamente. Esto equivale a elevar las gráficas de f y g una distancia $|d|$, con lo que se obtiene una región con la misma forma y área de la región original pero que se encuentra toda ella arriba del eje x (véase la Figura 6.3).

Si A es el área de la región en la Figura 6.3, entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f_1(x) - g_1(x)]\,dx \\ &= \int_a^b \{[f(x) - d] - [g(x) - d]\}\,dx \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \end{aligned}$$

La discusión anterior se puede resumir como sigue.

TEOREMA (6.1)

Si f y g son continuas y $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área A de la región acotada por las gráficas de f, g, $x = a$ y $x = b$, es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

FIGURA 6.1

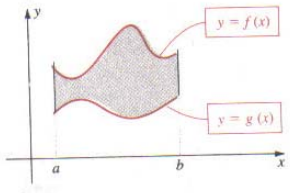


FIGURA 6.2

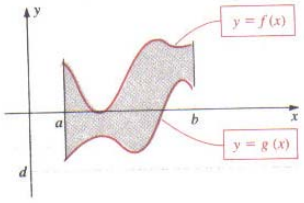
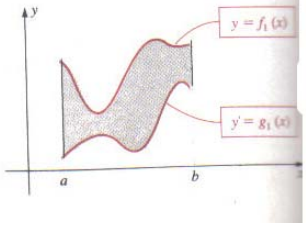


FIGURA 6.3

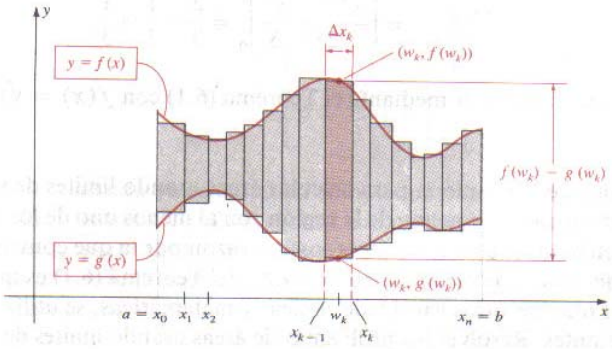


La fórmula para A en el Teorema (6.1) se puede interpretar como un límite de sumas. Definiendo $h(x) = f(x) - g(x)$, para cada w en $[a, b]$, $h(w)$ es la distancia vertical entre las gráficas de f y g en $x = w$. Como se hizo al estudiar las sumas de Riemann en el Capítulo 5, sea P una partición de $[a, b]$ determinada por los números $a = x_0$, $x_1, \ldots, x_n = b$. Para cada k, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Sea w_k un número arbitrario en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de P. Por la definición de h,

$$h(w_k)\,\Delta x_k = [f(w_k) - g(w_k)]\,\Delta x_k,$$

que es el área de un rectángulo de longitud $f(w_k) - g(w_k)$ y anchura Δx_k (véase la Figura 6.4).

FIGURA 6.4



La suma de Riemann

$$\sum_k h(w_k)\,\Delta x_k = \sum_k [f(w_k) - g(w_k)]\,\Delta x_k$$

es la suma de las áreas de todos los rectángulos representados en la Figura 6.4 y se puede considerar una aproximación al área de la región acotada por las gráficas de f y g entre $x = a$ y $x = b$. Por la definición de la integral definida,

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_k h(w_k)\,\Delta x_k = \int_a^b h(x)\,dx.$$

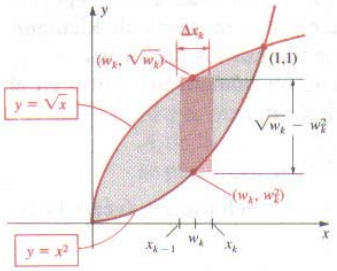
Usando la definición de h se obtiene

(6.2) $$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k [f(w_k) - g(w_k)]\,\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Cuando se usa (6.2) para calcular áreas, se piensa inicialmente en aproximar la región por medio de rectángulos, como en la Figura 6.4. Luego de escribir una fórmula para el área de un rectángulo típico, se suman las áreas de todos esos rectángulos y se calcula el límite de estas sumas, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.

FIGURA 6.5



Solución Usaremos el enfoque de las sumas de Riemann. La región está indicada en la Figura 6.5 junto con un rectángulo típico. Los puntos (0, 0) y (1, 1) en donde las dos gráficas se intersecan pueden localizarse resolviendo simultáneamente las ecuaciones $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$. La longitud de un rectángulo típico está dada por $\sqrt{w_k} - w_k^2$ y su área por $(\sqrt{w_k} - w_k^2)\,\Delta x_k$. Usando (6.2) con $a = 0$ y $b = 1$,

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k (\sqrt{w_k} - w_k^2)\,\Delta x_k$$

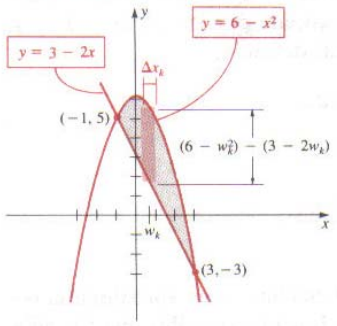
$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

El área también se puede calcular mediante el Teorema (6.1) con $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$. •

Como se ilustra en el Ejemplo 1, para calcular áreas usando límites de sumas, conviene comenzar por trazar un esquema de la región con al menos uno de los rectángulos típicos, anotando en él los símbolos apropiados. La razón por la que conviene trabajar con sumas en vez de aplicar directamente la fórmula del Teorema (6.1) es que más adelante, para calcular muchas otras cantidades físicas y matemáticas, se utilizan procesos de límite muy semejantes. Resolver los problemas de áreas usando límites de sumas contribuirá a entender más fácilmente las aplicaciones futuras. Al mismo tiempo, ayuda a profundizar en el significado de la integral definida.

FIGURA 6.6



EJEMPLO 2 Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $y + x^2 = 6$ y $y + 2x - 3 = 0$.

Solución La región se indica en la Figura 6.6 junto con un rectángulo típico. Los puntos de intersección (−1, 5) y (3, −3) de las dos gráficas se pueden encontrar resolviendo las ecuaciones como simultáneas. Para usar el Teorema (6.1) o el (6.2) es necesario despejar y en cada ecuación en términos de x, con lo que se obtiene

$$y = 6 - x^2 \quad \text{y} \quad y = 3 - 2x.$$

Entonces, las funciones f y g están dadas por

$$f(x) = 6 - x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 3 - 2x.$$

Como se muestra en la Figura 6.6, la longitud de un rectángulo típico es

$$(6 - w_k^2) - (3 - 2w_k)$$

donde w_k es algún número del k-ésimo subintervalo de la partición P de $[-1, 3]$. El área de este rectángulo es

$$[(6 - w_k^2) - (3 - 2w_k)]\,\Delta x_k.$$

Aplicando (6.2),

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k [(6 - w_k^2) - (3 - 2w_k)]\,\Delta x_k \\ &= \int_{-1}^{3} [(6 - x^2) - (3 - 2x)]\,dx \\ &= \int_{-1}^{3} (3 - x^2 + 2x)\,dx \\ &= \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{3} \\ &= \left[9 - \frac{27}{3} + 9\right] - \left[-3 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1\right] = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Cuando ya se entienda completamente el método del límite de sumas ilustrado en los Ejemplos 1 y 2, se podrá pasar directamente a plantear la integral sin detenerse en la parte de los subíndices y la suma. Así, en el Ejemplo 2, se puede considerar a dx como la anchura de un rectángulo típico. La longitud del rectángulo se representa con la distancia

$$(6 - x^2) - (3 - 2x)$$

entre la frontera superior de la región y la inferior, para un número arbitrario x en $[-1, 3]$. Entonces el área del rectángulo puede representarse *sin usar subíndices* por

$$[(6 - x^2) - (3 - 2x)]\,dx.$$

Escribir el signo de integral $\int_{-1}^{3}$ antes de esta expresión puede considerarse como tomar la suma de todos estos términos haciendo que al mismo tiempo la anchura de los rectángulos tienda a 0.

Como uno de los objetivos de este capítulo es destacar la definición de la integral determinada o definida (5.8), continuaremos usando límites de sumas en muchos de los ejemplos restantes. El símbolo w_k que se utiliza en las soluciones siempre denota un número en el k-ésimo subintervalo de una partición. Quienes deseen usar la notación sin subíndices, pueden (si el profesor lo permite) pasar directamente a la integral definida que sigue de un enunciado con el límite de una suma.

El siguiente ejemplo muestra que para calcular un área, a veces es necesario dividir una región y usar el Teorema (6.1) o el (6.2) más de una vez.

EJEMPLO 3 Calcular el área de la región R acotada por las gráficas de $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ y $2y + x = 0$.

Solución En la Figura 6.7 se tienen las gráficas y la región. En cada ecuación se ha despejado y en términos de x para que se puedan reconocer fácilmente las funciones

FIGURA 6.7

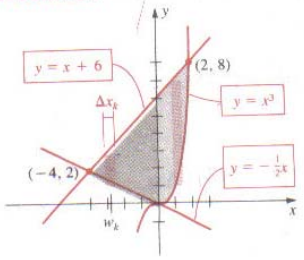
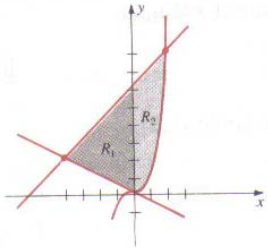


FIGURA 6.8



cuyas gráficas acotan la región. Se señalan dos rectángulos típicos que van de la frontera inferior a la frontera superior de R. Como la frontera inferior consta de partes de dos gráficas diferentes, no se puede evaluar el área calculando una sola integral definida. Sin embargo, R se puede dividir en dos subregiones R_1 y R_2, como se muestra en la Figura 6.8, luego calcular el área de cada región y sumar los resultados.

Las fronteras superior e inferior de la región R_1 son las rectas $y = x + 6$ y $y = -x/2$, respectivamente y así, la longitud de un rectángulo típico es

$$(w_k + 6) - (-w_k/2).$$

Aplicando (6.2), el área A_1 de R_1 es

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k \left[(w_k + 6) - \left(-\frac{w_k}{2} \right) \right] \Delta x_k \\ &= \int_{-4}^{0} \left[(x + 6) - \left(-\frac{x}{2} \right) \right] dx \\ &= \int_{-4}^{0} \left[\frac{3}{2} x + 6 \right] dx = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + 6x \right]_{-4}^{0} \\ &= 0 - (12 - 24) = 12. \end{aligned}$$

La región R_2 tiene la misma frontera superior $y = x + 6$ que R_1 pero la frontera inferior está dada por $y = x^3$. En este caso, la longitud de un rectángulo típico es

$$(w_k + 6) - w_k^3$$

y el área A_2 de R_2 es

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k \left[(w_k + 6) - w_k^3 \right] \Delta x_k \\ &= \int_0^2 \left[(x + 6) - x^3 \right] dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\ &= (2 + 12 - 4) - 0 = 10. \end{aligned}$$

El área A de toda la región R es

$$A = A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22. \quad \bullet$$

FIGURA 6.9

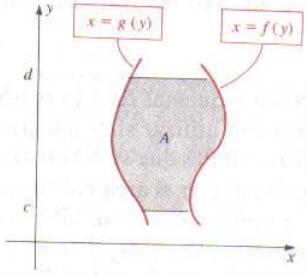
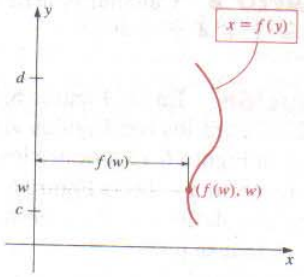


FIGURA 6.10



Consideremos ahora el área A de una región acotada por las gráficas de $y = c$, $y = d$, $x = f(y)$ y $x = g(y)$, donde f y g son funciones continuas con $f(y) \geq g(y)$ para todo y en $[c, d]$ (véase la Figura 6.9). Como en la discusión anterior pero intercambiando los papeles de x y y, se ve que

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy.$$

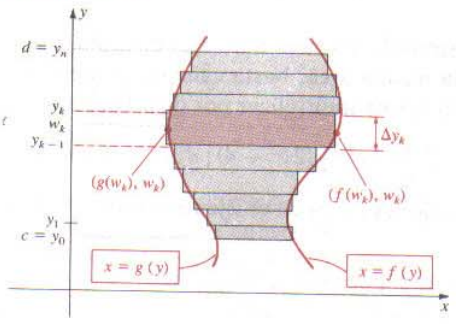
Ahora se considera a y como la variable independiente y el procedimiento se llama **integración con respecto a y**. El método usado en el Teorema (6.1) es una **integración con respecto a x**. Como en la Figura 6.10, si se despeja de una ecuación x en términos de y de manera que $x = f(y)$ y si se asigna un valor w a y, entonces $f(w)$ es la abscisa del punto correspondiente sobre la gráfica.

También pueden usarse límites de sumas para una región como la que se muestra en la Figura 6.11. En este caso se eligen puntos sobre el eje y con ordenadas $y_0, y_1, \ldots, y_n$ tales que $y_0 = c$ y $y_n = d$, con lo que se obtiene una partición del intervalo $[c, d]$ en subintervalos de longitud $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. Para cada k se elige un número w_k en $[y_{k-1}, y_k]$ y se consideran rectángulos horizontales con áreas $[f(w_k) - g(w_k)]\, \Delta y_k$, como se ilustra en la Figura 6.11. Esto da

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k [f(w_k) - g(w_k)]\, \Delta y_k = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy.$$

La última igualdad es consecuencia de la definición de la integral definida.

FIGURA 6.11



EJEMPLO 4 Calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $2y^2 = x + 4$ y $x = y^2$.

Solución En las Figuras 6.12 y 6.13 aparecen esquemas de esta región. La Figura 6.12 muestra los rectángulos verticales que se deben utilizar si se integra con respecto a x, y la Figura 6.13 muestra los rectángulos horizontales que se deben usar si se integra con respecto a y. En la Figura 6.12 se ve que para calcular el área habría que usar varias integrales definidas. Pero en la Figura 6.13 se aprecia que si se integra con respecto a y, el área se puede calcular con una sola integración. Sean $f(y) = y^2$, $g(y) = 2y^2 - 4$. Consultando la Figura 6.13, se ve que la longitud $f(w_k) - g(w_k)$ de un rectángulo *horizontal* es

$$w_k^2 - (2w_k^2 - 4).$$

Como la anchura es Δy_k, el área del rectángulo es

$$[w_k^2 - (2w_k^2 - 4)]\,\Delta y_k.$$

Por lo tanto, el área A es

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k [w_k^2 - (2w_k^2 - 4)]\,\Delta y_k \\ &= \int_{-2}^{2} [y^2 - (2y^2 - 4)]\,dy \\ &= \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\,dy \\ &= \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-8 - \left(-\frac{8}{3}\right)\right] = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

FIGURA 6.12

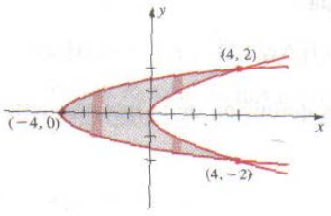
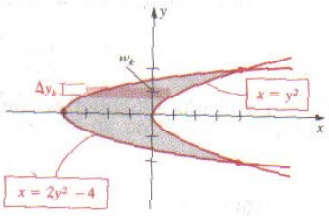


FIGURA 6.13



De hecho, la integración podría simplificarse aún más. Por ejemplo, como el eje x divide la región en dos partes con la misma área, basta calcular el área de la parte de la región que se encuentra arriba del eje x y multiplicar por dos. Haciendo esto se obtiene

$$A = 2\int_0^2 [y^2 - (2y^2 - 4)]\,dy.$$

(Véase el resultado acerca de funciones pares en el Ejemplo 6 de la Sección 5.5.)

En esta sección se ha dado por supuesto que las gráficas de las funciones (o ecuaciones) no se cruzan dentro del intervalo en consideración. Por ejemplo, en el Teorema

(6.1) se exige que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$. Si las gráficas de f y g se cruzan en un punto $P(c, d)$, con $a < c < b$, y se desea calcular el área de la región acotada por las gráficas entre $x = a$ y $x = b$, aún se pueden usar los métodos desarrollados en esta sección pero se requieren *dos* integraciones, una sobre el intervalo $[a, c]$ y otra sobre $[c, b]$. Esto se ilustra en la Figura 6.14, donde $f(x) \geq g(x)$ en $[a, c]$ y $g(x) \geq f(x)$ en $[c, b]$. El área A está dada por

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$

Si las gráficas se cruzan *varias* veces, entonces hay que usar varias integrales. En los Ejercicios 33-36 se presentan problemas donde las gráficas se cruzan una o más veces.

Ocasionalmente, en las investigaciones científicas, algunas cantidades se interpretan como áreas. Esto sucede, por ejemplo, en la *teoría de la elasticidad*. Para probar la resistencia de un material, un investigador registra los valores de la deformación (alargamiento) que corresponden a diferentes esfuerzos (cargas). El croquis de la Figura 6.15 es un diagrama típico de esfuerzo y deformación para una muestra de un material elástico como el caucho (o hule) vulcanizado. (Nótese que los valores del esfuerzo corresponden a las marcas en la dirección vertical.) En la figura se ve que cuando la carga aplicada al material (el esfuerzo) aumenta, el alargamiento (indicado por flechas en la gráfica coloreada) aumenta hasta que el material se ha estirado a un tamaño cinco veces mayor que el original. Cuando la carga disminuye, el material regresa a su longitud original, pero a lo largo de otra gráfica, que se muestra en negro en la figura. Este fenómeno se llama *histéresis elástica*. (Algo parecido ocurre en el estudio de los materiales magnéticos, en donde se llama *histéresis magnética*.) Las dos curvas de la figura forman un *lazo* (o *ciclo*) *de histéresis* del material. El área incluida dentro de este lazo es numéricamente igual a la energía disipada dentro del material elástico (o magnético) durante la prueba. En el caso del caucho vulcanizado, cuanto mayor sea el área tanto mejor será el material para absorber vibraciones.

FIGURA 6.14

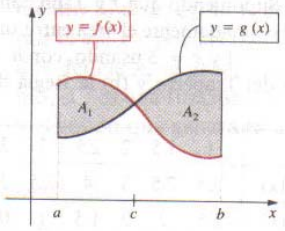
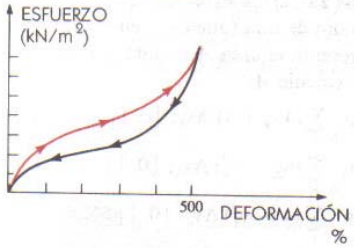


FIGURA 6.15

Diagrama esfuerzo-deformación de un material elástico



EJERCICIOS 6.1

Ejercicios 1-20: Represente la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, muestre un rectángulo típico vertical u horizontal y calcule el área de la región.

1. $y = 1/x^2$, $y = -x^2$, $x = 1$, $x = 2$
2. $y = \sqrt{x}$, $y = -x$, $x = 1$, $x = 4$
3. $y^2 = -x$, $x - y = 4$, $y = -1$, $y = 2$
4. $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$, $y = 3$
5. $y = x^2 + 1$, $y = 5$
6. $y = 4 - x^2$, $y = -4$

7. $y = x^2,\ y = 4x$

8. $y = x^3,\ y = x^2$

9. $y = 1 - x^2,\ y = x - 1$

10. $x + y = 3,\ y + x^2 = 3$

11. $y^2 = 4 + x,\ y^2 + x = 2$

12. $x = y^2,\ x - y - 2 = 0$

13. $y = x,\ y = 3x,\ x + y = 4$

14. $x - y + 1 = 0,\ 7x - y - 17 = 0,\ 2x + y + 2 = 0$

15. $y = x^3 - x,\ y = 0$

16. $y = x^3 - x^2 - 6x,\ y = 0$

17. $x = 4y - y^3,\ x = 0$

18. $x = y^{2/3},\ x = y^2$

19. $y = x\sqrt{4 - x^2},\ y = 0$

20. $y = x\sqrt{x^2 - 9},\ y = 0,\ x = 5$

21. Sea R la región acotada por las gráficas de $x - 2y = 0$, $x - 2y - 4 = 0$, $y = 3$ y $y = 0$. Grafique R y exprese su área A como un límite de sumas. Calcule A usando (a) integración y (b) una fórmula de la geometría.

22. Sea R la región acotada por las gráficas de $x = \sqrt{1 - y^2}$ y $x = 0$. Represente R gráficamente y exprese su área A como un límite de sumas. Calcule A sin integrar.

Ejercicios 23-24: Exprese el área A de la región R acotada por las gráficas de la o las ecuaciones como un límite de sumas. Calcule A sin integrar.

23. $(x - 4)^2 + y^2 = 9$

24. $2x + 3y = 6,\ x = 0,\ y = 0$

Ejercicios 25-32: La expresión es un límite de sumas de Riemann de una función f en el intervalo $[a, b]$, que representa el área A de una región. Describa la región y calcule A.

25. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k (4w_k + 1)\,\Delta x_k;\ [0, 1]$

26. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k (w_k - w_k^3)\,\Delta x_k;\ [0, 1]$

27. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k (4 - w_k^2)\,\Delta y_k;\ [0, 1]$

28. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k \sqrt{3w_k + 1}\,\Delta y_k;\ [0, 1]$

29. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k [w_k/(w_k^2 + 1^2)]\,\Delta x_k;\ [2, 5]$

30. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k (5w_k/\sqrt{9 + w_k^2})\,\Delta x_k;\ [1, 4]$

31. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k [(5 + \sqrt{w_k})/\sqrt{w_k}]\,\Delta y_k;\ [1, 4]$

32. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k w_k^{-2}\,\Delta y_k;\ [-5, -2]$

Ejercicios 33-36: Calcule el área de la región que se encuentra entre las gráficas de f y g para x en el intervalo $[a, b]$. (*Sugerencia:* Véase la Figura 6.14.)

33. $f(x) = 6 - 3x^2,\ g(x) = 3x;\ [0, 2]$

34. $f(x) = x^2 - 4,\ g(x) = x + 2;\ [1, 4]$

35. $f(x) = x^3 - 4x + 2,\ g(x) = 2;\ [-1, 3]$

36. $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3,\ [-1, 2]$

37. En la figura se muestra la forma de un diagrama particular de esfuerzo y deformación (véase el último párrafo de la sección). Estime las ordenadas de la gráfica y calcule aproximadamente el área de la región acotada por el lazo de histéresis usando, con $n = 6$, (a) la Regla del Trapecio y (b) la Regla de Simp

EJERCICIO 37



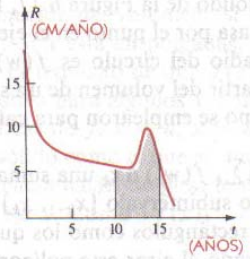
38. Suponga que los valores funcionales de f y g que aparecen en la tabla se obtuvieron empíricamente. Suponiendo que f y g son continuas, calcule aproximadamente el área entre sus gráficas y las de $x = 1$ y $x = 5$ usando, con $n = 8$, (a) la Regla del Trapecio y (b) la Regla de Simpson.

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x)$	3.5	2.5	3	4	3.5	2.5	2	2	3
$g(x)$	1.5	2	2	1.5	1	0.5	1	1.5	1

39. En la figura se muestra una gráfica típica de la tasa de crecimiento de los niños. La mencionada tasa R (en cm/año) está dada como una función de la edad t en años.
 (a) ¿Qué representa el área bajo la gráfica de $t = 10$ a $t = 15$?
 (b) Use la Regla del Trapecio con $n = 6$ y la tabla siguiente para estimar el área en la parte (a).

t (años)	10	11	12	13	14	15
R (cm/año)	5.3	5.2	4.9	6.5	9.3	7.0

EJERCICIO 39

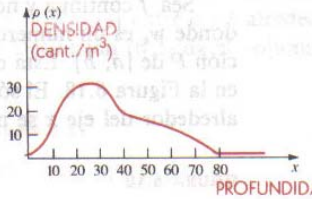


40. La figura muestra el *perfil de profundidad* de una especie de zooplancton. La densidad $\rho(x)$ (en cantidad por m^3) aparece como una función de la profundidad x (en metros) del mar a la que se tomó la muestra. La integral

$$\int_0^{80} \rho(x)\,dx$$

representa la cantidad total de zooplancton en la *columna de agua*, columna de 1 m^2 de base proyectada verticalmente desde el fondo oceánico. Obtenga un valor aproximado de esta integral usando la Regla de Simpson con $n = 8$.

EJERCICIO 40



6.2 SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

El volumen de un objeto desempeña un papel importante en muchos problemas de las ciencias físicas, como los de determinar centros de masa y momentos de inercia. (Más adelante se estudiarán estos conceptos.) Como generalmente es muy difícil calcular el volumen de un objeto de forma irregular, comenzaremos con objetos de formas simples. Dentro de esta categoría se incluyen los sólidos de revolución que se estudian en esta sección y en la siguiente.

Si una región de un plano gira alrededor de una recta l del plano, **genera** un cuerpo geométrico sólido que se llama **sólido de revolución**. La recta l se denomina **eje de revolución**. Si una región R acotada por la gráfica de una función f continua no negativa, por el eje x y por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (véase la Figura 6.16) gira alrededor del eje x, se genera un sólido como el que se muestra en la Figura 6.17. Por ejemplo, si f es una función constante, digamos, $f(x) = k$, entonces la región R es rectangular y el sólido que genera es un cilindro circular recto. Si la gráfica de f es una semicircun-

FIGURA 6.16

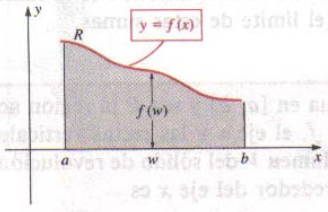
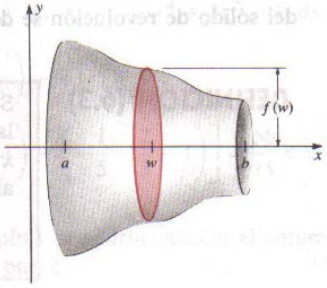


FIGURA 6.17



ferencia con los extremos de uno de sus diámetros en los puntos $(a, 0)$ y $(b, 0)$ con $b > a$, entonces el sólido de revolución es una esfera con diámetro $b - a$. Si la región dada es un triángulo rectángulo con un cateto en el eje x y dos vértices en los puntos $(a, 0)$ y $(b, 0)$, entonces genera un cono circular recto.

Si un plano perpendicular al eje x corta al sólido de la Figura 6.17, la intersección es una sección transversal circular. Si el plano pasa por el punto en el eje x con abscisa w, como se indica en la figura, entonces el radio del círculo es $f(w)$ y su área es $\pi[f(w)]^2$. Se puede obtener una definición a partir del volumen de un sólido de revolución como éste usando sumas de Riemann como se emplearon para calcular áreas en la sección anterior.

Sea f continua y no negativa en $[a, b]$. Sea $\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k$ una suma de Riemann, donde w_k es un número arbitrario en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de una partición P de $[a, b]$. Ésta es una suma de áreas de rectángulos como los que se muestran en la Figura 6.18. El sólido de revolución generado al girar este polígono rectangular alrededor del eje x se muestra en la Figura 6.19.

FIGURA 6.18

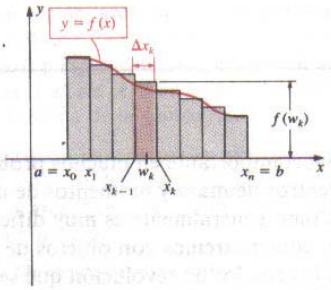
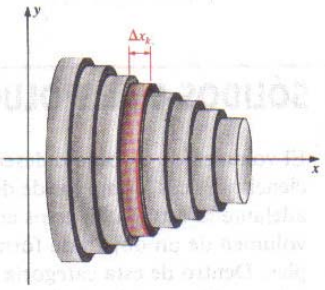


FIGURA 6.19



Obsérvese que el k-ésimo rectángulo genera un disco circular (o rodaja) (es decir, un cilindro circular recto de corta altura) cuyo radio de la base es $f(w_k)$ y su altura, o "grosor", es $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. El volumen de este disco es igual al área de su base multiplicada por la altura, es decir, $\pi[f(w_k)]^2\,\Delta x_k$. La suma de los volúmenes de todos estos discos es igual al volumen del sólido que se muestra en la Figura 6.19 y está dada por

$$\sum_k \pi[f(w_k)]^2\,\Delta x_k.$$

Esta suma es una suma de Riemann para $\pi[f(x)]^2$. Se ve que si $\|P\|$ tiende a cero, entonces la suma tiende al volumen del sólido de revolución. Por lo tanto el volumen del sólido de revolución se define como el límite de estas sumas.

DEFINICIÓN (6.3)

Sea f continua en $[a, b]$ y sea R la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. El **volumen** V del sólido de revolución generado al girar R alrededor del eje x es

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \pi[f(w_k)]^2\,\Delta x_k = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

El hecho de que el límite de las sumas en la Definición (6.3) es igual a $\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$ se obtiene de la definición de la integral definida. De ahora en adelante, al considerar los límites de sumas de Riemann, no se enunciarán explícitamente los significados de símbolos como $\|P\|$, w_k y Δx_k. Más aún, en general no se especificarán las unidades de medida del volumen. Si la medida es centímetros, entonces el volumen resulta en cm^3. Si x está en pulgadas, entonces V estará en $pulg^3$, etcétera.

El requisito de que $f(x)$ no sea negativo se omitió en la Definición (6.3). Si f es negativa para algunos x, como se ilustra en la Figura 6.20, y la región acotada por las gráficas de f, $x = a$, $x = b$ y el eje x se hace girar alrededor de sí mismo, se forma un sólido como el que se muestra en la Figura 6.21. Este sólido es el mismo que el que se genera haciendo girar la región bajo la gráfica de $y = |f(x)|$ entre a y b alrededor del eje x. Como $|f(x)|^2 = [f(x)]^2$, el límite en la Definición (6.3) da el volumen.

FIGURA 6.20

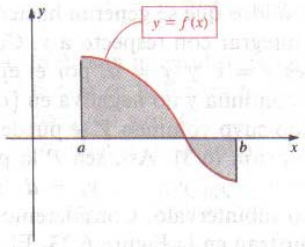
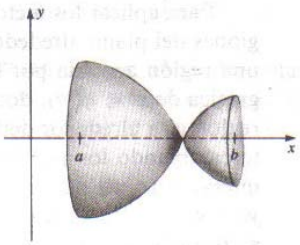
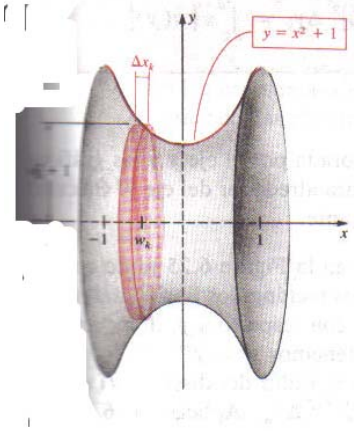


FIGURA 6.21



EJEMPLO 1 Sea $f(x) = x^2 + 1$. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la región bajo la gráfica de f entre $x = -1$ y $x = 1$ alrededor del eje x.

FIGURA 6.22



Solución El sólido se muestra en la Figura 6.22 junto con un rectángulo típico y el disco que éste genera. Como el radio del disco es $w_k^2 + 1$, su volumen es

$$\pi(w_k^2 + 1)^2\,\Delta x_k$$

y por la Definición (6.3),

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k \pi(w_k^2 + 1)^2\,\Delta x_k \\ &= \int_{-1}^{1} \pi(x^2 + 1)^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} + 2\left(\frac{x^3}{3}\right) + x\right]_{-1}^{1} \\ &= \pi\left[\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1\right)\right] = \frac{56}{15}\pi \approx 11.7 \end{aligned}$$

•

Usando la simetría de la gráfica del Ejemplo 1 se podría calcular el volumen integrando de 0 a 1 y multiplicando el resultado por 2.

FIGURA 6.23

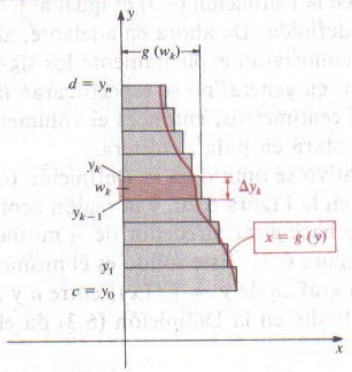
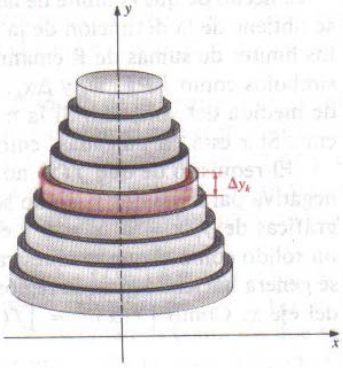


FIGURA 6.24

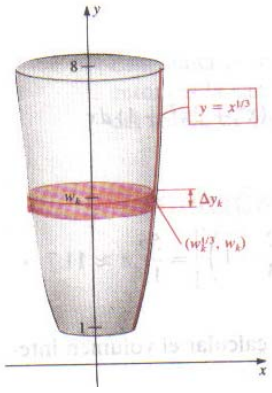


Para aplicar los métodos anteriores a los sólidos que se generan haciendo girar regiones del plano alrededor del eje y, se debe integrar con respecto a y. Consideremos una región acotada por las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$, por el eje y y por la gráfica de $x = g(y)$, donde g es una función continua y no negativa en $[c, d]$. Si esta región gira alrededor del eje y, genera un sólido cuyo volumen V se puede calcular intercambiando los papeles de x y y en la Definición (6.3). Así, sea P la partición del intervalo $[c, d]$ determinada por los números $c = y_0, y_1, \ldots, y_n = d$. Sean $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ y w_k cualquier número en el k-ésimo subintervalo. Consideremos los rectángulos de longitud $g(w_k)$ y altura Δy_k que se ilustran en la Figura 6.23. El sólido generado al girar estos rectángulos alrededor del eje y se ilustra en la Figura 6.24.

El volumen del disco generado por el k-ésimo rectángulo es $\pi[g(w_k)]^2 \Delta y_k$. Mediante un límite de sumas se obtiene

(6.4)
$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \pi[g(w_k)]^2 \Delta y_k = \int_c^d \pi[g(y)]^2 \, dy.$$

FIGURA 6.25



EJEMPLO 2 La región acotada por el eje y y las gráficas de $y = x^3$, $y = 1$ y $y = 8$ gira alrededor del eje y. Calcula el volumen del sólido resultante.

Solución El sólido está en la Figura 6.25 junto con un disco generado por uno de los rectángulos horizontales típicos. Como vamos a integrar con respecto a y, despejamos x de la ecuación $y = x^3$ y obtenemos $x = y^{1/3}$. Si tomamos $x = g(y) = y^{1/3}$, entonces el radio del disco es $g(w_k) = w_k^{1/3}$ y su volumen es $\pi(w_k^{1/3})^2 \Delta y_k$. Aplicando (6.4) con $g(y) = y^{1/3}$,

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \pi(w_k^{1/3})^2 \Delta y_k$$

$$= \int_1^8 \pi(y^{1/3})^2\,dy = \pi\int_1^8 y^{2/3}\,dy = \pi\left[\frac{y^{5/3}}{5/3}\right]_1^8$$

$$= \frac{3}{5}\pi\left[y^{5/3}\right]_1^8 = \frac{3}{5}\pi[8^{5/3} - 1] = \frac{93}{5}\pi \approx 58.4.$$

Consideremos ahora una región acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y por las gráficas de dos funciones continuas f y g con $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, como se muestra en la Figura 6.26(i). Si esta región gira alrededor del eje x, genera el sólido que se ilustra en (ii) de la figura. Nótese que si $g(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces el sólido tiene un hueco o agujero central.

El volumen V puede calcularse restando el volumen del sólido generado por la región pequeña del volumen del sólido generado por la región más grande. Usando la Definición (6.3) se obtiene

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx - \int_a^b \pi[g(x)]^2\,dx = \int_a^b \pi\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx.$$

Esta última integral tiene una interpretación interesante como límite de sumas. Como se ilustra en la Figura 6.26(iii), un rectángulo que va de la gráfica de g a la gráfica de f pasando por los puntos con abscisa w_k genera un sólido en forma de **arandela** (o rondana) cuyo volumen es

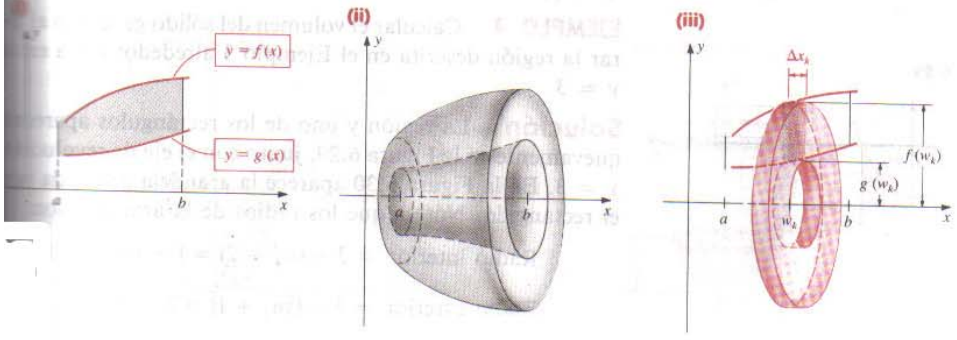
$$\pi[f(w_k)]^2\,\Delta x_k - \pi[g(w_k)]^2\,\Delta x_k = \pi\{[f(w_k)]^2 - [g(w_k)]^2\}\,\Delta x_k.$$

Sumando los volúmenes de todas las arandelas y tomando el límite, se obtiene la fórmula con la integral. Al resolver problemas de este tipo, es conveniente usar la siguiente fórmula general.

(6.5) Volumen de la arandela =
π [(radio exterior)^2 − (radio interior)^2] · (espesor)

En los problemas de integración el espesor está dado generalmente por Δx_k o por Δy_k. Para calcular el volumen se toma el límite de sumas de los volúmenes de las arandelas.

FIGURA 6.26



EJEMPLO 3 La región acotada por las gráficas de las ecuaciones $x^2 = y - 2$ y $2y - x - 2 = 0$ y por las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$ giradas alrededor del eje x. Calcular el volumen del sólido resultante.

Solución En la Figura 6.27 aparece la región con uno de los rectángulos típicos. Como queremos integrar con respecto a x, despejamos y de las dos primeras ecuaciones en términos de x obteniendo $y = x^2 + 2$ y $y = \frac{1}{2}x + 1$. La arandela generada por el rectángulo está ilustrada en la Figura 6.28.

FIGURA 6.27

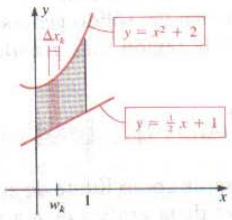
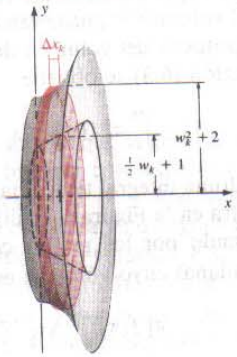


FIGURA 6.28



Como el radio exterior de la arandela es $w_k^2 + 2$ y su radio interior es $\frac{1}{2}w_k + 1$, por (6.5), su volumen es

$$\pi[(w_k^2 + 2)^2 - (\tfrac{1}{2}w_k + 1)^2]\,\Delta x_k.$$

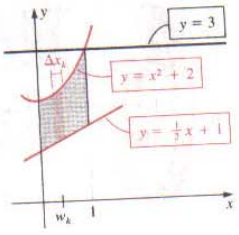
El límite de las sumas de estos volúmenes da

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\,[(x^2 + 2)^2 - (\tfrac{1}{2}x + 1)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 + \tfrac{15}{4}x^2 - x + 3)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} + \frac{15}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \frac{79\pi}{20} \approx 12.4 \end{aligned}$$

•

EJEMPLO 4 Calcular el volumen del sólido generado al girar la región descrita en el Ejemplo 3 alrededor de la recta $y = 3$.

FIGURA 6.29

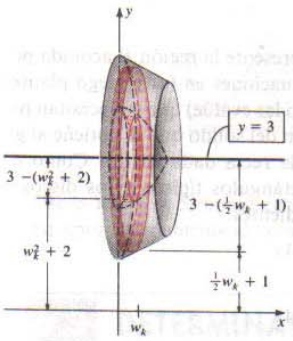


Solución La región y uno de los rectángulos aparecen nuevamente en la Figura 6.29, junto con el eje de revolución $y = 3$. En la Figura 6.30 aparece la arandela generada por el rectángulo. Nótese que los radios de la arandela son:

$$\text{Radio interior} = 3 - (w_k^2 + 2) = 1 - w_k^2.$$

$$\text{Radio exterior} = 3 - (\tfrac{1}{2}w_k + 1) = 2 - \tfrac{1}{2}w_k.$$

FIGURA 6.30



De acuerdo con (6.5), el volumen de la arandela es

$$\pi\left[(2-\tfrac{1}{2}w_k)^2-(1-w_k^2)^2\right]\Delta x_k.$$

El límite de las sumas de estos términos es

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 \pi\left[(2-\tfrac{1}{2}x)^2-(1-x^2)^2\right]dx\\ &= \pi\int_0^1\left[(4-2x+\tfrac{1}{4}x^2)-(1-2x^2+x^4)\right]dx\\ &= \pi\int_0^1(3-2x+\tfrac{9}{4}x^2-x^4)\,dx\\ &= \pi\left[3x-x^2+\tfrac{9}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)-\frac{x^5}{5}\right]_0^1\\ &= \pi\left[3-1+\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{5}\right]=\frac{51}{20}\pi\approx 8.01\end{aligned}$$

Intercambiando los papeles de x y y se pueden aplicar los métodos anteriores al cálculo de volúmenes de sólidos generados cuando giran regiones planas alrededor del eje y, como se hace en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \frac{1}{8}x^3$ y $y = 2x$ gira alrededor del eje y. Calcular el volumen del sólido resultante.

Solución La Figura 6.31 muestra la región y uno de los rectángulos típicos. Queremos integrar con respecto a y y por lo tanto despejamos en las ecuaciones dadas x en términos de y, obteniendo

$$x=\tfrac{1}{2}y \quad \text{y} \quad x=2y^{1/3}.$$

Como se muestra en la Figura 6.32, los radios interior y exterior de la arandela generada por el rectángulo son $\frac{1}{2}w_k$ y $2w_k^{1/3}$, respectivamente. Como el espesor es Δy_k, a partir de (6.5) se obtiene que el volumen de la arandela es

$$\pi\left[(2w_k^{1/3})^2-(\tfrac{1}{2}w_k)^2\right]\Delta y_k=\pi\left[4w_k^{2/3}-\tfrac{1}{4}w_k^2\right]\Delta y_k.$$

El límite de las sumas de estos términos es

$$\begin{aligned}V &= \int_0^8 \pi\left[4y^{2/3}-\tfrac{1}{4}y^2\right]dy=\pi\left[\tfrac{12}{5}y^{5/3}-\tfrac{1}{12}y^3\right]_0^8\\ &= \pi\left[\tfrac{12}{5}(8^{5/3})-\tfrac{1}{12}(8^3)\right]=\tfrac{512}{15}\pi\approx 107.2\end{aligned}$$

FIGURA 6.31

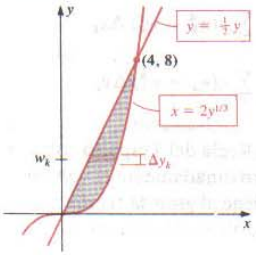
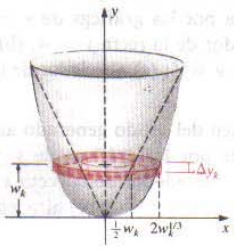


FIGURA 6.32



EJERCICIOS 6.2

Ejercicios 1-12: Represente la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones y calcule el volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje indicado. Trace un rectángulo típico así como el disco o la arandela que genera. (*Observación:* Aunque los sólidos descritos son objetos matemáticos, muchos de los objetos que se encuentran en la vida real tienen formas parecidas.)

1. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$; alrededor del eje x.
2. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; alrededor del eje x.
3. $y = x^2$, $y = 2$; alrededor del eje y.
4. $y = 1/x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 3$; alrededor del eje y.
5. $y = x^2 - 4x$, $y = 0$; alrededor del eje x.
6. $y = x^3$, $x = -2$, $y = 0$; alrededor del eje x.
7. $y^2 = x$, $2y = x$; alrededor del eje y.
8. $y = 2x$, $y = 4x^2$; alrededor del eje y.
9. $y = x^2$, $y = 4 - x^2$; alrededor del eje x.
10. $x = y^3$, $x^2 + y = 0$; alrededor del eje x.
11. $x = y^2$, $y - x + 2 = 0$; alrededor del eje y.
12. $x + y = 1$, $y = x + 1$, $x = 2$; alrededor del eje y.
13. La región acotada por las gráficas de $x = y^3$, $x = 8$ y $y = 0$ gira alrededor de la recta $x = 8$. Calcule el volumen del sólido resultante.
14. La región acotada por las gráficas de $y = x^4$ y $y = 1$ gira alrededor de la recta $y = 1$. Calcule el volumen del sólido resultante.
15. La región descrita en el Ejercicio 13 gira alrededor de la recta $y = 3$. Calcule el volumen del sólido resultante.
16. La región descrita en el Ejercicio 14 gira alrededor de la recta $x = 2$. Determine el volumen del sólido resultante.
17. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 4$ (a) alrededor de la recta $y = 4$; (b) alrededor de la recta $y = 5$; (c) alrededor de la recta $x = 2$.
18. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$ (a) alrededor de la recta $x = 4$; (b) alrededor de la recta $x = 6$; (c) alrededor de la recta $y = 2$.

Ejercicios 19-24: Represente la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones en (a) y luego plantee las integrales (pero no las evalúe) que se necesitan para calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar R alrededor de la recta dada en (b). Como de costumbre, trace rectángulos típicos y los discos o arandelas correspondientes.

19. (a) $y = x^3$, $y = 4x$
 (b) $y = 8$
20. (a) $y = x^3$, $y = 4x$
 (b) $x = 4$
21. (a) $x + y = 3$, $y + x^2 = 3$
 (b) $x = 2$
22. (a) $y = 1 - x^2$, $x - y = 1$
 (b) $y = 3$
23. (a) $x^2 + y^2 = 1$
 (b) $x = 5$
24. (a) $y = x^{2/3}$, $y = x^2$
 (b) $y = -1$

Ejercicios 25-28: Obtenga una fórmula para el volumen del sólido indicado usando una integral definida.

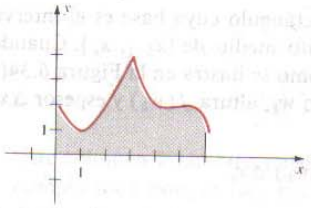
25. Un cono circular recto de altura h y radio de la base r.
26. Una esfera de radio r.
27. Un cono circular recto truncado de altura h, radio de la base inferior R y radio de la base superior r.
28. Un segmento esférico de altura h y radio de la esfera r.

Ejercicios 29-30: La expresión corresponde a un límite de sumas de una función f definida en un intervalo $[0, 1]$, que representa el volumen V de un sólido de revolución. Describa el sólido y calcule V.

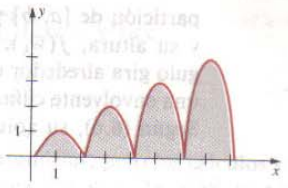
29. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k \pi(w_k^4 - w_k^6)\,\Delta x_k$
30. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k \pi(w_k - w_k^8)\,\Delta y_k$

31. Use la Regla del Trapecio con $n = 6$ para calcular aproximadamente el volumen del sólido que se obtiene al girar la región que se muestra en la figura, alrededor del eje x.

EJERCICIO 31



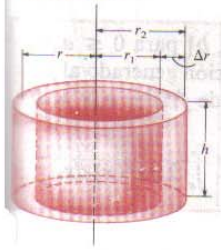
EJERCICIO 32



32. Use la Regla de Simpson con $n = 8$ para calcular aproximadamente el volumen del sólido que se obtiene al girar la región indicada en la figura, alrededor del eje x.

6.3 DETERMINACIÓN DE VOLÚMENES MEDIANTE ENVOLVENTES CILÍNDRICAS

FIGURA 6.33



Los métodos de la Sección 6.2 son difíciles de aplicar en algunos casos. Hay otro método que usa anillos cilíndricos de poco grosor denominados **envolventes** (o cortezas), como se ilustra en la Figura 6.33.

El volumen de una envolvente de radio exterior r_2, radio interior r_1 y altura h es $\pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$. Esta expresión también se puede escribir como

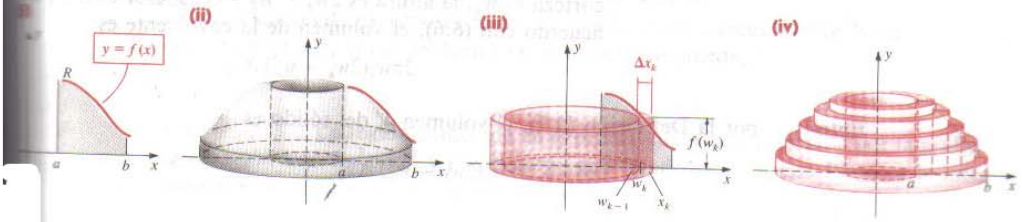
$$\pi(r_2^2 - r_1^2)h = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)h(r_2 - r_1).$$

Sea $r = (r_2 + r_1)/2$ (el **radio medio** de la corteza), y sea $\Delta r = r_2 - r_1$ (el **grosor** de la misma). Entonces el volumen de la corteza es $2\pi rh\,\Delta r$. Por lo tanto,

(6.6) Volumen de una envolvente $= 2\pi$(radio medio)(altura)(grosor).

Sea f una función continua y no negativa en $[a, b]$, donde $0 \le a < b$. Sea R la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se ilustra en la Figura 6.34(i). El sólido generado al girar R alrededor del eje y se ilustra en (ii) de la figura. Nótese que si $a > 0$, entonces el sólido tiene un agujero. Sea P una

FIGURA 6.34



partición de $[a, b]$ y consideremos el rectángulo cuya base es el intervalo, $[x_{k-1}, x_k]$ y su altura, $f(w_k)$, donde w_k es el punto medio de $[x_{k-1}, x_k]$. Cuando este rectángulo gira alrededor del eje y entonces, como se ilustra en la Figura 6.34(iii), se obtiene *una envolvente cilíndrica con radio medio* w_k, *altura* $f(w_k)$ *y espesor* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Según (6.6), su volumen es

$$2\pi w_k f(w_k)\,\Delta x_k.$$

Sumando los volúmenes correspondientes a todos los subintervalos de la partición resulta

$$\sum_k 2\pi w_k f(w_k)\,\Delta x_k.$$

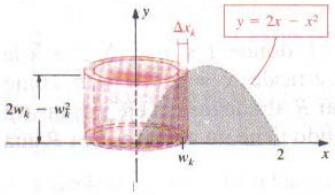
Esta suma representa el volumen de un sólido como el que se ilustra en la Figura 6.34(iv). Cuanto menor sea la norma $\|P\|$ de la partición, tanto mejor será la aproximación a volumen V del sólido generado por R (que se muestra en (ii) de la figura) dada por la suma. Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN (6.7) Sea f continua y no negativa en $[a, b]$ para $0 \le a < b$. El **volumen** V del sólido de revolución generado al girar la región acotada por las gráficas de f, $x = a$, $x = b$ y el eje x, alrededor del eje y es

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k 2\pi w_k f(w_k)\,\Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx.$$

La última igualdad en la Definición (6.7) se obtiene de la definición de la integral definida (5.8). Puede demostrarse que cuando los métodos de la Sección 6.2 también se pueden aplicar, entonces llevan al mismo resultado (véase el Ejercicio 52 de la Sección 9.1).

FIGURA 6.35



EJEMPLO 1 La región acotada por la gráfica de $y = 2x - x^2$ y por el eje x gira alrededor del eje y. Calcular el volumen del sólido resultante.

Solución La gráfica de $y = 2x - x^2$ (una parábola) aparece en la Figura 6.35. En ella también se muestran la región que gira y la corteza generada por un rectángulo típico donde w_k es el punto medio de k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de una partición de $[0, 2]$. El radio medio de la corteza es w_k, la altura es $2w_k - w_k^2$ y el espesor es Δx_k. De acuerdo con (6.6), el volumen de la envolvente es

$$2\pi w_k(2w_k - w_k^2)\,\Delta x_k.$$

Entonces, por la Definición (6.7), el volumen V del sólido es

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k 2\pi w_k(2w_k - w_k^2)\,\Delta x_k$$

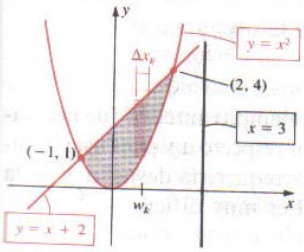
$$= \int_0^2 2\pi x(2x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\left[2\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3} \approx 8.4.$$

Este volumen V también puede calcularse usando arandelas, pero los cálculos son más complicados porque hay que despejar x de la ecuación $y = 2x - x^2$ en términos de y. •

EJEMPLO 2 La región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x + 2$ gira alrededor de la recta $x = 3$. Expresar el volumen del sólido resultante como una integral definida.

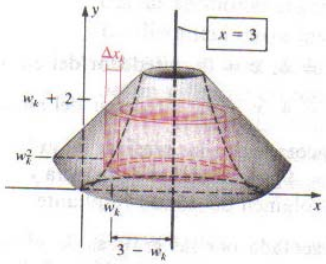
FIGURA 6.36



Solución La región se muestra en la Figura 6.36 junto con uno de los rectángulos típicos; w_k es el punto medio del k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. En la Figura 6.37 se ilustra el anillo cilíndrico generado por el rectángulo. Esta cáscara tiene las siguientes dimensiones:

$$\text{altura} = (w_k + 2) - w_k^2$$
$$\text{radio medio} = 3 - w_k$$
$$\text{espesor} = \Delta x_k.$$

FIGURA 6.37



Entonces de acuerdo con (6.6), el volumen de la cáscara es

$$2\pi(3 - w_k)[(w_k + 2) - w_k^2]\,\Delta x_k.$$

El límite de las sumas de estos términos da

$$V = \int_{-1}^2 2\pi(3 - x)(x + 2 - x^2)\,dx \quad \bullet$$

La integral definida del ejemplo anterior se podría evaluar multiplicando primero los factores del integrando y calculando después la integral de cada término. Como ya se han considerado tales integraciones anteriormente, no sería muy instructivo llevar a cabo todos los detalles. Por conveniencia, al proceso de expresar V en términos de una integral se le llamará *plantear la integral para V*.

Intercambiando los papeles de x y y se pueden usar a veces las envolventes e integrar con respecto a y, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 La región contenida en el primer cuadrante y acotada por la gráfica de la ecuación $x = 2y^3 - y^4$ y por el eje y, gira alrededor del eje x. Plantear la integral para el volumen del sólido resultante.

FIGURA 6.38

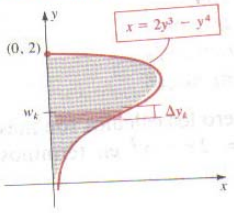
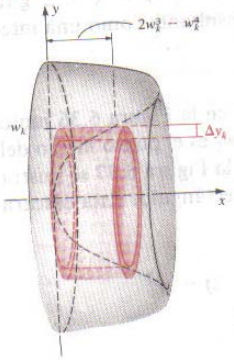


FIGURA 6.39



Solución La región se tiene en la Figura 6.38 junto con un rectángulo (horizontal) típico. La Figura 6.39 muestra la corteza cilíndrica generada por el rectángulo. Dicha envolvente tiene las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} \text{altura} &= 2w_k^3 - w_k^4 \\ \text{radio medio} &= w_k \\ \text{espesor} &= \Delta y_k. \end{aligned}$$

Entonces de acuerdo con (6.6), el volumen es

$$2\pi w_k(2w_k^3 - w_k^4)\,\Delta y_k.$$

El límite de las sumas de estos términos da

$$V = \int_0^2 2\pi y(2y^3 - y^4)\,dy \quad \bullet$$

Vale la pena notar que en el ejemplo anterior fue necesario usar envolventes e integrar con respecto a y pues usar arandelas e integrar con respecto a x requeriría despejar y de la ecuación $x = 2y^3 - y^4$, lo cual es muy difícil.

EJERCICIOS 6.3

Ejercicios 1-10: Represente la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones y aplique los métodos de esta sección para calcular el volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje indicado. Trace un rectángulo típico junto con la envolvente cilíndrica que genera.

1. $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$; alrededor del eje y.
2. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; alrededor del eje y.
3. $y = x^2$, $y^2 = 8x$; alrededor del eje y.
4. $y = x^2 - 5x$, $y = 0$; alrededor del eje y.
5. $2x - y - 12 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$, $x = 4$; alrededor del eje y.
6. $y = x^3 + 1$, $x + 2y = 2$, $x = 1$; alrededor del eje y.
7. $x^2 = 4y$, $y = 4$; alrededor del eje x.
8. $y^3 = x$, $y = 3$, $x = 0$; alrededor del eje x.
9. $y = 2x$, $y = 6$, $x = 0$; alrededor del eje x.
10. $2y = x$, $y = 4$, $x = 1$; alrededor del eje x.
11. La región acotada por las graficas de $yx^2 = 1$, $y = 1$ y $y = 4$ gira alrededor de la recta $y = 5$. Calcule el volumen del sólido resultante.
12. La región acotada por las gráficas de $y^2 = x$, $x = 0$, $y = -1$ y $y = 1$ gira alrededor de la recta $y = 2$. Calcule el volumen del sólido resultante.
13. Determine el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 2$ y $y = 0$; (a) alrededor de la recta $x = 3$; (b) alrededor de la recta $x = -1$.
14. Determine el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = 4 - x^2$ y $y = 0$; (a) alrededor de la recta $x = 2$, (b) alrededor de la recta $x = -3$.
15 -26. Use los métodos de esta sección para resolver los Ejercicios 17-28 de la Sección 6.2.

la Figura 6.41, es aproximadamente igual al volumen de un cilindro con área de base $A(w_k)$ y altura Δx_k, es decir, $A(w_k)\,\Delta x_k$. El volumen V del sólido se puede aproximar por las sumas de Riemann

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(w_k)\,\Delta x_k.$$

Como la aproximación mejora cuando $\|P\|$ disminuye, el volumen V del sólido se define como el límite de estas sumas.

FÓRMULA PARA EL CÁLCULO DE VOLUMEN MEDIANTE ELEMENTOS DE SECCIÓN **(6.8)**

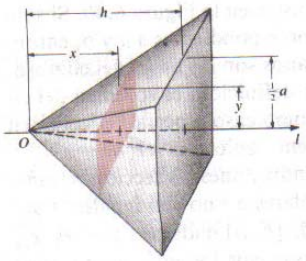
$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k} A(w_k)\,\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx$$

EJEMPLO 1 Calcular el volumen de la pirámide recta de altura h con base cuadrada de lado a.

Solución Se determina una recta coordenada l a lo largo del eje de la pirámide con el origen O en el vértice, como se muestra en la Figura 6.42. Las secciones transversales correspondientes a planos perpendiculares a l son cuadrados. Si $0 \le x \le h$, entonces el área $A(x)$ de la sección transversal es

$$A(x) = (2y)^2 = 4y^2$$

FIGURA 6.42



donde y es la distancia indicada en la figura. Usando triángulos semejantes,

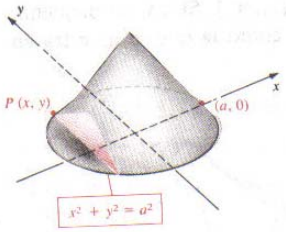
$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}a}{h} \quad \text{o bien} \quad y = \frac{ax}{2h}$$

y por lo tanto, $$A(x) = 4y^2 = \frac{4a^2x^2}{4h^2} = \frac{a^2}{h^2}x^2.$$

Aplicando (6.8),

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \left(\frac{a^2}{h^2}\right)x^2\,dx = \left(\frac{a^2}{h^2}\right)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{a^2h}{3}. \quad \bullet$$

FIGURA 6.43



EJEMPLO 2 Un sólido tiene como base la región circular en el plano xy acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$, con $a > 0$. Las secciones transversales correspondientes a los planos perpendiculares al eje x son todas triángulos equiláteros que tienen un lado contenido en la base del sólido. Calcular el volumen.

Solución La Figura 6.43 muestra una sección transversal típica correspondiente al plano que pasa a x unidades del origen. Si el punto $P(x, y)$ está en la circunferencia y $y > 0$, entonces las longitudes de los lados del triángulo equilátero son $2y$ y la altura es $\sqrt{3}y$. Por lo tanto, el área $A(x)$ del triángulo es

$$A(x) = \tfrac{1}{2}(2y)(\sqrt{3}y) = \sqrt{3}y^2 = \sqrt{3}(a^2 - x^2).$$

Aplicando (6.8), obtenemos

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{3}(a^2 - x^2)\,dx = \sqrt{3}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}.$$

EJERCICIOS 6.4

1. La base de un sólido es la región circular contenida en el plano xy acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$, donde $a > 0$. Calcule el volumen del sólido suponiendo que todas las secciones transversales correspondientes a planos perpendiculares al eje x son cuadrados.

2. Resuelva el Ejercicio 1 suponiendo que las secciones transversales son triángulos isósceles con su base en el plano xy y con altura igual a la longitud de la base.

3. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = 4$ y $y = x^2$. Calcule el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlo con planos perpendiculares al eje x son triángulos rectángulos isósceles cuya hipotenusa está en el plano xy.

4. Resuelva el Ejercicio 3 suponiendo que las secciones transversales son cuadrados.

5. Calcule el volumen de una pirámide como la de la Figura 6.42 suponiendo que su altura es h y que su base es un rectángulo de lados a y $2a$.

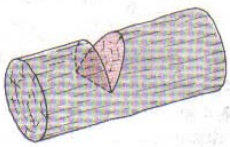
6. La base de un sólido es la región en el plano xy acotada por las gráficas de $y = x$ y $y^2 = x$. Calcule el volumen del sólido suponiendo que las secciones que se obtienen al cortarlo con planos perpendiculares al eje x son semicírculos cuyo diámetro está en el plano xy.

7. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por las gráficas de $y^2 = 4x$ y $x = 4$. Calcule el volumen del sólido suponiendo que la sección que se obtiene al cortarlo con un plano perpendicular al eje y es un semicírculo.

8. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por las gráficas de $x^2 = 16y$ y $y = 2$. Calcule el volumen del sólido suponiendo que la sección que se obtiene al cortarlo con un plano perpendicular al eje y es un triángulo cuya altura es el doble de la longitud del lado contenido en el plano xy.

9. Un tronco que tiene la forma de un cilindro circular recto de radio a está tendido de lado. Se le quita un pedazo en forma de cuña mediante un corte vertical y otro a un ángulo de 45°, de manera que la intersección de los cortes es un diámetro del tronco (véase la figura). Calcule el volumen de la cuña.

EJERCICIO 9



10. Los ejes de dos cilindros circulares rectos de radio a se intersecan en ángulo recto. Calcule el volumen del sólido acotado por los cilindros.

11. La base de un sólido es la región circular del plano xy acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$, donde $a > 0$. Calcule el volumen del sólido suponiendo que la sección que se obtiene al cortarlo con un plano perpendicular al eje x es un triángulo isósceles de altura constante b. (*Sugerencia:* Interprete $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ como un área.)

12. Las secciones transversales que se obtienen al cortar un sólido en forma de trompeta con planos perpendiculares a su eje son círculos. Suponga que una sección que se encuentra a s centímetros del extremo menor del sólido tiene un diámetro de $15 + s^2/90$ centímetros y que la longitud del sólido es de 60 cm. Calcule el volumen.

13. Un tetraedro tiene tres caras perpendiculares entre sí y tres aristas también perpendiculares de 2, 3 y 4 cm de longitud, respectivamente. Calcule su volumen.

14. Un sólido esférico de radio r se perfora y se hace un agujero que tiene un diámetro d, de manera que el eje del hueco coincide con un diámetro de la esfera. Calcule el volumen del sólido resultante.

15. La base de un sólido es un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales tienen longitud a.

Calcule el volumen suponiendo que las secciones transversales que son perpendiculares a la base y a uno de los lados iguales son semicírculos.

16. Repita el Ejercicio 15 suponiendo que las secciones trnasversales son hexágonos regulares con un lado en la base.

17. Un *prismatoide* es un sólido con la propiedad de que las áreas de las secciones que se obtienen al cortarlo con planos paralelos a un plano fijo y a una distancia x de éste último, están dadas por $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales. Demuestre que el volumen V de un prismatoide está dado por

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B)$$

donde B_1 y B_2 son las áreas de las bases, B es el área de la sección paralela a las bases que se encuentra a la mitad de la distancia entre ellas, y h es la distancia entre las bases. Demuestre que un cono circular recto truncado de altura h y cuyas bases tienen radios r_1 y r_2, es un prismatoide. Calcule su volumen.

18. El *teorema de Cavalieri* afirma que si dos sólidos tienen la misma altura y todas las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos paralelos a sus bases a la misma distancia de ellas, tienen la misma área, entonces los sólidos tendrán el mismo volumen (véase la figura). Detre el teorema de Cavalieri.

EJERCICIO 18



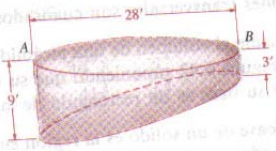
19. Demuestre que los métodos de discos y arandelas presentados en la Sección 6.2 son casos especiales de (6.8).

20. Una piscina circular tiene un diámetro de 28 pie. La profundidad del agua aumenta lentamente de 3 pie en un punto A en un lado de la piscina, a 9 pie en un punto B diametralmente opuesto a A (véase la figura). La siguiente tabla muestra las medidas de las profundidades (en pies) tomadas a lo largo del diámetro AB, donde x es la distancia (en pies) desde A.

x	0	4	8	12	16	20	24	28
Profundidad del agua	3	3.5	4	5	6.5	8	8.5	9

Use la Regla del Trapecio con $n = 7$ para calcular aproximadamente el volumen del agua en la piscina. Estime el número de galones de agua que hay en la piscina (1 gal $\approx$ 0.134 pie^3).

EJERCICIO 20

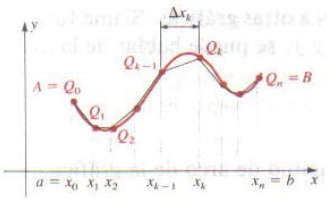


6.5 LONGITUD DE ARCO Y SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Para resolver algunos problemas aplicados se necesita calcular la *longitud* de algunas gráficas (o curvas). Por ejemplo, puede ser menester determinar la distancia que un cohete recorre durante un intervalo de tiempo dado, o bien la longitud de un trozo de alambre doblado. Si el alambre fuese flexible, se podría enderezar y medir su longitud con una regla (o con la Fórmula de la Distancia). Sin embargo, si el alambre no es flexible, se requiere usar otro método. La clave para definir la longitud de una gráfica es dividirla en muchas partes pequeñas y aproximar cada parte por medio de un segmento recto. Luego se toma el límite de las sumas de las longitudes de todos los segmentos rectilíneos. Esto da una integral definida. Para garantizar que la integral existe hay que poner restricciones a la función como se indica enseguida.

Una función f es **alisada** en un intervalo si tiene una derivada f' continua en todo el intervalo. Esto quiere decir, más o menos, que un cambio pequeño en x produce un cambio pequeño en la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente a la gráfica de f. Entonces, la gráfica no tiene vértices. A continuación se definirá la **longitud de arco** entre dos puntos A y B de la gráfica de una función alisada (o suave).

FIGURA 6.44



Si f es una función alisada en un intervalo cerrado $[a, b]$, los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ se llaman **extremos** de la gráfica de f. Sea P la partición de $[a, b]$ determinada por $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$, y sea Q_k el punto con coordenadas $(x_k, f(x_k))$. Esto da $n + 1$ puntos $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sobre la gráfica de f. Si se une cada Q_{k-1} con Q_k mediante un segmento rectilíneo de longitud $d(Q_{k-1}, Q_k)$, como se ilustra en la Figura 6.44, entonces la longitud L_P de la línea poligonal formada por los segmentos es

$$L_P = \sum_{k=1}^{n} d(Q_{k-1}, Q_k).$$

Si la norma $\|P\|$ de la partición es pequeña, entonces Q_{k-1} está cerca de Q_k para todo k y L_P es una aproximación a la longitud de arco entre A y B. Esto da una idea para definir la longitud de arco. Concretamente, esto se hará mediante el límite de las sumas L_P.

Según la Fórmula de la Distancia,

$$d(Q_{k-1}, Q_k) = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}.$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio (4.12),

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(w_k)(x_k - x_{k-1})$$

donde w_k está en el intervalo abierto (x_{k-1}, x_k). Sustituyendo esto en la fórmula anterior y tomando $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, se obtiene

$$\begin{aligned} d(Q_{k-1}, Q_k) &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f'(w_k)\,\Delta x_k]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(w_k)]^2}\,\Delta x_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L_P = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(w_k)]^2}\,\Delta x_k.$$

Nótese que L_P es una suma de Riemann para $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Además g es continua en $[a, b]$ porque f' es continua. Como se dijo antes, si la norma $\|P\|$ es pequeña, entonces la longitud L_P de la poligonal es una aproximación a la longitud de la gráfica de f entre A y B. Es de esperar que esta aproximación mejore a medida que $\|P\|$ disminuye y por tanto la *longitud* (también llamada *longitud de arco*) de la gráfica de f entre A y B se define como el límite de las sumas L_P. Como $g = \sqrt{1 + (f')^2}$ constituye una función continua, el límite existe y es equivalente a la integral definida $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$. Esta longitud de arco se denota por L_a^b.

DEFINICIÓN (6.9)

Sea f una función alisada en un intervalo cerrado $[a, b]$. La **longitud de arco de la gráfica** de f entre $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ es

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

En el Capítulo 13 se generalizará la Definición (6.9) a otras gráficas. Si una función f está definida implícitamente por una ecuación en x y y, se puede hablar de la *longitud de arco de la gráfica de la ecuación.*

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 3x^{2/3} - 10$. Calcular la longitud de arco de la gráfica de f del punto $A(8, 2)$ al punto $B(27, 17)$.

Solución La gráfica de f está en la Figura 6.45. Como

$$f'(x) = 2x^{-1/3} = \frac{2}{x^{1/3}},$$

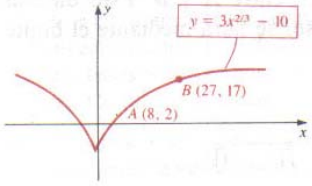
aplicando la Definición (6.9), obtenemos

$$L_8^{27} = \int_8^{27} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{x^{1/3}}\right)^2}\, dx = \int_8^{27} \sqrt{1 + \frac{4}{x^{2/3}}}\, dx$$

$$= \int_8^{27} \sqrt{\frac{x^{2/3} + 4}{x^{2/3}}}\, dx.$$

$$= \int_8^{27} \sqrt{x^{2/3} + 4}\, \frac{1}{x^{1/3}}\, dx.$$

FIGURA 6.45



Para evaluar esta integral, se sustituye

$$u = x^{2/3} + 4, \qquad du = \frac{2}{3} x^{-1/3}\, dx = \frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/3}}\, dx.$$

La integral puede expresarse en una forma más adecuada para la integración introduciendo el factor $\frac{2}{3}$ en el integrando y multiplicando la integral por $\frac{3}{2}$ para compensar. Así,

$$L_8^{27} = \frac{3}{2}\int_8^{27} \sqrt{x^{2/3} + 4}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/3}}\right) dx.$$

Si $x = 8$, entonces $u = (8)^{2/3} + 4 = 8$. Si $x = 27$, entonces $u = (27)^{2/3} + 4 = 13$. Haciendo la sustitución y cambiando los límites de integración,

$$L_8^{27} = \tfrac{3}{2}\int_8^{13} \sqrt{u}\, du = u^{3/2}\Big]_8^{13} = 13^{3/2} - 8^{3/2} \approx 24.2 \quad \bullet$$

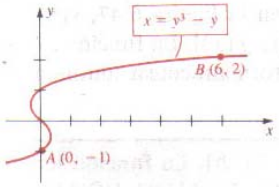
Intercambiando los papeles de x y y en la Definición (6.9) se obtiene una fórmul de integración con respecto a y. Concretamente, sea g una función alisada en el interv

lo $[c, d]$ del eje y. La longitud de arco de la gráfica de $x = g(y)$ entre el punto $(g(c), c)$ y el punto $(g(d), d)$ es

$$\textbf{(6.10)} \qquad L_c^d = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.$$

Los integrandos $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y $\sqrt{1 + [g'(y)]^2}$ de las fórmulas (6.9) y (6.10) muchas veces son expresiones que no tienen antiderivadas fáciles de evaluar. En esos casos, puede usarse integración numérica para calcular la longitud de arco, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 6.46



EJEMPLO 2 Plantear una integral para calcular la longitud de arco de la gráfica de $y^3 - y - x = 0$ de $A(0, -1)$ a $B(6, 2)$. Utilizar la Regla de Simpson (5.37) con $n = 6$ para obtener un valor aproximado de la integral con una precisión a una cifra decimal.

Solución La Definición (6.9) no se puede aplicar directamente porque la ecuación no es de la forma $y = f(x)$. Sin embargo, escribiendo $x = y^3 - y$, se puede usar (6.10) con $g(y) = y^3 - y$. La gráfica de la ecuación está en la Figura 6.46. Usando (6.10) con $c = -1$ y $d = 2$,

$$L_{-1}^2 = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + (3y^2 - 1)^2}\, dy$$
$$= \int_{-1}^2 \sqrt{9y^4 - 6y^2 + 2}\, dy.$$

Para aplicar la Regla de Simpson, sea $f(y) = \sqrt{9y^4 - 6y^2 + 2}$ y se organiza el trabajo como en la Sección 5.6 obteniendo la tabla siguiente.

k	y_k	$f(y_k)$	m	$mf(y_k)$
0	−1.0	2.2361	1	2.2361
1	−0.5	1.0308	4	4.1232
2	0.0	1.4142	2	2.8284
3	0.5	1.0308	4	4.1232
4	1.0	2.2361	2	4.4722
5	1.5	5.8363	4	23.3452
6	2.0	11.0454	1	11.0454

La suma de los números de la última columna es 52.1737.
Por la Regla de Simpson con $a = -1$, $b = 2$ y $n = 6$,

$$\int_{-1}^2 \sqrt{9y^4 - 6y^2 + 2}\, dy \approx \tfrac{1}{6}\,[52.1737] \approx 8.7 \quad \bullet$$

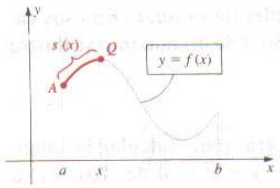
Si una gráfica puede dividirse en un número finito de partes, cada una de las cuales es la gráfica de una función alisada, entonces la longitud de arco de la gráfica se define

como la suma de las longitudes de arco de cada una de las partes. Una función de este tipo se dice que es **alisada parte por parte** en su dominio.

Para evitar confusiones en el siguiente análisis, se denota por t a la variable de integración. Entonces la fórmula de la longitud de arco dada en la Definición (6.9) se convierte en

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

FIGURA 6.47



Si f es alisada en $[a, b]$, entonces f lo es en $[a, x]$ para todo x en $[a, b]$ y la longitud de la gráfica del punto $A(a, f(a))$ al punto $Q(x, f(x))$ es

$$L_a^x = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

Cambiando la notación y usando el símbolo $s(x)$ en vez de L_a^x, puede considerarse a s como una función con dominio $[a, b]$, pues a cada x en $[a, b]$ le corresponde un único número $s(x)$. Como se muestra en la Figura 6.47, $s(x)$ es la longitud de arco de la gráfica de f entre $A(a, f(a))$ y $Q(x, f(x))$. La función s se llama *función longitud de arco* de la gráfica de f y se define formalmente a continuación.

DEFINICIÓN (6.11)

Sea f una función alisada en $[a, b]$. La **función longitud de arco** s de la gráfica de f en $[a, b]$ está definida por

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

para $a \le x \le b$.

Si s es una función longitud de arco, entonces la diferencial $ds = s'(x)\, dx$ se denomina **diferencial de longitud de arco**. El siguiente teorema muestra como determinar ds.

TEOREMA (6.12)

Sea f alisada en $[a, b]$ y s la función longitud de arco de la gráfica de $y = f(x)$ en $[a, b]$. Si dx y dy son las diferenciales de x y y, entonces

(i) $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ (ii) $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.

Demostración Por la Definición (6.11) y el Teorema (5.25),

$$s'(x) = D_x[s(x)] = D_x\left[\int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt\right] = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Aplicando la Definición (3.22),

$$ds = s'(x)\, dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Esto demuestra (i).

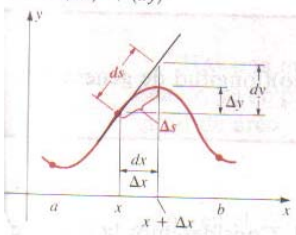
Para demostrar (ii) se elevan al cuadrado ambos lados de (i) y se obtiene

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= \{1 + [f'(x)]^2\}(dx)^2 \\ &= (dx)^2 + [f'(x)\,dx]^2 \\ &= (dx)^2 + (dy)^2.\end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia de la Definición (3.22). • •

FIGURA 6.48

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$



El Teorema (6.12) (ii) tiene una interpretación geométrica útil e interesante. Sea $y = f(x)$ y sea Δx un incremento de x. Sean Δy el cambio en y y Δs el cambio en la longitud de arco correspondientes a Δx. Estos incrementos se ilustran en la Figura 6.48. Nótese que dy es el ascenso o descenso verticales de la tangente cuando la variable independiente cambia de x a $x + \Delta x$ (véase también la Figura 3.13). Puesto que $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, ds puede considerarse como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con lados $|dx|$ y $|dy|$, como se ilustra en la Figura 6.48. Se ve que si Δx es pequeño, entonces ds puede ser una buena aproximación al incremento Δs de la longitud de arco.

EJEMPLO 3 Usar diferenciales para calcular aproximadamente la longitud de arco de la gráfica de $y = x^3 + 2x$ entre $A(1, 3)$ y $B(1.2, 4.128)$.

Solución Sea $f(x) = x^3 + 2x$. Entonces por el Teorema (6.12) (i),

$$ds = \sqrt{1 + (3x^2 + 2)^2}\,dx.$$

Podemos evaluar una aproximación tomando $x = 1$ y $dx = 0.2$. Así,

$$ds = \sqrt{1 + 5^2}\,(0.2) = \sqrt{26}\,(0.2) \approx 1.02 \quad \bullet$$

Sea f una función que no es negativa en todo el intervalo $[a, b]$. Si la gráfica de f gira alrededor del eje x, se genera una **superficie de revolución** (véase la Figura 6.49). A continuación se obtiene una fórmula para el área de esta superficie. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ donde r es una constante positiva, entonces la gráfica de f en

FIGURA 6.49

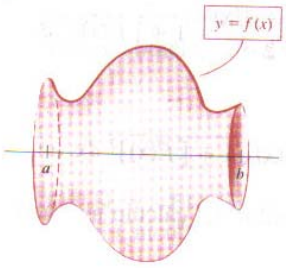
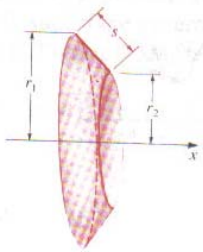


FIGURA 6.50



$[-r, r]$ es la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, y al girarla alrededor del eje x se obtiene una esfera de radio r cuya superficie tiene un área $4\pi r^2$.

Si la gráfica de f es el segmento que se muestra en la Figura 6.50, entonces la superficie que genera es un cono truncado con radios de las bases r_1 y r_2, y longitud de generatriz (o altura inclinada) s. Se puede demostrar que el área de esta superficie es

$$\pi(r_1 + r_2)s = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)s.$$

Es conveniente recordar la fórmula anterior en estos términos:

(6.13) Área de la superficie de un cono truncado $= 2\pi$ (radio medio)(longitud de generatriz)

En la siguiente discusión se usa este hecho.

Sea f una función alisada que no es negativa en $[a, b]$. Consideremos la superficie generada al girar la gráfica de f alrededor del eje x (véase la Figura 6.49). Se obtendrá una fórmula para el área S de esta superficie. Para ello, sea P una partición de $[a, b]$ determinada por $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ y, para cada k, sea Q_k el punto $(x_k, f(x_k))$ sobre la gráfica de f (véase la Figura 6.51). Si la norma $\|P\|$ tiende a cero, entonces la línea poligonal l_P que se obtiene al unir Q_{k-1} con Q_k para cada k, se aproxima a la gráfica de f; entonces el área de la superficie generada por l_P debe tender a S. El segmento $Q_{k-1}Q_k$ genera un cono truncado con radios de las bases $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$ y longitud de generatriz $d(Q_{k-1}, Q_k)$. De acuerdo con (6.13), el área de esta superficie es

$$2\pi\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\,d(Q_{k-1}, Q_k).$$

Sumando los términos de esta forma desde $k = 1$ hasta $k = n$ se obtiene el área S_P de la superficie generada por la poligonal l_P. Usando la expresión para $d(Q_{k-1}, Q_k)$ de la página 305, se tiene

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\sqrt{1 + [f'(w_k)]^2}\,\Delta x_k$$

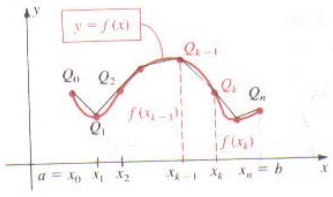
donde $x_{k-1} < w_k < x_k$. El área S de la superficie de revolución se define como $S = \lim_{\|P\|\to 0} S_P$. De la forma de S_P es razonable esperar que el límite sea

$$\int_a^b 2\pi\frac{f(x) + f(x)}{2}\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

o bien

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

FIGURA 6.51



La demostración de este hecho requiere resultados del cálculo avanzado y no se dará aquí. La siguiente definición resume lo expuesto.

DEFINICIÓN (6.14)

Si f es alisada y no es negativa en $[a, b]$, entonces el área S de la superficie generada al girar la gráfica de f alrededor del eje x es

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Si f es negativa para algún x en $[a, b]$ entonces, para calcular el área de la superficie S, puede usarse la siguiente generalización de la Definición (6.14):

$$S = \int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Hay una manera de recordar fácilmente la fórmula para S de la Definición (6.14). Sea (x, y) un punto arbitrario de la gráfica de f. Consideremos la diferencial de la longitud de arco

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

como en el Teorema (6.12)(i) (véase la Figura 6.52). Ahora, *consideremos ds* como la longitud de generatriz de un cono truncado con radio medio $y = f(x)$ (véase la Figura 6.50). De acuerdo con (6.13), el área de la superficie de este cono es $2\pi f(x)\,ds = 2\pi y\,ds$. La integración de $x = a$ a $x = b$ puede considerarse como sumar los términos $2\pi f(x)\,ds$ y tomar simultáneamente el límite de estas sumas, con lo que se obtiene

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\,ds = \int_a^b 2\pi y\,ds.$$

FIGURA 6.52

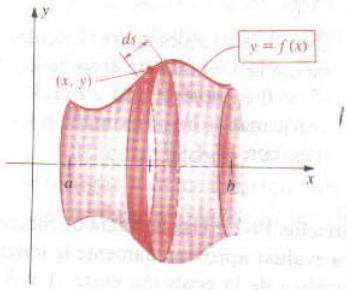
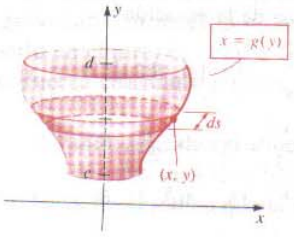


FIGURA 6.53

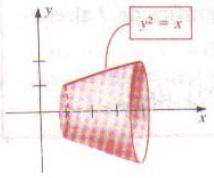


Si se intercambian los papeles de x y y en la discusión anterior, se obtiene una fórmula análoga donde la integral es con respecto a y. Entonces, si $x = g(y)$, donde g es alisada y no negativa en $[c, d]$, el área S de la superficie generada cuando la gráfica de g tiene rotación alrededor del eje y (véase la Figura 6.53), es

$$S = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy.$$

EJEMPLO 4 El arco de la parábola $y^2 = x$ que va de (1, 1) a (4, 2) gira alrededor del eje x. Calcular el área de la superficie resultante.

FIGURA 6.54



Solución La superficie se ilustra en la Figura 6.54. Usando la Definición (6.14) con $y = f(x) = x^{1/2}$,

$$S = \int_1^4 2\pi x^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2x^{1/2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^4 2\pi x^{1/2} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx = \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{6}(4x+1)^{3/2}\Big]_1^4 = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 5^{3/2})$$

$$\approx 30.85 \text{ unidades cuadradas.}$$

EJERCICIOS 6.5

Ejercicios 1-4: Use la Definición (6.9) para calcular la longitud de arco entre A y B de la gráfica de la ecuación.

1. $8x^2 = 27y^3$; $A(1, \frac{2}{3})$, $B(8, \frac{8}{3})$
2. $(y+1)^2 = (x-4)^3$; $A(5, 0)$, $B(8, 7)$
3. $y = 5 - \sqrt{x^3}$; $A(1, 4)$, $B(4, -3)$
4. $y = 6\sqrt[3]{x^2} + 1$; $A(-1, 7)$, $B(-8, 25)$

5-6. Resuelva los Ejercicios 1 y 2 mediante (6.10).

Ejercicios 7-10: Calcule la longitud de arco entre A y B de la gráfica de la ecuación.

7. $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$; $A(1, \frac{13}{12})$, $B(2, \frac{7}{6})$
8. $y + \dfrac{1}{4x} + \dfrac{x^3}{3} = 0$; $A(2, \frac{67}{24})$, $B(3, \frac{109}{12})$
9. $30xy^3 - y^8 = 15$; $A(\frac{8}{15}, 1)$, $B(\frac{271}{240}, 2)$
10. $x = \dfrac{y^4}{16} + \dfrac{1}{2y^2}$; $A(\frac{9}{8}, -2)$, $B(\frac{9}{16}, -1)$

Ejercicios 11-12: Plantee la integral para la determinación de la longitud de arco de la gráfica de la ecuación entre A y B (pero no la evalúe).

11. $2y^3 - 7y + 2x - 8 = 0$; $A(3, 2)$, $B(4, 0)$.
12. $11x - 4x^3 - 7y + 7 = 0$; $A(1, 2)$, $B(0, 1)$.
13. Calcule la longitud de arco de la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. (*Sugerencia:* Tome en cuenta la simetría con respecto a la recta $y = x$.)
14. Calcule la longitud de arco de la gráfica de $y = (3x^8 + 5)/(30x^3)$ del punto $(1, \frac{4}{5})$ al punto $(2, \frac{773}{240})$.
15. ¿Cuál es la función longitud de arco s correspondiente a la función f definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$? Calcule Δs y ds suponiendo que x aumenta de 1 a 1.1.
16. Resuelva el Ejercicio 15 para $f(x) = \sqrt{x^3}$.
17. Utilice diferenciales para calcular aproximadamente la longitud de arco de la gráfica de $y = x^2$ entre $A(2, 4)$ y $B(2.1, 4.41)$. Ilustre gráficamente esta aproximación y compárela con $d(A, B)$.
18. Use diferenciales para calcular aproximadamente la longitud de arco de la gráfica de $y + x^3 = 0$ entre $A(1, -1)$ y $B(1.1, -1.331)$. Ilustre gráficamente la aproximación y compárela también con $d(A, B)$.

Ejercicios 19-22: Use la Regla de Simpson con $n = 4$ para evaluar aproximadamente la longitud de arco de la gráfica de la ecuación entre A y B.

19. $xy = 2$; $A(1, 2)$, $B(2, 1)$
20. $y = x^2 + x + 3$; $A(-2, 5)$, $B(2, 9)$
21. $y = x^3$; $A(0, 0)$, $B(2, 8)$
22. $4y = x^4$; $A(0, 0)$, $B(2, 4)$

Ejercicios 23-26: La parte de la gráfica de la ecuación dada que se encuentra entre A y B gira alrededor del eje x. Calcule el área de la superficie generada.

23. $4x = y^2$; $A(0, 0)$, $B(1, 2)$

24. $y = x^3$; $A(1, 1)$, $B(2, 8)$

25. $8y = 2x^4 + x^{-2}$; $A(1, \frac{3}{8})$, $B(2, \frac{129}{32})$

26. $y = 2\sqrt{x+1}$; $A(0, 2)$, $B(3, 4)$

Ejercicios 27-28: La parte de la gráfica de la ecuación que se encuentra entre A y B gira alrededor del eje y. Calcule el área de la superficie generada.

27. $y = 2\sqrt[3]{x}$; $A(1, 2)$, $B(8, 4)$

28. $x = 4\sqrt{y}$, $A(4, 1)$, $B(12, 9)$

29. El menor de los arcos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ entre los puntos $(-3, 4)$ y $(3, 4)$ gira alrededor del eje y. Calcule el área de la superficie generada.

30. Calcule el área de la superficie que se genera cuando el arco descrito en el Ejercicio 29 gira alrededor del eje x.

31. Use la Definición (6.14) para demostrar que el área de la superficie de un cono circular recto de altura a y radio de la base b es $\pi b\sqrt{a^2 + b^2}$.

32. Demuestre que el área de la porción de superficie de una esfera de radio a contenida entre dos planos paralelos que cortan a la esfera, depende únicamente de la distancia entre los planos.

33. Demuestre que si la gráfica de la Figura 6.51 gira alrededor del eje y, entonces el área de la superficie generada está dada por

$$\int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

(*Indicación:* ¿Cuál es el radio medio de un cono truncado?)

34. Use el Ejercicio 33 para determinar el área de la superficie generada al girar la parte de la gráfica de $y = 3\sqrt[3]{x}$ que se encuentra entre $A(1, 3)$ y $B(8, 6)$, alrededor del eje y.

6.6 TRABAJO

El concepto de **fuerza** se puede considerar como la entidad física que describe la acción de empujar o tirar de un objeto. Por ejemplo, para empujar o arrastrar muebles sobre el piso de una habitación, para levantar del suelo un objeto o para mover una partícula cargada eléctricamente a través de un campo electromagnético, se requiere de una fuerza.

Si un objeto tiene un peso G (fuerza de gravedad) entonces, por definición, la fuerza que se requiere para levantarlo (o sostenerlo en el aire) es igual a G (en kilogramos fuerza, etc.). Una fuerza de este tipo es una **fuerza constante** porque su magnitud no cambia mientras está aplicada al objeto.

El concepto de *trabajo* en física se origina cuando una fuerza mueve un objeto de un lugar a otro. La siguiente definición se aplica al caso más simple en que el objeto se desplaza a lo largo de una línea recta en la misma dirección en que la fuerza se aplica.

DEFINICIÓN (6.15) Si una fuerza constante F se aplica a un objeto y lo desplaza una distancia d en la dirección de la fuerza, entonces el **trabajo** W realizado sobre el objeto es

$$W = Fd.$$

En física suelen emplearse dos unidades para la fuerza, una del sistema CGS (centímetro-gramo-segundo) y otra del sistema MKS (metro-kilogramo-segundo). En el primero (ya poco utilizado) se define la **dina** (din) como la fuerza que aplicada a una

masa de 1 g (gramo) le produce una aceleración de 1 cm/s^2. Si F se expresa en dinas y d en centímetros, entonces la unidad de trabajo es la dina-centímetro (din · cm) o **ergio**. En el sistema MKS se define el **newton** (N) como la magnitud de la fuerza que se requiere para impartir una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 kg. [Un **kilogramo fuerza** (kgf) es la fuerza con que la gravedad atrae a una masa de 1 kg. Como la gravedad produce una aceleración (en la localidad normal) de aproximadamente 9.81 m/s^2 a todos los cuerpos, resulta que 1 kgf es igual a 9.81 N.] Si F se expresa en newtons y d en metros, entonces la unidad de trabajo es el newton-metro (N · m) o **joule** (J). Se puede determinar que 1 J = 10^7 ergios. (Si F se expresa en kilogramos fuerza y d en metros, entonces la unidad de trabajo es el kilográmetro (kgf · m), equivalente a 9.8 J.). El sistema MKS se llama ahora universalmente Sistema Internacional de Unidades (SI).* En el sistema inglés, cuando la fuerza F se mide en libras (fuerza) (lb) y la distancia d en pies, la unidad de trabajo es la libra-pie (lb · pie). Si F se expresa en libras y d en pulgadas, entonces la unidad de trabajo es la libra-pulgada (lb · pulg). Se puede calcular que 1 J ≈ 0.74 lb · pie.

EJEMPLO 1 Calcular el trabajo realizado al empujar un automóvil sobre una carretera horizontal de un punto A a un punto B a 7 metros de A, con una fuerza constante de 40 kgf.

FIGURA 6.55



Solución El problema se ilustra en la Figura 6.55. Como la fuerza constante es F = 40 kgf y la distancia que el automóvil recorre es d = 7m, de acuerdo con la Definición (6.15), el trabajo realizado es

$$W = (40)(7) = 280 \text{ kgf} \cdot \text{m} = 2744 \text{ J}. \quad \bullet$$

A veces se necesita determinar F antes de aplicar la Definición (6.15). En el siguiente ejemplo se usa la *segunda ley de Newton* $F = ma$, donde m es la masa y a es la aceleración de un objeto.

EJEMPLO 2 Calcular aproximadamente el trabajo realizado al elevar un objeto de 15 kg de masa verticalmente a una altura de 4 m.

Solución La fuerza requerida F está dada por $F = ma$. Si la masa m se mide en kilogramos y la aceleración a en m/s^2, entonces F resulta expresada en newtons. En este ejemplo, a es la aceleración de la gravedad (g), que en el sistema MKS (o SI), es aproximadamente 9.81 m/s^2. Entonces,

$$F = ma \approx (15)(9.81) = 147.15 \text{ N}.$$

Aplicando la Definición (6.15) y este sistema de unidades,

$$W = Fd \approx (147.15)(4) = 588.6 \text{ N} \cdot \text{m} = 588.6 \text{ J}. \quad \bullet$$

* **(N. del R)** Esta parte se adapta para su mejor comprensión en los países de habla española. En esta versión se siguen las normas metrológicas modernas para las aplicaciones del Cálculo en física.

La fórmula de la Definición (6.16) puede servir para calcular el trabajo realizado al estirar o comprimir un resorte. Para resolver este tipo de problemas es necesario utilizar la siguiente ley de la física.

LEY DE HOOKE (6.17)

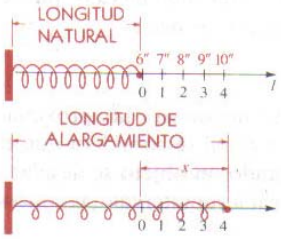
La fuerza $f(x)$ que se requiere para estirar un resorte x unidades a partir de su longitud natural es

$$f(x) = kx$$

donde k es una constante llamada **constante de fuerza**.

La fórmula de (6.17) también se emplea para calcular el trabajo que se efectúa al comprimir un resorte x unidades a partir de su longitud natural.

FIGURA 6.57



EJEMPLO 3 Para estirar un pequeño resorte de su longitud natural de 6 cm a una de 8 cm se necesita una fuerza de 9 dinas. Calcular el trabajo realizado al estirar el resorte **(a)** de su longitud natural a una de 10 cm y **(b)** de una longitud de 7 cm a una de 9 cm.

Solución **(a)** Comenzamos por introducir una recta coordenada l como se muestra en la Figura 6.57, con uno de los extremos del resorte sujeto a algún punto a la izquierda del origen, y el extremo movible colocado en el origen. De acuerdo con la ley de Hooke (6.17), la fuerza $f(x)$ que se requiere para estirar el resorte x unidades a partir de su longitud natural es $f(x) = kx$ para una k constante. Usando los datos, $f(2) = 9$. Sustituyendo en $f(x) = kx$, obtenemos $9 = k \cdot 2$ y entonces la constante de fuerza es igual a $\frac{9}{2}$. Por tanto, la ley de Hooke para este resorte tiene la forma

$$f(x) = \tfrac{9}{2}x.$$

De acuerdo con la Definición (6.16), el trabajo realizado al estirar el resorte 4 cm es

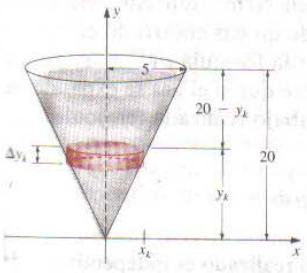
$$W = \int_0^4 \frac{9}{2}x\,dx = \frac{9}{2}\frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = 36 \text{ ergios.}$$

(b) Usando la misma función f pero en el intervalo [1, 3], obtenemos

$$W = \int_1^3 \frac{9}{2}x\,dx = \frac{9}{2}\frac{x^2}{2}\Big]_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{9}{4} = 18 \text{ ergios.} \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Un tanque que tiene la forma de un cono circular recto de 20 pie de alto y radio de la base de 5 pie, tiene su vértice al nivel del suelo y su eje vertical. El tanque está lleno de agua que pesa 62.5 lb/pie^3. Calcular el trabajo realizado al bombear toda el agua y hacer que salga por arriba del tanque.

FIGURA 6.58



Solución Comenzamos por introducir un sistema coordenado como se muestra en la Figura 6.58. El cono corta el plano xy en la recta de pendiente 4 que pasa por el origen. Esta recta tiene ecuación $y = 4x$.

Sea P la partición del intervalo $[0, 20]$ determinada por los números $0 = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n = 20$, sea $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, y sea x_k la abscisa del punto sobre $y = 4x$ con ordenada y_k. Si el cono se divide con planos perpendiculares al eje y en cada y_k, puede considerarse que la masa de agua se parte en n discos delgados. Como se ilustra en la Figura 6.58, el volumen de la k-ésima rodaja o rebanada es aproximadamente igual al volumen $\pi x_k^2 \Delta y_k$ de un disco circular que, como $x_k = y_k/4$, es igual a $\pi(y_k/4)^2 \Delta y_k$. Entonces,

$$\text{Volumen de la } k\text{-ésima rodaja} \approx \pi\left(\frac{y_k^2}{16}\right)\Delta y_k.$$

Como el agua pesa 62.5 lb/pie^3, tenemos que

$$\text{Peso de la } k\text{-ésima rebanada} \approx 62.5\pi\left(\frac{y_k^2}{16}\right)\Delta y_k.$$

Según (6.15), el trabajo que se efectúa al elevar el disco de la figura hasta la parte de arriba del tanque es el producto de la distancia $20 - y_k$ por el peso. Esto da la siguiente aproximación:

$$\text{Trabajo realizado para elevar la } k\text{-ésima rodaja} \approx (20 - y_k)62.5\pi\left(\frac{y_k^2}{16}\right)\Delta y_k.$$

Como este número es una estimación del trabajo efectuado al levantar la k-ésima rebanada hasta la parte superior del tanque, el trabajo realizado al vaciar todo el tanque es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} (20 - y_k)62.5\pi\left(\frac{y_k^2}{16}\right)\Delta y_k.$$

El trabajo exacto W se obtiene calculando el límite de estas sumas cuando la norma de la partición tiende a cero. Esto da

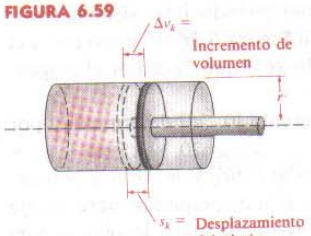
$$W = \int_0^{20} (20 - y)62.5\pi\left(\frac{y^2}{16}\right) dy$$

$$= \frac{62.5\pi}{16}\int_0^{20} (20y^2 - y^3)\, dy$$

$$= \frac{62.5\pi}{16}\left[20\left(\frac{y^3}{3}\right) - \frac{y^4}{4}\right]_0^{20}$$

$$= \frac{62.5\pi}{16}\left(\frac{40{,}000}{3}\right) \approx 163\,625 \text{ lb} \cdot \text{pie}. \quad \bullet$$

FIGURA 6.59



EJEMPLO 5 La presión p (en N/m^2, din/cm^2, etc.) y el volumen v (en m^3, cm^3, etc.) de un gas encerrado en un recipiente están relacionados por la fórmula $pv^m = c$, donde m y c son constantes. Demuestre que si el gas se expande de $v = a$ a $v = b$, entonces el trabajo realizado (en joules, ergios, etc.) está dado por

$$W = \int_a^b p\, dv.$$

Solución Como el trabajo realizado es independiente de la forma del recipiente, podemos suponer que el gas está encerrado en un cilindro circular recto de radio r y que la expansión se realiza por el desplazamiento de un pistón, como se ilustra en la Figura 6.59. Sea P una partición del *intervalo de volúmenes* $[a, b]$ determinada por $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = b$, y sea $\Delta v_k = v_k - v_{k-1}$. Consideremos que la expansión se realiza con incrementos de volumen $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$ y sean $s_1, s_2, \ldots, s_n$ los desplazamientos correspondientes del pistón (véase la Figura 6.59). Resulta que para cada k

$$\Delta v_k = \pi r^2 s_k \quad \text{o bien} \quad s_k = \left(\frac{1}{\pi r^2}\right)\Delta v_k.$$

Si p_k representa un valor de la presión p correspondiente al k-ésimo incremento de volumen Δv_k, entonces la fuerza sobre el pistón es el producto de p_k y el área de la cara útil del pistón, es decir, $p_k \pi r^2$. Entonces, el trabajo realizado durante este incremento es

$$(p_k \pi r^2)s_k = (p_k \pi r^2)\left(\frac{1}{\pi r^2}\right)\Delta v_k = p_k\, \Delta v_k$$

y por lo tanto,

$$W \approx \sum_k p_k\, \Delta v_k.$$

Como la aproximación mejora cuando Δv_k tiende a cero, concluimos que

$$W = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k p_k\, \Delta v_k = \int_a^b p\, dv \quad \bullet$$

EJERCICIOS 6.6

1. Un resorte con una longitud natural de 10 pulg se alarga 1.5 pulg bajo un peso de 8 lb. Calcule el trabajo efectuado al estirar el resorte (a) de su longitud natural a una longitud de 14 pulg y (b) de una longitud de 11 pulg a una de 13 pulg.

2. Para comprimir un resorte de longitud natural 0.80 m a una longitud de 0.75 m se requiere una fuerza de 25 N. Calcule el trabajo realizado al comprimir el resorte desde su longitud natural a una de 0.70 m.

3. Compare el trabajo realizado al estirar un resorte de su longitud natural de 12 a 13 cm con el efectuado al alargarlo de 13 a 14 cm.

4. Para estirar un resorte desde una longitud de 6 cm hasta una de 7 cm se requiere un trabajo de 60 ergios, y para deformarlo de 7 a 8 cm se requieren 120 ergios. Calcule la constante de fuerza del resorte y su longitud natural.

5. Una pecera tiene una base rectangular de 2 pie

de ancho y 4 pie de largo, y sus lados rectangulares tienen una altura de 3 pie. Si el recipiente está lleno de agua, ¿cuánto trabajo se requiere para extraer toda el agua desde arriba del tanque?

6. Generalice el Ejemplo 4 de esta sección al caso de un tanque cónico de altura h y radio de la base a que está lleno de un líquido que tiene un peso específico (peso por unidad de volumen) γ.

7. Un elevador de carga (montacargas) que tiene una masa de 1500 kg de masa está sostenido por un cable de 4 m de largo y una masa de 7 kg por metro lineal. Calcule aproximadamente el trabajo que se requiere para hacer subir el ascensor 3 m enrollando el cable en un torno o malacate.

8. Una persona de 75 kgf de peso escala un poste vertical de 15 m de alto. Calcule el trabajo que por unidad de tiempo realiza si llega al tope en (a) 10 s (segundos), (b) 5 s.

9. Un tanque cilíndrico vertical de 3 pie de diámetro y 6 pie de altura está lleno de agua. Calcule el trabajo de bombeo que se requiere para extraer toda el agua (a) por la parte superior del tanque, (b) a través de un tubo que sube 4 pie por arriba de la citada parte superior del tanque.

Resuelva las partes (a) y (b) del Ejercicio 9 suponiendo que el tanque está lleno de agua sólo hasta la mitad.

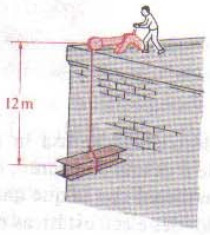
Un canalón de 8 pie de largo cuyos extremos son triángulos equiláteros de 2 pie de ancho, está lleno de agua. Calcule el trabajo que se requiere para extraer toda el agua por encima del borde del canalón.

Una cisterna que tiene la forma de la parte inferior de una esfera de 1.80 m de radio, está llena de agua. Calcule el trabajo que se requiere para bombear el agua hasta un punto que se encuentra 1.2 m arriba de la parte superior de la cisterna.

13. La fuerza (en dinas) con la que dos electrones se repelen es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (en cm) que los separa.
 (a) Calcule el trabajo realizado al mover un electrón a lo largo del eje x desde el origen hasta el punto (3, 0) mientras otro se mantiene fijo en el punto (5, 0).
 (b) Calcule el trabajo realizado al mover un electrón a lo largo del eje x desde el origen hasta el punto (3, 0) mientras otros dos electrones se mantienen fijos uno en el punto (−5, 0) y otro en el punto (5, 0).

14. Un cable uniforme de 12 m de largo y 30 kg de masa cuelga de un sistema de poleas montado en la azotea de un edificio (véase la figura). ¿Qué trabajo se requiere para levantar hasta lo alto una viga de acero de 250 kg de masa que está sujeta al extremo inferior del cable?

EJERCICIO 14



15. Un recipiente con agua se eleva verticalmente con una velocidad de 1.5 pie/s mediante una cuerda de peso despreciable. Mientras se eleva, se le va saliendo el agua a razón de 0.25 lb/s. El recipiente pesa 4 lb cuando está vacío y tenía 20 lb de agua cuando se empezó a elevar. Calcule el trabajo realizado al elevar el recipiente 12 pie.

16. Calcule el trabajo que se requiere en el Ejercicio 15 para subir el recipiente hasta que se le ha caído la mitad del agua.

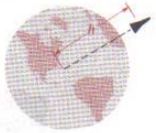
17. El volumen y la presión de cierto gas varían de acuerdo con la ley $pv^{1.2} = 115$, donde las unidades básicas de medida son la pulgada y la libra. Calcule el trabajo realizado cuando el gas se expande de 32 a 40 pulg^3. (*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 5.)

18. La presión y el volumen de una cierta cantidad de vapor de agua están relacionados por la fórmula $pv^{1.14} = c$, donde c es una constante. Suponiendo que la presión y el volumen iniciales son p_0 y v_0, respectivamente, encuentre una fórmula para el trabajo realizado cuando el vapor se expande al doble de su volumen. (*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 5.)

19. La ley de la gravitación de Newton afirma que la fuerza F de atracción entre dos partículas que tienen masas m_1 y m_2, está dada por $F = Gm_1m_2/s^2$, donde G es una constante y s es la distancia entre las partículas. Considerando a la masa m_1 de la Tierra como concentrada en el

centro de la misma, obtenga una fórmula general para el trabajo realizado al llevar un cohete de masa m_2 verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre (a 6400 km del centro) hasta una altura h (véase la figura).

EJERCICIO 19



20. En electricidad se usa la fórmula $F = kq/r^2$, donde k es una constante, para expresar la fuerza (en dinas) con la que una carga positiva Q de q unidades electrostáticas (ues) repele a una carga positiva unitaria que se encuentra a r cm de Q. Calcule el trabajo que se requiere para mover la carga unitaria de un punto a d cm de Q a otro a $\frac{1}{2}d$ cm de Q.

Ejercicios 21-22: Suponga que los valores de la tabla para la fuerza $f(x)$ que actúa sobre un punto con coordenada x en una recta coordenada l se obtuvieron experimentalmente. Use la Regla del Trapecio para calcular aproximadamente el trabajo realizado a lo largo del intervalo $[a, b]$, donde a y b son el valor mínimo y máximo de x, respectivamente.

21.

x pie	$f(x)$ lb
0	7.4
0.5	8.1
1.0	8.4
1.5	7.8
2.0	6.3
2.5	7.1
3.0	5.9
3.5	6.8
4.0	7.0
4.5	8.0
5.0	9.2

22.

x m	$f(x)$ N
1	125
2	120
3	130
4	146
5	165
6	157
7	150
8	143
9	140

23. Demuestre que si la función fuerza es constant , entonces la Definición (6.16) se reduce a la De - nición (6.15).

6.7 FUERZA EJERCIDA POR UN LÍQUIDO

En física, la *presión* p a una profundidad h en un fluido (líquido o gas) se define como el peso del fluido contenido en una columna de altura h cuya sección transversal tiene un área de una unidad cuadrada. La presión también se puede considerar como la fuerza ejercida por el fluido por unidad de área.

DEFINICIÓN (6.18)

Si el **peso específico** (peso por unidad de volumen)* de un fluido se denota por γ, entonces la **presión** p a una profundidad h es

$$p = \gamma h.$$

EJEMPLO 1 El peso específico del agua de un lago es de 62.5 lb/pie^3. Calcular la presión a una profundidad de **(a)** 2 pie, **(b)** 6 pie.

* **(N. del R.)** El peso específico γ es el producto de la *densidad* ρ (masa por unidad de volumen) y la aceleración de la gravedad g; es decir, $\gamma = \rho g$. En hidrostática interviene siempre γ y no ρ.

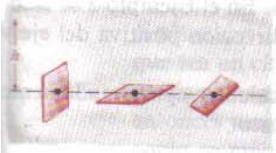
Solución Usando la Definición (6.18) con $\gamma = 62.5$, obtenemos

(a) $p = \gamma h = (62.5)(2) = 125$ lb/pie^2

(b) $p = \gamma h = (62.5)(6) = 375$ lb/pie^2. •

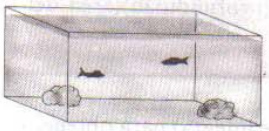
El **principio de Pascal** en hidrostática afirma que la presión en un fluido a una profundidad h es la misma en todas direcciones. Así, si una placa plana se sumerge en un fluido, la presión en un punto de la placa a una profundidad h es γh, independientemente de si la placa está colocada en dirección vertical, horizontal o inclinada (véase la Figura 6.60, en donde la presión en los tres puntos es γh).

FIGURA 6.60



Si un tanque rectangular como por ejemplo un acuario, se llena de agua, la fuerza total ejercida por el agua sobre la base (horizontal) puede calcularse multiplicando la presión en el fondo del tanque por el área de la base. Por ejemplo, si la profundidad del agua es 2 pie y el área de la base es 12 pie^2, como se ve en la Figura 6.61, entonces del Ejemplo 1(a), la presión en el fondo es 125 lb/pie^2 y la fuerza total sobre la base es (125)(12) = 1500 lb. Esto corresponde a 12 columnas de agua con sección transversal de 1 pie^2 de área, cada una de las cuales pesa 125 lb.

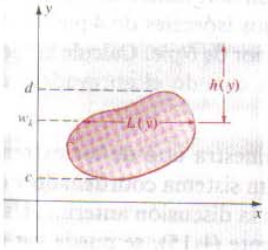
FIGURA 6.61



Es más complicado calcular la fuerza ejercida sobre uno de los lados del acuario, porque en ella la presión no es constante sino que aumenta con la profundidad. En lugar de resolver este problema consideremos la siguiente situación que es más general.

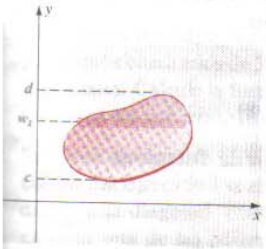
Supóngase que una placa plana está sumergida en un líquido cuyo peso específico es γ, de manera que la cara de la placa es perpendicular a la superficie libre del líquido. Introducimos un sistema de coordenadas como se muestra en la Figura 6.62, donde la placa se extiende sobre el intervalo $[c, d]$ del eje y. Supóngase que para cada y en $[c, d]$, la profundidad en el líquido y la longitud de la placa están dadas por $h(y)$ y $L(y)$, respectivamente, donde h y L son funciones continuas sobre $[c, d]$.

FIGURA 6.62



Sea P una partición de $[c, d]$, w_k cualquier número en el k-ésimo subintervalo $[y_{k-1}, y_k]$ y consideremos el rectángulo horizontal de longitud $L(w_k)$ y anchura $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, como se ve en la Figura 6.63. Si la norma $\|P\|$ es pequeña (cercana a cero), entonces Δy_k es muy pequeño y todos los puntos del rectángulo están más o menos a la misma profundidad $h(w_k)$. Entonces por la Definición (6.18), la presión en cualquier punto del rectángulo es casi $\gamma h(w_k)$. Como el área del rectángulo es $L(w_k)\,\Delta y_k$, la fuerza total sobre el rectángulo es alrededor de $\gamma h(w_k) \cdot L(w_k)\,\Delta y_k$ y, por lo tanto, la fuerza sobre la placa es alrededor de

FIGURA 6.63



$$\sum_k \gamma h(w_k) \cdot L(w_k)\,\Delta y_k.$$

Como esta aproximación debe mejorar cuando $\|P\|$ tiende a cero, se obtiene la siguiente fórmula.

DEFINICIÓN (6.19)

La fuerza F ejercida por un fluido de peso específico constante γ en una región sumergida como la que se ilustra en la Figura 6.64 es

$$F = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k \gamma h(w_k) \cdot L(w_k)\,\Delta y_k = \int_c^d \gamma h(y) \cdot L(y)\,dy.$$

Una región más complicada se puede dividir en subregiones de este tipo y para calcular la fuerza sobre ella se aplica (6.19) a cada subregión y se suman los resultados. El sistema coordenado puede introducirse de varias maneras. En el Ejemplo 3 se escogerá el eje x a lo largo de la superficie del líquido y en la dirección positiva del eje y hacia abajo.

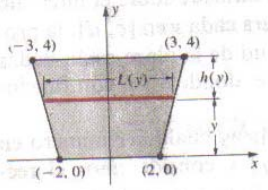
A veces es conveniente usar la siguiente fórmula para calcular aproximadamente la **fuerza de un fluido sobre un rectángulo horizontal angosto**:

(6.20)

Fuerza $\approx$ (peso específico)(profundidad)(área del rectángulo).

Después de aplicar (6.20) se toma un límite de sumas (o se integra) para obtener la fuerza total sobre la región.

FIGURA 6.64



EJEMPLO 2 Los extremos de un abrevadero de 8 pie de longitud tienen la forma de trapecios isósceles de 4 pie de alto, base inferior de 4 pie y base superior de 6 pie. Calcule la fuerza total sobre uno de los extremos cuando el abrevadero está lleno de agua.

Solución La Figura 6.64 muestra uno de los extremos del abrevadero colocado sobre un sistema coordenado y con las dimensiones mencionadas en la discusión anterior. Usando la Forma de Punto y Pendiente (1.15), se puede ver que $y = 4x - 8$ o, equivalentemente, $x = \frac{1}{4}(y + 8)$ es la ecuación de una recta que pasa por los puntos (2, 0) y (3, 4). De la Figura 6.64, se ve que la profundidad $h(y)$ y la longitud $L(y)$ correspondientes a un rectángulo típico son

$$h(y) = 4 - y$$

y

$$L(y) = 2x = 2 \cdot \tfrac{1}{4}(y + 8) = \tfrac{1}{2}(y + 8).$$

Usando la Definición (6.19) con $\gamma = 62.5$, obtenemos que la fuerza es

$$F = \int_0^4 (62.5)(4 - y) \cdot \tfrac{1}{2}(y + 8)\,dy$$

$$= 31.25 \int_0^4 (32 - 4y - y^2)\, dy = 31.25\left[32y - 2y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^4$$

$$= 31.25\left[128 - 32 - \frac{64}{3}\right] = \frac{7000}{3} \approx 2333 \text{ lb}.$$

Como se indica en el ejemplo anterior, la longitud del abrevadero no afecta la fuerza en los extremos. Lo mismo sucede para el tanque de aceite del ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Un tanque cilíndrico de 2 m de diámetro y 3 m de largo yace de costado y está lleno hasta la mitad con aceite que pesa 930 kg/m^3. Calcular la fuerza ejercida por el aceite sobre uno de los extremos del tanque.

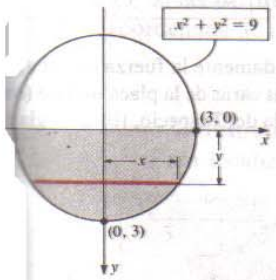
Solución Introducimos un sistema coordenado de manera que el extremo del tanque sea un círculo de 1 m de radio con centro en el origen. La ecuación de la circunferencia respectiva es $x^2 + y^2 = 1$. Si elegimos la dirección positiva del eje *y hacia abajo*, entonces y representa la profundidad de los puntos de un rectángulo horizontal típico, como se muestra en la Figura 6.65. La anchura $L(y)$ del tanque está dada por

$$L(y) = 2x = 2\sqrt{1 - y^2}.$$

Usando la Definición (6.19) con $\gamma = 930$, obtenemos

$$F = \int_0^1 930y(2\sqrt{1 - y^2})\, dy.$$

FIGURA 6.65



Podemos evaluar esta integral usando la sustitución

$$u = 1 - y^2, \quad du = -2y\, dy.$$

Obsérvese que si $y = 0$, entonces $u = 1$ y que si $y = 1$, entonces $u = 0$. Esto lleva a

$$F = 930 \int_0^1 \sqrt{1 - y^2}\, 2y\, dy = -930 \int_0^1 \sqrt{1 - y^2}\,(-2y)\, dy$$

$$= -930 \int_1^0 u^{1/2}\, du = -930\, \frac{u^{3/2}}{3/2}\Big]_1^0$$

$$= -\frac{1860}{3}\,[0 - 1^{3/2}] = 620 \text{ kg}.$$

EJERCICIOS 6.7

1. Un acuario de vidrio tiene una longitud de 1 m y extremos cuadrados de 30 cm de lado y está lleno de agua. Calcule la fuerza ejercida por el agua (a) sobre un extremo, (b) sobre un lado.
2. Suponga que uno de los extremos cuadrados del tanque del Ejercicio 1 se divide en dos partes mediante una diagonal. Calcule la fuerza ejercida en cada una de las partes.
3. Los extremos de un abrevadero de 2 m de largo tienen forma de triángulos isósceles cuyos lados iguales miden 0.6 m y el tercer lado que se encuentra en la parte superior del abrevadero mide $(0.6)\sqrt{3}$ m. Calcule la fuerza que el agua ejerce en uno de los extremos del abrevadero si (a) está lleno de agua, (b) está lleno hasta la mitad.
4. Resuelva los incisos (a) y (b) del Ejercicio 3 su-

poniendo que la altura del triángulo es h y $0 < h < 0.6$.

5. Un tanque cilíndrico de 4 pie de diámetro y 5 de largo yace de costado. Suponga que el tanque está lleno hasta la mitad con aceite cuyo peso es de 60 lb/pie^3. Calcule la fuerza que el aceite ejerce sobre uno de los extremos del tanque.

6. Una presa tiene una compuerta rectangular de 1.5 m de ancho y 1 m de alto. Suponga que la compuerta es vertical y que su parte superior está 2 m abajo de la superficie del agua y es paralela a ésta. Calcule la fuerza que el agua ejerce sobre la compuerta.

7. Una piscina rectangular tiene 12.5 m de ancho y 25 m de largo. La profundidad del agua aumenta uniformemente de 1 m en un extremo a 3 m en el otro. Calcule la fuerza total que el agua ejerce sobre el fondo de la piscina.

8. Calcule la fuerza que ejerce sobre uno de los lados de la piscina descrita en el Ejercicio 7.

9. Una placa que tiene la forma de un trapecio isósceles con base superior de 1.5 m y base inferior de 3 m se sumerge verticalmente en el agua de manera que las bases permanecen paralelas a la superficie. Suponga que las bases inferior y superior distan de la superficie del agua 3.75 m y 2.25 m, respectivamente. Calcule la fuerza que el agua ejerce en una de las caras de la placa.

10. Una placa circular de 1 m de radio se sumerge verticalmente en el agua de manera que la distancia de la superficie del agua al centro de la placa es de 3 m. Calcule la fuerza que el agua ejerce sobre una cara de la placa.

11. Los extremos de un abrevadero tienen la forma de la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 4$, donde x y y se miden en pies. Suponga que el abrevadero está lleno de agua y calcule la fuerza sobre uno de sus extremos.

12. Se sumerge verticalmente en agua una placa plana que tiene la forma de la región acotada por las gráficas de $y = x^4$ y $y = 1$, donde x y y se miden en metros. Suponga que la parte recta de la frontera de la placa es la más cercana a la superficie del agua y es paralela a ella. Calcule la fuerza que el agua ejerce sobre una cara de la placa suponiendo que la parte recta de la frontera dista 4 m de la superficie.

13. Una placa rectangular de 3 pie de ancho y 6 pie de largo se sumerge verticalmente en aceite. Suponga que los lados más cortos son paralelos a la superficie y que el más cercano se encuentra a 2 pie de ella. Calcule la fuerza total que el aceite ejerce sobre una cara de la placa suponiendo que éste pesa 50 lb/pie^3.

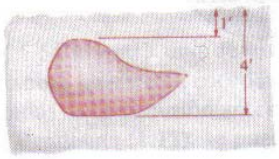
14. Suponga que la placa del Ejercicio 13 se divide en dos por medio de una diagonal. Calcule la fuerza ejercida sobre cada una de las partes.

15. Una placa de forma irregular está sumergida verticalmente en agua (véase la figura). Las mediciones de su anchura tomadas a profundidades sucesivas con incrementos de 0.5 pie aparecen en la tabla siguiente.

Prof. en el agua (pies)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
An. de la placa (pies)	*0*	*2*	*3*	*5.5*	*4.5*	*3.5*	*0*

Calcule aproximadamente la fuerza que el agua ejerce en una de las caras de la placa usando (con $n = 6$) (a) la Regla del Trapecio, (b) la Regla de Simpson.

EJERCICIO 15



6.8 MOMENTOS Y CENTROS DE MASA DE UNA LÁMINA

En esta sección se presentan métodos para calcular los momentos y los centros de masa de una *lámina*, es decir, de una placa plana y delgada. Como motivación, consideremos primero partículas o **masas puntuales**.

Sea l una recta coordenada y P un punto de l con coordenada x. Si una partícula de masa m se coloca en P, entonces el **momento** (más precisamente, el **primer momento**) de la partícula con respecto al origen O se define como el producto mx. Supongamos que l es horizontal, su dirección positiva es a la derecha y puede girar libremente alrededor de O donde se supone un punto de apoyo, como se muestra en la Figura 6.66. Si la masa m_1 de un objeto está concentrada en el punto de coordenada positiva x_1, entonces el momento m_1x_1 es positivo y l giraría en el sentido del reloj. Si un objeto de masa m_2 se encuentra en un punto de coordenada negativa x_2, entonces su momento m_2x_2 es negativo y l giraría en sentido contrario al del reloj. Se dice que el conjunto formado por los dos objetos está en *equilibrio* si $m_1x_1 = m_2|x_2|$. Como $x_2 < 0$, esto es equivalente a $m_1x_1 = -m_2x_2$, o bien

$$m_1x_1 + m_2x_2 = 0;$$

es decir, *la suma de los momentos con respecto al origen es cero*. Esto se asemeja a un balancín o subibaja con punto de apoyo O que queda en equilibrio si dos personas con masas m_1 y m_2 se colocan como se indica en la Figura 6.66.

FIGURA 6.66

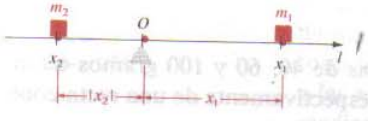
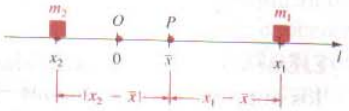


FIGURA 6.67



Si las partículas no están en equilibrio, entonces hay un punto P de "balance" con coordenada $\bar{x}$, tal que

$$m_1(x_1 - \bar{x}) = m_2|x_2 - \bar{x}| = -m_2(x_2 - \bar{x})$$

como se ilustra en la Figura 6.67. (Nótese que $|x_2 - x| = -(x_2 - \bar{x})$ ya que $x_2 < \bar{x}$.)

Para localizar P se despeja $\bar{x}$ como sigue:

$$m_1(x_1 - \bar{x}) + m_2(x_2 - \bar{x}) = 0$$

$$m_1x_1 + m_2x_2 - (m_1 + m_2)\bar{x} = 0$$

$$(m_1 + m_2)\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Entonces, para calcular $\bar{x}$ se divide la suma de los momentos con respecto al origen entre la masa total $m = m_1 + m_2$. El punto con coordenada $\bar{x}$ se llama el *centro de masa* (o *centro de gravedad*) de las dos partículas. La siguiente definición es una generalización de este concepto para más de dos partículas.

DEFINICIÓN (6.21) Sea l una recta coordenada y S un conjunto de n partículas de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas en los pun-

tos de coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente. Sea $m = \sum_{k=1}^{n} m_k$ la masa total.

(i) El **momento de S con respecto al origen** es $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k$.

(ii) El **centro de masa** (o **centro de gravedad**) de S es el punto con coordenada $\bar{x}$, tal que

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{m} \quad \text{o bien} \quad m\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k.$$

El número $m\bar{x}$ en la Definición (6.21) se puede considerar como el momento respecto al origen de una partícula de masa m colocada en el punto con coordenada $\bar{x}$. Entonces, la fórmula (6.21)(ii) afirma que $\bar{x}$ da la posición en la que la masa total m podría concentrarse sin que cambie el momento respecto al origen. El punto con coordenada $\bar{x}$ es el punto de balance (en el sentido del subibaja o balancín). Si $\bar{x} = 0$, entonces por la Definición (6.21), $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = 0$ y se dice que el conjunto S está en **equilibrio**. En este caso el origen es el centro de masa.

EJEMPLO 1 Tres partículas con masas de 40, 60 y 100 gramos están colocadas en los puntos con coordenadas −2, 3 y 7, respectivamente de una recta coordenada l. Determinar el centro de masa.

Solución Si denotamos las masas por m_1, m_2 y m_3, tenemos la situación ilustrada en la Figura 6.68, con $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 7$. De la Definición (6.21), la coordenada $\bar{x}$ del centro de masa es

$$\bar{x} = \frac{40(-2) + 60(3) + 100(7)}{40 + 60 + 100}$$

$$= \frac{-80 + 180 + 700}{200} = \frac{800}{200} = 4 \quad \bullet$$

FIGURA 6.68

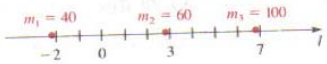
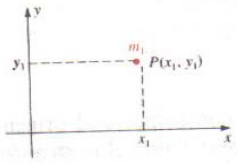


FIGURA 6.69



Si una partícula de masa m_1 está colocada en un punto $P(x_1, y_1)$ de un plano coordenado, como se ilustra en la Figura 6.69, entonces los momentos M_x y M_y de la partícula con respecto al eje x y al eje y se definen por

$$M_x = m_1 y_1 \quad \text{y} \quad M_y = m_1 x_1,$$

respectivamente. Nótese que si x_1 y y_1 son ambos positivos, entonces para calcular M_x se multiplica la masa de la partícula por su distancia y_1 al eje x y para calcular M_y se multiplica la masa por la distancia x_1 al eje y. Si x_1 o y_1 es negativo, entonces M_x o M_y también es negativo.

Para calcular los momentos M_x y M_y de un conjunto de partículas se suman los momentos de las partículas individuales, como se hace en la siguiente definición

DEFINICIÓN (6.22)

Sea S un conjunto de n partículas de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, ubicadas en los puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$, respectivamente de un plano coordenado y sea $m = \sum_{k=1}^{n} m_k$ la masa total.

(i) Los **momentos** M_x y M_y de S con respecto al eje x y al eje y son

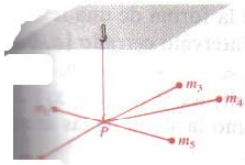
$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k \quad \text{y} \quad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k$$

respectivamente.

(ii) El **centro de masa** (o **centro de gravedad**) de S es el punto $P(\bar{x}, \bar{y})$ dado por

$$m\bar{x} = M_y \quad \text{y} \quad m\bar{y} = M_x.$$

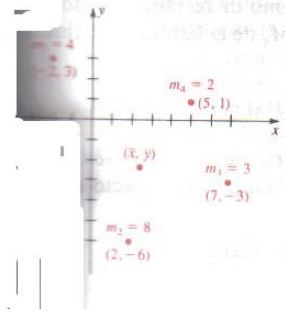
FIGURA 6.70



Los números $m\bar{x}$ y $m\bar{y}$ en la Definición (6.22) son los momentos con respecto al eje y y al eje x de una partícula de masa m colocada en el punto $P(\bar{x}, \bar{y})$. Por lo tanto, las ecuaciones en la Definición (6.22) (ii) implican que el centro de masa es el punto en el que se puede concentrar la masa total sin cambiar los momentos M_x y M_y. Si consideramos a las n partículas como conectadas con el centro de masa P mediante barras sin peso, como los rayos de una rueda la conectan con el eje, entonces el conjunto S quedaría balanceado si se sostuviera con una cuerda fija a P, como se ilustra en la Figura 6.70. Esto daría la apariencia de un sistema giratorio que tiene todos sus objetos en un mismo plano horizontal.

EJEMPLO 2 Cuatro partículas con masas de 4, 8, 3 y 2 kg están colocadas en los puntos $P_1(-2, 3)$, $P_2(2, -6)$, $P_3(7, -3)$ y $P_4(5, 1)$, respectivamente. Calcular los momentos M_x y M_y, y las coordenadas del centro de masa del sistema.

FIGURA 6.71



Solución Las partículas se ilustran en la Figura 6.71, donde también se ha marcado por anticipado la posición de $(\bar{x}, \bar{y})$. Aplicando la Definición (6.22),

$$M_x = (4)(3) + (8)(-6) + (3)(-3) + (2)(1) = -43$$

$$M_y = (4)(-2) + (8)(2) + (3)(7) + (2)(5) = 39.$$

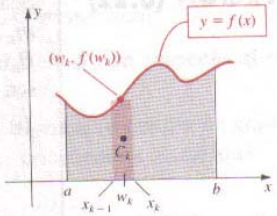
Como $m = 4 + 8 + 3 + 2 = 17$, se deduce de (6.22) (ii) que

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{39}{17} \approx 2.3, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = -\frac{43}{17} \approx -2.5 \quad \bullet$$

FIGURA 6.72



FIGURA 6.73



Consideremos ahora una hoja delgada de material (una **lámina**) que es **homogénea**, es decir, que tiene *densidad* constante. El centro de masa P se puede definir de manera que si se coloca la punta de un lapiz en P, como se indica en la Figura 6.72, la lámina queda balanceada horizontalmente. Es claro que si una lámina homogénea tiene forma de rectángulo, entonces su centro de masa está en el centro de tal figura, es decir, en el punto de intersección de sus diagonales. Daremos por supuesto que si un rectángulo se encuentra en el plano xy, entonces su masa (o más correctamente, la de una lámina rectangular coincidente) puede considerarse concentrada en el centro sin que cambien los momentos con respecto al eje x o al eje y.

Por facilidad consideramos primero una lámina que tiene la forma de una región como la que se ilustra en la Figura 6.73, con f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Consideremos una partición de $[a, b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Para todo k, sea w_k el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$; es decir, $w_k = (x_{k-1} + x_k)/2$. La suma de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k$ puede considerarse como la suma de las áreas de los rectángulos del tipo que se muestra en la Figura 6.73.

Si la **densidad superficial** (o masa por unidad de área) se denota por δ, entonces la masa correspondiente al k-ésimo rectángulo es $\delta f(w_k)\,\Delta x_k$ y, por lo tanto, la masa del polígono rectangular asociado a la partición es la suma $\sum_k \delta f(w_k)\,\Delta x_k$. Cuando la norma de las particiones tiende a cero, el área del polígono formado por los rectángulos tiende al área de una cara de la lámina, y la suma debe tender a la masa de dicha lámina. De modo que se define la masa m de la lámina por

$$m = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \delta f(w_k)\,\Delta x_k = \delta \int_a^b f(x)\,dx.$$

El centro de masa de la k-ésima lámina rectangular ilustrada en la Figura 6.73, se encuentra en el punto $C_k\left(w_k,\ \frac{1}{2} f(w_k)\right)$. Si suponemos que la masa está concentrada en C_k, entonces su momento con respecto al eje x puede calcularse multiplicando la distancia $\frac{1}{2} f(w_k)$ de C_k al eje x por la masa $\delta f(w_k)\,\Delta x_k$. Usando la propiedad aditiva de los momentos, se obtiene que el momento del polígono de rectángulos asociado a la partición es $\sum_k \frac{1}{2} f(w_k) \cdot \delta f(w_k)\,\Delta x_k$. El momento M_x de la lámina se define como el límite de estas sumas, es decir,

$$M_x = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \tfrac{1}{2} f(w_k) \cdot \delta f(w_k)\,\Delta x_k = \delta \int_a^b \tfrac{1}{2} f(x) \cdot f(x)\,dx.$$

Análogamente, usando la distancia w_k del eje y al centro de masa del k-ésimo rectángulo, se obtiene la definición del momento M_y de la lámina con respecto al eje y. Concretamente,

$$M_y = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k w_k \cdot \delta f(w_k)\,\Delta x_k = \delta \int_a^b x \cdot f(x)\,dx.$$

Como para las partículas (véase la Definición (6.22)), las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de masa de la lámina se definen por medio de $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$.

La siguiente definición resume este análisis.

DEFINICIÓN (6.23)

Sea f una función continua y no negativa en $[a, b]$. Si una lámina homogénea con densidad superficial δ tiene la forma de la región bajo la gráfica de f entre a y b, entonces

(i) la **masa** de la lámina es $m = \delta \int_a^b f(x)\,dx$.

(ii) los **momentos** M_x y M_y de la lámina son

$$M_y = \delta \int_a^b \tfrac{1}{2} f(x) \cdot f(x)\,dx \quad \text{y} \quad M_y = \delta \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

(iii) el **centro de masa** (o **centro de gravedad**) de la lámina es el punto $P(\bar{x}, \bar{y})$ tal que

$$m\bar{x} = M_y \quad \text{y} \quad m\bar{y} = M_x.$$

Sustituyendo las formas integrales de (i) y (ii) en (iii) de la Definición (6.23) y despejando $\bar{x}$ y $\bar{y}$, se obtiene

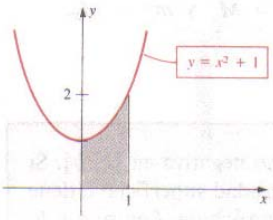
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\delta \int_a^b x \cdot f(x)\,dx}{\delta \int_a^b f(x)\,dx},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\delta \int_a^b \tfrac{1}{2} f(x) \cdot f(x)\,dx}{\delta \int_a^b f(x)\,dx}.$$

Como la constante δ en estas fórmulas se puede cancelar, se ve que las coordenadas del centro de masa de una lámina homogénea son independientes de la densidad δ; es decir, las coordenadas dependen sólo de la forma de la lámina y no de su densidad. Por esta razón, el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama a veces el "centro de masa" de una *región* del plano o mejor dicho el **centroide** de la región. Se pueden obtener fórmulas para los momentos y los centroides tomando $\delta = 1$ en la Definición (6.23).

EJEMPLO 3 Encontrar las coordenadas del centroide de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$ y $y = 0$.

FIGURA 6.74



Solución La región se indica en la Figura 6.74. Usando (i) y (ii) de la Definición (6.23) con $\delta = 1$,

$$m = \int_0^1 (x^2 + 1)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \tfrac{4}{3}$$

$$M_x = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2 + 1)\cdot(x^2 + 1)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \tfrac{14}{15}$$

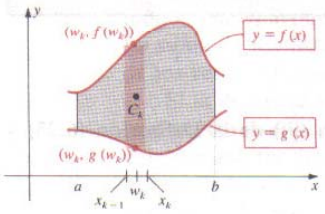
$$M_y = \int_0^1 x(x^2 + 1)\,dx = \int_0^1 (x^3 + x)\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \tfrac{3}{4}.$$

Por lo tanto, de la Definición (6.23) (iii),

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{3/4}{4/3} = \frac{9}{16}; \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{14/15}{4/3} = \frac{7}{10}. \quad \bullet$$

FIGURA 6.75



Se pueden obtener fórmulas similares a las de la Definición (6.23) para regiones más complicadas. Consideremos una lámina de densidad constante δ que tiene la forma que se muestra en la Figura 6.75, donde f y g son funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$. Tomando una partición de $[a, b]$, escogiendo w_k como antes y aplicando la Fórmula del Punto Medio, se ve que el centro de masa de la k-ésima lámina rectangular indicada en la Figura 6.75 es el punto

$$C_k(w_k, \tfrac{1}{2}[f(w_k) + g(w_k)]).$$

Con un razonamiento análogo al anterior se obtiene que el momento del k-ésimo rectángulo con respecto al eje x es igual a la distancia de C_k al eje x multiplicada por la masa, es decir,

$$\tfrac{1}{2}[f(w_k) + g(w_k)]\cdot\delta[f(w_k) - g(w_k)]\,\Delta x_k.$$

Sumando y tomando el límite cuando la norma de la partición tiende a cero, resulta

$$M_x = \delta\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x) + g(x)]\cdot[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= \delta\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx.$$

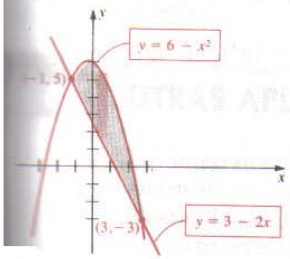
Análogamente,

$$M_y = \delta\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx.$$

Para calcular $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se pueden utilizar las fórmulas en (6.23) (iii).

EJEMPLO 4 Calcular las coordenadas del centroide de la región acotada por las gráficas de $y + x^2 = 6$ y $y + 2x - 3 = 0$.

FIGURA 6.76



Solución La región es la misma que se consideró en el Ejemplo 2 de la Sección 6.1, en el que se calculó su área y se obtuvo $\frac{32}{3}$ como valor. En la Figura 6.76 aparece de nuevo un croquis de la región. Tomando $f(x) = 6 - x^2$ y $g(x) = 3 - 2x$ entonces, como en la discusión anterior, con $\delta = 1$,

$$M_x = \int_{-1}^{3} \tfrac{1}{2}[(6 - x^2) + (3 - 2x)][(6 - x^2) - (3 - 2x)]\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{3} [(6 - x^2)^2 - (3 - 2x)^2]\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{3} (x^4 - 16x^2 + 12x + 27)\,dx.$$

Podemos verificar que $M_x = \frac{416}{15}$. Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{416/15}{32/3} = \frac{13}{5}.$$

Análogamente,

$$M_y = \int_{-1}^{3} x[(6 - x^2) - (3 - 2x)]\,dx$$
$$= \int_{-1}^{3} x(3 - x^2 + 2x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{3} (3x - x^3 + 2x^2)\,dx$$

de donde se obtiene que $M_y = \frac{32}{3}$. En consecuencia,

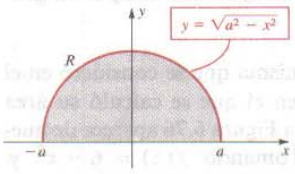
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{32/3}{32/3} = 1 \quad \bullet$$

Pueden obtenerse también fórmulas para los momentos de regiones de otro tipo y con integrales respecto a y; sin embargo, es recomendable recordar el *método* para calcular los momentos de las láminas rectangulares, que consiste en multiplicar la distancia a un eje por la masa, en vez de memorizar las fórmulas para todos los casos.

Si una lámina homogénea tiene la forma de una región con un eje de simetría, entonces su centro de masa debe estar en dicho eje. En el siguiente ejemplo se aprovecha este hecho.

EJEMPLO 5 Encontrar el centro de masa de la región R con forma de semicírculo de radio a que se muestra en la Figura 6.77.

FIGURA 6.77



Solución Por simetría, el centroide está en el eje y, es decir, $\bar{x} = 0$. Entonces, sólo falta calcular $\bar{y}$. Usando la Definición (6.23) (ii) con $\delta = 1$ y $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$,

$$M_x = \int_{-a}^{a} \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[a^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a} = \tfrac{1}{2}\left[(a^3 - \tfrac{1}{3}a^3) - (-a^3 + \tfrac{1}{3}a^3)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{4}{3}a^3\right] = \tfrac{2}{3}a^3.$$

Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{4a}{3\pi} \approx 0.4a.$$

De modo que el centroide es el punto $(0, \frac{4}{3}a^3/\pi)$. •

EJERCICIOS 6.8

1. Tres partículas con masas de 2, 7 y 5 kilogramos están colocadas en los puntos $A(4, -1)$, $B(-2, 0)$ y $C(-8, -5)$, respectivamente. Calcule los momentos M_x y M_y y las coordenadas del centro de masa del sistema.

2. Cinco partículas con masas de 10, 3, 4, 1 y 8 gramos están colocadas en los puntos $A(-5, -2)$, $B(3, 7)$, $C(0, -3)$, $D(-8, -3)$ y $O(0, 0)$. Calcule los momentos M_x y M_y y las coordenadas del centro de masa del sistema.

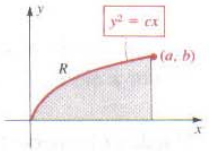
Ejercicios 3-12: Represente la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y encuentre el centroide de la región.

3. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1$
4. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 9$
5. $y = 4 - x^2,\ y = 0$
6. $2x + 3y = 6,\ y = 0,\ x = 0$
7. $y^2 = x,\ 2y = x$
8. $y = x^2,\ y = x^3$
9. $y = 1 - x^2,\ y = x - 1$
10. $y = x^2,\ x + y = 2$
11. $x = y^2,\ x - y = 2$
12. $x = 9 - y^2,\ x + y = 3$

13. Determine el centroide de la región contenida en el primer cuadrante y acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados.

14. Sea R la región del primer cuadrante acotada por la parte de una parábola $y^2 = cx$ con $c > 0$, el eje x y la recta vertical que pasa por el punto (a, b) de la parábola, como se muestra en la figura. Realice la demostración de que el centroide de R es $(\frac{3}{5}a, \frac{3}{8}b)$.

EJERCICIO 14



15. Una región tiene la forma de un cuadrado de lado $2a$ coronado por un semicírculo de radio a. Localice el centroide. (*Sugerencia:* Use el Ejemplo 5 y el hecho de que los momentos son aditivos.)

16. Sea $0 < a < b$ y sean P, Q, R y S los puntos con coordenadas $(-b, 0)$, $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y $(b, 0)$, respectivamente. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{b^2 - x^2}$, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, y los segmentos PQ y RS. (*Sugerencia:* Use el Ejemplo 5.)

17. Demuestre que el centroide de un triángulo coincide con el punto de intersección de sus medianas. (*Sugerencia:* Coloque los vértices en los puntos $(0, 0)$, (a, b) y $(0, c)$, con a, b y c positivos.)

18. Una región tiene la forma de un cuadrado de lado a coronado por un triángulo equilátero también de lado a. Encuentre el centroide. (*Sugerencia:* Use el Ejercicio 17 y el hecho de que los momentos son aditivos.)

6.9 OTRAS APLICACIONES

Las integrales definidas se pueden aplicar en la mayoría de los campos que usan las matemáticas como herramienta. En esta sección se presentan varias aplicaciones que ilustran la flexibilidad de este concepto tan importante.

Debe ser evidente del contenido de este capítulo que una cantidad que se puede aproximar por una suma de muchos términos es un buen candidato para ser representado por medio de una integral definida. El requisito principal es que a medida que el número de términos aumente, la suma tienda a un límite. De manera semejante, una cantidad que se puede interpretar como el área de una región en el plano puede representarse por medio de una integral definida (véase por ejemplo la discusión sobre histéresis al final de la Sección 6.1). Recíprocamente, las integrales definidas permiten representar algunas cantidades físicas como áreas. En los ejemplos que siguen, aparecen cantidades que son *numéricamente iguales* al área de una región; es decir, *sin tomar en cuenta las unidades de medición*, tales como cm, lb · pie, etcétera.

Sea $v(t)$ la velocidad al tiempo t de un objeto que se mueve sobre una recta coordenada. Si s es la función de posición, entonces $s'(t) = v(t)$ y

$$\int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b s'(t)\,dt = s(t)\Big]_a^b = s(b) - s(a).$$

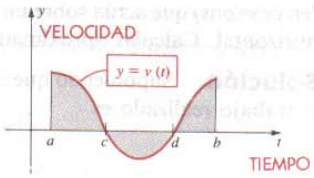
Si $v(t) > 0$ en todo el intervalo $[a, b]$, entonces esta ecuación muestra que el área bajo la gráfica de la función v entre a y b representa la distancia recorrida por el objeto, como se ilustra en la Figura 6.78. Esta observación es útil para el ingeniero o el físico que no pudiera tener una expresión explícita de $v(t)$ sino contar solamente con una gráfica (o una tabla de valores) de la velocidad en diversos tiempos. En tal caso la distancia recorrida puede aproximarse por el área bajo la gráfica.

Si $v(t) < 0$ para algunos instantes o tiempos en $[a, b]$, la gráfica de v podría semejar a la de la Figura 6.79. La figura indica que el objeto se mueve en la dirección negativa de $t = c$ a $t = d$. La distancia que recorre durante ese tiempo está dada por

FIGURA 6.78



FIGURA 6.79



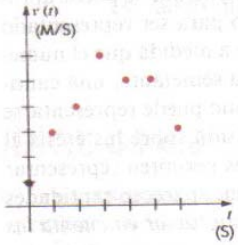
$\int_c^d |v(t)|\,dt$. Resulta que $\int_a^b |v(t)|\,dt$ es la distancia *total* que el cuerpo recorre en $[a, b]$, independientemente de si $v(t)$ es positivo o negativo.

EJEMPLO 1 Mientras un cuerpo recorre una trayectoria recta se registra su velocidad $v(t)$ (en m/s) al tiempo t cada segundo durante seis segundos. Los resultados se dan en la tabla.

t	0	1	2	3	4	5	6
$v(t)$	1	3	4	6	5	5	3

Calcular aproximadamente la distancia recorrida por e objeto.

FIGURA 6.80



Solución En la Figura 6.80 se han situado los punto $(t, v(t))$. Si suponemos que v es una función continua, entonces, como se vio en la discusión anterior, la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo $[0, 6]$ es $\int_0^6 v(t)\,dt$. Ahora estimamos esta integral definida usando la Regla de Simpson con $n = 6$. Entonces por (5.37),

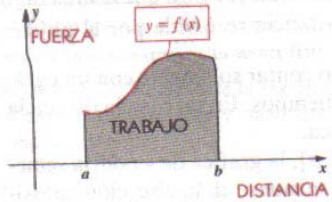
$$\int_0^6 v(t)\,dt$$

$$\approx \frac{6-0}{3\cdot 6}[v(0) + 4v(1) + 2v(2) + 4v(3) + 2v(4) + 4v(5) + v(6)]$$

$$= \tfrac{1}{3}[1 + 4\cdot 3 + 2\cdot 4 + 4\cdot 6 + 2\cdot 5 + 4\cdot 5 + 3]$$

$$= 26 \text{ m}.$$

FIGURA 6.81



En (6.16) se definió el trabajo W realizado por una fuerza variable $f(x)$ cuando su punto de aplicación se desplaza sobre una recta coordenada desde $x = a$ hasta $x = b$, como $W = \int_a^b f(x)\,dx$. Supongamos que $f(x) \geq 0$ en todo el intervalo $[a, b]$. Si se traza la gráfica de f, entonces el trabajo W es numéricamente igual al área bajo la gráfica de f entre a y b, como se ilustra en la Figura 6.81.

EJEMPLO 2 Un ingeniero obtiene la gráfica de la Figura 6.82 que muestra la fuerza (en newtons) que actúa sobre un vehículo cuando éste se desplaza 25 m sobre un terreno horizontal. Calcular aproximadamente el trabajo realizado.

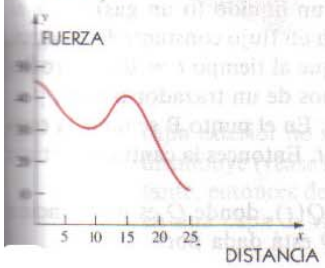
Solución Suponiendo que la fuerza es una función continua f para $0 \leq x \leq 25$, el trabajo realizado es

$$W = \int_0^{25} f(x)\,dx.$$

No contamos con una forma explícita para $f(x)$, pero podemos calcular a ojo los valores de la gráfica y estimar W por medio de una integración numérica.

Aplicamos la Regla del Trapecio con $a = 0$, $b = 25$ y $n = 5$. Calculando aproximadamente los valores de la función a partir de la gráfica se obtiene la siguiente tabla.

FIGURA 6.82



k	x_k	$f(x_k)$	m	$mf(x_k)$
0	0	45	1	45
1	5	35	2	70
2	10	30	2	60
3	15	40	2	80
4	20	25	2	50
5	25	10	1	10

La suma de los números de la última columna es 315. Como

$$(b - a)/2n = (25 - 0)/10 = 2.5$$

de (5.35) se deduce que

$$W = \int_0^{25} f(x)\,dx \approx 2.5(315) \approx 788 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Para obtener mayor precisión podríamos usar un valor mayor de n o la Regla de Simpson. •

Supóngase que la cantidad de una entidad física o de otra naturaleza como aceite, agua, potencia eléctrica, dinero, bacterias o flujo sanguíneo, aumenta o disminuye de alguna manera y que $R(t)$ es su rapidez de cambio al tiempo t. Si $Q(t)$ es la cantidad presente al tiempo t y la función Q es derivable, entonces de la Sección 3.3 se tiene que $Q'(t) = R(t)$. Si $R(t) > 0$ (o $R(t) < 0$) en un intervalo de tiempo $[a, b]$, entonces el incremento (o decremento) de la cantidad entre $t = a$ y $t = b$ es

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b Q'(t)\,dt = \int_a^b R(t)\,dt.$$

Este número se puede representar como el área de la región del plano ty acotada por las gráficas de R, $t = a$, $t = b$ y $y = 0$.

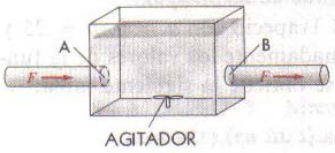
EJEMPLO 3 Se comienza a bombear petróleo a un tanque de almacenamiento a las 9:00 A.M. a razón de $(150t^{1/2} + 25)$ L/h (litros por hora), donde t es el tiempo (en horas) a partir de las 9:00 A.M. ¿Cuántos litros se habrán bombeado al tanque a la 1:00 P.M.?

Solución Aplicando lo que se dijo en la discusión anterior a $R(t) = 150t^{1/2} + 25$, obtenemos

$$\int_0^4 (150t^{1/2} + 25)\,dt = 100t^{3/2} + 25t\Big]_0^4$$

$$= 100(4)^{3/2} + 25(4) = 100(8) + 100 = 900 \text{ L (litros)}. \quad \bullet$$

FIGURA 6.83



Las integrales definidas se pueden aplicar a los métodos de dilución de tinte o rastreo que se usan en las puebas fisiológicas y en otras áreas. Un ejemplo de esto es la medición del rendimiento cardiaco, es decir, el flujo sanguíneo en la aorta. La Figura 6.83 muestra un modelo simple para experimentos de rastreo. En ella un líquido (o un gas) entra al tanque por A y sale por B, con un flujo constante F (en litros por segundo). Supongamos que al tiempo $t = 0$ se introducen por A al tanque Q_0 gramos de un trazador o tinte, y se tiene un agitador que mezcla perfectamente la solución. En el punto B se mide la concentración $c(t)$ (en gramos por litro) del tinte al tiempo t. Entonces la cantidad de tinte que pasa por B al tiempo t es $F \cdot c(t)$ g/s.

Si la cantidad de tinte en el tanque al tiempo t es $Q(t)$, donde Q es una función derivable, entonces la rapidez de variación $Q'(t)$ de Q está dada por

$$Q'(t) = -F \cdot c(t)$$

(el signo negativo indica que Q disminuye).

Si T es un tiempo en el que todo el tinte ha salido ya del tanque, entonces $Q(T) = 0$ y, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_0^T Q'(t)\,dt = Q(t)\Big]_0^T = Q(T) - Q(0)$$

$$= 0 - Q_0 = -Q_0.$$

También se puede escribir

$$\int_0^T Q'(t)\,dt = \int_0^T \left[-F \cdot c(t)\right] dt = -F \int_0^T c(t)\,dt.$$

Esto da la fórmula siguiente.

(6.24)

$$Q_0 = F \int_0^T c(t)\,dt.$$

Normalmente no se tiene una expresión explícita para $c(t)$ sino solamente una tabla de los valores de la función. Se puede calcular aproximadamente el flujo F usando integración numérica (véanse los Ejercicios 7 y 8).

Consideremos ahora otro aspecto del flujo de líquidos. Si un líquido fluye por un tubo cilíndrico y su velocidad es una constante v_0, entonces el volumen de líquido que pasa por un punto fijo por unidad de tiempo está dado por v_0A, donde A es el área de una sección transversal del tubo (véase la Figura 6.84).

El estudio del flujo de sangre por una arteriola requiere de una fórmula más complicada. En este caso, la sangre fluye en capas tubulares como se muestra en la Figura 6.85. En la capa más cercana a la pared de la arteriola, la sangre tiende a adherirse a ella y su velocidad es prácticamente cero. La velocidad aumenta a medida que las capas se acercan al centro de la arteriola.

Para las operaciones de cálculo se puede considerar que el flujo sanguíneo consta de capas cilíndricas delgadas que se deslizan unas respecto a otras de manera que la

FIGURA 6.84

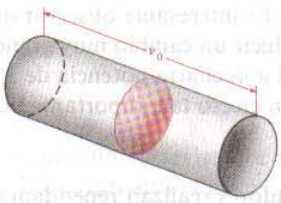
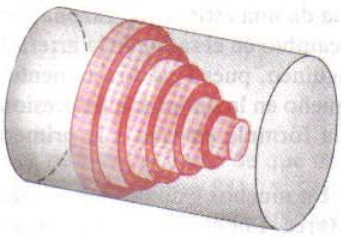


FIGURA 6.85



capa exterior no se mueve y la velocidad de las capas aumenta a medida que su radio disminuye (véase la Figura 6.85). Si se considera que la velocidad en cada capa es constante, entonces de la teoría de los líquidos en movimiento, se sabe que la velocidad $v(r)$ en una capa de radio medio r es

$$v(r) = \frac{P}{4vl}(R^2 - r^2)$$

donde R es el radio de la arteriola (en cm), l es la longitud de la arteriola (en cm), P es la diferencia de presiones entre los dos extremos de la arteriola (en din/cm^2) y v es la viscosidad de la sangre (en din-s/cm^2). Nótese que de acuerdo con la fórmula, la velocidad es cero cuando $r = R$ y la velocidad máxima es $PR^2/(4vl)$ y se alcanza cuando $r = 0$. Si el radio de la k-ésima capa es r_k y su espesor es Δr_k, entonces por (6.6), el volumen de sangre en esta capa (que circula por unidad de tiempo) es

$$2\pi r_k v(r_k)\,\Delta r_k = \frac{2\pi r_k P}{4vl}(R^2 - r_k^2)\,\Delta r_k.$$

Suponiendo que hay n capas en total, el flujo sanguíneo en la arteriola es aproximadamente igual a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi r_k P}{4vl}(R^2 - r_k^2)\,\Delta r_k.$$

Para evaluar el flujo total F, es decir, el volumen de sangre que pasa por la arteriola por unidad de tiempo, hay que tomar el límite de estas sumas cuando n tiende a infinito. Esto conduce a la integral definida siguiente:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^R \frac{2\pi r P}{4vl}(R^2 - r^2)\,dr \\ &= \frac{2\pi P}{4vl}\int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr \\ &= \frac{\pi P}{2vl}\left[\frac{1}{2}R^2 r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^R. \end{aligned}$$

Sustituyendo los límites de integración se obtiene

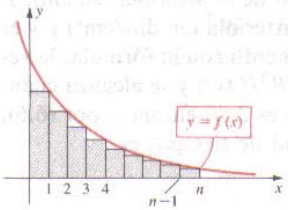
$$F = \frac{\pi P R^4}{8vl}\ \text{cm}^3.$$

Esta fórmula para F no es exacta porque las capas no se pueden hacer arbitrariamente delgadas. De hecho, el límite inferior del espesor es el diámetro de un glóbulo rojo,

que mide aproximadamente 2×10^{-4} cm. Sin embargo, se puede suponer que la fórmula da una estimación razonablemente buena. Es interesante observar que un pequeño cambio en el radio de la arteriola puede producir un cambio muy grande en el flujo sanguíneo, pues F es directamente proporcional a la cuarta potencia de R. Un cambio pequeño en la diferencia de presiones no tiene un efecto tan importante pues P aparece en la fórmula elevada a la primera potencia.

En muchos trabajos los operarios o trabajadores realizan repetidamente una misma tarea. Por ejemplo, un empleado de una tienda de bicicletas tiene que armar bicicletas nuevas. A medida que arma más bicicletas le toma menos tiempo hacerlo hasta llegar a un tiempo límite. Otro ejemplo de este proceso de mejoramiento de la eficiencia por repetición es el de un capturista de datos que ha de ingresar información de unos formatos manuscritos a un sistema de cómputo. El tiempo requerido para procesar cada forma disminuye al crecer el número de datos. Como un último ejemplo, el tiempo que toma a una persona recorrer un camino por un laberinto disminuye con la práctica.

FIGURA 6.86



Consideremos una situación general en la que una tarea se repite muchas veces. Supongamos que la experiencia demuestra que el tiempo requerido para realizar la tarea por k-ésima vez está dado aproximadamente por $f(k)$, donde f es una función continua decreciente en un cierto intervalo. El tiempo total requerido para realizar la tarea n veces está dado por la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n).$$

Considerando la gráfica de f que se ilustra en la Figura 6.86, se ve que la suma es igual al área del polígono de rectángulos inscrito que se muestra en la figura y, por lo tanto, se puede aproximar por la integral definida $\int_0^n f(x)\,dx$. Evidentemente, la integral dará una buena estimación de la suma si f disminuye lentamente en $[0, n]$. Si f varía rápidamente con cada cambio unitario de x, no se debe usar la integral para estimar la suma.

EJEMPLO 4 Una compañía que realiza encuestas mediante entrevistas telefónicas, encuentra que el tiempo que le lleva a un empleado efectuar una entrevista depende del número de entrevistas realizadas anteriormente por él mismo. Se sabe que para cierta encuesta, el número de minutos requeridos para llevar a cabo la k-ésima entrevista está dado aproximadamente por $f(k) = 6(1 + k)^{-1/5}$. Usar una integral definida para calcular aproximadamente el tiempo que un empleado requiere para realizar 100 y 200 entrevistas. Suponiendo que un entrevistador recibe \$4.80 (dólares) por hora, calcular qué tanto más costoso resulta pagar a dos empleados por 100 entrevistas cada uno que pagar a un empleado por 200 entrevistas.

Solución De la discusión anterior, el tiempo requerido para realizar 100 entrevistas es aproximadamente

$$\int_0^{100} 6(1 + x)^{-1/5}\,dx = 6 \cdot \tfrac{5}{4}(1 + x)^{4/5}\Big]_0^{100}$$

$$= \tfrac{15}{2}[(101)^{4/5} - 1]$$

$$\approx 293.5 \text{ min.}$$

El tiempo requerido para 200 entrevistas es aproximadamente

$$\int_0^{200} 6(1+x)^{-1/5}\,dx = \tfrac{15}{2}[(201)^{4/5} - 1]$$
$$\approx 514.4 \text{ min.}$$

Como un entrevistador recibe \$0.08 por minuto, el costo de que un empleado realice 200 entrevistas es aproximadamente (\$0.08)(514.4) o sea \$41.15. Si dos empleados realizan 100 entrevistas cada uno, el costo es aproximadamente 2(\$0.08)(293.5) o \$46.96, que es \$5.81 más que el costo con un solo empleado. Nótese que, por otra parte, el ahorro de tiempo al usar dos personas es de aproximadamente 221 minutos.

Con una computadora se puede demostrar que

$$\sum_{k=1}^{100} 6(1+k)^{-1/5} \approx 291.75$$

y

$$\sum_{k=1}^{200} 6(1+k)^{-1/5} \approx 512.57.$$

Los resultados obtenidos por integración (las áreas bajo la gráfica de f) son aproximadamente 2 minutos mayores que el valor de la suma correspondiente (las áreas de los polígonos de rectángulos inscritos). •

En la economía, el proceso mediante el cual una empresa aumenta su riqueza acumulada se llama **acumulación de capital**. Si el capital K al tiempo t está dado aproximadamente por $K = f(t)$, donde f es una función derivable, entonces la tasa o razón de cambio de K con respecto a t se llama **flujo neto de inversión**. Entonces, si I denota el flujo de inversión,

$$I = \frac{dK}{dt} = f'(t).$$

Recíprocamente, si I está dado por $g(t)$, donde g es una función continua en un intervalo $[a, b]$, el incremento de capital durante este intervalo de tiempo es

$$\int_a^b g(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

EJEMPLO 5 Una compañía desea tener un flujo neto de inversión dado aproximadamente por $g(t) = t^{1/3}$, donde t está en años, $g(t)$ se mide en millones de dólares por año y $t = 0$ corresponde al momento actual. Calcular aproximadamente la acumulación de capital durante los próximos ocho años.

Solución De la discusión anterior, el incremento de capital durante los próximos ocho años es

$$\int_0^8 g(t)\,dt = \int_0^8 t^{1/3}\,dt = \tfrac{3}{4}t^{4/3}\Big]_0^8 = 12.$$

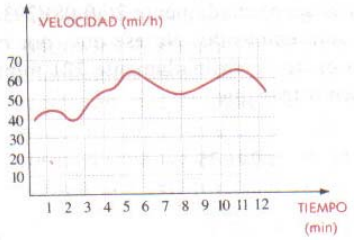
Por lo tanto, la acumulación de capital es de \$12 000 000. •

Se han dado solamente unos cuantos ejemplos de las aplicaciones de la integral definida. El lector interesado podrá encontrar muchos más en libros de física, biología, economía y administración, y aun de áreas como sociología y ciencias políticas.

EJERCICIOS 6.9

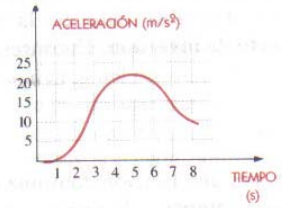
1. La figura muestra la velocidad (en mi/h) de un automóvil que viaja por una autopista durante 12 min. Calcule aproximadamente la distancia recorrida.

EJERCICIO 1



2. La figura muestra la aceleración (en m/s^2) de un automóvil durante un intervalo de 8 s (segundos). Calcule aproximadamente el cambio neto de velocidad en ese intervalo de tiempo.

EJERCICIO 2



3. La tabla siguiente se obtuvo registrando la fuerza $f(x)$ (en dinas) que actúa sobre una partícula mientras ésta se desplaza 6 cm sobre una recta coordenada de $x = 1$ a $x = 7$. Calcule aproximadamente el trabajo realizado aplicando (a) la Regla del Trapecio con $n = 6$, (b) la Regla de Simpson con $n = 6$.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	20	23	25	22	26	30	28

4. Un ciclista pedalea al subir por una cuesta y registra su velocidad $v(t)$ (en m/s) cada dos segundos. Usando los resultados registrados en la tabla siguiente, calcule aproximadamente por integración numérica la distancia recorrida.

t	0	2	4	6	8	10
$v(t)$	8	7.5	5.3	3.1	0.6	0

5. Una lancha de motor consume gasolina a razón de $t\sqrt{9 - t^2}$ litros por hora. Si el motor se enciende en $t = 0$, ¿cuánta gasolina consume en dos horas?

6. La población de una ciudad ha aumentado desde 1985 a razón de $1.5 + 0.3\sqrt{t} + 0.006t^2$ miles de habitantes al año, donde t es el número de años a partir de 1985. Si esta tasa de crecimiento continúa hasta 1994, ¿cuál será la población en ese año si en 1985 era de 50 000 habitantes?

7. Consulte (6.24). Para calcular el rendimiento cardiaco F (el número de litros de sangre por minuto que el corazón bombea por la aorta) se inyecta una dosis de 5 mg de un tinte de indocianina verde en una arteria pulmonar y se realizan mediciones de la concentración (en miligramos por litro) del tinte en una arteria periférica cercana a la aorta, cada minuto. Los resultados aparecen en la tabla siguiente. Use la Regla de Simpson con $n = 12$ para calcular el rendimiento cardiaco.

t (min)	$c(t)$ (mg/L)
0	0
1	0
2	0.15
3	0.48
4	0.86
5	0.72
6	0.48
7	0.26
8	0.15
9	0.09
10	0.05
11	0.01
12	0

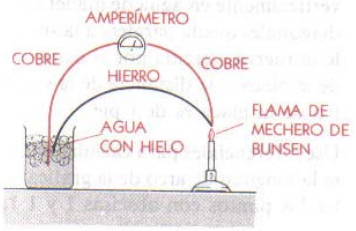
8. Consulte (6.24). En un punto A de un río se mezclan con el agua 1200 kg de dicromato de sodio y en un punto B río abajo se toman muestras cada 30 s para medir la concentración de esa sustancia. Los resultados aparecen en la tabla siguiente. Calcule aproximadamente el flujo (o caudal) F del río usando la Regla del Trapecio con $n = 12$.

$t(s)$	$c(t)$ (g/m³ o mg/L)
0	0
30	2.14
60	3.89
90	5.81
120	8.95
150	7.31
180	6.15
210	4.89
240	2.98
270	1.42
300	0.89
330	0.29
360	0

9. La figura muestra un termopar simple en el que el calor se transforma en energía eléctrica. Para determinar la carga total Q (en coulombs) transferida al alambre de cobre en un intervalo de 3 s (segundos), se registraron los valores de la corriente (en amperes) cada medio segundo. Los resultados se muestran en la tabla.

t (segundos)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
I (amperes)	0	0.2	0.6	0.7	0.8	0.5	0.2

Use el hecho de que $I = dQ/dt$ y la Regla del Trapecio con $n = 6$ para calcular aproximadamente la carga total transferida al alambre de cobre durante los tres primeros segundos.



10. Consulte el Ejemplo 5. Calcule la acumulación de capital sobre los intervalos de tiempo [0, 5] y [5, 10] suponiendo que el flujo de inversión está dado aproximadamente por $g(t) = 2t(3t + 1)$, donde $g(t)$ se mide en miles de dólares.

11. Un capturista de datos recibe en hojas manuscritas los datos de las inscripciones de los estudiantes de una universidad, y los transfiere a un archivo electrónico. El número de minutos que le lleva teclear la k-ésima incripción es aproximadamente $f(k) = 6(1 + k)^{-1/3}$. Use una integral definida para evaluar aproximadamente el tiempo que lleva (a) a una persona teclear 600 inscripciones, (b) a dos personas teclear 300 inscripciones cada una.

12. El número de minutos que toma a una persona recorrer un camino en cierto laberinto sin equivocarse es aproximadamente $f(k) = 5k^{-1/2}$, donde k es el número de intentos exitosos anteriores. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo se requiere para recorrer 10 veces el camino sin equivocarse?

13. Un fabricante calcula que el tiempo que requiere un trabajador para armar cierto aparato depende del número de aparatos que el trabajador ha armado anteriormente. El tiempo t (en minutos) que le lleva armar el k-ésimo aparato está dado por $f(k) = 20(k + 1)^{-0.4} + 3$. Calcule aproximadamente el tiempo que le tomará armar (a) 1 aparato, (b) 4 aparatos, (c) 8 aparatos, (d) 16 aparatos.

14. Calcule aproximadamente la suma

$$\sum_{k=1}^{100} k(k^2 + 1)^{-1/4}$$

mediante una integral definida.

6.10 REPASO

Defina o analice lo siguiente.

1. Área entre las gráficas de dos funciones continuas.
2. Sólidos de revolución.
3. Métodos para determinar el volumen de un sólido de revolución.
4. Cálculo de volúmenes por cortes transversales (rebanadas).

5. Funciones alisadas.
6. Longitud de arco de una gráfica.
7. Función longitud de arco.
8. Superficies de revolución.
9. Trabajo.
10. Fuerza ejercida por un líquido.

EJERCICIOS 6.10

Ejercicios 1-2: Represente la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y calcule el área (a) integrando con respecto a x, (b) integrando con respecto a y.

1. $y = -x^2,\ y = x^2 - 8$
2. $y^2 = 4 - x,\ x + 2y - 1 = 0$

Ejercicios 3-6: Calcule el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

3. $x = y^2,\ x + y = 1$
4. $y + x^3 = 0,\ y = \sqrt{x},\ 3y + 7x - 10 = 0$
5. $y = x^3 - x^2 - 6x + 3,\ y = 3$
6. $y^3 - 2y^2 - y = x - 2,\ x = 0$

Ejercicios 7-10: Represente la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones y calcule el volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje indicado.

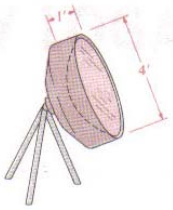
7. $y = \sqrt{4x + 1},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$; alrededor del eje x.
8. $y = x^4,\ y = 0,\ x = 1$; alrededor del eje y.
9. $y = x^3 + 1,\ x = 0,\ y = 2$; alrededor del eje y.
10. $y = \sqrt[3]{x},\ y = \sqrt{x}$; alrededor del eje x.
11. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = 4x^2$ y $4x + y - 8 = 0$ (a) alrededor del eje x, (b) alrededor de la recta $x = 1$, (c) alrededor de la recta $y = 16$.
12. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^3$, $x = 2$ y $y = 0$ (a) alrededor del eje x, (b) alrededor del eje y, (c) alrededor de la recta $x = 2$, (d) alrededor de la recta $x = 3$, (e) alrededor de la recta $y = 8$, (f) alrededor de la recta $y = -1$.
13. Calcule la longitud de arco de la gráfica de la ecuación $(x + 3)^2 = 8(y - 1)^3$ entre $A(-2, \frac{3}{2})$ y $B(5, 3)$.
14. Un sólido tiene como base la región del plano xy acotada por las gráficas de $y^2 = 4x$ y $x = 4$. Halle su volumen si las secciones transversales correspondientes a planos perpendiculares al eje x son triángulos rectángulos isósceles con uno de los catetos iguales en la base del sólido.
15. Una piscina elevada tiene la forma de un cilindro circular recto de 4 m de diámetro y 1.5 m de altura. El agua tiene una profundidad de 1.2 m. Calcule el trabajo de bombeo requerido para vaciar la piscina extrayendo el agua por la orilla en la parte superior.
16. Mientras un cubo se eleva 10 m desde el fondo de un pozo, pierde agua uniformemente. Calcule el trabajo realizado si dicho cubo (o balde) contenía originalmente 12 litros de agua y se pierde una tercera parte de ella. Suponga que el peso del balde vacío es de 2 kg, que el peso de la cuerda es despreciable y que un litro de agua pesa un kilogramo.
17. Una placa cuadrada de 4 pie de lado se sumerge verticalmente en agua de manera que una de sus diagonales queda paralela a la superficie. Calcule la fuerza ejercida por el agua sobre una cara de la placa si la distancia de la superficie al centro de la placa es de 6 pie.
18. Use diferenciales para calcular aproximadamente la longitud de arco de la gráfica de $y = x^3$ entre los puntos con abscisas 1 y 1.1.

Ejercicios 19-20: Represente la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y calcule su centroide.

19. $y = 1 + x^3,\ x + y + 1 = 0,\ x = 1$
20. $y = 1 + x^2,\ y - x = 0,\ x = -1,\ x = 2$
21. Evalúe el área de la superficie que se genera cuando la parte de la gráfica de la ecuación $12y = 4x^3 + (3/x)$ que se encuentra entre $A(1, \frac{7}{12})$ y $B(2, \frac{67}{24})$, gira alrededor del eje x.

22. La forma del reflector de un faro se obtiene haciendo girar una parábola alrededor de su eje. Calcule el área de la superficie de un reflector que mide 4 pie de diámetro y tiene una profundidad de 1 pie.

EJERCICIO 22



23. La velocidad $v(t)$ de un cohete que viaja directamente hacia arriba está dada en la tabla siguiente. Calcule aproximadamente por integración numérica la distancia recorrida por el cohete entre $t = 0$ y $t = 5$.

t (s)	0	1	2	3	4	5
$v(t)$ (m/s)	100	120	150	190	240	300

24. El electricista de un hotel sospecha que el medidor que contabiliza el consumo total de electricidad Q en kilowatts-hora (kW · h) no está funcionando correctamente. Para verificar la precisión, mide directamente el consumo por minuto R cada 10 min y obtiene los resultados de la tabla siguiente.

t (min)	0	10	20	30	40	50	60
R (kW · h/min)	1.31	1.43	1.45	1.39	1.36	1.47	1.29

(a) Use la Regla de Simpson para calcular aproximadamente el consumo total durante este periodo de una hora.

(b) ¿Qué debe concluir el electricista si la lectura del medidor antes del experimento fue de 48792 kW · h y después del mismo fue de 48887 kW · h?

Ejercicios 25-28: Suponga que $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k \pi w_k^4 \Delta x_k$ representa un límite de sumas de una función f en el intervalo $[0, 1]$.

25. Calcule el valor del límite.

26. Interprete el límite como el área de una región en el plano xy.

27. Interprete el límite como el volumen de un sólido de revolución.

28. Interprete el límite como el trabajo realizado por una fuerza.

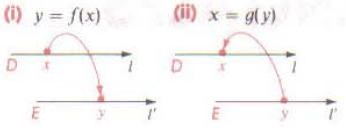
CAPÍTULO 7

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En este capítulo se definen las funciones exponencial y logarítmica y se estudian algunas de sus propiedades. Como las funciones logaritmo y exponencial son inversas una de la otra, el capítulo se inicia con una discusión sobre funciones inversas.

7.1 FUNCIONES INVERSAS

FIGURA 7.1



Sea f una función biunívoca con dominio D y contradominio E. Entonces, para cada número y en E hay *exactamente un* número x en D tal que $f(x) = y$, como se ilustra con la flecha en la Figura 7.1(i). Como x es *único*, se puede definir una función g de E a D tal que

$$g(y) = x.$$

Como en la Figura 7.1(ii), g *invierte la correspondencia* dada por f. Como

$$g(y) = x \quad \text{y} \quad f(x) = y$$

donde x está en D y y en E, se ve que, por sustitución

$$g(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(g(y)) = y.$$

La función g se llama *función inversa* de f y se denota por f^{-1}, como se especifica en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (7.1)

Sea f una función biunívoca con dominio D y contradominio E. Una función f^{-1} con dominio E y contradominio D es la **función inversa de f** si

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } D$$

y

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{para todo } y \text{ en } E.$$

El símbolo $^{-1}$ que se usa en la notación f^{-1} no debe confundirse con un exponente, es decir, $f^{-1}(y)$ *no significa* $1/[f(y)]$.* El recíproco $1/[f(y)]$ se denota por $[f(y)]^{-1}$.

Es importante recordar que para definir la función inversa de una función *f es absolutamente esencial que f sea biunívoca*. Los ejemplos más frecuentes de funciones biunívocas son las que son crecientes o decrecientes en sus dominios, pues en estos casos, si $a \neq b$ en el dominio, entonces $f(a) \neq f(b)$ en el contradominio.

Una función biunívoca f tiene solamente una función inversa f^{-1} y además f^{-1} es biunívoca (véanse los Ejercicios 20 y 21). De la Definición (7.1) se deduce que f es la función inversa de f^{-1}. Se dice que f y f^{-1} son *funciones inversas una de la otra*. La siguiente relación (que se ilustra en la Figura 7.1 con $g = f^{-1}$) siempre se da entre una función biunívoca f y su función inversa f^{-1}.

(7.2) $y = f(x)$ si y sólo si $x = f^{-1}(y)$.

* **(N. del R.)** Este seudoexponente $(^{-1})$ se utiliza en muchos casos para denotar una relación de correspondencia inversa o anticorrespondencia. Así, f es una función y f^{-1} es su inversa o *antifunción*.

Como a menudo x denota un número arbitrario en el dominio de una función, cuando la función es f^{-1}, se desea considerar $f^{-1}(x)$ *para x en el dominio E de f^{-1}*. Entonces, las dos fórmulas de la Definición (7.1) se pueden escribir

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } D$$

y

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } E.$$

La Figura 7.1 incluye una sugerencia para obtener en algunos casos la función inversa de una función biunívoca: si es posible, *se despeja x en términos de y de la ecuación $y = f(x)$*, con lo cual se obtiene una ecuación de la forma $x = g(y)$. Si las dos condiciones $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$ se satisfacen para todo x en los dominios de f y g, respectivamente, entonces g es la función inversa f^{-1} buscada. La siguiente guía resume este procedimiento. En el paso 2, anticipando que se va a encontrar f^{-1}, se escribe $x = f^{-1}(y)$ en lugar de $x = g(y)$.

GUÍA PARA OBTENER f^{-1} EN CASOS SENCILLOS (7.3)

1. Verificar que f es una función biunívoca (o que f es creciente o decreciente) en todo su dominio.
2. Despejar x en términos de y de la ecuación $y = f(x)$, obteniendo una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$.
3. Verificar las condiciones

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

para todo x en los dominios de f y f^{-1}, respectivamente.

El que este método se pueda llevar a cabo depende de la naturaleza de la ecuación $y = f(x)$, pues se necesita poder despejar x en términos de y. Esto es lo que se denomina *casos sencillos* en el título de la guía.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 3x - 5$. Encontrar la función inversa de f.

Solución Seguiremos los pasos de la Guía (7.3). Primero notamos que la gráfica de la función lineal f es una recta con pendiente 3 y, por lo tanto, f es creciente en todo $\mathbb{R}$. Entonces la función inversa f^{-1} existe. Como además el dominio y el contradominio de f es $\mathbb{R}$, lo mismo sucede para f^{-1}.

Como en el paso 2, despejamos x de

$$y = 3x - 5$$

obteniendo

$$x = \frac{y + 5}{3}.$$

Formalmente escribimos

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 5}{3}.$$

Como no importa el símbolo que se usa para la variable, también podemos escribir

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}.$$

Finalmente, verificamos que se satisfacen las dos condiciones

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

Así,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x-5) = \frac{(3x-5)+5}{3} = x$$

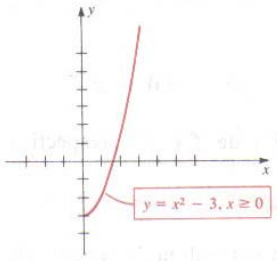
También,

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+5}{3}\right) = 3\left(\frac{x+5}{3}\right) - 5 = x.$$

Esto demuestra que la función inversa de f está dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}. \quad \bullet$$

FIGURA 7.2



EJEMPLO 2 Encontrar la función inversa de la función f dada por $f(x) = x^2 - 3$ para $x \geq 0$.

Solución La gráfica de f está en la Figura 7.2. Su dominio D es $[0, \infty)$ y el contradominio E es $[-3, \infty)$. Como f es creciente en D, tiene una función inversa f^{-1} con dominio E y contradominio D.

Aplicando el paso 2, consideramos la ecuación

$$y = x^2 - 3$$

y despejamos x de ella, obteniendo

$$x = \pm\sqrt{y+3}.$$

Como x no es negativo, descartamos la solución $x = -\sqrt{y+3}$ y se toma

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y+3} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}.$$

En último término, se verifica que $f^{-1}(f(x)) = x$ para x en $D = [0, \infty)$, y que $f(f^{-1}(x)) = x$ para x en $E = [-3, \infty)$. De modo que

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 - 3) = \sqrt{(x^2-3)+3} = \sqrt{x^2} = x \quad \text{para } x \geq 0.$$

y

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x+3}) = (\sqrt{x+3})^2 - 3 = (x+3) - 3 = x \quad \text{para } x \geq -3.$$

Esto demuestra que la función inversa está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{para } x \geq -3 \quad \bullet$$

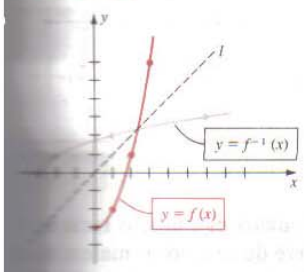
Hay una relación interesante entre las gráficas de una función f y la de su función inversa f^{-1}. Nótese primero que $b = f(a)$ significa lo mismo que $a = f^{-1}(b)$. Estas ecuaciones implican que el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}.

En el Ejemplo 2 se vio que las funciones f y f^{-1} dadas por

$$f(x) = x^2 - 3 \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3},$$

son una inversa de la otra, siempre y cuando la variable x esté debidamente restringida. Algunos de los puntos de la gráfica de f son $(0, -3)$, $(1, -2)$, $(2, 1)$ y $(3, 6)$. Los puntos correspondientes sobre la gráfica de f^{-1} son $(-3, 0)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$ y $(6, 3)$. En la Figura 7.3 aparecen los croquis de las gráficas de f y f^{-1} sobre los mismos ejes coordenados. Si se dobla la hoja a lo largo de la recta l que biseca los cuadrantes I y III (indicada por línea punteada en la figura), las gráficas de f y f^{-1} coinciden. Nótese que $y = x$ es la ecuación de l. Cada gráfica es un *reflejo* de la otra con respecto a la recta l. Esto sucede siempre que se tengan las gráficas de una función f y de su función inversa f^{-1} (véase el Ejercicio 22).

FIGURA 7.3



EJERCICIOS 7.1

Ejercicios 1-4: Demuestre que f y g son funciones inversas una de la otra y trace las gráficas en un mismo plano coordenado.

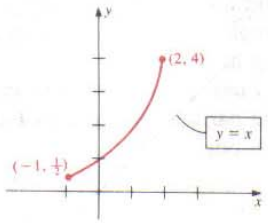
1. $f(x) = 7x + 5; \quad g(x) = \frac{1}{7}(x - 5)$
2. $f(x) = x^2 - 1, \ x \geq 0; \quad g(x) = \sqrt{x+1}, \ x \geq -1$
3. $f(x) = \sqrt{2x-4}, \ x \geq 2; \quad g(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4), \ x \geq 0$
4. $f(x) = x^3 + 1; \quad g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Ejercicios 5-18: Encuentre la función inversa de f.

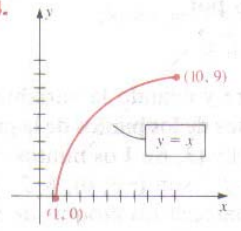
5. $f(x) = 4x - 3$
6. $f(x) = 9 - 7x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{2x+5}, \ x > -\frac{5}{2}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}, \ x > \frac{1}{3}$
9. $f(x) = 9 - x^2, \ x \geq 0$
10. $f(x) = 4x^2 + 1, \ x \geq 0$
11. $f(x) = 5x^3 - 2$
12. $f(x) = 7 - 2x^3$
13. $f(x) = \sqrt{3x-5}, \ x \geq \frac{5}{3}$
14. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \ 0 \leq x \leq 2$
15. $f(x) = \sqrt[3]{x} + 8$
16. $f(x) = (x^3 + 1)^5$
17. $f(x) = x$
18. $f(x) = -x$
19. (a) Demuestre que la función lineal definida por $f(x) = ax + b$, donde $a \neq 0$, tiene una función inversa y encuentre $f^{-1}(x)$.
 (b) ¿Tiene función inversa una función constante? Explique su respuesta.
20. Demuestre que si f es una función biunívoca con dominio D y contradominio E, entonces f^{-1} es una función biunívoca con dominio E y contradominio D.
21. Demuestre que una función biunívoca tiene solamente una función inversa.
22. Demuestre que la gráfica de f^{-1} es el reflejo de la gráfica de f con respecto a la recta $y = x$ verificando (a)-(c):
 (a) Si $P(a, b)$ está en la gráfica de f, entonces $Q(b, a)$ está en la gráfica de f^{-1}.
 (b) El punto medio del segmento PQ está en la recta $y = x$.
 (c) La recta PQ es perpendicular a la recta $y = x$.

Ejercicios 23-26: La figura muestra la gráfica de una función biunívoca. Use la propiedad de reflexión para trazar la gráfica de f^{-1}. Determine los dominios y los contradominios de f y f^{-1}.

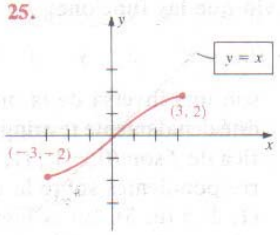
23.



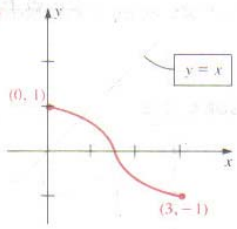
24.



25.



26.



7.2 FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

Si a es un número real positivo, es fácil definir a^r para cualquier número racional r, pero la extensión al caso de exponentes irracionales requiere de conceptos matemáticos avanzados. Por ejemplo, para definir a^π, se puede expresar π como un decimal infinito 3.14159... y considerar las aproximaciones sucesivas

$$a^3,\ a^{3.1},\ a^{3.14},\ a^{3.141},\ a^{3.1415},\ a^{3.14159},\ \ldots$$

Es de esperarse que las potencias sucesivas tiendan a a^π, por lo que parece natural definir

$$a^\pi = \lim_{r \to \pi} a^r$$

donde r se restringe a los números racionales. Desgraciadamente, hay problemas serios en este tipo de definición. Además de demostrar que el límite existe y es único, habría que demostrar que las leyes de los exponentes $a^u a^v = a^{u+v}$, $(a^u)^v = a^{uv}$, etcétera, se cumplen para todos los números reales u y v, lo cual es sumamente difícil. Dada la dificultad de tal demostración, a menudo en las matemáticas anteriores al cálculo se *supone* que si $a > 0$, entonces a^u existe para todo número real u y que las reglas de los exponentes son válidas para todos los números reales. El logaritmo de base a se define como sigue:

$$u = \log_a v \quad \text{si y sólo si} \quad a^u = v.$$

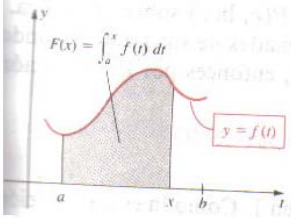
Entonces, las propiedades de los logaritmos se pueden deducir de las leyes de los exponentes (que fueron previamente aceptadas). Aunque este camino para desarrollar el logaritmo es adecuado en el álgebra elemental, no resulta apropiado para los cursos avanzados en los que el nivel de rigor matemático es superior.

En este capítulo se dan definiciones de $\log_a x$ para todo número real positivo x y de a^x para todo número real x. Nuestro enfoque comienza usando una integral definida para definir la *función logarítmica natural* que se denota por ln. Luego se usa la función logaritmo natural para definir la *función exponencial natural* denotada por exp. Finalmente, se definen a^x y $\log_a x$. Este planteamiento permite obtener resultados sobre la continuidad, las derivadas y las integrales de estas funciones de manera relativamente simple, y demostrar las leyes de los exponentes que se aceptaron en las matemáticas anteriores al Cálculo.

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Como en la demostración de la parte I del Teorema Fundamental del Cálculo (5.22), se puede definir una función F por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

FIGURA 7.4



para todo número x en $[a, b]$. Si $f(t) \geq 0$ en todo $[a, b]$, entonces $F(x)$ es el área bajo la gráfica de f entre a y x, como se ilustra en la Figura 7.4. Para el caso especial $f(t) = t^n$, donde n es un número racional y $n \neq -1$, se puede encontrar una forma explícita para F. Así, por la Regla de la Potencia (5.24),

$$F(x) = \int_a^x t^n\,dt = \frac{1}{n+1}\,t^{n+1}\Big]_a^x$$

$$= \frac{1}{n+1}\,(x^{n+1} - a^{n+1})$$

siempre y cuando t^n esté definido en todo $[a, x]$. Se debe excluir $f(t) = 1/t = t^{-1}$, pues $1/(n + 1)$ no está definido para $n = -1$. Hasta ahora no se han determinado antiderivadas de $f(x) = 1/x$. A continuación se define una función cuya derivada es $1/x$.

DEFINICIÓN (7.4)

La función **logaritmo natural**, denotada por **ln**, se define por

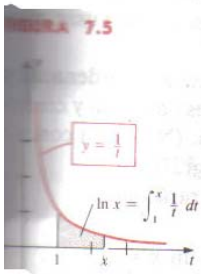
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

para todo $x > 0$.

La Figura 7.5 ilustra la interpretación de $\ln x$ como un área, para el caso $x > 1$.

La expresión $\ln x$ se llama **logaritmo natural de x**. La restricción $x > 0$ es necesaria porque $\int_1^x (1/t)\,dt$ no existe para $x \leq 0$. El motivo por el cual a esta función se la llama *logaritmo* se aclarará más adelante cuando se demuestre que ln satisface las leyes de los logaritmos estudiadas antes del Cálculo (véase el Teorema (7.7)).

FIGURA 7.5



Del Teorema (5.25) se deduce que

$$D_x \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

para todo $x > 0$ (véase el Ejemplo 5 de la Sección 5.4). Esto da el siguiente teorema.

TEOREMA (7.5)

$$D_x\,(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Entonces, $\ln x$ *es una antiderivada de* $1/x$. Como $\ln x$ es derivable y su derivada $1/x$ es positiva para todo $x > 0$, de los Teoremas (3.5) y (4.3) se deduce que *la función logaritmo natural es continua y creciente en todo su dominio*. Nótese también que

$$D_x^2\,(\ln x) = D_x\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2},$$

es negativo para todo $x > 0$. Entonces por (4.16), la gráfica de la función logaritmo natural tiene concavidad hacia abajo en todo punto $P(c, \ln c)$ sobre la gráfica.

Para trazar la gráfica de $y = \ln x$ se calculan las ordenadas de sus puntos usando la integral de la Definición (7.4). En particular, si $x = 1$, entonces por la Definición (5.10),

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0.$$

Por lo tanto, la gráfica de $y = \ln x$ tiene abscisa en el origen 1. Como ln es una función creciente, resulta que para $x > 1$, el punto (x, y) de la gráfica se encuentra arriba del eje x, y para $0 < x < 1$, (x, y) está abajo del eje x. Para calcular aproximadamente y cuando $x \neq 1$, se puede aplicar la Regla del Trapecio o la Regla de Simpson. Si $x = 2$, entonces del Ejemplo 2 de la Sección 5.6,

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \approx 0.693.$$

En el Teorema (7.7) se demostrará que si $a > 0$, entonces $\ln a^r = r \ln a$ para todo número racional r. Usando este resultado se obtiene

$$\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2 \approx 2(0.693) \approx 1.386$$

$$\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2 \approx 2.079$$

$$\ln \tfrac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2 \approx -0.693$$

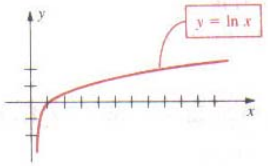
$$\ln \tfrac{1}{4} = \ln 2^{-2} = -2 \ln 2 \approx -1.386$$

$$\ln \tfrac{1}{8} = \ln 2^{-3} = -3 \ln 2 \approx -2.079.$$

La Tabla C del Apéndice III es una lista de los logaritmos naturales de muchos otros números calculados con una precisión de tres decimales. También se pueden usar calculadoras para estimar los valores de ln.

Situando los puntos correspondientes a las ordenadas ya calculadas y usando el hecho de que ln es continua y creciente se obtiene el croquis de la Figura 7.6. (Nótese la concavidad hacia abajo en cada punto de la gráfica.)

FIGURA 7.6



Al final de esta sección se demostrará que

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

De modo que $\ln x$ tiende a infinito cuando $x \to \infty$, y el eje y es una asíntota vertical de su gráfica (véase la Figura 7.6).

El siguiente resultado generaliza el Teorema (7.5).

TEOREMA (7.6) Si $u = g(x)$, donde g es derivable y $g(x) > 0$, entonces

$$D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u.$$

Demostración Tomando $y = \ln u$ y $u = g(x)$ y aplicando la Regla de la Cadena,

$$D_x \ln u = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} D_x u \quad \bullet\bullet$$

Obsérvese que si $u = x$, entonces el Teorema (7.6) se reduce a (7.5).

EJEMPLO 1

(a) Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \ln(x^2 + 6)$.

(b) Encontrar y' para $y = \ln\sqrt{x+1}$ y $x > -1$.

Solución

(a) Tomando $u = x^2 + 6$ en el Teorema (7.6),

$$f'(x) = D_x \ln(x^2 + 6) = \frac{1}{x^2 + 6} D_x (x^2 + 6) = \frac{2x}{x^2 + 6}$$

(b) Tomando $u = \sqrt{x+1}$ en el Teorema (7.6), obtenemos

$$\begin{aligned} y' &= D_x \ln\sqrt{x+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}} D_x \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2(x+1)} \end{aligned}$$

El siguiente teorema afirma que los logaritmos naturales satisfacen las mismas leyes que los logaritmos estudiados en los cursos de matemáticas anteriores al cálculo.

TEOREMA (7.7)

Si $p > 0$ y $q > 0$, entonces

(i) $\ln pq = \ln p + \ln q$.

(ii) $\ln\left(\frac{p}{q}\right) = \ln p - \ln q$.

(iii) $\ln p^r = r \ln p$ para todo número racional r.

Demostración

(i) Si $p > 0$ entonces aplicando el Teorema (7.6) con $u = px$,

$$D_x \ln(px) = \frac{1}{px} D_x (px) = \frac{1}{px} p = \frac{1}{x}.$$

Como $\ln px$ tiene la misma derivada que $\ln x$ para todo $x > 0$, del Teorema (4.32) se deduce que estas expresiones difieren por una constante, es decir,

$$\ln px = \ln x + C$$

para algún número real C. Sustituyendo x por 1 se obtiene

$$\ln p = \ln 1 + C.$$

Como $\ln 1 = 0$, resulta que $C = \ln p$ y por lo tanto,

$$\ln px = \ln x + \ln p.$$

Sustituyendo x por q en la ecuación anterior se obtiene

$$\ln pq = \ln q + \ln p,$$

que es lo que se quería demostrar.

(ii) Usando la fórmula $\ln p + \ln q = \ln pq$ con $p = 1/q$, se ve que

$$\ln \frac{1}{q} + \ln q = \ln \left(\frac{1}{q} \cdot q \right) = \ln 1 = 0$$

y por lo tanto,

$$\ln \frac{1}{q} = -\ln q.$$

Entonces,

$$\ln \frac{p}{q} = \ln \left(p \cdot \frac{1}{q} \right) = \ln p + \ln \frac{1}{q} = \ln p - \ln q.$$

(iii) Si r es un número racional arbitrario y $x > 0$, entonces por el Teorema (7.6) con $u = x^r$,

$$D_x(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} D_x(x^r) = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = r\left(\frac{1}{x}\right).$$

Sin embargo, por los Teoremas (3.11) y (7.5), también se puede escribir

$$D_x(r \ln x) = r\, D_x(\ln x) = r\left(\frac{1}{x}\right).$$

Por lo tanto,

$$D_x(\ln x^r) = D_x(r \ln x).$$

Como $\ln x^r$ y $r \ln x$ tienen la misma derivada, difieren sólo por una constante (véase el Teorema (4.32). Entonces,

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

para algún C. Poniendo $x = 1$ en la fórmula anterior se obtiene

$$\ln 1 = r \ln 1 + C.$$

Como $\ln 1 = 0$, esto implica que $C = 0$ y por lo tanto,

$$\ln x^r = r \ln x.$$

En la Sección 7.5 se generalizará esta ley a exponentes irracionarios.

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que a veces es conveniente aplicar el Teorema (7.7) antes de derivar.

EJEMPLO 2 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \ln [\sqrt{6x - 1}(4x + 5)^3]$ y $x > \frac{1}{6}$.

Solución Primero escribimos $\sqrt{6x - 1} = (6x - 1)^{1/2}$ y usamos (i) y (iii) del Teorema (7.7), obteniendo

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln [(6x - 1)^{1/2}(4x + 5)^3] \\ &= \ln (6x - 1)^{1/2} + \ln (4x + 5)^3 \\ &= \tfrac{1}{2} \ln (6x - 1) + 3 \ln (4x + 5). \end{aligned}$$

Usando el Teorema (7.6),

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6x - 1}(6) + 3 \cdot \frac{1}{4x + 5}(4) \\ &= \frac{3}{6x - 1} + \frac{12}{4x + 5} = \frac{84x + 3}{(6x - 1)(4x + 5)} \end{aligned}$$

En los siguientes ejemplos y ejercicios, cuando una función se define en términos de la función logaritmo natural, no se especifica explícitamente su dominio. Se supone que x se restringe a los valores para los que la expresión dada tiene sentido.

EJEMPLO 3 Encontrar y' para $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$.

Solución Usamos primero el Teorema (7.7) para cambiar la forma de y, como sigue:

$$\begin{aligned} y &= \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \\ &= \tfrac{1}{3}[\ln (x^2 - 1) - \ln (x^2 + 1)]. \end{aligned}$$

Ahora se aplica el Teorema (7.6) y obtenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^2 - 1}(2x) - \frac{1}{x^2 + 1}(2x)\right] \\ &= \frac{2x}{3}\left[\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 1}\right] \\ &= \frac{2x}{3}\left[\frac{2}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}\right] = \frac{4x}{3(x^4 - 1)} \end{aligned}$$

En el ejemplo siguiente se da una aplicación de los logaritmos naturales al proceso de crecimiento. En muchos otros ejemplos y ejercicios de este capítulo, aparecen problemas prácticos en los que interviene la función logaritmo natural.

EJEMPLO 4 El *Modelo de Count* es una fórmula empírica que sirve para predecir la estatura de un niño en edad preescolar. Si h denota la estatura (en cm) y x la edad (en años), entonces

$$h = 70.228 + 5.104x + 9.222 \ln x$$

para $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$.

(a) Pronosticar la altura y la rapidez o tasa de crecimiento de un niño típico de dos años.

(b) ¿A qué edad se alcanza la mayor rapidez de crecimiento?

Solución

(a) Si $x = 2$, entonces la altura es

$$\begin{aligned} h &= 70.228 + 5.104(2) + 9.22 \ln 2 \\ &\approx 70.228 + 10.208 + 9.222(0.693) \approx 86.8 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Por la Definición (3.19), la tasa de cambio de h con respecto a x es

$$\frac{dh}{dx} = 5.104 + 9.222\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si $x = 2$, entonces

$$\frac{dh}{dx} = 5.104 + 9.222\left(\frac{1}{2}\right) = 9.715.$$

Entonces, la tasa de crecimiento a la edad de dos años es aproximadamente 9.7 cm/año.

(b) Para calcular el valor máximo de la tasa de crecimiento dh/dx buscamos primero los números críticos de dh/dx. Derivando luego dh/dx obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dh}{dx}\right) = \frac{d^2h}{dx^2} = 9.222\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{9.222}{x^2},$$

que existe en todo el intervalo $[\frac{1}{4}, 6]$ y no es cero. Por lo tanto, dh/dx no tiene números críticos en este intervalo. Como d^2h/dx^2 es siempre negativa, del Teorema (4.13) se deduce que dh/dx es decreciente en $[\frac{1}{4}, 6]$. Por lo tanto, dh/dx tiene un máximo en la frontera en $x = \frac{1}{4}$, es decir, la máxima rapidez o tasa de crecimiento se alcanza a la edad de 3 meses. •

Para terminar esta sección se estudia el comportamiento de $\ln x$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to 0^+$. Si $x > 1$, la integral $\int_1^x (1/t)\,dt = \ln x$ puede interpretarse como el área de la región que se muestra en la Figura 7.7. La suma de las áreas de los tres rectángulos que aparecen en la Figura 7.8 es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}.$$

FIGURA 7.7

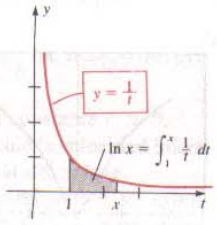
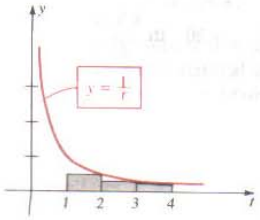


FIGURA 7.8



Como el área bajo la gráfica de $y = 1/t$ entre $t = 1$ y $t = 4$ es $\ln 4$, se ve que

$$\ln 4 > \frac{13}{12} > 1.$$

Resulta que si M es un número racional positivo arbitrario, entonces

$$M \ln 4 > M \quad \text{o bien} \quad \ln 4^M > M.$$

Si $x > 4^M$, entonces como ln es una función creciente,

$$\ln x > \ln 4^M > M.$$

Esto demuestra que se puede lograr que $\ln x$ sea tan grande como se quiera, escogiendo x suficientemente grande, es decir,

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty.$$

Para estudiar el caso $x \to 0^+$ se ve primero que

$$\ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x = -\ln x.$$

Entonces,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{x \to 0^+} \left(-\ln \frac{1}{x} \right).$$

Cuando x tiende a cero por la derecha, $1/x$ tiende a infinito y también $\ln(1/x)$ tiende a infinito. Por lo tanto $-\ln(1/x)$ tiende a *menos* infinito, es decir,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

EJERCICIOS 7.2

Ejercicios 1-28: Encuentre $f'(x)$ suponiendo que $f(x)$ es la expresión dada.

1. $\ln(9x + 4)$
2. $\ln(x^4 + 1)$
3. $\ln(2 - 3x)^5$
4. $\ln(5x^2 + 1)^3$
5. $\ln \sqrt{7 - 2x^3}$
6. $\ln \sqrt[4]{6x + 7}$
7. $\ln(3x^2 - 2x + 1)$
8. $\ln(4x^3 - x^2 + 2)$
9. $\ln \sqrt[3]{4x^2 + 7x}$
10. $(\ln x) \ln(x + 5)$
11. $x \ln x$
12. $x^2/(\ln x)$
13. $\ln \sqrt{x} + \sqrt{\ln x}$
14. $\ln x^3 + (\ln x)^3$
15. $\dfrac{1}{\ln x} + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$
16. $\ln \sqrt{\dfrac{4 + x^2}{4 - x^2}}$

17. $\ln (5x - 7)^4(2x + 3)^3$

18. $\ln \sqrt[3]{4x - 5}(3x + 8)^2$

19. $\ln \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{(9x - 4)^2}$

20. $\ln \dfrac{x^2(2x - 1)^3}{(x + 5)^2}$

21. $\ln \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$

22. $\ln (\ln x)$

23. $\ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$

24. $\ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$

25. $(\ln \sqrt{x^2 + 1})^2$

26. $(\ln \sqrt{x})/\sqrt{\ln x}$

27. $\sqrt{\ln (x^2 + 1)}$

28. $\ln |x|$

Ejercicios 29-34: Encuentre y' por derivación implícita.

29. $3y - x^2 + \ln xy = 2$

30. $y^2 + \ln (x/y) - 4x + 3 = 0$

31. $x \ln y - y \ln x = 1$

32. $y^3 + x^2 \ln y = 5x + 3$

33. $y = \ln (x + y)$

34. $(\ln x)(\ln y) = xy - 1$

35. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + \ln (2x - 5)$ en el punto de la gráfica con abscisa 3.

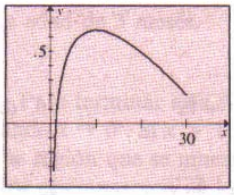
36. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x + \ln x$ que sea perpendicular a la recta $2x + 6y = 5$.

37. Encuentre los puntos de la gráfica de $y = x^2 + 4 \ln x$ en los que la recta tangente es paralela a la recta con ecuación $y - 6x + 3 = 0$.

38. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $x^3 - x \ln y + y^3 = 2x + 5$ en el punto $(2, 1)$.

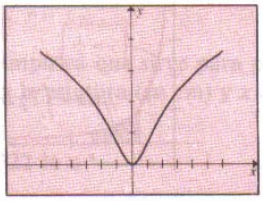
39. La figura muestra una gráfica generada por computadora de $y = 5 \ln x - \frac{1}{2}x$ para $x > 0$. Calcule las coordenadas del punto más alto de la gráfica y demuestre que ésta tiene concavidad hacia abajo para $x > 0$.

EJERCICIO 39



40. La figura muestra una gráfica generada por computadora de $y = \ln (x^2 + 1)$. Encuentre las coordenadas de todos los puntos de inflexión de la gráfica.

EJERCICIO 40



41. La función de posición de un punto que se mueve sobre una recta coordenada está dada por $s(t) = t^2 - 4 \ln (t + 1)$ para $0 \le t \le 4$. Calcule la velocidad y la aceleración al tiempo t y describa el movimiento del punto durante el intervalo de tiempo $[0, 4]$.

42. En el análisis de un tipo particular de reacción química aparece la ecuación

$$t = \frac{1}{c(a - b)} \ln \frac{b(a - x)}{a(b - x)}$$

donde x es la concentración de una sustancia al tiempo t y a, b y c son constantes. Demuestre que $dx/dt = c(a - x)(b - x)$.

43. La edad T (en años) de una ballena azul hembra se puede calcular aproximadamente a partir de su longitud L (en pies) usando la fórmula $T = -2.57 \ln [(87 - L)/63]$. Una ballena azul fue descubierta por un barco de investigación y se estima que su longitud es de 80 pie. Calcule aproximadamente el error máximo que se comete al estimar T usando diferenciales, si el error en la estimación de L puede ser de 2 pie.

44. La *relación de Ehrenberg* $\ln W = \ln 2.4 + 1.84h$ es una fórmula empírica que relaciona la altura h (en cm) con el peso W (en kg) para niños mayores de 5 años y menores de 13. Esta fórmula se ha verificado en muchos países encontrándose sólo diferencias pequeñas en las constantes. Determine la relación entre las rapideces de variación dW/dt y dh/dt al tiempo t (en años).

45. Un cohete de masa m_1 lleva un abasto de combustible de masa m_2, que se quemará según una rapidez constante de b kg/s. El cohete expulsa los gases con velocidad constante y la distancia $s(t)$

(en metros) que el cohete ha recorrido a los t segundos, está dada por

$$s(t) = ct + \frac{c}{b}(m_1 + m_2 - bt)\ln\left(\frac{m_1 + m_2 - bt}{m_1 + m_2}\right)$$

para una constante $c > 0$.

(a) Calcule la velocidad inicial y la aceleración inicial del cohete.

(b) El combustible se agota al tiempo $t = m_2/b$. Calcule la velocidad y la aceleración en ese momento.

El número esperado $S(N)$ de especies diferentes en una muestra de un número grande N de mariposas o palomillas colectadas en una cierta localidad está dado aproximadamente por la fórmula $S(N) = a\ln[(a + N)/a]$ para $a > 0$.

(a) Demuestre que $S(0) = 0$ y $S(1) = \ln[1 + (1/a)]^a$.

(b) Trace la gráfica de S analizando S' y S'' para $N > 0$.

Use la Tabla C o una calculadora para ayudarse a trazar la gráfica de $y = \ln x$ (véase la Figura 7.6). Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica en los puntos con abscisa 1, 5, 10, 100 y 1000. Describa el comportamiento de la pendiente cuando la abscisa a del punto de tangencia tiende a infinito. ¿Qué sucede si a tiende a 0?

Trace las gráficas de (a) $y = \ln|x|$; (b) $y = |\ln x|$.

49. Describa la diferencia entre las gráficas de $y = \ln(x^2)$ y $y = 2\ln x$.

50. Demuestre que si $0 < a < b$, entonces la función logaritmo natural satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio (4.12) en $[a, b]$ y encuentre una fórmula general para el número c en la conclusión de (4.12).

51. Sea $f(x) = \ln x$. Encuentre una fórmula para la n-ésima derivada $f^{(n)}(x)$ para todo entero positivo n.

52. Demuestre que para $0 < x < 1$, $\ln x$ es igual al negativo del área bajo la gráfica de $y = 1/t$ entre $t = x$ y $t = 1$ (véase la Figura 7.5).

53. Demuestre que para todo $x > 0$ se tiene que $(x - 1)/x \le \ln x \le x - 1$.

54. Use el Ejercicio 53 para demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x + 1)}{x} = 1.$$

Ejercicios 55-58: Verifique la fórmula por derivación.

55. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

56. $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

57. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

58. $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{a + x}{a - x} + C,\ a^2 > x^2$

7.3 FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

En la Sección 7.2 se vio que

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty.$$

Estos hechos se emplean en la demostración del siguiente resultado.

TEOREMA (7.8) A todo número real x le corresponde un único número real positivo y tal que $\ln y = x$.

Demostración Veamos primero el caso $x = 0$. Como $\ln 1 = 0$ y además ln es una función creciente, 1 es el único valor de y para el cual $\ln y = 0$.

Si x es positivo, se puede escoger un número b tal que

$$\ln 1 < x < \ln b.$$

Como ln es continua, toma todos los valores entre ln 1 y ln b (ver el Teorema del Valor Intermedio (2.28)). Por lo tanto, hay un número y entre 1 y b tal que $\ln y = x$. Como ln es una función creciente, también este número es único.

Finalmente, si x es negativo, existe un número $b > 0$ tal que

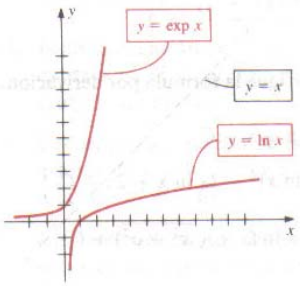
$$\ln b < x < \ln 1$$

y como antes, existe un único número y entre b y 1 tal que $\ln y = x$. • •

Del Teorema (7.8) se deduce que el contradominio de ln es $\mathbb{R}$. Como ln es una función creciente, también es biunívoca y por lo tanto, tiene una función inversa, a la que se le da un nombre especial en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (7.9) La función **exponencial natural**, que se denota por **exp**, es la inversa de la función logaritmo natural.

FIGURA 7.9



El motivo de usar el nombre *exponencial* en esta definición se aclarará más adelante. Como exp es la función inversa de ln, su dominio es $\mathbb{R}$ y su contradominio es el conjunto de los números reales positivos. Además, como en (7.2),

$$y = \exp x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y$$

donde x es cualquier número real y $y > 0$. De acuerdo con la Definición (7.1), también puede escribirse

$$\ln(\exp x) = x \quad \text{y} \quad \exp(\ln y) = y.$$

Como se señaló en la Sección 7.1, si dos funciones son una la inversa de la otra, entonces una de las gráficas es la reflejada (o reflexión) de la otra con respecto a la recta $y = x$. Entonces, la gráfica de $y = \exp x$ puede obtenerse reflejando la gráfica de $y = \ln x$ con respecto a esta recta, como se ilustra en la Figura 7.9. Evidentemente,

$$\lim_{x \to \infty} \exp x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \exp x = 0.$$

Por el Teorema (7.8), existe un número real positivo único cuyo logaritmo natural es 1. Este número se denota por e. El gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) fue uno de los primeros en estudiar a fondo sus propiedades.

DEFINICIÓN DE e (7.10) La letra e denota al número real positivo tal que $\ln e = 1$.

En la Sección 7.2 se calcularon algunos valores de ln. Usando la Regla del Trapecio se puede demostrar que

$$\int_1^{2.7} \frac{1}{t}\,dt < 1 < \int_1^{2.8} \frac{1}{t}\,dt$$

(véase el Ejercicio 13 de la Sección 5.6). Entonces por la Definición (7.4),

$$\ln 2.7 < \ln e < \ln 2.8$$

lo cual implica que

$$2.7 < e < 2.8.$$

Más adelante, en el Teorema (7.25), se demostrará que el número e puede expresarse como el siguiente límite:

$$e = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}.$$

Esta fórmula se puede usar para calcular el valor de e con el grado de precisión que se desee. En particular, con una precisión de cinco decimales (véase la página 380),

$$e \approx 2.71828.$$

Puede demostrarse que e es un número irracional.

Si r es cualquier número racional, entonces por el Teorema (7.7) (iii),

$$\ln e^r = r \ln e = r(1) = r.$$

Esta ecuación sirve para motivar la definición de e^x para todo número real x. Concretamente, se *definirá* e^x como el número real y tal que $\ln y = x$. El siguiente enunciado equivalente es útil para recordar este hecho.

DEFINICIÓN DE e^x (7.11)

Si x es cualquier número real, entonces

$$e^x = y \quad \text{si y sólo si} \quad \ln y = x.$$

Recordando la Definición (7.9) puede verse que

$$\exp x = y \quad \text{si y sólo si} \quad \ln y = x.$$

Comparando esta relación con la Definición (7.11) se ve que

$$e^x = \exp x \quad \text{para todo } x.$$

Éste es el motivo por el que se dice que exp es una función *exponencial* y se la llama **función exponencial con base e** o **función exponencial natural**. El hecho de que $\ln(\exp x) = x$ para todo x, y $\exp(\ln x) = x$ para todo $x > 0$, puede expresarse ahora como sigue:

TEOREMA (7.12)

(i) $\ln e^x = x$ para todo x.

(ii) $e^{\ln x} = x$ para todo $x > 0$.

El siguiente teorema afirma que las potencias del número e satisfacen las leyes conocidas de los exponentes.

TEOREMA (7.13) Si p y q son números reales y r es un número racional, entonces

(i) $e^p e^q = e^{p+q}$ (ii) $\dfrac{e^p}{e^q} = e^{p-q}$ (iii) $(e^p)^r = e^{pr}$

Demostración Usando los Teoremas (7.7) y (7.12),

$$\ln e^p e^q = \ln e^p + \ln e^q = p + q = \ln e^{p+q}.$$

Como la función logaritmo natural es biunívoca, se tiene que

$$e^p e^q = e^{p+q}.$$

Esto demuestra (i). Las demostraciones de (ii) y (iii) son parecidas. En la Sección 7.5 se demostrará que (iii) también se cumple para r irracional. • •

No es difícil demostrar que si n es un entero positivo entonces (como en el álgebra elemental) $e^n = e \cdot e \cdot \cdots \cdot e$ con n factores, todos iguales a e, al lado derecho de la igualdad. De modo que el Teorema (7.12),

$$e^0 = e^{\ln 1} = 1 \quad \text{y} \quad e^1 = e^{\ln e} = e.$$

Luego, del Teorema (7.13),

$$e^2 = e^{1+1} = e^1 e^1 = ee, \quad e^3 = e^{2+1} = e^2 e^1 = (ee)e,$$

etcétera. Los exponentes negativos también tienen las propiedades usuales, es decir,

$$e^{-1} = e^{0-1} = \frac{e^0}{e^1} = \frac{1}{e} \quad \text{y} \quad e^{-n} = \frac{1}{e^n}$$

para todo entero positivo n. Las potencias racionales de e también pueden interpretarse como en el álgebra elemental.

La gráfica de $y = e^x$ es la misma que la de $y = \exp x$ ilustrada en la Figura 7.9. De aquí en adelante *se usará* e^x *en vez de* $\exp x$ *para denotar los valores de la función exponencial natural.*

En las matemáticas anteriores al Cálculo, las gráficas de ecuaciones como $y = 2^x$ y $y = 3^x$ se trazan *suponiendo* que estas expresiones exponenciales están definidas para todo número real x y aumentan cuando x crece. Usando este punto de vista intuitivo, se puede obtener un esquema burdo de la gráfica de $y = e^x$ graficando $y = (2.7)^x$.

En la Sección 7.7 se demostrará que la función inversa de una función derivable es derivable. Aceptando este resultado por anticipado, puede encontrarse la derivada de la función exponencial natural por derivación implícita. De modo que, si

$$y = e^x, \quad \text{entonces} \quad \ln y = x.$$

Derivando esta ecuación implícitamente se obtiene

$$D_x(\ln y) = D_x(x) \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{y} D_x y = 1.$$

cribir la concavidad de su gráfica, encontrar los puntos de inflexión y trazar la gráfica de f.

Solución Por el Teorema (7.15),

$$f'(x) = e^{-x^2/2} D_x\left(-\frac{x^2}{2}\right) = e^{-x^2/2}\left(-\frac{2x}{2}\right) = -xe^{-x^2/2}.$$

Como $e^{-x^2/2}$ es siempre positivo, el único número crítico de f es 0. Si $x < 0$, entonces $f'(x) > 0$, y si $x > 0$, entonces $f'(x) < 0$. Del Criterio de la Primera Derivada se deduce que f tiene un máximo local en 0. El valor del máximo es $f(0) = e^{-0} = 1$.

Aplicando la Regla del Producto a $f'(x)$,

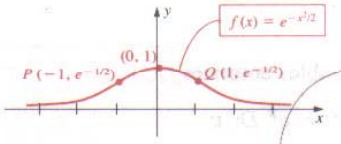
$$\begin{aligned} f''(x) &= -xe^{-x^2/2}(-2x/2) - e^{-x^2/2} \\ &= e^{-x^2/2}(x^2 - 1) \end{aligned}$$

y por tanto la segunda derivada es cero en -1 y 1. Si $-1 < x < 1$, entonces $f''(x) < 0$ y, de acuerdo con (4.16), la gráfica de f tiene concavidad hacia abajo en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Si $x < -1$ o bien $x > 1$, entonces $f''(x) > 0$ y, por lo tanto, la gráfica tiene concavidad hacia arriba en los intervalos infinitos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$. Entonces, $P(-1, e^{-1/2})$ y $Q(1, e^{-1/2})$ son puntos de inflexión. Escribiendo

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2/2}},$$

es evidente que a medida que el valor absoluto de x aumenta, $f(x)$ tiende a 0. Puede demostrarse que $\lim_{x\to\infty}$ y $\lim_{x\to-\infty}$, es decir, que el eje x es una asíntota horizontal. La gráfica de f se tiene en la Figura 7.10. •

FIGURA 7.10



Las funciones exponenciales desempeñan un papel importante en el campo de la *radioterapia*, es decir, el tratamiento de tumores por radiación. La proporción de las células de un tumor que sobrevive a un tratamiento, o sea la *proporción* o *fracción sobreviviente*, depende no solamente de la naturaleza y energía de la radiación sino también de la profundidad, tamaño y características del tumor mismo. La exposición a la radiación puede considerarse como un conjunto de sucesos potencialmente dañinos de los que basta un *impacto* para matar una célula del tumor. Supongamos que una célula tiene exactamente un *blanco* u objetivo al que se debe acertar. Si k denota el tamaño medio del blanco de una célula del tumor y x es el número de eventos dañinos (la *dosis*), entonces la fracción sobreviviente $f(x)$ está dada por

$$f(x) = e^{-kx}.$$

A esto se le llama *fracción sobreviviente de un blanco y un impacto*.

Supongamos que cada célula tiene n blancos y que un acierto a cualquiera de ellos produce la muerte de la célula. En este caso, la *fracción sobreviviente de n blancos y un impacto* está dada por

$$f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^n.$$

En el siguiente ejemplo se analiza el caso $n = 2$.

EJEMPLO 4 Si cada célula de un tumor tiene dos objetivos, entonces la fracción sobreviviente de dos blancos y un impacto está dada por

$$f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^2$$

donde k es el tamaño medio de la célula. Analizar la gráfica de f para determinar el efecto que tiene un incremento de la dosis x en la disminución de la fracción sobreviviente de células del tumor.

Solución Nótese primero que si $x = 0$, entonces $f(0) = 1$, es decir que si no hay dosis, todas las células sobreviven. Derivando obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 - 2(1 - e^{-kx})\, D_x\,(1 - e^{-kx}) \\ &= -2(1 - e^{-kx})(ke^{-kx}) \\ &= -2ke^{-kx}(1 - e^{-kx}). \end{aligned}$$

Como $f'(x) < 0$ y $f'(0) = 0$, la función f es decreciente y la gráfica tiene una recta tangente horizontal en el punto (0, 1). Podemos verificar que la segunda derivada es

$$f''(x) = 2k^2e^{-kx}(1 - 2e^{-kx}).$$

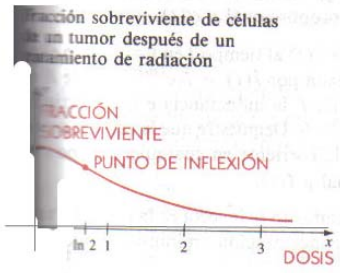
Evidentemente, $f''(x) = 0$ si $1 - 2e^{-kx} = 0$, es decir, si $e^{-kx} = \frac{1}{2}$ o, equivalentemente, $-kx = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$. Esto da

$$x = \frac{1}{k} \ln 2.$$

Se puede demostrar que si $0 \le x < (1/k) \ln 2$, entonces $f''(x) < 0$ y la gráfica tiene concavidad hacia abajo. Si $x > (1/k) \ln 2$, tenemos que $f''(x) > 0$ y la gráfica tiene concavidad hacia arriba. Lo anterior implica que hay un punto de inflexión con abscisa $(1/k) \ln 2$. La ordenada de este punto es

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k} \ln 2\right) &= 1 - (1 - e^{-\ln 2})^2 \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

FIGURA 7.11



En la Figura 7.11 está la gráfica para el caso $k = 1$. La "loma" de la curva alrededor del punto (0, 1) muestra que el efecto del tratamiento es prácticamente nulo si la dosis es pequeña, pues elimina muy pocas células del tumor. Nótese también que si x es muy grande, un incremento en la dosis cambia muy poco la fracción sobreviviente. Para determinar la dosis ideal que debe administrarse a un paciente, los especialistas en terapia de radiación deben tener en cuenta también el número de células sanas que mueren durante el tratamiento. •

EJERCICIOS 7.3

Ejercicios 1-24: Encuentre $f'(x)$ para $f(x)$ dada por la expresión.

1. e^{-5x}
2. e^{3x}
3. e^{3x^2}
4. e^{1-x^3}
5. $\sqrt{1+e^{2x}}$
6. $1/(e^x+1)$
7. $e^{\sqrt{x+1}}$
8. xe^{-x}
9. x^2e^{-2x}
10. $\sqrt{e^{2x}+2x}$
11. $e^x/(x^2+1)$
12. x/e^{x^2}
13. $(e^{4x}-5)^3$
14. $e^{3x}-e^{-3x})^4$
15. $e^{1/x}+(1/e^x)$
16. $e^{\sqrt{x}}+\sqrt{e^x}$
17. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
18. $e^{(e^x)}$
19. $e^{-2x}\ln x$
20. $e^{x\ln x}$
21. $\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$
22. $\dfrac{\ln(e^x+1)}{\ln(e^x-1)}$
23. $\sqrt{\ln(e^{2x}+e^{-2x})}$
24. $\ln\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}$

Ejercicios 25-28: Use la derivación implícita para evaluar y'.

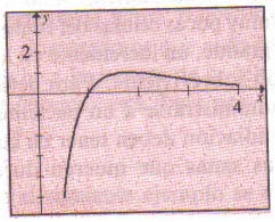
25. $e^{xy}-x^3+3y^2=11$
26. $xe^y+2x-\ln(y+1)=3$
27. $y^3+xe^y=3x^2-10$
28. $xe^y-ye^x=2$

29. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=(x-1)e^x+3\ln x+2$ en el punto $P(1, 2)$.

30. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=x-e^{-x}$ que sea paralela a la recta $6x-2y=7$.

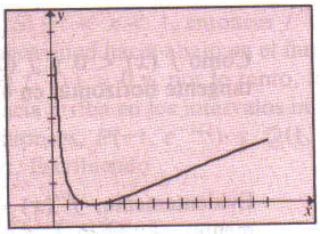
31. La figura muestra una gráfica generada por computadora de $y=e^{-x}\ln x$ para $x>0$.
 (a) Demuestre que algún número crítico satisface la ecuación $x\ln x=1$.
 (b) Explique por qué $x\ln x=1$ tiene una solución única y estímela por el método de Newton con aproximación de dos decimales.

EJERCICIO 31



32. En la figura aparece una gráfica generada por computadora de $y=(1-\ln x)^2$.
 (a) Determine los puntos correspondientes a los máximos y mínimos relativos.
 (b) Investigue la concavidad de la gráfica y encuentre las coordenadas de todos sus puntos de inflexión.

EJERCICIO 32



Ejercicios 33-38: Calcule los máximos y mínimos locales de f. Determine dónde f es creciente y dónde es decreciente, discuta la concavidad, encuentre los puntos de inflexión y trace la gráfica de f.

33. $f(x)=xe^x$
34. $f(x)=x^2e^{-2x}$
35. $f(x)=e^{-2x}$
36. $f(x)=xe^{-x}$
37. $f(x)=x\ln x$
38. $f(x)=e^x+e^{-}$

39. Una sustancia radiactiva decrece (o decae) de acuerdo con la fórmula $q(t)=q_0e^{-ct}$, donde $q_$ es la cantidad inicial de la sustancia, c es una constante positiva y $q(t)$ es la cantidad restante cuando han transcurrido t unidades de tiempo. Demuestre que la rapidez con la que la sustancia decrece es proporcional a $q(t)$.

40. La corriente $I(t)$ al tiempo t en un circuito eléctrico está dada por $I(t)=I_0e^{-Rt/L}$, donde R e la resistencia, L la inductancia e I_0 la corrient al tiempo $t=0$. Demuestre que la rapidez de variación de la corriente en cualquier tiempo t e proporcional a $I(t)$.

41. Si un medicamento se inyecta en la corriente sanguínea, su concentración t minutos después está dada por

$$C(t) = \frac{k}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$$

donde a, b y k son constantes positivas.

(a) ¿En qué momento se alcanza la concentración máxima?

(b) ¿Qué se puede decir de la concentración cuando ha transcurrido un tiempo largo? (Justifique su respuesta.)

42. Si un rayo de luz de intensidad k se dirige verticalmente hacia abajo a través del agua, entonces su intensidad $I(x)$ a una profundidad de x metros es $I(x) = ke^{-1.4x}$.

(a) ¿Cuál es la razón o tasa de cambio de la intensidad con respecto a la profundidad a 1 m? ¿A 5 m? ¿A 10 m?

(b) ¿A qué profundidad el valor de la intensidad es la mitad del valor en la superficie? ¿Una décima parte?

43. El *Modelo de Jenss* está considerado como la fórmula más precisa para predecir la estatura de niños en edad preescolar. Si h es la altura (en cm) y x la edad (en años), entonces

$$h = 79.041 + 6.39x - e^{3.261 - 0.993x}$$

para $\frac{1}{4} \le x \le 6$ (véase el Ejemplo 4 de la Sección 7.2).

(a) Calcule la altura y la rapidez (o tasa) de crecimiento de un niño típico de un año de edad.

(b) ¿A qué edad es mayor la rapidez de crecimiento? ¿A qué edad es menor?

44. Para los elefantes africanos hembras, el peso $W(t)$ (en kg) a una edad t (en años) está dado aproximadamente por la *función de crecimiento de von Bertanlanffy*, W; específicamente

$$W(t) = 2600(1 - 0.51e^{-0.075t})^3.$$

(a) Calcule el peso y la tasa o rapidez de crecimiento de un ejemplar recién nacido.

(b) Suponiendo que una hembra adulta pesa 1800 kg, calcule su edad y su rapidez de crecimiento actual.

(c) Calcule e interprete $\lim_{t\to\infty} W(t)$.

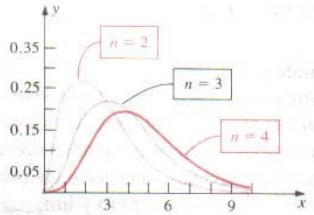
(d) Demuestre que la rapidez de crecimiento alcanza su máximo entre los 5 y los 6 años de edad.

45. Las llamadas distribuciones gama son importantes en los estudios sobre el control de tránsito de vehículos y en la teoría de la probabilidad. Están determinadas por $f(x) = cx^n e^{-ax}$ para $x > 0$, donde n es un entero positivo, a es una constante positiva y $c = a^{n+1}/n$. En la figura se muestran las gráficas correspondientes a $a = 1$ con $n = 2$, 3 y 4.

(a) Demuestre que f tiene uno y sólo un máximo local.

(b) Determine dónde crece más rápidamente $f(x)$ cuando $n = 4$.

EJERCICIO 45



46. El número relativo de moléculas de un gas contenido en un recipiente que viajan a velocidad v cm/s se puede calcular usando la *distribución de velocidades de Maxwell y Boltzmann* $F(v) = cv^2 e^{-mv^2/(2kT)}$, donde T es la temperatura (en kelvins, K), m la masa de una molécula, y c y d son constantes positivas. Demuestre que F alcanza su máximo absoluto cuando $v = \sqrt{2kT/m}$.

47. Un *modelo de densidad urbana* es una fórmula que relaciona la densidad de población (en habitantes por km² o por mi²) con la distancia r (en kilómetros o millas) al centro de la ciudad. Se ha encontrado que la fórmula $D = ae^{-br+cr^2}$, donde a, b y c son constantes positivas, es adecuada para algunas ciudades. Determine la forma de la gráfica para $r \ge 0$.

48. El efecto de la luz en la rapidez con que se produce la fotosíntesis se puede describir por

$$f(x) = x^a e^{(a/b)(1-x^b)} \quad \text{para } x > 0.$$

(a) Demuestre que f tiene un máximo absoluto en $x = 1$.

(b) Deduzca que si $x_0 > 0$ y $y_0 > 0$, entonces $g(x) = y_0 f(x/x_0)$ tiene un máximo absoluto $g(x_0) = y_0$.

49. La rapidez R con la que un tumor crece está relacionada con su tamaño x por la ecuación $R = rx \ln(K/x)$, donde r y K son constantes positivas. Demuestre que el tumor crece más rápidamente cuando $x = e^{-1}K$.

50. Si p denota el precio de venta de un artículo y x es la demanda correspondiente (en número de artículos vendidos al día), entonces la relación entre p y x está dada por $p = p_0 e^{-ax}$, donde p_0 y a son constantes positivas. Suponiendo que $p = 300e^{-0.02x}$, calcule el precio de venta que producirá el mayor ingreso diario (véase la página 119).

51. En la estadística se define la *función de distribución normal* f por medio de

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(-1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

donde μ y σ son constantes y $\sigma > 0$. (La constante μ es la *media* y σ es la *desviación estándar*.) Calcule los máximos y mínimos locales de f y determine en dónde es creciente o decreciente. Analice la concavidad, encuentre los puntos de inflexión, calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y trace la gráfica de f (véase el Ejemplo 3).

52. La integral $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$ tiene aplicaciones en estadística. Use la Regla del Trapecio con $n = 10$ y una calculadora para estimar esta integral con $a = 0$ y $b = 1$.

53. Los impulsos nerviosos del cuerpo humano viajan a lo largo de las fibras nerviosas que constan de un *axón*, que transporta el impulso, y una cubierta aislante alrededor del axón llamada *capa de mielina* (véase la figura). La fibra nerviosa se parece a un cable aislado cilíndrico para el que la velocidad v de un impulso está dada por $v = -k(r/R)^2 \ln(r/R)$, donde r es el radio del cable, y R, el de la cubierta aislante. Determine el valor de r/R que produce el valor máximo de v. (En la mayoría de la fibras nerviosas $r/R \approx 0.6$.)

EJERCICIO 53



54. Trace la gráfica de la *fracción sobreviviente de tres blancos y un impacto* (con $k = 1$) dada por $f(x) = 1 - (1 - e^{-x})^3$ (véase el Ejemplo 4).

7.4 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN

El siguiente teorema generaliza la fórmula que se presentó en la Sección 4.2 para la derivada de $\ln u$.

TEOREMA (7.16)

Si $u = g(x)$, donde g es derivable y $g(x) \neq 0$, entonces

$$D_x \ln|u| = \frac{1}{u} D_x u.$$

Demostración Si $x < 0$, entonces $\ln|x| = \ln(-x)$ y por el Teorema (7.6),

$$D_x \ln(-x) = \frac{1}{(-x)} D_x(-x) = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Por lo tanto,

$$D_x \ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Para completar la demostración se define $y = \ln|u|$, $u = g(x)$ y se aplica la Regla de la Cadena como sigue:

$$D_x \ln|u| = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} D_x u \quad \bullet\bullet$$

Obsérvese que si $u = g(x) > 0$, entonces el Teorema (7.16) se reduce a (7.6).

EJEMPLO 1 Encuentre $f'(x)$ para $f(x) = \ln|4 + 5x - 2x^3|$.

Solución Usando el Teorema (7.16) con $u = 4 + 5x - 2x^3$,

$$f'(x) = D_x \ln|4 + 5x - 2x^3|$$
$$= \frac{1}{4 + 5x - 2x^3}(5 - 6x^2) = \frac{5 - 6x^2}{4 + 5x - 2x^3}$$

Se pueden usar las fórmulas de derivación de ln para obtener reglas de integración. En particular, como

$$D_x \ln|g(x)| = \frac{1}{g(x)} g'(x),$$

se tiene la siguiente fórmula de integración.

TEOREMA (7.17)

Si $u = g(x) \neq 0$, y g es derivable, entonces

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C.$$

Por supuesto, cuando $u > 0$ se puede omitir el símbolo de valor absoluto. Como un caso especial del Teorema (7.17), se tiene

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C.$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\int \frac{x}{3x^2 - 5}\, dx$.

Solución Se efectúa la sustitución

$$u = 3x^2 - 5, \qquad du = 6x\, dx.$$

Multiplicando el integrando por 6 y usando el Teorema (7.17),

$$\int \frac{x}{3x^2 - 5}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{3x^2 - 5} 6x\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\, du$$
$$= \frac{1}{6}\ln|u| + C = \frac{1}{6}\ln|3x^2 - 5| + C.$$

Otro método para llegar al resultado consiste en reemplazar la expresión $x\,dx$ en la integral por $\frac{1}{6}\,du$ y luego integrar.

EJEMPLO 3 Evaluar $\int_2^4 \frac{1}{9 - 2x}\, dx$.

Solución Como $1/(9 - 2x)$ es continua en $[2, 4]$, la integral definida existe. Un

método para evaluar la integral consiste en encontrar una antiderivada de $1/(9 - 2x)$ mediante una integral indefinida. Tomamos

$$u = 9 - 2x, \qquad du = -2\,dx$$

y procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{9-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{9-2x}(-2)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\ln|u| + C \\ &= -\frac{1}{2}\ln|9-2x| + C.\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{1}{9-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}\Big[\ln|9-2x|\Big]_2^4 \\ &= -\frac{1}{2}[\ln 1 - \ln 5] = \frac{1}{2}\ln 5.\end{aligned}$$

Otro método sería utilizar la misma sustitución en la integral *definida* y cambiar los límites de integración. Como $u = 9 - 2x$, vemos que

$$\begin{aligned}&\text{si } x = 2, \quad \text{entonces } u = 5; \\ &\text{si } x = 4, \quad \text{entonces } u = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{1}{9-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{9-2x}(-2)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_5^1 \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\Big[\ln|u|\Big]_5^1 \\ &= -\frac{1}{2}[\ln 1 - \ln 5] = \frac{1}{2}\ln 5 \quad \bullet\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Evaluar $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$.

Solución Si se realiza la sustitución

$$u = \ln x, \qquad du = \frac{1}{x}\,dx,$$

entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx &= \int \sqrt{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C \quad \bullet\end{aligned}$$

Como $D_x\, e^{g(x)} = e^{g(x)}\, g'(x)$, se obtiene la siguiente fórmula de integración para la función exponencial natural.

TEOREMA (7.18) *Si $u = g(x)$ y g es derivable, entonces*

$$\int e^u\, du = e^u + C.$$

Como un caso especial del Teorema (7.18), si $u = x$, entonces

$$\int e^x\, dx = e^x + C.$$

EJEMPLO 5 Evaluar $\displaystyle\int \frac{e^{3/x}}{x^2}\, dx$.

Solución Se realiza la sustitución

$$u = \frac{3}{x}, \qquad du = -\frac{3}{x^2}\, dx.$$

El integrando puede escribirse en la forma (7.18) multiplicándolo por -3. Haciendo esto y multiplicando la integral por $-\frac{1}{3}$ para compensar, resulta

$$\int \frac{e^{3/x}}{x^2}\, dx = -\frac{1}{3}\int e^{3/x}\left(-\frac{3}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{3}\int e^u\, du$$

$$= -\frac{1}{3}e^u + C = -\frac{1}{3}e^{3/x} + C \qquad \bullet$$

EJEMPLO 6 Evaluar $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{3/x}}{x^2}\, dx$.

Solución En el Ejemplo 5 encontramos una antiderivada. Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_1^2 \frac{e^{3/x}}{x^2}\, dx = -\frac{1}{3}\Big[e^{3/x}\Big]_1^2$$

$$= -\frac{1}{3}(e^{3/2} - e^3).$$

Este ejemplo también se puede resolver con el método de sustitución. Como en el Ejemplo 5, tomamos $u = 3/x$, $du = (-3/x^2)\, dx$, y notamos que si $x = 1$, entonces $u = 3$ y si $x = 2$, entonces $u = \frac{3}{2}$. Por lo tanto,

$$\int_1^2 \frac{e^{3/x}}{x^2}\, dx = -\frac{1}{3}\int_1^2 e^{3/x}\left(-\frac{3}{x^2}\right) dx$$

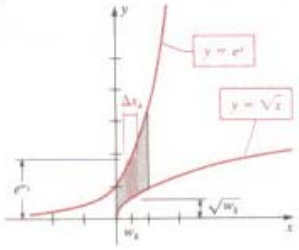
$$= -\frac{1}{3}\int_3^{3/2} e^u\, du$$

$$= -\frac{1}{3}\Big[e^u\Big]_3^{3/2} = -\frac{1}{3}(e^{3/2} - e^3) \qquad \bullet$$

EJEMPLO 7 Calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = e^x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución La Figura 7.12 muestra la región y uno de los rectángulos típicos que se consideraron en el Capítulo 6. El área A es

FIGURA 7.12



$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k (e^{w_k} - \sqrt{w_k})\,\Delta x_k$$
$$= \int_0^1 (e^x - x^{1/2})\,dx$$
$$= \left[e^x - \tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1$$
$$= (e - \tfrac{2}{3}) - (e^0 - 0) = e - \tfrac{5}{3}.$$

Si se desea una aproximación, entonces

$$A \approx 2.72 - 1.67 = 1.05$$

con aproximación a un centésimo. •

Dada $y = f(x)$, a veces puede encontrarse $D_x y$ por **derivación logarítmica**. Este método es especialmente útil cuando $f(x)$ incluye productos, cocientes o potencias complicadas. El procedimiento se describe a continuación, suponiendo que $f(x) > 0$.

Pasos para la Derivación Logarítmica

1.	$y = f(x)$	(Dada)
2.	$\ln y = \ln f(x)$	(Tomar logaritmos naturales y simplificar)
3.	$D_x[\ln y] = D_x[\ln f(x)]$	(Derivar implícitamente)
4.	$\frac{1}{y} D_x y = D_x[\ln f(x)]$	(Por el Teorema (7.6))
5.	$D_x y = f(x)\, D_x[\ln f(x)]$	(Multiplicar por $y = f(x)$).

Por supuesto, para completar la solución hay que derivar $\ln f(x)$ en algún momento después del paso 3. Si $f(x) < 0$ para algún x, entonces el paso 2 no es válido porque $\ln f(x)$ no está definido. Sin embargo, en este caso puede cambiarse el paso 1 por $|y| = |f(x)|$ y tomar logaritmos naturales, obteniendo $\ln|y| = \ln|f(x)|$. Derivando luego implícitamente y usando el Teorema (7.16), se llega al paso 4. Entonces, los valores negativos de $f(x)$ no cambian el resultado, por lo que no hay que preocuparse de si $f(x)$ es positivo o negativo. El método no debe emplearse para calcular $f'(a)$ si $f(a) = 0$, pues $\ln 0$ no está definido.

EJEMPLO 8 Usar la derivación logarítmica para determinar $D_x y$, donde $y = \dfrac{(5x-4)^3}{\sqrt{2x+1}}$.

Solución Como dice el paso 2, tomamos el logaritmo natural a ambos lados y simplificamos, obteniendo

$$\ln y = 3 \ln (5x - 4) - \left(\frac{1}{2}\right) \ln (2x + 1).$$

Luego derivamos a ambos miembros de la ecuación con respecto a x:

$$\frac{1}{y} D_x y = 3 \frac{1}{5x - 4} (5) - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2x + 1} (2)$$

$$= \frac{25x + 19}{(5x - 4)(2x + 1)}.$$

Finalmente, se multiplican ambos lados de la ecuación por y, es decir, por $(5x - 4)^3/\sqrt{2x + 1}$,

$$D_x y = \frac{25x + 19}{(5x - 4)(2x + 1)} \cdot \frac{(5x - 4)^3}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$= \frac{(25x + 19)(5x - 4)^2}{(2x + 1)^{3/2}}.$$

El resultado puede verificarse aplicando la Regla del Cociente a y. •

EJERCICIOS 7.4

Ejercicios 1-28: Evalúe la integral.

1. $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$
2. $\int \frac{1}{8x + 3} dx$
3. $\int \frac{1}{7 - 5x} dx$
4. $\int \frac{x^3}{x^4 - 5} dx$
5. $\int \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 9} dx$
6. $\int \frac{(2 + \ln x)^3}{x} dx$
7. $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$
8. $\int_1^2 \frac{3x}{x^2 + 4} dx$
9. $\int_{-2}^{1} \frac{1}{2x + 7} dx$
10. $\int_{-1}^{0} \frac{1}{4 - 5x} dx$
11. $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 4)} dx$
12. $\int \frac{x - 1}{3x^2 - 6x + 2} dx$
13. $\int (x + e^{5x}) dx$
14. $\int (1 + e^{-3x}) dx$
15. $\int \frac{\ln x}{x} dx$
16. $\int \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$
17. $\int_1^3 e^{-4x} dx$
18. $\int_0^1 e^{2x+3} dx$
19. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
20. $\int x e^{x^2} dx$
21. $\int \frac{(e^x + 1)^2}{e^x} dx$
22. $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$
23. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$
24. $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$
25. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx$
26. $\int \frac{(x^2 - 4)^2}{2x} dx$
27. $\int \frac{2x^2 - 5x - 7}{x - 3} dx$
28. $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x} dx$

Ejercicios 29-32: Calcule el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

29. $y = e^{2x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 3$.
30. $xy = 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$.
31. $y = e^{-x}$, $xy = 1$, $x = 1$, $x = 2$.
32. $y = e^{-2x}$, $y = -e^x$, $x = 0$, $x = 2$.
33. La región acotada por las gráficas de $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.
34. La región acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 4$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

Ejercicios 35-40: Encuentre dy/dx por derivación logarítmica.

35. $y = (5x + 2)^3(6x + 1)^2$

36. $y = \sqrt{4x + 7}(x - 5)^3$

37. $y = (x^2 + 3)^5/\sqrt{x + 1}$

38. $y = (x + 1)^2(x + 2)^3(x + 3)^4$

39. $y = \sqrt{(3x^2 + 2)\sqrt{6x - 7}}$

40. $y = (x^2 + 3)^{2/3}(3x - 4)^4/\sqrt{x}$

Ejercicios 41-42: Determine $f'(x)$.

41. $f(x) = \ln|3 - 2x|$.

42. $f(x) = \ln|4 - 5x^3|^2$.

43. El calor específico c de un metal como la plata es constante a temperaturas T por encima de los 200 °K. Si la temperatura del metal aumenta de T_1 a T_2, el área bajo la gráfica de $y = c/T$, entre T_1 y T_2, se llama *cambio de la entropía* ΔS y es una medida del incremento en el desorden de las moléculas del sistema. Exprese ΔS en términos de T_1 y T_2.

44. La función de costo marginal para ciertos artículos es $C'(x) = 150/(0.1x + 2)$. Calcule el costo de producir del décimo al vigésimo de ellos.

45. Se predice que la corriente $I(t)$ al tiempo t en un circuito que contiene una batería eléctrica de 12 V (volts), una resistencia y un capacitor (o condensador), será de $I(t) = 10e^{-4t}$ amperes. Si $Q(t)$ es la carga del capacitor (en coulombs), entonces $I = dQ/dt$.
 (a) Determine $Q(t)$ suponiendo que $Q(0) = 0$.
 (b) Calcule la carga en el capacitor cuando ha pasado un tiempo largo.

46. Un país que actualmente cuenta con una reserva de 50 millones de toneladas de carbón, consumió el año anterior 6.5 millones de toneladas. Tomando en cuenta las predicciones sobre el crecimiento de la población, se espera que la tasa de consumo R (en millones de toneladas por año) aumente de acuerdo con la fórmula $R = 6.5e^{0.02t}$. Si el país sólo usa sus reservas, ¿cuántos años durarán?

47. Una partícula esférica muy pequeña (con un diámetro de unos 5 micrometros (μm) o (micrones) se lanza al aire en reposo con una velocidad inicial de v_0 m/s. Su velocidad disminuye debido a las fuerzas de resistencia, y a los t segundos está dada por $v(t) = v_0e^{-t/k}$, donde k es una constante positiva.
 (a) Exprese la distancia recorrida por la partícula como una función de t.
 (b) Halle la distancia total que recorre la partícula antes de llegar al reposo, expresándola en términos de v_0 y k.

48. La presión p y el volumen v de un gas en expansión están relacionados por la ecuación $pv = k$, donde k es una constante. Demuestre que el trabajo realizado cuando el gas se expande de v_0 a v_1 es $k \ln(v_1/v_0)$. (*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 5 de la Sección 6.6.)

Ejercicios 49-50: Una función no negativa f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ es una *función densidad de probabilidad* si $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. Determine el valor que debe tener c para que la función sea una función densidad de probabilidad.

49. $f(x) = \dfrac{cx}{x^2 + 4}$ para $0 \le x \le 3$.

50. $f(x) = cxe^{-x^2}$ para $0 < x \le 10$.

7.5 FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES GENERALES

A lo largo de esta sección, a denotará un número real positivo. Comenzamos por definir a^x para todo número real x. Si el exponente es un número *racional* r, entonces aplicando el Teorema (7.12) (ii) y el Teorema (7.7) (iii),

$$a^r = e^{\ln a^r} = e^{r \ln a}.$$

Esta fórmula motiva la siguiente definición de a^x.

DEFINICIÓN DE a^x (7.19)

$$a^x = e^{x \ln a}$$

para todo $a > 0$ y para todo número real x.

La función f definida mediante $f(x) = a^x$ se llama **función exponencial de base a**. Como e^x es positivo para todo x, también lo es a^x. Para obtener valores aproximados de a^x, se puede usar una calculadora o consultar las tablas de las funciones logaritmo y exponencial.

Ahora ya se puede demostrar que la ley de los logaritmos enunciada en el Teorema (7.7) (iii) es válida también para exponentes irracionales. De modo que si u es un número *real*, entonces por la Definición (7.19) y el Teorema (7.12) (i),

$$\ln a^u = \ln e^{u \ln a} = u \ln a.$$

El siguiente teorema afirma que las propiedades de los exponentes racionales en el álgebra elemental también se cumplen para los exponentes reales.

LEYES DE LOS EXPONENTES (7.20)

Sean $a > 0$ y $b > 0$. Si u y v son números reales cualesquiera, entonces

$$a^u a^v = a^{u+v} \qquad (a^u)^v = a^{uv} \qquad (ab)^u = a^u b^u$$

$$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$$

Demostración Para demostrar que $a^u a^v = a^{u+v}$, se usan la Definición (7.19) y el Teorema (7.13) (i) como sigue:

$$\begin{aligned} a^u a^v &= e^{u \ln a} e^{v \ln a} \\ &= e^{u \ln a + v \ln a} \\ &= e^{(u+v) \ln a} \\ &= a^{u+v}. \end{aligned}$$

Para demostrar que $(a^u)^v = a^{uv}$, se usa primero la Definición (7.19) con a^u en lugar de a y $v = x$, para escribir

$$(a^u)^v = e^{v \ln a^u}.$$

Usando el hecho de que $a^u = u \ln a$ y aplicando luego la Definición (7.19), se obtiene que

$$(a^u)^v = e^{vu \ln a} = a^{vu} = a^{uv}.$$

Las demostraciones de las propiedades restantes se dejan como ejercicio. • •

TEOREMA (7.21)

(i) $D_x(a^x) = a^x \ln a$

(ii) $D_x(a^u) = (a^u \ln a)\, D_x u$ para $u = g(x)$.

Demostración Aplicando la Definición (7.19) y el Teorema (7.15),

$$D_x(a^x) = D_x(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} D_x(x \ln a) = e^{x \ln a}(\ln a).$$

Usando de nuevo (7.19), se obtiene que

$$D_x(a^x) = a^x \ln a.$$

Esto demuestra (i). La fórmula (ii) se deduce de la Regla de la Cadena. • •

Nótese que si $a = e$, entonces el Teorema (7.21) (i) se reduce a (7.14) puesto que $\ln e = 1$.

Si $a > 1$, entonces $\ln a > 0$ y por lo tanto $D_x(a^x) > 0$. Resulta entonces que a^x es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $a > 1$.

Si $0 < a < 1$, entonces $\ln a < 0$ y $D_x(a^x) < 0$. Por tanto, a^x es decreciente para todo x cuando $0 < a < 1$.

FIGURA 7.13

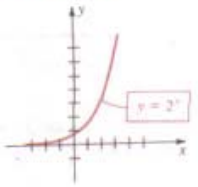
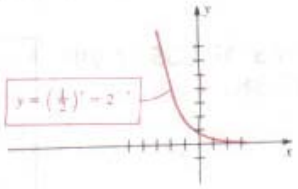


FIGURA 7.14



Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, en las Figuras 7.13 y 7.14 pueden trazarse situando puntos. La gráfica de $y = a^x$ tiene la forma general que se ilustra en la Figura 7.13 o 7.14 si $a > 1$ o bien $0 < a < 1$, respectivamente.

EJEMPLO 1 Determinar y' para $y = 3^{\sqrt{x}}$.

Solución Usando el Teorema (7.21) (ii) con $a = 3$ y $u = \sqrt{x}$,

$$y' = (3^{\sqrt{x}} \ln 3)\left(\frac{1}{2} x^{-1/2}\right) = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}} \quad \bullet$$

Si $u = g(x)$, *es muy importante distinguir las expresiones de la forma* a^u de las de la forma u^a. Para derivar a^u se usa (7.21), pero para derivar u^a hay que utilizar la Regla de la Potencia, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Hallar y' para $y = (x^2 + 1)^{10} + 10^{x^2+1}$.

Solución Usando la Regla de la Potencia para Funciones y el Teorema (7.21),

$$\begin{aligned} y' &= 10(x^2 + 1)^9(2x) + (10^{x^2+1} \ln 10)(2x) \\ &= 20x[(x^2 + 1)^9 + 10^{x^2} \ln 10]. \end{aligned} \quad \bullet$$

La fórmula de integración en (i) del siguiente teorema puede verificarse demostrar

do que el integrando es la derivada de la expresión al lado derecho de la ecuación. La fórmula (ii) se deduce del Teorema (7.21) (ii).

TEOREMA (7.22)

$$\text{(i)} \int a^x\,dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^x + C$$

$$\text{(ii)} \int a^u\,du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C \quad \text{para } u = g(x).$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int 3^{x^2}x\,dx$.

Solución Hacemos la sustitución

$$u = x^2, \qquad du = 2x\,dx$$

y procedemos como sigue:

$$\int 3^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int 3^{x^2}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int 3^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 3}\right)3^u + C = \left(\frac{1}{2\ln 3}\right)3^{x^2} + C$$

EJEMPLO 4 *Los oceanógrafos estudian la cantidad de luz que penetra en las profundidades del mar.* La *ley de Beer-Lambert* afirma que la cantidad de luz (equivalente) (en cal/cm^2/s) que llega a una profundidad x (en metros) está dada por $I(x) = I_0a^x$, donde a es una constante positiva.

(a) ¿Cuál es el significado de I_0?

(b) Demostrar que la tasa de variación dI/dx a una profundidad x es directamente proporcional a $I(x)$.

(c) Calcular aproximadamente la cantidad media de luz que hay entre la superficie del océano y 5 m de profundidad suponiendo que $a = 0.4$ e $I_0 = 10$.

(d) Demostrar que $I(x) = I_0e^{kx}$ para una constante k.

Solución

(a) Si $x = 0$, entonces $I(0) = I_0a^0 = I_0$. Por lo tanto, I_0 es la cantidad (o intensidad) de luz en la superficie del océano.

(b) Derivando $I(x)$,

$$I'(x) = I_0(a^x \ln a) = (\ln a)(I_0a^x) = (\ln a)I(x).$$

Por lo tanto, la razón de cambio dI/dx a una profundidad x es directamente proporcional a $I(x)$ y la constante de proporcionalidad es $\ln a$.

(c) Si $I(x) = 10(0.4)^x$, entonces por la Definición (5.21), el valor medio de I (o sea I_{med}) en el intervalo $[0, 5]$ es

$$I_{\text{med}} = \frac{1}{5-0}\int_0^5 10(0.4)^x\,dx = 2\int_0^5 (0.4)^x\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{\ln(0.4)}(0.4)^x\right]_0^5 = \frac{2}{\ln(0.4)}[(0.4)^5 - (0.4)^0] = \frac{-1.9795}{\ln(0.4)} \approx 2.16$$

(d) Usando la Definición (7.19),

$$I(x) = I_0 a^x = I_0 e^{x \ln a} = I_0 e^{kx}$$

con $k = \ln a$. •

Si $a \neq 1$ y $f(x) = a^x$, entonces f es una función biunívoca. Su función inversa se denota por $\log_a$ y se llama *función logaritmo en base a*. Otra manera de enunciar esta relación es la siguiente.

DEFINICIÓN DE (7.23) $\log_a x$

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y.$$

La expresión $\log_a x$ se llama **logaritmo en base a de x**. Usando esta terminología, los logaritmos naturales son logaritmos en base e, es decir,

$$\ln x = \log_e x.$$

La demostración de que las leyes de los logaritmos del Teorema (7.7) también son válidas para los logaritmos en base a, se deja como ejercicio.

Para obtener la relación entre $\log_a$ y ln, se considera $y = \log_a x$ o, equivalentemente, $x = a^y$. Tomando logaritmos naturales en ambos lados de esta última ecuación, se obtiene $\ln x = y \ln a$, o bien $y = (\ln x)/(\ln a)$. Esto demuestra que

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Derivando en ambos miembros de esta ecuación, se llega a (i) del teorema siguiente. Usando la Regla de la Cadena y tomando en cuenta los valores absolutos como en el Teorema (7.16), se obtiene (ii).

TEOREMA (7.24)

(i) $D_x \log_a x = \dfrac{1}{x \ln a}$.

(ii) $D_x \log_a |u| = \dfrac{1}{u \ln a} D_x u$ para $u = g(x) \neq 0$.

Los logaritmos en base 10 son útiles en diversas aplicaciones (véanse los Ejercicios 40-43 y 45) y se llaman **logaritmos comunes**. Para abreviar el símbolo $\log_{10} x$ se usa el símbolo $\log x$. En el siguiente ejemplo se usa esta notación.

EJEMPLO 5 Evaluar $f'(x)$ para $f(x) = \log \sqrt[3]{(2x + 5)^2}$.

Solución Utilizando la ley $\log u^r = r \log u$ (véase el Ejercicio 50 (iii)) junto con $(2x + 5)^2 = |2x + 5|^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{3} \log (2x + 5)^2 \\ &= \tfrac{1}{3} \log |2x + 5|^2 = \tfrac{2}{3} \log |2x + 5|. \end{aligned}$$

Para terminar esta sección se expresa el número e como un límite.

TEOREMA (7.25) (i) $\lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h} = e$ (ii) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Demostración Aplicando la fórmula de la derivada (3.4) a $f(x) = \ln x$ y usando las propiedades de los logaritmos, se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}.$$

Como $f'(x) = 1/x$, para $x = 1$ se tiene

$$1 = \lim_{h\to 0} \ln(1+h)^{1/h}.$$

Usando el Teorema (7.12), puede escribirse

$$(1+h)^{1/h} = e^{\ln(1+h)^{1/h}}.$$

Como la función exponencial natural es continua en 1, del Teorema (2.27) se deduce que

$$\lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h} = \lim_{h\to 0} \left[e^{\ln(1+h)^{1/h}}\right]$$

$$= e^{\left[\lim_{h\to 0} \ln(1+h)^{1/h}\right]} = e^1 = e.$$

Esto demuestra la parte (i) del teorema. El límite en la parte (ii) se obtiene con el cambio de variable $n = 1/h$. • •

A veces se utilizan las fórmulas del Teorema (7.25) para *definir* el número e. Es instructivo calcular $(1+h)^{1/h}$ para valores pequeños de h. La siguiente tabla da algunos valores aproximados de esta expresión.

h	$(1+h)^{1/h}$	h	$(1+h)^{1/h}$
0.01	2.704814	−0.01	2.731999
0.001	2.716924	−0.001	2.719642
0.0001	2.718146	−0.0001	2.718418
0.00001	2.718268	−0.00001	2.718295
0.000001	2.718280	−0.000001	2.718283

Con una precisión o aproximación de cinco decimales, $e \approx 2.71828$.

EJERCICIOS 7.5

Ejercicios 1-22: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

1. 7^x
2. 5^{-x}
3. 8^{x^2+1}
4. $9^{\sqrt{x}}$
5. $\log(x^4 + 3x^2 + 1)$
6. $\log_3 |6x - 7|$
7. 5^{3x-4}
8. 3^{2-x^2}

9. $(x^2 + 1)10^{1/x}$
10. $(10^x + 10^{-x})^{10}$
11. $7^{\sqrt{x^4+9}}$
12. $x/(6^x + x^6)$
13. $\log (3x^2 + 2)^5$
14. $\log \sqrt{x^2 + 1}$
15. $\log_5 \left|\dfrac{6x + 4}{2x - 3}\right|$
16. $\log \left|\dfrac{1 - x^2}{2 - 5x^3}\right|$
17. $\log \ln x$
18. $\ln \log x$
19. $x^e + e^x$
20. $x^\pi \pi^x$
21. $(x + 1)^x$
22. x^{x^2+4}

Ejercicios 23-34: Evalúe la integral.

23. $\int 10^{3x}\, dx$
24. $\int 5^{-5x}\, dx$
25. $\int x(3^{-x^2})\, dx$
26. $\int \dfrac{(2^x + 1)^2}{2^x}\, dx$
27. $\int \dfrac{2^x}{2^x + 1}\, dx$
28. $\int \dfrac{3^x}{\sqrt{3^x + 4}}\, dx$
29. $\int_1^2 5^{-2x}\, dx$
30. $\int_{-1}^1 2^{3x-1}\, dx$
31. $\int x^2 2^{x^3}\, dx$
32. $\int \dfrac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$
33. $\int (3^x + 3^{-x})^2\, dx$
34. $\int 4^x(4^x + 1)^3\, dx$

35. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = 2^x$, $x + y = 1$ y $x = 1$.

36. La región bajo la gráfica de $y = 3^{-x}$ entre $x = 1$ y $x = 2$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

37. Un economista predice que el poder de compra $B(t)$ de cierta moneda disminuirá de acuerdo con la fórmula $B(t) = (0.95)^t$, donde t es el tiempo en años.
 (a) ¿Con qué rapidez estará disminuyendo el poder de compra dentro de dos años?
 (b) Calcule aproximadamente el *poder de compra medio* durante los próximos dos años.

38. Se predice que cuando una persona ingiere una tableta de 100 mg de un medicamento contra el asma, la rapidez R con que éste penetra en la sangre está dada por $R = 5(0.95)^t$ mg/min. Suponiendo que no hay traza del medicamento en la sangre en el momento en que la tableta se ingiere, calcule el número de minutos que tardan en ingresar en la sangre los primeros 50 mg.

39. Se introducen mil truchas de un año de edad en un estanque grande. Se predice que el número de peces que siguen vivas a los t años es $N(t) = 1000(0.9)^t$.
 (a) Calcule aproximadamente la tasa o rapidez dN/dt con que mueren en los tiempos $t = 1$ y $t = 5$. ¿Con qué rapidez estará disminuyendo la población cuando $N = 500$?
 (b) Se espera que el peso $W(t)$ (en kg) de una trucha aumente de acuerdo con la fórmula $W(t) = 0.1 + 0.7t$. ¿A los cuántos años se tiene la mayor cantidad de kilos de trucha en el estanque?

40. La presión de vapor P (en lbf/pulg^2) de un líquido, que es una medida de su volatilidad, está relacionada con la temperatura T (en °F) por la *ecuación de Antoine* $\log P = a + [b/(c + T)]$, donde a, b y c son constantes. La presión de vapor aumenta rápidamente al elevarse la temperatura. Encuentre condiciones sobre a, b y c que garanticen que P sea una función creciente de T.

41. Los químicos usan un número denotado por pH para describir cuantitativamente la acidez o alcalinidad (basicidad) de las soluciones. Por definición pH $= -\log [H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro. Se estima que (con un error porcentual máximo de 0.5%) para cierta marca de vinagre $[H^+] \approx 6.3 \times 10^{-3}$. Calcule el pH y use diferenciales para estimar el error porcentual máximo en el cálculo.

42. En la escala de Richter, la magnitud R de un sismo o terremoto de intensidad I está dada por I_0, donde $R = \log (I/I_0)$ es una cierta intensidad mínima. Se estima que la intensidad de un sismo fue 100 veces mayor que I_0 y el error porcentual máximo en la estimación es de 1%. Obtenga el error porcentual máximo en el cálculo de R usando diferenciales.

43. Sea $R(x)$ la reacción de una persona a un estímulo de intensidad x. Por ejemplo, si el estímulo x es la salinidad (en gramos de sal por litro) de una solución, $R(x)$ puede ser la estimación del individuo acerca de cuán salada o salobre sabe la solución según una escala de 0 a 10. La fórmula de *Weber-Fechner* es una función que se ha propuesto para relacionar R con x y está dada por $R = a \log (x/x_0)$, en donde a es una constante positiva.
 (a) Demuestre que $R = 0$ para el *estímulo umbral* $x = x_0$.
 (b) La derivada $S = dR/dx$ es la *sensibilidad*

al nivel de estímulo x y mide la aptitud para detectar cambios pequeños en el nivel de un estímulo. Demuestre que S es inversamente proporcional a x y compare $S(x)$ con $S(2x)$.

44. Si un capital P se invierte en una cuenta de ahorros durante t años y el interés anual r (expresado en decimales) se capitaliza (o compone) n veces al año, entonces el monto A que hay en la cuenta a los t años está dado por la *fórmula del interés compuesto* $A = P[1 + (r/n)]^{nt}$.

(a) Sea $h = r/n$. Demuestre que $\ln A = \ln P + rt \ln (1 + h)^{1/h}$.

(b) Use la expresión en la parte (a) y haga tender n a infinito para obtener la fórmula $n \to \infty$ del interés *compuesto continuamente*.

45. El volumen o fuerza de un sonido que percibe el oído humano depende de su intensidad. Para calcular el nivel de intensidad α (en decibels) que corresponde a una intensidad de sonido I, se usa la fórmula $\alpha = 10 \log (I/I_0)$, donde el valor especial I_0 de I es el sonido más débil que el oído humano puede detectar en ciertas condiciones. Determine la tasa de cambio de α con respecto a I si

(a) I es 10 veces mayor que I_0.

(b) I es 1000 veces mayor que I_0.

(c) I es 10 000 veces mayor que I_0. (Esta es la intensidad normal de la voz.)

46. Demuestre el Teorema (7.25) (ii) usando el límite en la parte (i) y el cambio de variable $n = 1/h$.

47. Demuestre que $\lim_{n \to \infty} [1 + (x/n)]^n = e^x$ tomando $h = x/n$ y usando el Teorema (7.25) (i).

48. En la teoría de la probabilidad se usa la aproximación $(1 - p)^n \approx e^{-np}$ cuando p es pequeño y np tiene un valor intermedio.

(a) Sea $A = (1 - p)^n$. Demuestre que $\ln A = np \ln (1 - p)^{1/p}$.

(b) Use el Ejercicio 47 para deducir que $\ln A \approx -np$ si p está cerca de 0.

49. Demuestre que si $a > 0$ y $b > 0$, entonces para todos los números reales u y v:

(i) $(ab)^u = a^u b^u$

(ii) $a^u / a^v = a^{u-v}$

(iii) $(a^u)^v = a^{uv}$

50. Demuestre las Leyes de los Logaritmos:

(i) $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$

(ii) $\log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

(iii) $\log_a u^r = r \log_a u$

7.6 LEYES DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Supongamos que una cantidad física varía en el tiempo y que su magnitud al tiempo t está dada por $q(t)$, donde q es una función derivable con $q(t) > 0$ para todo t. La derivada $q'(t)$ es la tasa de cambio de $q(t)$ con respecto al tiempo. En muchas aplicaciones, esta rapidez de variación es directamente proporcional a la magnitud de la cantidad al tiempo t. Esta relación puede expresarse por medio de la ecuación diferencial

$$q'(t) = cq(t)$$

donde c es una constante. El número de bacterias se comporta de esta manera en algunos cultivos. Si el número de bacterias $q(t)$ es pequeño, entonces su tasa de crecimiento $q'(t)$ es pequeña, sin embargo, a medida que el número de bacterias aumenta, también la *tasa de crecimiento* se eleva. El decrecimiento de una sustancia radiactiva obedece una ley similar, pues a medida que la cantidad de materia disminuye, la tasa de decrecimiento —y por tanto, la actividad o radiación— también disminuye. Como un último ejemplo consideremos la descarga de un condensador eléctrico. Si la carga en el elemento es muy grande cuando se empieza a descargar, entonces la rapidez de la descarga es muy elevada, pero a medida que la carga se debilita, el condensador o capacitor se va descargando más lentamente.

En las aplicaciones, la ecuación $q'(t) = cq(t)$ se expresa a menudo en términos de diferenciales. Así, $y = q(t)$ se puede escribir

$$\frac{dy}{dt} = cy \quad \text{o bien} \quad dy = cy\,dt.$$

Dividiendo ambos lados de la última ecuación entre y, se obtiene

$$\frac{1}{y}\,dy = c\,dt.$$

Como las variables y y t se pudieron **separar** en esta ecuación diferencial, es decir, aparece sólo una en cada lado de la igualdad, la ecuación $dy/dt = cy$ se llama **ecuación diferencial separable**. Más adelante se estudiarán estas ecuaciones con mayor detalle y se demostrará que sus soluciones se pueden encontrar integrando ambos lados de la ecuación "separada" $(1/y)\,dy = c\,dt$. De modo que,

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int c\,dt$$

y, suponiendo que $y > 0$,

$$\ln y = ct + d.$$

Las dos constantes de integración se combinaron en una sola constante d. Se deduce que

$$y = e^{ct+d} = e^d e^{ct}.$$

Si y_0 denota el valor inicial de y (es decir, el valor correspondiente a $t = 0$), entonces poniendo $t = 0$ en la ecuación anterior se obtiene

$$y_0 = e^d e^0 = e^d$$

y por lo tanto, la solución $y = e^d e^{ct}$ puede escribirse

$$y = y_0 e^{ct}.$$

Se ha demostrado lo siguiente.

TEOREMA (7.26)

Sea y una función derivable de t tal que $y > 0$ para todo t y sea y_0 su valor en $t = 0$. Si $dy/dt = cy$ para una constante c, entonces $y = y_0 e^{ct}$.

Este teorema establece que *si la tasa o razón de cambio de $y = q(t)$ con respecto a t es directamente proporcional a y, entonces y se puede expresar mediante una función exponencial*. Si al aumentar t también aumenta y, entonces la fórmula $y = y_0 e^{ct}$ es una **ley de crecimiento**; si y disminuye, entonces la fórmula es una **ley de decrecimiento**.

EJEMPLO 1 El número de bacterias en un cultivo aumenta de 600 a 1800 en 2 horas. Encontrar una fórmula para el número de bacterias al tiempo t, suponiendo que en cada momento la tasa de crecimiento es directamente proporcional al número de bacterias. ¿Cuál será el número de bacterias al cabo de cuatro horas?

Solución Denotemos por $y = q(t)$ el número de bacterias a las t horas. Entonces, $y_0 = q(0) = 600$ y $q(2) = 1800$. Por hipótesis,

$$\frac{dy}{dt} = cy.$$

Siguiendo los pasos de la demostración del Teorema (7.26), obtenemos

$$y = y_0 e^{ct} = 600e^{ct}.$$

Como $y = 1800$ cuando $t = 2$,

$$1800 = 600e^{2c} \quad \text{o bien} \quad e^{2c} = 3.$$

Por lo tanto,

$$2c = \ln 3 \quad \text{o bien} \quad c = \tfrac{1}{2}\ln 3,$$

y la fórmula para y es

$$y = 600e^{[(1/2)\ln 3]t}.$$

Usando el hecho de que $e^{\ln 3} = 3$ (véase la Definición (7.11)), esta ley de crecimiento se puede expresar en términos de una función exponencial de base 3 como sigue:

$$y = 600(e^{\ln 3})^{t/2} = 600(3)^{t/2}.$$

En particular, al cabo de 4 horas el número de bacterias será

$$600(3)^{4/2} = 600(9) = 5400. \quad \bullet$$

EJEMPLO 2 El radio decrece exponencialmente y tiene una *semivida* (o "vida media") de aproximadamente 1600 años; es decir, dada una cantidad, al cabo de 1600 años se habrá desintegrado *la mitad* de la cantidad original de la sustancia radiactiva. Encontrar una fórmula para la cantidad y de radio que queda a los t años de una muestra de 50 mg de radio puro. ¿Cuándo quedarán 20 mg?

Solución Suponiendo que $y = q(t)$,

$$y_0 = q(0) = 50 \quad \text{y} \quad q(1600) = \tfrac{1}{2}(50) = 25.$$

Como $dy/dt = cy$ para alguna constante c, del Teorema (7.26) se deduce que

$$y = 50e^{ct}.$$

Como $y = 25$ cuando $t = 1600$,

$$25 = 50e^{1600c} \quad \text{o bien} \quad e^{1600c} = \tfrac{1}{2}.$$

Entonces,

$$1600c = \ln \tfrac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

y

$$c = -\frac{\ln 2}{1600}.$$

Por lo tanto,

$$y = 50e^{-(\ln 2/1600)t}.$$

Como en el Ejemplo 1, podemos escribir esta fórmula en términos de otra base como sigue:

$$y = 50(e^{\ln 2})^{-t/1600}$$

o sea $$y = 50(2)^{-t/1600}.$$

Para obtener el valor de t en que $y = 20$, se despeja de la ecuación

$$20 = 50(2)^{-t/1600} \quad \text{o bien} \quad 2^{t/1600} = \tfrac{5}{2}.$$

Tomando el logaritmo natural a ambos lados,

$$\frac{t}{1600}\ln 2 = \ln\frac{5}{2} \quad \text{o sea} \quad t = \frac{1600 \ln \frac{5}{2}}{\ln 2}.$$

Podemos obtener un valor aproximado usando una calculadora o la Tabla C,

$$t \approx 1600(0.916)/(0.693) \approx 2115 \text{ años.}$$

EJEMPLO 3 La ley de Newton del enfriamiento afirma que la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el medio que lo rodea. La temperatura de un objeto baja de 125°F a 100°F en media hora, estando rodeado por aire a una temperatura de 75°F. Calcular su temperatura al cabo de otra media hora.

Solución Si y denota la temperatura del objeto cuando lleva t horas enfriándose, entonces por la ley de Newton,

$$\frac{dy}{dt} = c(y - 75)$$

donde c es una constante. Separando variables,

$$\frac{1}{y - 75}\,dy = c\,dt.$$

Integrando ambos lados, obtenemos

$$\ln(y - 75) = ct + b$$

donde b es una constante. Esto equivale a

$$y - 75 = e^{ct+b} = e^b e^{ct}.$$

Si definimos $k = e^b$, entonces la ecuación anterior se puede escribir

$$y = ke^{ct} + 75.$$

Como $y = 125$ cuando $t = 0$, se ve que

$$125 = ke^0 + 75 = k + 75 \quad \text{o bien} \quad k = 50.$$

Entonces,

$$y = 50e^{ct} + 75.$$

Como $y = 100$ cuando 0.5 horas,

$$100 = 50e^{c/2} + 75 \quad \text{o sea} \quad e^{c/2} = \tfrac{25}{50} = \tfrac{1}{2}.$$

Esto implica que

$$c = 2 \ln \tfrac{1}{2} = \ln \tfrac{1}{4}.$$

Por lo tanto, la temperatura y a las t horas está dada por

$$y = 50e^{t \ln (1/4)} + 75.$$

En particular, si $t = 1$,

$$\begin{aligned} y &= 50e^{\ln (1/4)} + 75 \\ &= 50(\tfrac{1}{4}) + 75 = 87.5\ ^\circ\text{F} \quad \bullet \end{aligned}$$

En muchos casos, el crecimiento natural es más moderado que la situación descrita por el Teorema (7.26). Algunas situaciones típicas en las que esto sucede están relacionadas con poblaciones, ventas de productos y valores de inversiones. En biología, para calcular la magnitud de una cantidad al tiempo t, se usa a veces una función G dada por

$$G(t) = ke^{(-Ae^{-Bt})}$$

donde k, A y B son constantes positivas. La función G es la **función de crecimiento de Gompertz**. Siempre es positiva y creciente pero tiende a un límite cuando t tiende a infinito. La gráfica de G es una **curva de crecimiento de Gompertz**.

EJEMPLO 4 Analizar la gráfica de la función de crecimiento de Gompertz G y trazarla.

Solución Observemos primero que la ordenada en el origen es $G(0) = ke^{-A}$ y que $G(t) > 0$ para todo t. Derivando obtenemos

$$\begin{aligned} G'(t) &= ke^{(-Ae^{-Bt})} D_t(-Ae^{-Bt}) \\ &= ABke^{(-Bt - Ae^{-Bt})} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} G''(t) &= ABke^{(-Bt - Ae^{-Bt})} D_t(-Bt - Ae^{-Bt}) \\ &= ABk(-B + ABe^{-Bt})e^{-Bt - Ae^{-Bt}}. \end{aligned}$$

Como $G'(t) > 0$ para todo t, la función G es creciente en $[0, \infty)$. La segunda derivada $G''(t)$ es cero si

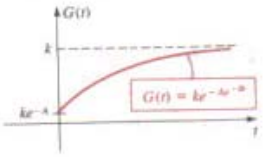
$$-B + ABe^{-Bt} = 0 \quad \text{o bien} \quad e^{Bt} = A.$$

Despejando t de la última ecuación obtenemos $t = (1/B) \ln A$, que es un número crítico de la función G'. Queda como ejercicio demostrar que en este tiempo la tasa de crecimiento G' tiene un máximo Bk/e. También se puede demostrar que

$$\lim_{t \to \infty} G'(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \to \infty} G(t) = k.$$

Por lo tanto, cuando t tiende a infinito, la tasa de crecimiento tiende a 0 y la gráfica de G tiene una asíntota horizontal $y = k$. La Figura 7.15 muestra una de las gráficas típicas. •

FIGURA 7.15



EJERCICIOS 7.6

1. El número de bacterias en cierto cultivo crece de 5 000 a 15 000 en 10 horas. Suponiendo que la tasa o rapidez de crecimiento es proporcional al número de bacterias, encuentre una fórmula para el número de bacterias en el cultivo al tiempo t. Calcule el número al cabo de 20 horas. ¿Cuándo llegará a 50 000 el número de bacterias?

2. El isótopo de polonio ^{210}Po tiene una semivida (o periodo medial) de 140 días; aproximadamente. Si una muestra pesa inicialmente 20 mg, ¿cuánto queda t días después? Aproximadamente, ¿cuánto quedará después de dos semanas?

3. Si la temperatura es constante, entonces la razón de cambio de la presión atmosférica p respecto a la altura h es proporcional a p. Suponiendo que $p = 762$ mmHg al nivel del mar y $p = 737$ mm Hg a 300 m de altitud, calcule la presión a una altitud de 1500 m.

4. La población de una ciudad crece a razón de 5% al año. Si la población actual es 500 000, ¿cuál será la población dentro de 10 años?

5. Los agrónomos calculan que se necesitan 1000 m^2 de tierra para proveer de alimentos a una persona. Por otro lado, se calcula que hay $40 \cdot 10^{12}$ m^2 de tierra laborable en el mundo y, por lo tanto, se puede sostener a una población máxima de 40 000 millones de personas si no hay ninguna otra fuente de alimentos. La población de la Tierra en 1980 era de 4500 millones de habitantes. Suponiendo que la población crece a razón de 2% al año, ¿cuándo se alcanzará la población máxima que la Tierra puede alimentar?

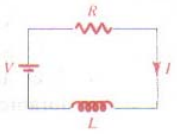
6. Una placa de metal se enfría de 80°C a 65°C en 20 min al estar rodeada de aire a una temperatura de 15°C. Use la ley de Newton (véase el Ejemplo 3) para estimar la temperatura al cabo de una hora de enfriamiento. ¿Cuándo llegará la temperatura a 40°C?

7. Un termómetro exterior registra una temperatura de 4°C. Cinco minutos después de introducirlo en una habitación donde la temperatura es de 20°C, el termómetro marca 15°C. ¿Cuándo marcará 18°C?

8. La rapidez con la que la sal se disuelve en el agua es directamente proporcional a la cantidad de sal no disuelta. En un recipiente con agua se ponen 5 kg de sal y en 20 min se disuelven 2 kg. ¿Cuánto tiempo tardará en disolverse 1 kg más?

9. Según la primera ley de Kirchhoff para los circuitos eléctricos, $V = RI + L(dI/dt)$, donde las constantes V, R y L denotan la tensión (o voltaje), la resistencia y la inductancia, respectivamente, e I denota la corriente al tiempo t (véase la figura). Demuestre que si la tensión se anula en el tiempo $t = 0$ y la corriente en ese momento es I_0, entonces $I = I_0 e^{-Rt/L}$.

EJERCICIO 9



10. Un físico encuentra que cierta sustancia radiactiva produce 2000 marcas o cuentas por minuto en un contador Geiger. Diez días más tarde la sustancia produce 1500 cuentas por minuto. Calcule aproximadamente su semivida o "vida media".

11. La presión atmosférica P (en atmósferas) a una altitud de z metros sobre el nivel del mar satisface la ecuación diferencial $dP/dz = -9.81\,\rho(z)$, donde $\rho(z)$ es la densidad del aire a una altitud z. Suponiendo que el aire satisface la ley de los gases ideales, la ecuación diferencial puede escribirse como $dP/dz = -0.0342P/T$, donde T es la temperatura (en kelvins, K) a una altitud z. Exprese P como una función de z suponiendo que la presión al nivel del mar es de 1 atm y que $T = 288 - 0.01z$.

12. Durante el primer mes de crecimiento de ciertos cultivos como el maíz, el algodón y la soya, la rapidez de crecimiento (en gramos por día) es proporcional al peso actual W. Para una especie de algodón, $dW/dt = 0.21W$. ¿Cuál será el peso dentro de un mes ($t = 30$ días) de una planta que actualmente pesa 70 mg?

13. El material radiactivo estroncio 90, a ^{90}Sr, que tiene una semivida de 29 años, puede causar cáncer en los huesos de los seres humanos. La sustancia se encuentra en la lluvia ácida, penetra en el suelo y se introduce en la cadena alimenticia. El nivel de radiactividad en cierto terreno de cultivo es 2.5 veces el nivel máximo S que se consi-

dera aún no dañino. ¿Durante cuántos años seguirá contaminado ese terreno?

14. El indicador radiactivo ^{51}Cr, que tiene una semivida o periodo medial de 27.8 días, se usa a veces en pruebas médicas para localizar la posición de la placenta en mujeres embarazadas. El indicador se pide a un laboratorio de productos médicos y la entrega de un pedido tarda dos días. ¿Cuántas unidades se deben solicitar para hacer una de estas pruebas si se necesitan 35 unidades en el momento de la prueba?

15. Los veterinarios anestesian animales con pentobarbital sódico. Para anestesiar a un perro se requieren 30 mg por cada kilogramo de su peso. El citado pentobarbital sódico se elimina exponencialmente de la sangre. En 4 horas la cantidad baja a la mitad. Calcule el tamaño de una dosis única para anestesiar durante 45 min a un perro que pesa 20 kg.

16. En la fisiología pulmonar se usa la siguiente ecuación para describir el transporte de una sustancia a través de la pared de un vaso capilar:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{V}{Q}\left(\frac{h}{k+h}\right)$$

donde h es la concentración de hormona en la sangre al tiempo t, V es la rapidez máxima de transporte, Q es el volumen del capilar y k es una constante que mide la afinidad entre las hormonas y las enzimas que contribuyen al proceso de transporte. Determine la solución general de la ecuación diferencial.

17. Se dispara un cohete espacial desde la Tierra. Si se desprecia la resistencia del aire, su velocidad a partir del momento en que se termina el combustible, está dada por la ecuación diferencial $v(dv/dy) = -ky^{-2}$, donde y es la distancia desde el centro de la Tierra y k es una constante positiva. Sea y_0 la distancia desde dicho centro en el momento en que se termina el combustible y v_0 la velocidad correspondiente. Exprese v como una función de y. (*Sugerencia:* Separe las variables y y v.)

18. A altas temperaturas, el dióxido de nitrógeno NO_2 se descompone en NO y O_2. Si $y(t)$ es la concentración de NO_2 (en moles por litro) y la temperatura es de 600 K, entonces $y(t)$ cambia de acuerdo con la *ley de reacción de segundo orden* $dy/dt = -0.05y^2$, donde t es el tiempo (en segundos). Exprese y en términos de t y de la concentración inicial y_0.

19. La edad de los especímenes geológicos o arqueológicos se determina con el método del carbono 14. Este método de datación se basa en el hecho de que el CO_2 de la atmósfera contiene cierta cantidad del isótopo inestable carbono 14 (^{14}C). Las plantas absorben carbono de la atmósfera y cuando mueren la cantidad de ^{14}C que han acumulado comienza a decrecer (o decaer) con una semivida de 5 700 años aproximadamente. Midiendo la cantidad de ^{14}C que queda en un espécimen, puede estimarse la fecha en que el organismo murió. Calcule aproximadamente la edad de un hueso fósil que presenta 20% del ^{14}C que contiene un hueso actual.

20. Consulte el Ejercicio 19. El isótopo ^3_1H (tritio) del hidrógeno, que es radiactivo y tiene una semivida de 12.3 años, es producido en la atmósfera por los rayos cósmicos y traído a la Tierra por la lluvia. Los muros de madera de una casa vieja contienen 10% del ^3_1H que tienen los de una casa nueva. Calcule la edad de la casa vieja.

21. En la *ley del crecimiento logístico* se supone que al tiempo t la tasa de crecimiento $f'(t)$ de una cierta cantidad $f(t)$ está dada por $f'(t) = Af(t)[B - f(t)]$, donde A y B son constantes. Demuestre que si $f(0) = C$, entonces

$$f(t) = \frac{BC}{C + (B - C)e^{-ABt}}.$$

22. Ciertos procesos de aprendizaje se describen con la gráfica de $f(x) = a + b(1 - e^{-cx})$, donde a, b y c son constantes positivas. Un fabricante calcula que una operaria nueva puede producir cinco artículos en su primer día de trabajo. A medida que se vuelve más eficiente, su producción diaria aumenta hasta llegar a un máximo. El número $f(n)$ de artículos que produce en el n-ésimo día de trabajo está dado por la fórmula $f(n) = 3 + 20(1 - e^{-0.1n})$.

(a) Calcule el número de artículos que produce el quinto, el noveno, el vigésimo y el trigésimo días de trabajo.

(b) Trace la gráfica de f entre $n = 0$ y $n = 30$. (Este tipo de gráficas se llaman *curvas de aprendizaje* y se utilizan a menudo en educación y psicología.)

(c) ¿Qué sucede con una n muy grande?

23. Una célula esférica tiene volumen V y el área de

su superficie es S. Un modelo simple para el crecimiento de las células antes de la mitosis supone que la tasa de crecimiento dV/dt es proporcional al área de la superficie de la célula. Demuestre que $dV/dt = kV^{2/3}$ para $k > 0$ y exprese V como una función de t.

24. En el Teorema (7.26) se supone que la rapidez de variación de una cantidad $q(t)$ al tiempo t es directamente proporcional a $q(t)$. Demuestre que si la rapidez de cambio es proporcional a $[q(t)]^2$, entonces hay un tiempo t_1 para el cual $\lim_{t \to t_1^+} q(t) = \infty$.

25. En el Ejemplo 4 verifique que (a) Bk/e es un máximo de G'; (b) $\lim_{t \to \infty} G'(t) = 0$; (c) $\lim_{t \to \infty} G(t) = k$.

26. Trace la gráfica de G en el Ejemplo 4 para $k = 10$, $A = \frac{1}{2}$ y $B = 1$.

7.7 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES INVERSAS

En la Sección 7.1 se definió la función inversa f^{-1} de una función f. En esta sección se demuestran algunos teoremas sobre funciones inversas y se encuentra una fórmula para obtener sus derivadas.

TEOREMA (7.27) Si una función f es continua y creciente en un intervalo $[a, b]$, entonces f tiene una función inversa f^{-1} que es continua y creciente en el intervalo $[f(a), f(b)]$.

Demostración Si f es creciente, entonces f es biunívoca y, por lo tanto, f^{-1} existe. Para demostrar que f^{-1} es creciente se debe demostrar que si $w_1 < w_2$ en $[f(a), f(b)]$, entonces $f^{-1}(w_1) < f^{-1}(w_2)$ en $[a, b]$. Se demostrará este hecho por contradicción. *Supongamos* que $f^{-1}(w_2) \leq f^{-1}(w_1)$. Como f es creciente, se tiene que $f(f^{-1}(w_2)) \leq f(f^{-1}(w_1))$ y por lo tanto $w_2 \leq w_1$, que es una contradicción. Por consiguiente, $f^{-1}(w_1) < f^{-1}(w_2)$.

También hay que demostrar que f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$. Se sabe que $y = f(x)$ si y sólo si $x = f^{-1}(y)$. En particular, si y_0 está en el intervalo abierto $(f(a), f(b))$, sea x_0 el número del intervalo (a, b) tal que $y_0 = f(x_0)$ o, equivalentemente, $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Debemos demostrar que

$$(*) \qquad \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

La Figura 7.16 muestra una representación geométrica de f y de su función inversa f^{-1} semejante a la de la Figura 7.1. El dominio $[a, b]$ de f está representado por puntos sobre un eje x y el dominio $[f(a), f(b)]$ de f^{-1} por puntos sobre un eje y. Para representar las funciones se han dibujado flechas de uno de los ejes al otro. Para demostrar (*), se considera un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. Hay que encontrar

FIGURA 7.16

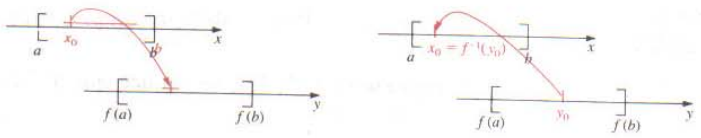


FIGURA 7.17

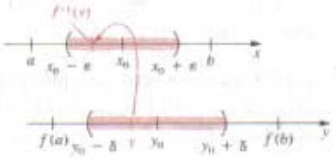
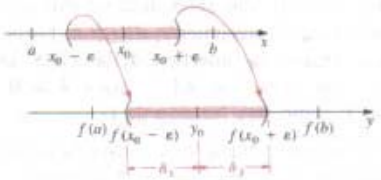


FIGURA 7.18



un intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ como el que se indica en la Figura 7.17, tal que siempre que y esté en $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, entonces $f^{-1}(y)$ está en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Se puede suponer que $x_0 - \varepsilon$ y $x_0 + \varepsilon$ están ambos en $[a, b]$. Como en la Figura 7.18, sean $\delta_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$ y $\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - y_0$. Como f determina una correspondencia biunívoca entre los números de los intervalos $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ y $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$, los valores de la función f^{-1} que corresponden a los números en $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$, deben estar en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Sea δ el mínimo entre δ_1 y δ_2. Se deduce que si y está en $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, entonces $f^{-1}(y)$ está en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, que es lo que se quería demostrar.

La continuidad en los extremos $f(a)$ y $f(b)$ del dominio de f^{-1} se demuestra de manera análoga usando límites unilaterales. • •

La demostración del siguiente resultado es similar a la del Teorema (7.27).

TEOREMA (7.28)

Si una función f es continua y decreciente en un intervalo $[a, b]$, entonces f tiene una función inversa que es continua y decreciente en el intervalo $[f(b), f(a)]$.

EJEMPLO 1 Verificar el Teorema (7.27) para $f(x) = x^2 - 3$ en el intervalo $[0, 6]$.

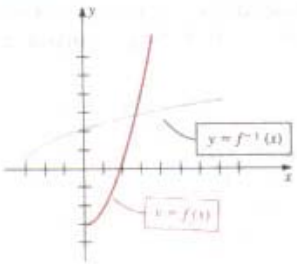
Solución Del Ejemplo 2 de la Sección 7.1, f^{-1} está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3}, \quad \text{para } x \geq -3.$$

En este ejemplo el dominio de f^{-1} es $[f(0), f(6)]$, es decir, $[-3, 33]$.

Las gráficas de f y f^{-1} aparecen en la Figura 7.3 y están representadas nuevamente en la Figura 7.19.

FIGURA 7.19



Como f es un polinomio, es una función continua en $[0, 6]$. Más aún, como $f'(x) = 2x$, $f'(x) > 0$ para todo x en $(0, 6]$ y, por lo tanto, f es creciente en $[0, 6]$.

Como $\lim_{x \to a} \sqrt{x + 3} = \sqrt{a + 3}$ para todo a en $(-3, 33]$, f^{-1} es continua en este intervalo. También es continua en -3. Finalmente, como la derivada

$$D_x f^{-1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

es positiva en $(-3, 33]$, se deduce que f^{-1} es creciente en $[-3, 33]$. •

El teorema siguiente da un método para encontrar la derivada de una función inversa.

TEOREMA (7.29) Si una función derivable f tiene una función inversa g y si $f'(g(c)) \neq 0$, entonces g es derivable en c y

$$g'(c) = \frac{1}{f'(g(c))}.$$

Demostración De la Definición (3.1′),

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}.$$

Sea z una nueva variable tal que $z = g(x)$ y sea $a = g(c)$. Como f y g son funciones inversas una de la otra,

$$g(x) = z \quad \text{si y sólo si} \quad f(z) = x,$$

y

$$g(c) = a \quad \text{si y sólo si} \quad f(a) = c.$$

La expresión $x \to c$ bajo el límite en la fórmula se puede sustituir por $z \to a$, pues si $x \to c$, entonces $g(x) \to g(c)$, es decir, $z \to a$. Por otro lado, si $z \to a$, entonces $f(z) \to f(a)$. Por lo tanto, se puede escribir

$$g'(c) = \lim_{z \to a} \frac{z - a}{f(z) - f(a)} = \lim_{z \to a} \frac{1}{\left[\dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}\right]}$$

$$= \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(c))}. \quad \bullet\bullet$$

Es conveniente enunciar el Teorema (7.29) en la siguiente forma equivalente.

TEOREMA (7.30) Si g es la función inversa de una función derivable f y si $f'(g(x)) \neq 0$, entonces

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

EJEMPLO 2 Usar el Teorema (7.30) y el hecho de que la función exponencial natural es la función inversa del logaritmo natural para demostrar que $D_x e^x = e^x$.

Solución Sean $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^x$. Entonces,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad f'(g(x)) = f'(e^x) = \frac{1}{e^x}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema (7.30),

$$g'(x) = \frac{1}{(1/e^x)} = e^x \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Demostrar que f tiene una función inversa g y calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de g en el punto $P(2, 1)$.

Solución Nótese que f es continua y $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ para todo x. Entonces, por el Teorema (7.27), f tiene una función inversa g. Como $f(1) = 2$, resulta que $g(2) = 1$ y por lo tanto, el punto $P(2, 1)$ está en la gráfica de g. Aplicando el Teorema (7.30), obtenemos que la pendiente de la recta tangente en $P(2, 1)$ es

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$$

Para recordar fácilmente el Teorema (7.30) es conveniente considerar $y = f(x)$. Si g es la función inversa de f, entonces $g(y) = g(f(x)) = x$. De (7.30),

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

que en notación diferencial se escribe

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

Esto demuestra que, en cierto sentido, la derivada de la función inversa g es el recíproco o inverso de la derivada de f. La desventaja de usar las dos últimas fórmulas es que ambas están expresadas en términos de la variable independiente de la función f en vez de estar en términos de la variable independiente de la función inversa. Si en el Ejemplo 3 se toma $y = x^3 + 2x - 1$ y $x = g(y)$, entonces

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{3x^2 + 2},$$

es decir,

$$g'(y) = \frac{1}{3x^2 + 2} = \frac{1}{3(g(y))^2 + 2}.$$

Esto también puede escribirse en la forma

$$g'(x) = \frac{1}{3(g(x))^2 + 2}.$$

Por consiguiente, para encontrar $g'(x)$ se necesita conocer $g(x)$ igual que en el Teorema (7.30).

EJERCICIOS 7.7

Ejercicios 1-10: Demuestre que la función f definida en el intervalo dado tiene una función inversa f^{-1} y encuentre su dominio. Encuentre $f^{-1}(x)$. Obtenga $D_x f^{-1}(x)$ directamente y también aplicando el Teorema (7.30).

1. $f(x) = \sqrt{2x + 3}$, $[1, 11]$
2. $f(x) = \sqrt[3]{5x + 2}$, $[0, 5]$
3. $f(x) = 4 - x^2$, $[0, 7]$
4. $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $[-1, 1]$
5. $f(x) = 1/x$, $(0, \infty)$
6. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $[0, 3]$

7. $f(x) = e^{-x^2}$, $[0, \infty)$
8. $f(x) = \ln(3 - 2x)$, $(-\infty, \frac{3}{2})$
9. $f(x) = e^x - e^{-x}$, $(-\infty, \infty)$
10. $f(x) = e^x + e^{-x}$, $[0, \infty)$

Ejercicios 11-14: Demuestre que f tiene una función inversa f^{-1} en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ y calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en P.

11. $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x - 1$, $P(5, 1)$
12. $f(x) = 2 - x - x^3$, $P(-8, 2)$
13. $f(x) = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$, $P(0, 0)$
14. $f(x) = e^{2-3x}$, $P(1/e, 1)$

Ejercicios 15-18: Demuestre que si el dominio de f es $\mathbb{R}$, entonces f no tiene una función inversa. Demuestre también que si el dominio se restringe convenientemente, entonces f^{-1} sí existe.

15. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 7$
16. $f(x) = |x - 2|$
17. $f(x) = 10^{-x^2}$
18. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
19. Complete la demostración del Teorema (7.27) mostrando que f^{-1} es continua en $f(a)$ y $f(b)$.
20. Demuestre el Teorema (7.28).

7.8 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Función inversa.
2. Función logaritmo natural.
3. Leyes de los logaritmos.
4. Función exponencial natural.
5. El número e.
6. Fórmulas para derivar $\ln u$ y e^u.
7. Derivación logarítmica.
8. a^x para $a > 0$.
9. $\log_a$.
10. Fórmulas para derivar $\log_a u$ y a^u.
11. Función potencia general.
12. Leyes de crecimiento y decrecimiento.
13. Derivadas de las funciones inversas.

EJERCICIOS 7.8

Ejercicios 1-24: Encuentre $f'(x)$ para la función $f(x)$ dada por la expresión.

1. $(1 - 2x)\ln|1 - 2x|$
2. $\sqrt{\ln\sqrt{x}}$
3. $\ln\dfrac{(3x+2)^4\sqrt{6x-5}}{8x-7}$
4. $\log\left|\dfrac{2-9x}{1-x^2}\right|$
5. $\dfrac{1}{\ln(2x^2+3)}$
6. $\dfrac{\ln x}{e^{2x}+1}$
7. $e^{\ln(x^2+1)}$
8. $\ln(e^{4x} + 9)$
9. $10^x \log x$
10. $\ln\sqrt[4]{x/(3x+5)}$
11. $x^{\ln x}$
12. $4^{\sqrt{2x+3}}$
13. $x^2 e^{1-x^2}$
14. $\sqrt{e^{3x} + e^{-3x}}$
15. $2^{-1/x}/(x^3 + 4)$
16. $5^{3x} + (3x)^5$
17. $(1 + \sqrt{x})^e$
18. $\ln e^{\sqrt{x}}$
19. $10^{\ln x}$
20. $(x^2 + 1)^{2x}$
21. $\ln|x^2 - 5x - 3|$
22. $7^{\ln|x|}$
23. $(\ln x)^{\ln x}$
24. $\ln[(\ln x)^x]$

Ejercicios 25-26: Encuentre y'.

25. $1 + xy = e^{xy}$
26. $\ln(x + y) + x^2 - 2y^3 = 1$

Ejercicios 27-44: Evalúe la integral.

27. $\displaystyle\int \frac{(1+e^x)^2}{e^{2x}}\,dx$
28. $\displaystyle\int_0^1 e^{-3x+2}\,dx$
29. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\,dx$
30. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{1}{x - x\ln x}\,dx$
32. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+3x}\,dx$

33. $\int \frac{x^2}{3x+2}\,dx$

34. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

35. $\int_0^1 x4^{x^2}\,dx$

36. $\int \frac{(e^{2x}+e^{3x})^2}{e^{5x}}\,dx$

37. $\int \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,dx$

38. $\int \frac{x}{x^4+2x^2+1}\,dx$

39. $\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$

40. $\int \frac{2e^x}{1+e^x}\,dx$

41. $\int 5^x e^x\,dx$

42. $\int x10^{x^2}\,dx$

43. $\int x^e\,dx$

44. $\int 5^x\sqrt{1+5^x}\,dx$

45. Una partícula se mueve sobre una recta coordenada con cierta aceleración al tiempo t de $e^{t/2}$ cm/s^2. En $t = 0$ la partícula se encuentra en el origen y su velocidad es de 6 cm/s. ¿Qué distancia recorre durante el intervalo de tiempo $[0, 4]$?

46. Realice el cálculo de los máximos y mínimos locales de $f(x) = x^2 \ln x$ para $x > 0$. Analice la concavidad, encuentre los puntos de inflexión y trace la gráfica de f.

47. Encuentre una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y = xe^{1/x^2} + \ln|2 - x^2|$ en el punto $P(1, e)$.

48. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = e^{2x}$, $y = x/(x^2 + 1)$, $x = 0$ y $x = 1$.

49. La región acotada por las gráficas de $y = e^{4x}$, $x = -2$, $x = -3$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

50. En 1980 la población de la India era de unos 651 millones de habitantes y se sabe que ha estado aumentando a razón de 2% al año. Encuentre una fórmula para la población $N(t)$ (en millones de habitantes) al tiempo t (en años transcurridos a partir de 1980). Suponiendo que este rápido crecimiento continúe, ¿qué población tendrá la India en el año 2000?

51. Cierta sustancia radiactiva tiene una semivida (o periodo de semidesintegración) de cinco días. ¿Cuánto tomará a una cantidad A desintegrarse hasta que quede sólo un 1% de A?

52. Para predecir la edad T (en años) de un fósil mediante la técnica del carbono 14, se usa la ecuación $T = -8310 \ln x$, donde $100x$ es el porcentaje de carbono que aún queda en el espécimen (véase el Ejercicio 19 de la Sección 7.6).
 (a) Calcule la edad de un fósil con una precisión de 1000 años suponiendo que en este caso, $x = 0.04$.
 (b) Estime el error máximo en el cálculo de T en la parte (a) usando diferenciales, suponiendo que el error en la estimación de x pudo haber sido hasta de 0.005.

53. La rapidez con que el azúcar se disuelve en agua es proporcional a la cantidad sin disolverse. Si 10 kg de azúcar se vierten en un recipiente con agua a la 1:00 P.M., se encuentran que a las 4:00 P.M., ya se ha disuelto la mitad.
 (a) ¿Cuánto tardarán en disolverse 2 kg más?
 (b) ¿Cuántos de los 10 kg se habrán disuelto a las 8:00 P.M.?

54. Según la ley de Newton del enfriamiento, la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el medio que lo rodea. Demuestre que si $f(t)$ denota la temperatura al tiempo t, entonces $f(t) = T + [f(0) - T]e^{-kt}$, donde T es la temperatura del medio que rodea al objeto y k es una constante positiva.

55. La bipartición de la bacteria *E. coli* ocurre aproximadamente cada 20 minutos. Calcule el número de bacterias que se tendrán a las dos horas de que había 100 000.

La ecuación diferencial $p\,dv + cv\,dp = 0$, donde p es la presión, v el volumen y c una constante, describe el comportamiento adiabático del aire. Resuelva la ecuación expresando p como una función de v.

57. Sea $f(x) = 2x^3 - 8x + 5$ en $[-1, 1]$. Demuestre que f tiene una función inversa g, y calcule $g'(5)$.

58. Sea $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 1$ para $x \geq 0$.
 (a) Demuestre que f tiene una función inversa f^{-1} y describa su dominio.
 (b) Encuentre $f^{-1}(x)$ y $D_x f^{-1}(x)$.
 (c) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 4)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en $(4, 0)$.

CAPÍTULO 8

OTRAS FUNCIONES TRASCENDENTES

En este capítulo se consideran los límites, las derivadas y las integrales de otras funciones trascendentes (o trascendentales). Para comenzar se hace un repaso de las funciones trigonométricas y de las identidades trigonométricas. Los estudiantes que necesiten recordar estos temas deben estudiar la Sección 8.1 cuidadosamente antes de los siguientes temas. Luego se desarrollan las fórmulas para los límites, las derivadas y las integrales de las funciones trigonométricas y de las funciones trigonométricas inversas. El resto del capítulo presenta discusiones de las funciones hiperbólicas y de las funciones hiperbólicas inversas.

8.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la geometría se dice que un ángulo está determinado por dos rayos o semirrectas l_1 y l_2 que tienen el mismo punto inicial O. Dos puntos A y B sobre l_1 y l_2, respectivamente (véase la Figura 8.1), determinan el **ángulo** AOB. Un ángulo también se puede considerar como dos segmentos rectilíneos finitos con un punto extremo en común.

En la trigonometría los ángulos se interpretan como rotaciones de rayos. Se comienza con un rayo fijo l_1 que tiene un extremo O y que gira alrededor de O sobre un plano hasta otra posición especificada por el rayo l_2. A l_1 se le llama **lado inicial**, a l_2 **lado final** y a O **vértice** del ángulo AOB. La magnitud y el sentido de la rotación no se restringen de ninguna manera. Se puede hacer que l_1 dé varias vueltas o revoluciones alrededor de O en uno u otro de los dos sentidos antes de llegar a la posición l_2. Así, hay muchos ángulos diferentes que tienen los mismos lados inicial y final.

En un sistema de coordenadas rectangulares, se dice que un ángulo está en su **posición normal** (o **estándar**) si tiene el vértice en el origen y su lado inicial l_1 coincide con la parte positiva del eje x. Si l_1 gira en el sentido contrario al del reloj para llegar a la posición final l_2, se considera entonces que el ángulo es **positivo**, mientras que si l_1 gira en el sentido del reloj, el ángulo es **negativo**. La dirección del movimiento de las manecillas del reloj se llama **sentido negativo**, y la contraria, **sentido positivo**. Los ángulos suelen denotarse por letras griegas minúsculas y su sentido (o dirección) se especifica mediante un arco circular, o una curva espiral, con una punta de flecha en un extremo (véase la Figura 8.2).

La magnitud de un ángulo se puede expresar en grados o en radianes. Un giro de 1/360 de una vuelta en el sentido positivo es un ángulo de un grado, o 1°. En Cálculo la unidad usual para medir ángulos es el *radián* (rad). Para definir un radián se considera una circunferencia unitaria U con centro en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, y se toma un ángulo θ en la posición normal (véase la Figura 8.3). El ángulo θ se genera al girar alrededor de O un rayo coincidente con la parte positiva del eje x. Cuando dicho rayo gira hacia el lado final de θ, su punto de intersección con U recorre una cierta distancia circular t antes de llegar a su posición final $P(x, y)$. Se considera que t es positivo para rotaciones positivas, y negativo para rotaciones negativas. Es natural asignar al ángulo θ el número t como su medida. Se dice que θ **es un ángulo de t radianes** y se escribe $\theta = t$ o bien $\theta = t$ radianes. Así, θ denota al ángulo o específicamente a su medida. En la Figura 8.3, t es la longitud del arco $\overset{\frown}{AP}$ que el ángulo θ *intercepta*.

FIGURA 8.1



FIGURA 8.2

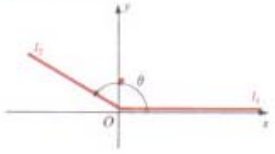


FIGURA 8.3

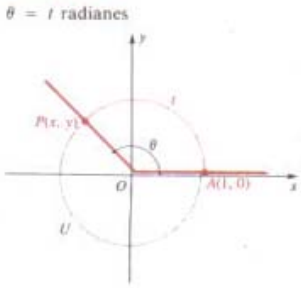
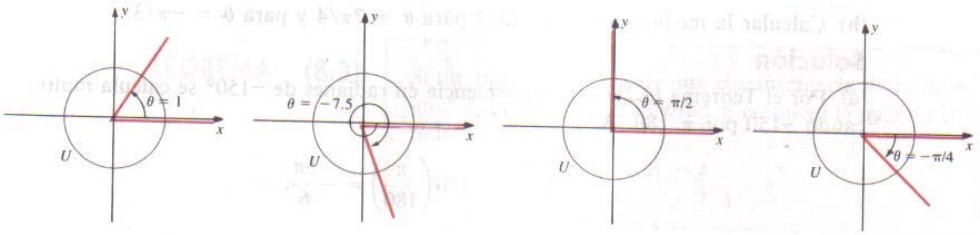


FIGURA 8.4



Si $\theta = 1$ (es decir, si θ es un ángulo de 1 rad), entonces θ intercepta o abarca un arco de longitud unidad sobre la circunferencia unitaria U (véase la Figura 8.4). La notación $\theta = -7.5$ significa que θ es el ángulo generado por un giro en el sentido negativo en el que el punto de intersección del eje x con la circunferencia unitaria U recorre 7.5 unidades. Como el perímetro de U es 2π, resulta que si $\theta = \pi/2$, entonces θ se obtiene por un giro de $\frac{1}{4}$ de vuelta completa en el sentido positivo. Análogamente, si $\theta = -\pi/4$, entonces θ se genera con $\frac{1}{8}$ de vuelta en el sentido negativo. La Figura 8.4 muestra estos ángulos con sus valores (o medidas) en radianes.

Si un ángulo en la posición normal es generado mediante media vuelta en la dirección positiva, entonces su medida en grados es 180° y su medida en radianes es π. Esto da las siguientes relaciones.

RELACIONES ENTRE GRADOS Y RADIANES (8.1)

$$180^\circ = \pi \text{ rad}, \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Mediante una calculadora se pueden evaluar aproximadamente $\pi/180$ y $180/\pi$, obteniendo

$$1^\circ \approx 0.0174533 \text{ rad} \quad \text{y} \quad 1 \text{ rad} \approx 57.29578^\circ.$$

El siguiente teorema es una consecuencia de las fórmulas anteriores.

TEOREMA (8.2)

(i) Para convertir un valor en radianes a uno en grados hay que multiplicar por $180/\pi$.

(ii) Para convertir un valor en grados a uno en radianes hay que multiplicar por $\pi/180$.

Cuando se considere un ángulo expresado en radianes, no se indicará esta unidad. Así, si un ángulo tiene una medida en radianes igual a 5, se escribe $\theta = 5$ en vez de $\theta = 5$ *rad*. Esto no debe causar confusión respecto a las unidades usadas para expresar un ángulo, pues si θ tiene un valor en grados igual a 5, se escribe $\theta = 5^\circ$ y *no* $\theta = 5$.

EJEMPLO 1 (a) Calcular la medida en radianes de θ para $\theta = -150°$ y para $\theta = 225°$.
(b) Calcular la medida en grados de θ para $\theta = 7\pi/4$ y para $\theta = -\pi/3$.

Solución

(a) Por el Teorema (8.2) (i), la equivalencia en radianes de $-150°$ se calcula multiplicando -150 *por* $\pi/180$. *Así,*

$$-150° = -150\left(\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{5\pi}{6}.$$

Análogamente,

$$225° = 225\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{4}.$$

(b) Por el Teorema (8.2) (ii), la equivalencia en grados de $7\pi/4$ radianes se determina multiplicando por $180/\pi$. De modo que

$$\frac{7\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 315°.$$

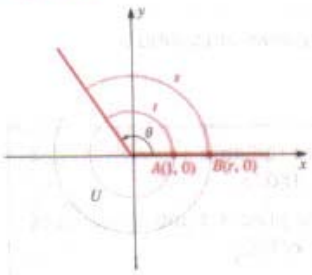
Análogamente,

$$-\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right) = -60°. \quad \bullet$$

La siguiente tabla expone la relación entre valores en radianes y en grados de algunos ángulos comunes. Los datos de la tabla se pueden verificar usando el Teorema (8.2).

Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°

FIGURA 8.5



La medida en radianes de un ángulo se puede obtener a partir de una circunferencia con *cualquier* radio. En lo que sigue, la expresión **ángulo central** de una circunferencia se refiere a un ángulo cuyo vértice está en el centro de esta curva. Sea θ un ángulo central de una circunferencia de radio r que determina un arco en la circunferencia cuya longitud es s, donde $0 \leq s < 2\pi r$. Para calcular la medida o valor en radianes de θ, se coloca θ en la posición normal sobre un sistema de coordenadas rectangulares y se sobrepone una circunferencia unitaria U, como se muestra en la Figura 8.5. Si θ intercepta un arco de longitud t en U, entonces, por definición, se puede escribir $\theta = t$. De la geometría plana, la razón de los arcos en la Figura 8.5 es igual a la razón de los radios correspondientes, es decir,

$$\frac{t}{s} = \frac{1}{r} \quad \text{o bien} \quad t = \frac{s}{r}.$$

Sustituyendo t por θ se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA (8.3)

Si un ángulo central θ de una circunferencia de radio r intercepta un arco de longitud s, entonces la medida en radianes de θ es

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

La fórmula $\theta = s/r$ para la medida en radianes de un ángulo es independiente del tamaño de la circunferencia. Por ejemplo, si el radio de tal curva es $r = 4$ cm y un ángulo central θ, abarca un arco de 8 cm de longitud, entonces la medida en radianes de θ es

$$\theta = \frac{8 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 2.$$

Si el radio de la circunferencia es de 5 km y la longitud del arco es de 10 km, entonces

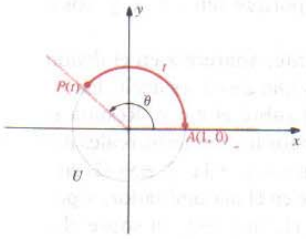
$$\theta = \frac{10 \text{ km}}{5 \text{ km}} = 2.$$

Estos cálculos indican que la medida en radianes de un ángulo no tiene dimensiones y se puede considerar como un número real. Es por esto que se usa la notación $\theta = t$ de preferencia a $\theta = t$ radianes.

La fórmula $\theta = s/r$ se puede usar para calcular la longitud del arco abarcado por un ángulo central θ de una circunferencia. A veces, en este tipo de problemas es conveniente usar la fórmula equivalente

$$s = r\theta.$$

FIGURA 8.6



Hay dos métodos que se usan normalmente para definir las funciones trigonométricas: uno mediante una circunferencia unitaria y el otro por medio de triángulos rectángulos. Comenzaremos por el enfoque de la circunferencia unitaria. Las descripciones de las funciones trigonométricas en términos de triángulos rectángulos, aparece en (8.9).

Sea U una circunferencia unitaria, es decir, una circunferencia con radio 1 y centro en el origen O de un sistema de coordenadas rectangulares. Entonces, U es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Dado cualquier número real t, denotemos por θ al ángulo (en la posición normal) cuya medida en radianes es t. La Figura 8.6 muestra un caso posible con $0 < \theta < 2\pi$. En ella, $P(t)$ denota el punto de intersección del lado final de θ con la circunferencia unitaria U. Usando la fórmula $s = r\theta$ con $r = 1$, se ve que el arco $\overset{\frown}{AP}$ que el ángulo θ intercepta tiene longitud $s = t$. Entonces, *el número real t puede considerarse como la medida en radianes del ángulo θ o la longitud del arco $\overset{\frown}{AP}$ de U.*

Para todo $t > 0$ se puede pensar que el ángulo θ fue generado al girar un rayo coincidente con la parte positiva del eje x alrededor del origen en el sentido positivo. En

este caso, t es la distancia sobre U que el punto $P(t)$ recorre antes de llegar a su posición final. Si $t < 0$, entonces $|t|$ es la distancia recorrida por $P(t)$ sobre U en el sentido negativo.

La discusión anterior indica cómo se puede asociar a cada número real t, un punto único $P(t)$ en U. El punto $P(t)$ se llama **punto de la circunferencia unitaria U que corresponde a t.** Las seis **funciones trigonométricas** se pueden definir a partir de las coordenadas (x, y) de $P(t)$. Estas funciones son el **seno**, el **coseno**, la **tangente**, la **cotangente**, la **secante** y la **cosecante** y se denotan por los símbolos **sen**, **cos**, **tan**, **cot**, **sec** y **csc** respectivamente. Si t es un número real, la función seno asocia a t otro número rea, que se denota por sen (t), o bien sen t. Para las otras cinco funciones se usa una notación similar.

Para tomar en cuenta las coordenadas rectangulares de $P(t)$, se usa la notación $P(x, y)$ en vez de $P(t)$ y se dice que $P(x, y)$ es el punto de la circunferencia unitaria que corresponde a t. Esta notación se usa en la siguiente definición.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEFINIDAS POR MEDIO DE UNA CIRCUNFERENCIA UNITARIA (8.4)

Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto de una circunferencia unitaria U que corresponde a t, entonces

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \csc t = \frac{1}{y} \text{ (para } y \neq 0)$$

$$\cos t = x \qquad \sec t = \frac{1}{x} \text{ (para } x \neq 0)$$

$$\tan t = \frac{y}{x} \text{ (para } x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \text{ (para } y \neq 0)$$

Debido a que estas fórmulas están dadas en términos de las coordenadas de un punto sobre una circunferencia unitaria, a veces se llaman **funciones circulares** a las funciones trigonométricas.

El dominio de las funciones seno y coseno es $\mathbb{R}$, porque sen $t = x$ y $\cos t = y$ existen para todo número real t.

En las definiciones de las funciones tangente y secante, aparece x en el denominador, y por tanto se deben excluir los valores de t para los que x es 0; es decir, los valores de t a los que corresponden los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ sobre el eje y. Resulta que el dominio de las funciones tangente y secante consta de todos los números reales *excepto* $(\pi/2) + n\pi$ para todo entero n. En particular, se excluyen $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$, etcétera.

Para $\cot t = x/y$ y $\csc t = 1/y$, el número y aparece en el denominador, y por tanto hay que excluir los valores de t que dan los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ sobre el eje x. Entonces, el dominio de las funciones cotangente y cosecante consta de todos los números reales *excepto* 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ y, en general, $n\pi$ para todo entero n.

Nótese que $P(x, y)$ es un punto de la circunferencia unitaria U y, por consiguiente, $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$. Esto implica que

$$|\operatorname{sen} t| \leq 1, \qquad |\cos t| \leq 1, \qquad |\csc t| \geq 1, \qquad |\sec t| \geq 1$$

para todo t en los dominios de estas funciones. En la Sección 8.2 se verá que sen t y

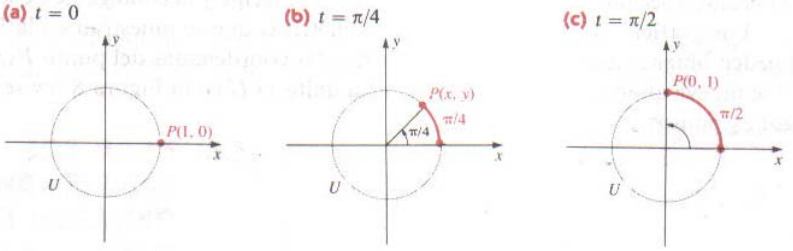
cos t toman *todos* los valores entre -1 y 1. También se puede demostrar que el contradominio de las funciones tangente y cotangente es $\mathbb{R}$ y el contradominio de las funciones cosecante y secante es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

EJEMPLO 2 Calcular los valores de las funciones trigonométricas en

(a) $t = 0$ (b) $t = \pi/4$ (c) $t = \pi/2$

Solución Los puntos $P(x, y)$ de la circunferencia unitaria U que corresponden a los valores dados de t, aparecen localizados en la Figura 8.7.

FIGURA 8.7



(a) Para $t = 0$ tomamos $x = 1$ y $y = 0$ en la Definición (8.4) y se obtienen los valores en el primer renglón de la tabla de abajo. Nótese que, como $y = 0$, csc y y cot y no están definidas, lo que se indica con rayas o guiones en la tabla.

(b) Para $t = \pi/4$, la recta que pasa por O y P biseca el primer cuadrante y P tiene coordenadas de la forma (x, x). Usando la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ para U, obtenemos $P(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Utilizando las coordenadas de P en la Definición (8.4) obtenemos el segundo renglón de la tabla.

(c) Finalmente, sustituimos $x = 0$ y $y = 1$ en la definición. Los resultados para $t = \pi/2$ están dados en el último renglón de la tabla.

t	(x, y)	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	$(1, 0)$	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$	1	0	—	1	—	0

Los valores correspondientes a $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$ se obtendrán en el Ejemplo 3. Se pueden obtener los valores correspondientes a cualquier número real t con el grado de precisión que se desee usando los métodos que se desarrollan más adelante en el libro. Se supondrá que el lector sabe cómo usar las tablas trigonométricas (véase el Apéndice III) o una calculadora para obtener los valores aproximados de las funciones trigonométricas.

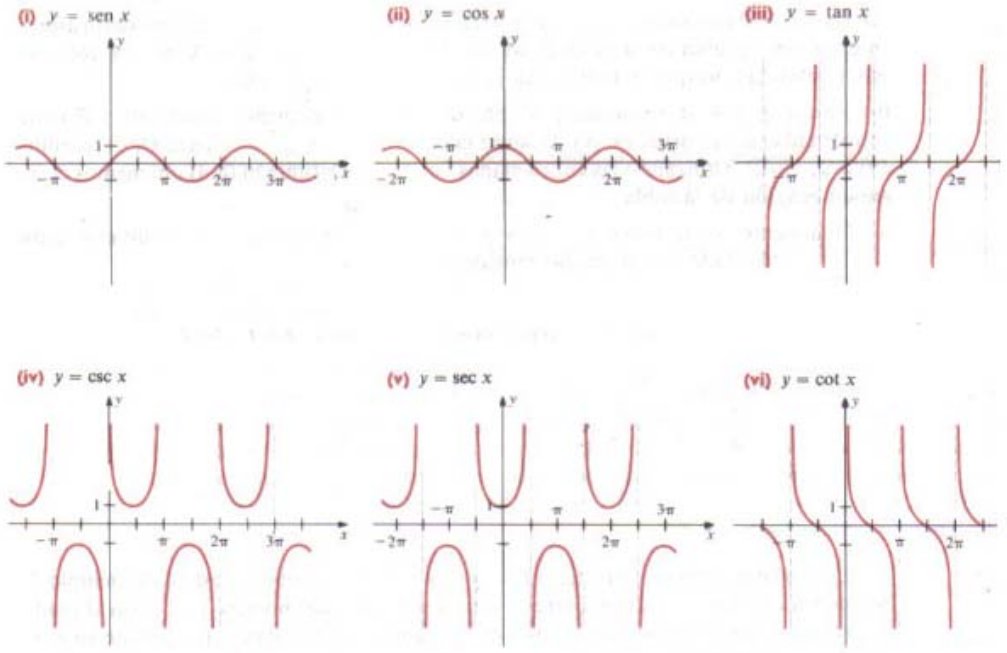
Si $P(x, y)$, en la Definición (8.4), está en el cuadrante I, entonces x y y son ambos positivos y por lo tanto, todos los valores de las funciones trigonométricas son positi-

vos. Si $P(x, y)$ está en el cuadrante II, entonces x es negativo, y es positivo, y por lo tanto sen t y csc t son positivos, mientras que las otras cuatro funciones son negativas. Se pueden hacer observaciones similares con respecto a los otros cuadrantes.

Como el perímetro de la circunferencia unitaria U es 2π, se obtiene el mismo punto $P(x, y)$ con $t + 2\pi n$ para todo entero n. Es decir, los valores de las funciones trigonométricas se repiten en intervalos sucesivos de longitud 2π. Se dice que una función f con dominio D es **periódica** si existe un número real positivo k tal que $t + k$ está en D y $f(t + k) = f(t)$ para todo t en D. Geométricamente esto significa que la gráfica de f se repite cuando las abscisas de los puntos toman valores en intervalos sucesivos de amplitud k. Si existe un mínimo número real positivo k con esta propiedad, se dice entonces que k es el **periodo** de f. Puede demostrarse que las funciones seno, coseno, cosecante y secante tienen periodo 2π y que la tangente y la cotangente tienen periodo π.

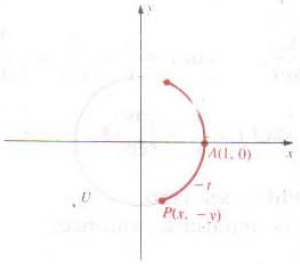
Las gráficas de las funciones trigonométricas que se muestran en la Figura 8.8 se pueden obtener analizando lo que sucede a las coordenadas del punto $P(x, y)$ cuando P se mueve alrededor de la circunferencia unitaria U en la Figura 8.6 y se localizan algunos puntos.

FIGURA 8.8



Si $P(x, y)$ es el punto de la circunferencia unitaria U correspondiente a t, entonce como se ilustra en la Figura 8.9, $P(x, -y)$ corresponde a $-t$.

FIGURA 8.9



Por consiguiente, $\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$ y $\cos(-t) = x = \cos t$. Análogamente, $\tan(-t) = -\tan t$. Esto da las siguientes fórmulas para el negativo de un ángulo:

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS PARA EL NEGATIVO DE UN NÚMERO (8.5)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-t) &= -\operatorname{sen} t \\ \cos(-t) &= \cos t \\ \tan(-t) &= -\tan t \end{aligned}$$

Si $f(t) = \cos t$, entonces de (8.5),

$$f(-t) = \cos(-t) = \cos t = f(t).$$

De modo que la función coseno es par y, de acuerdo con el Teorema (1.23), su gráfica es simétrica con respecto al eje y (véase la Figura 8.8). Análogamente, las funciones seno y tangente son impares y sus gráficas son simétricas con respecto al origen.

Hay muchas relaciones entre las funciones trigonométricas. Las fórmulas que aparecen en el recuadro siguiente son, sin lugar a dudas, las identidades trigonométricas más importantes porque se usan para simplificar y unificar varios aspectos del tema. Como las fórmulas son válidas para cualquier valor permitido de t y son parte de los fundamentos de la trigonometría, se llaman *Identidades Fundamentales*.

En tres de las citadas identidades intervienen cuadrados como $(\operatorname{sen} t)^2$ y $(\cos t)^2$. En general, si n es un entero diferente de -1, potencias como $(\cos t)^n$ se escriben en la forma $\cos^n t$. Los símbolos especiales $\operatorname{sen}^{-1} t$ y $\cos^{-1} t$ están reservados para las funciones inversas de las funciones trigonométricas, que se estudian en la Sección 8.5.

IDENTIDADES FUNDAMENTALES (8.6)

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \qquad 1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad\qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

Demostración Las demostraciones se deducen de las definiciones de las funciones trigonométricas. Así,

$$\csc t = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen} t}, \qquad \sec t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{x}{y} = \frac{1}{y/x} = \frac{1}{\tan t},$$

$$\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{x}{y} = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t},$$

siempre y cuando ninguno de los denominadores sea cero.

Si (x, y) es un punto de la circunferencia unitaria U, entonces

$$y^2 + x^2 = 1.$$

Como $y = \operatorname{sen} t$ y $x = \cos t$, se obtiene

$$(\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 = 1$$

o equivalentemente,

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Si $\cos t \neq 0$, entonces dividiendo ambos lados de la última ecuación entre $\cos^2 t$ resulta

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$$

o bien

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2.$$

Como $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$ y $\sec t = 1/\cos t$, se ve que

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t.$$

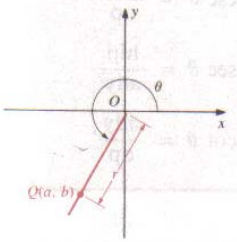
La demostración de la última identidad fundamental se deja como ejercicio. •

En algunas aplicaciones es conveniente cambiar el dominio de una función trigonométrica de un subconjunto de $\mathbb{R}$ a un conjunto de ángulos. Esto se logra mediante la siguiente definición.

DEFINICIÓN (8.7) Sea θ un ángulo con medida t en radianes. **El valor de una función trigonométrica en θ** es su valor en el número real t.

De la Definición (8.7) se deduce que $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t$, $\cos\theta = \cos t$, etcétera, donde t es la medida o el valor en radianes de θ. Para aclarar más qué unidad de medida angular se utiliza, cada vez que el ángulo esté medido en grados se pone explícitamente el símbolo de grados, como en $\operatorname{sen} 65°$ o $\tan 150°$. Los números a los que no se agrega un símbolo de unidad, como en $\cos 3$ y $\csc(\pi/6)$, indican valores de ángulos en radia-

FIGURA 8.10



nes. Esto es consistente con lo que se hizo previamente, donde por ejemplo, cos 3 significaba el valor de la función coseno en el número real 3, pero por definición, el coseno de un ángulo que mide 3 rad es idéntico al coseno del número real 3.

Sea θ un ángulo en la posición normal y sea $Q(a, b)$ un punto arbitrario en el lado final de θ, como se ilustra en la Figura 8.10. El siguiente teorema muestra cómo se pueden usar las coordenadas del punto Q para determinar los valores de las funciones trigonométricas de θ.*

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS (8.8)

Sea θ un ángulo en la posición normal sobre un sistema de coordenadas rectangulares y sea $Q(a, b)$ cualquier punto distinto de O sobre el lado final de θ. De modo que si $d(O, Q) = r$, entonces

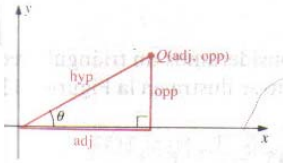
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b} \text{ (para } b \neq 0\text{)}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} \text{ (para } a \neq 0\text{)}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \text{ (para } a \neq 0\text{)} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} \text{ (para } b \neq 0\text{).}$$

Cuando $r = 1$ el Teorema (8.8) se reduce a (8.4) con $a = x$, $b = y$ y $\theta = t$.

FIGURA 8.11



En el caso de ángulos agudos, los valores de las funciones trigonométricas pueden interpretarse como razones (o cocientes) de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Recordemos que un **triángulo de este tipo** es aquel que tiene un **ángulo recto**. Un ángulo agudo θ se puede considerar como uno de los ángulos de un triángulo rectángulo y se puede hablar de las longitudes de la **hipotenusa**, del **cateto opuesto** y del **cateto adyacente**. Para abreviar se usarán los símbolos **hip**, **op** y **ady**, respectivamente, para denotar estos números.

Si un triángulo rectángulo se coloca en un sistema de coordenadas rectangulares, como en la Figura 8.11, entonces las longitudes del cateto adyacente y el cateto opuesto a θ son, respectivamente, la abscisa y la ordenada del punto Q, que es el vértice del triángulo donde se unen la hipotenusa y el cateto opuesto. Del Teorema (8.8) se obtiene lo siguiente.

* Más detalles pueden verse en: E.W. Swokowski: *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, 2a. edición (Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F., 1988), Sección 6.5.

PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO (8.9)

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

Estas fórmulas son muy importantes para trabajar con triángulos rectángulos. El siguiente ejemplo ilustra cómo se usan.

EJEMPLO 3 Calcular $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ para los siguientes valores de θ:

(a) $\theta = 60°$ **(b)** $\theta = 30°$ **(c)** $\theta = 45°$

Solución Consideremos un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 2. La mediana que va de un vértice al lado opuesto biseca el ángulo del vértice, como se ilustra en la Figura 8.12. Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de esta mediana es $\sqrt{3}$. Usando (8.9) con respecto al triángulo coloreado, obtenemos los siguientes valores:

(a) $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$, $\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

(b) $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

FIGURA 8.12

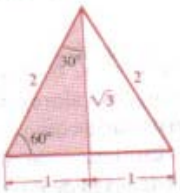
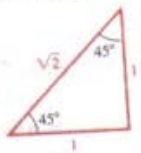


FIGURA 8.13



(c) Para calcular los valores funcionales para $\theta = 45°$, consideramos un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales tienen longitud 1, como se ilustra en la Figura 8.13. Entonces,

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°, \qquad \tan 45° = \frac{1}{1} = 1 \quad \bullet$$

Algunas de las identidades trigonométricas siguientes serán de utilidad a lo larg de este libro. Sus demostraciones se encuentran en libros de trigonometría.

FÓRMULAS PARA SUMAS Y RESTAS DE ÁNGULOS (8.10)

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

FÓRMULAS PARA EL DOBLE DE UN ÁNGULO **(8.11)**

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1$$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

FÓRMULAS PARA LA MITAD DE UN ÁNGULO **(8.12)**

$$\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{2} \qquad \cos^2 \frac{u}{2} = \frac{1 + \cos u}{2}$$

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

FÓRMULAS PARA PRODUCTOS **(8.13)**

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) - \cos(u - v)]$$

FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN **(8.14)**

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen} \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2}$$

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2 \cos \frac{u + v}{2} \operatorname{sen} \frac{u - v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \operatorname{sen} \frac{u + v}{2} \operatorname{sen} \frac{u - v}{2}$$

EJERCICIOS 8.1

1. Verifique los datos en la tabla de radianes y grados de la página 398.

2. Demuestre que $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$.

3. Encuentre el cuadrante que contiene a θ suponiendo que
 (a) $\sec\theta < 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$.
 (b) $\cot\theta > 0$ y $\csc\theta < 0$.
 (c) $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$.

4. Calcule los valores de las otras funciones trigonométricas dado que
 (a) $\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5}$ y $\cos t = \frac{3}{5}$.
 (b) $\csc t = \sqrt{13}/2$ y $\cot t = -\frac{3}{2}$.

5. Calcule los valores de las funciones trigonométricas en los siguientes números reales, sin usar tablas ni calculadora:
 (a) $9\pi/2$ (b) $-5\pi/4$ (c) 0 (d) $11\pi/6$

6. Calcule el valor (o medida) en radianes correspondiente al valor en grados dado, sin usar calculadora:
 $330°,\ 405°,\ -150°,\ 240°,\ 36°$

7. Determine el valor en grados correspondiente al valor en radianes dada, sin usar calculadora:
 $9\pi/2,\ -2\pi/3,\ 7\pi/4,\ 5\pi,\ \pi/5$

8. Un ángulo central θ abarca un arco de 20 cm de longitud sobre una circunferencia de 2 m de radio. ¿Cuál es el valor de θ en radianes?

9. Calcule los valores de las seis funciones trigonométricas en un ángulo θ que está en la posición normal y satisface las condiciones dadas.
 (a) El punto $(30, -40)$ está en el lado final de θ.
 (b) El lado final de θ está en el cuadrante II y es paralelo a la recta $2x + 3y + 6 = 0$.
 (c) $\theta = -90°$.

10. Calcule cada valor sin utilizar tablas ni calculadora.
 (a) $\cos 225°$ (b) $\tan 150°$ (c) $\operatorname{sen}(-\pi/6)$
 (d) $\sec(4\pi/3)$ (e) $\cot(7\pi/4)$ (f) $\csc(300°)$

Ejercicios 11-30: Verifique la identidad.

11. $\cos\theta \sec\theta = 1$
12. $\tan\alpha \cot\alpha = 1$
13. $\operatorname{sen}\theta \sec\theta = \tan\theta$
14. $\operatorname{sen}\alpha \cot\alpha = \cos\alpha$
15. $\dfrac{\csc x}{\sec x} = \cot x$
16. $\cot\beta \sec\beta = \csc\beta$
17. $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha$
18. $\cos^2 x(\sec^2 x - 1) = \operatorname{sen}^2 x$
19. $\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1$
20. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$
21. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{\csc t} + \dfrac{\cos t}{\sec t} = 1$
22. $1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$
23. $(1 + \operatorname{sen}\alpha)(1 - \operatorname{sen}\alpha) = 1/\sec^2\alpha$
24. $(1 - \operatorname{sen}^2 t)(1 + \tan^2 t) = 1$
25. $\sec\beta - \cos\beta = \tan\beta \operatorname{sen}\beta$
26. $\dfrac{\operatorname{sen} w + \cos w}{\cos w} = 1 + \tan w$
27. $\dfrac{\csc^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \cot^2\theta$
28. $\operatorname{sen} x + \cos x \cot x = \csc x$
29. $\operatorname{sen} t(\csc t - \operatorname{sen} t) = \cos^2 t$
30. $\cot t + \tan t = \csc t \sec t$

Ejercicios 31-42: (a) Encuentre las soluciones de las ecuaciones dadas dentro del intervalo $[0, 2\pi)$, y (b) calcule el valor en grados de cada solución. (Para los Ejercicios 39-42 consulte las identidades (8.11) y (8.12).)

31. $2\cos^3\theta - \cos\theta = 0$
32. $2\cos\alpha + \tan\alpha = \sec\alpha$
33. $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta$
34. $\csc^3\theta - 4\csc\theta = 0$
35. $2\cos^3 t + \cos^2 t - 2\cos t - 1 = 0$
36. $\cos x \cot^2 x = \cos x$
37. $\operatorname{sen}\beta + 2\cos^2\beta = 1$
38. $2\sec u \operatorname{sen} u + 2 = 4\operatorname{sen} u + \sec u$
39. $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$
40. $\operatorname{sen} 2u = \operatorname{sen} u$
41. $2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 3\cos\theta = 0$
42. $\sec 2x \csc 2x = 2\csc 2x$

Ejercicios 43-51: Suponiendo que θ y φ son ángulos agudos tales que $\csc\theta = \frac{5}{3}$ y $\cos\varphi = \frac{8}{17}$, utilice las identidades (8.10)-(8.12) para calcular los números dados.

43. $\operatorname{sen}(\theta + \varphi)$
44. $\cos(\theta + \varphi)$

45. $\tan(\theta - \varphi)$
46. $\operatorname{sen}(\varphi - \theta)$
47. $\operatorname{sen} 2\varphi$
48. $\cos 2\varphi$
49. $\tan 2\theta$
50. $\operatorname{sen}(\theta/2)$
51. $\tan(\theta/2)$
52. Exprese $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ en términos de funciones de α, β y γ.
53. ¿Existe un número real t tal que $7 \operatorname{sen} t = 9$? Explique su respuesta.
54. ¿Existe un número real t tal que $3 \csc t = 1$? Explique su respuesta.

Ejercicios 55-56: Sean f y g las funciones dadas. Encuentre (a) $f(g(\pi))$ y (b) $g(f(\pi))$.

55. $f(t) = \cos t$, $g(t) = t/4$
56. $f(t) = \tan t$, $g(t) = t/4$

Ejercicios 57-60: Use la Figura 8.8 y los resultados sobre desplazamientos verticales y horizontales, ampliaciones y reflexiones para trazar la gráfica de f para $0 \le x \le 2\pi$.

57. (a) $f(x) = 4 \operatorname{sen} x$
 (b) $f(x) = -\frac{1}{4} \operatorname{sen} x$
58. (a) $f(x) = \frac{1}{3} \cos x$
 (b) $f(x) = -3 \cos x$
59. (a) $f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{1}{2}\pi)$
 (b) $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\pi$
60. (a) $f(x) = 2 \cos(x + \pi)$
 (b) $f(x) = 2 \cos x + \pi$

8.2 LÍMITES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

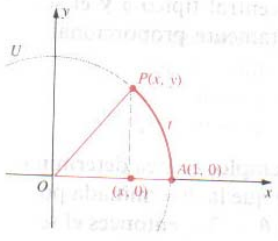
Al discutir los límites de las expresiones trigonométricas en que intervienen $\operatorname{sen} t$, $\cos x$, $\tan\theta$, etcétera, *se supondrá que las variables son números reales o medidas de un ángulo en radianes*. El siguiente resultado es importante para lo que sigue.

TEOREMA (8.15)

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = 0.$$

Demostración Se probará primero que $\lim_{t \to 0^+} \operatorname{sen} t = 0$. Como para esto sólo interesan los valores positivos de t cercanos a cero, puede suponerse que $0 < t < \pi/2$. Sea U la circunferencia de radio 1 con centro en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y sea A el punto $(1, 0)$. Si $P(x, y)$ es el punto de U tal que $\overset{\frown}{AP} = t$, como se ilustra en la Figura 8.14, entonces la medida en radianes del ángulo AOP es t. En la figura se ve que

FIGURA 8.14



$$0 < y < t$$

o, como $y = \operatorname{sen} t$,

$$0 < \operatorname{sen} t < t.$$

En vista de que $\lim_{t \to 0^+} t = 0$, del Teorema de Intercalación (2.22) se deduce que $\lim_{t \to 0^+} \operatorname{sen} t = 0$.

Para completar la demostración basta probar que $\lim_{t\to 0^-} \operatorname{sen} t = 0$. Si $-\pi/2 < t < 0$, entonces $0 < -t < \pi/2$ y por lo tanto, de la primera parte de la demostración,

$$0 < \operatorname{sen}(-t) < -t.$$

Multiplicando por -1 la última desigualdad y usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, se obtiene

$$t < \operatorname{sen} t < 0.$$

Como $\lim_{t\to 0^-} t = 0$, del Teorema de Intercalación se deduce que $\lim_{t\to 0^-} \operatorname{sen} t = 0$.

• •

COROLARIO (8.16)

$$\lim_{t\to 0} \cos t = 1.$$

Demostración Debido a que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, resulta que $\cos t = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$. Si $-\pi/2 < t < \pi/2$, entonces $\cos t$ es positivo y por lo tanto $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$. Por consiguiente,

$$\lim_{t\to 0} \cos t = \lim_{t\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\lim_{t\to 0}(1 - \operatorname{sen}^2 t)}$$
$$= \sqrt{1 - 0} = 1.$$

• •

En la Sección 8.3 será necesario conocer los límites de $(\operatorname{sen} t)/t$ y $(1 - \cos t)/t$ cuando t tiende a 0. Éstos se presentan en los Teoremas (8.18) y (8.19). En la demostración del Teorema (8.18) se usa el siguiente resultado.

TEOREMA (8.17)

Si θ es el valor en radianes de un ángulo central de una circunferencia de radio r, entonces el área A del sector circular determinado por θ es

$$A = \tfrac{1}{2} r^2 \theta.$$

Demostración En la Figura 8.15 se muestra un ángulo central típico θ y el sector circular que determina. El área del sector circular es directamente proporcional a θ, es decir,

$$A = k\theta$$

FIGURA 8.15



para algún número real k. Por ejemplo, el área determinada por un ángulo de 2 rad es el doble que la determinada por un ángulo de 1 rad. En particular, si $\theta = 2\pi$, entonces el sector circular es todo el círculo y $A = \pi r^2$. De modo que

$$\pi r^2 = k(2\pi) \quad \text{o bien} \quad k = \tfrac{1}{2} r^2$$

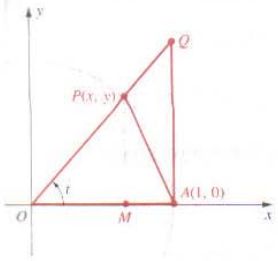
y por lo tanto

$$A = \tfrac{1}{2}r^2\theta \qquad \bullet\ \bullet$$

TEOREMA (8.18)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

FIGURA 8.16



Demostración Si $0 < t < \pi/2$, se tiene la situación ilustrada en la Figura 8.16, donde $P(x, y)$ es el punto de la circunferencia unitaria U tal que $\widehat{AP} = t$, y M es el punto $(x, 0)$. Si A_1 es el área del triángulo AOP, A_2 el área del sector circular AOP y A_3 el área del triángulo AOQ, entonces

$$A_1 < A_2 < A_3.$$

Usando la fórmula para el área de un triángulo y el Teorema (8.17), se obtiene

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(1)d(M, P) = \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2}(1)^2 t = \tfrac{1}{2}t$$
$$A_3 = \tfrac{1}{2}(1)d(A, Q) = \tfrac{1}{2}\tan t.$$

Por lo tanto,

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t < \tfrac{1}{2}t < \tfrac{1}{2}\tan t.$$

Usando la identidad $\tan t = (\operatorname{sen} t)/(\cos t)$ y dividiendo entre $\frac{1}{2}\operatorname{sen} t$, se obtiene

$$1 < \frac{t}{\operatorname{sen} t} < \frac{1}{\cos t}$$

o, equivalentemente,

$$(*) \qquad 1 > \frac{\operatorname{sen} t}{t} > \cos t.$$

Si $-\pi/2 < t < 0$, entonces $0 < -t < \pi/2$ y de los resultados ya establecidos,

$$1 > \frac{\operatorname{sen}(-t)}{-t} > \cos(-t).$$

Como $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ y $\cos(-t) = \cos t$, esta igualdad se reduce a (*). Esto demuestra que (*) también se satisface para $-\pi/2 < t < 0$, y por lo tanto, para todo t en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, excepto $t = 0$. Como $\lim_{t\to 0}\cos t = 1$ y $(\operatorname{sen} t)/t$ está siempre entre $\cos t$ y 1, del Teorema de Intercalación se deduce que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1. \qquad \bullet\ \bullet$$

En otras palabras, el Teorema (8.18) dice que si t está cerca de 0, entonces $(\operatorname{sen} t)/t$ está cerca de 1. Otra manera de enunciar esto es escribir $\operatorname{sen} t \approx t$ para valores pequeños de t. Es importante recordar que si t denota un ángulo, entonces en el Teorema

(8.18) *t debe expresarse en radianes* y lo mismo para la fórmula de aproximación $\operatorname{sen} t \approx t$. Por ejemplo, de las tablas trigonométricas o con una calculadora puede verse que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(0.06) &\approx 0.05996 \\ \operatorname{sen}(0.05) &\approx 0.04998 \\ \operatorname{sen}(0.04) &\approx 0.03999 \\ \operatorname{sen}(0.03) &\approx 0.03000 \end{aligned}$$

con una precisión de cinco decimales.

TEOREMA (8.19)

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0.$$

Demostración Se puede cambiar la forma de $(1 - \cos t)/t$ como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos t}{t} &= \frac{1 - \cos t}{t} \cdot \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t} \\ &= \frac{1 - \cos^2 t}{t(1 + \cos t)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1 + \cos t)} = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} \right) \\ &= \left(\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right) \left(\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} \right) \\ &= 1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

• •

EJEMPLO 1 Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{2x}$.

Solución No es posible aplicar directamente el Teorema (8.18) porque la expresión dada no está en la forma $(\operatorname{sen} t)/t$. Sin embargo, podemos llegar a ella (con $t = 5x$) haciendo las siguientes manipulaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{2x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{5}{2} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \\ &= \frac{5}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \end{aligned}$$

De la definición de límite se deduce que $x \to 0$ se puede sustituir por $5x \to 0$. Por lo tanto, aplicando el Teorema (8.18) con $t = 5x$, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{2x} = \frac{5}{2}(1) = \frac{5}{2}$$

EJEMPLO 2 Calcular $\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan t}{2t}$.

Solución Usando el hecho de que $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{2t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 3 Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x + 1 - \cos x}{3x}$.

Solución Vamos a usar el Teorema (8.19). Para ello comenzamos aislando la parte del cociente que contiene $(1 - \cos x)/x$ y luego se procede como sigue.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + 1 - \cos x}{3x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{3x} + \frac{1 - \cos x}{3x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{3x}\right) + \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3}$$

EJERCICIOS 8.2

Ejercicios 1-26: Calcule el límite si es que existe.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}$
3. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3 t}{(2t)^3}$
4. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{3\theta + \operatorname{sen}\theta}{\theta}$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{3 + x}$
6. $\lim_{t\to 0} \dfrac{1 - \cos 3t}{t}$
7. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{2\cos\theta - 2}{3\theta}$
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 1}{x + \cos x}$
9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(-3x)}{4x}$
10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$
11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^{2/3}}$
12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - 2x^2 - 2\cos x + \cos^2 x}{x^2}$
13. $\lim_{t\to 0} \dfrac{4t^2 + 3t \operatorname{sen} t}{t^2}$
14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - x^2}{2x}$
15. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\cos t}{1 - \operatorname{sen} t}$
16. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$
17. $\lim_{t\to 0} \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$
18. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}{x}$
19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \tan x}{\operatorname{sen} x}$
20. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2t}{t^2}$

21. $\lim_{x\to 0} x \cot x$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\csc 2x}{\cot x}$

23. $\lim_{x\to 0} x^2 \csc^2 x$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

25. $\lim_{v\to 0} \dfrac{\cos(v + \frac{1}{2}\pi)}{v}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x}{\operatorname{sen} x}$

Ejercicios 27-30: Demuestre la igualdad del límite para todos los números reales a y b diferentes de cero.

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos ax}{bx} = 0$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \dfrac{a}{b}$

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos ax}{\cos bx} = 1$

8.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

A continuación se presentan las derivadas de las seis funciones trigonométricas. En el enunciado del teorema se supone que $u = g(x)$, donde g es una función derivable y x se restringe a los valores para los que la función trigonométrica está definida.

TEOREMA (8.20)

$$
\begin{aligned}
D_x \operatorname{sen} u &= (\cos u)\, D_x u \\
D_x \cos u &= (-\operatorname{sen} u)\, D_x u \\
D_x \tan u &= (\sec^2 u)\, D_x u \\
D_x \csc u &= (-\csc u \cot u)\, D_x u \\
D_x \sec u &= (\sec u \tan u)\, D_x u \\
D_x \cot u &= (-\csc^2 u)\, D_x u
\end{aligned}
$$

Demostración Para la primera fórmula basta demostrar que $D_x \operatorname{sen} x = \cos x$ ya que $D_x \operatorname{sen} u$ se puede encontrar usando la Regla de la Cadena. Sea pues $f(x) = \operatorname{sen} x$. Si $f'(x)$ existe, entonces

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}.
\end{aligned}
$$

Usando la fórmula para el seno de una suma (véase (8.10)),

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right].
\end{aligned}
$$

De los Teoremas (8.18) y (8.19),

$$
\lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.
$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x,$$

es decir,

$$D_x \operatorname{sen} x = \cos x.$$

Se demostró que la derivada de la función seno es la función coseno.

Si $y = \operatorname{sen} u$ y $u = g(x)$, entonces por la Regla de la Cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}.$$

Usando la notación D_x esto puede escribirse

$$D_x \operatorname{sen} u = \cos u \, D_x u.$$

Para obtener la derivada de la función coseno se toma $f(x) = \cos x$. En este caso,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}.$$

Usando la fórmula para el coseno de una suma,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \operatorname{sen} x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right].$$

De los Teoremas (8.18) y (8.19),

$$f'(x) = (\cos x)(0) - (\operatorname{sen} x)(1) = -\operatorname{sen} x,$$

es decir,

$$D_x \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

Por lo tanto, la derivada de la función coseno es el *negativo* de la función seno. Para encontrar $D_x \cos u$ se puede usar la Regla de la Cadena como se hizo para $\operatorname{sen} u$.

Para hallar la derivada de la función tangente se utiliza la identidad fundamental $\tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$ y se aplica la Regla del Cociente como sigue:

$$D_x \tan x = D_x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

$$= \frac{\cos x (D_x \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x (D_x \cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x (\cos x) - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Análogamente, para la función secante,

$$\begin{aligned} D_x \sec x &= D_x\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\ &= \frac{(\cos x)(D_x\, 1) - (1)\, D_x\,(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(0) - (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= \sec x \tan x \end{aligned}$$

Se deja al lector la verificación de las fórmulas para las derivadas de $\cot x$ y $\csc x$.

El Teorema (8.20) puede servir para obtener información acerca de la continuidad de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, como las funciones seno y coseno son derivables en todo número real, del Teorema (3.5) se deduce que estas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}$. Análogamente, la función tangente es continua en los intervalos abiertos $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$, etcétera ya que es derivable en cada número de estos intervalos.

EJEMPLO 1 Encontrar y' para $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$.

Solución De la Regla del Cociente y el Teorema (8.20) (con $u = x$),

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 + \cos x)\, D_x\,(\operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x)\, D_x\,(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(0 - \operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{1}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

En la solución del Ejemplo 1 se usó la identidad fundamental $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Ésta y otras identidades trigonométricas se usan a menudo para resolver problemas en los que aparecen las derivadas de las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 2 Encontrar $g'(x)$ para $g(x) = \sec x \tan x$.

Solución Aplicando la Regla del Producto y el Teorema (8.20) (con $u = x$),

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\sec x)(D_x \tan x) + (\tan x)(D_x \sec x) \\ &= (\sec x)(\sec^2 x) + (\tan x)(\sec x \tan x) \\ &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x \\ &= \sec x\,(\sec^2 x + \tan^2 x). \end{aligned}$$

La fórmula para $g'(x)$ se puede escribir de muchas otras maneras. Por ejemplo, como

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1 \quad \text{o bien} \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

puede escribirse

$$g'(x) = \sec x\,(2\tan^2 x + 1) \quad \text{o bien} \quad g'(x) = \sec x\,(2\sec^2 x - 1) \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Encontrar $k'(\theta)$ para $k(\theta) = \sec\theta \cot\theta$.

Solución Podríamos usar la Regla del Producto como en el Ejemplo 2, sin embargo, es más fácil cambiar antes la forma de $k(\theta)$ aprovechando las identidades fundamentales como sigue:

$$k(\theta) = \sec\theta \cot\theta = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta.$$

Aplicando el Teorema (8.20),

$$k'(\theta) = D_\theta(\csc\theta) = -\csc\theta\cot\theta \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = \cos(5x^3)$.

Solución Aplicando la fórmula para $D_x \cos u$ en el Teorema (8.20), con $u = 5x^3$,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = D_x y = D_x \cos(5x^3) &= [-\operatorname{sen}(5x^3)]\,D_x(5x^3) \\ &= [-\operatorname{sen}(5x^3)](15x^2) \\ &= -15x^2 \operatorname{sen}(5x^3) \end{aligned} \quad \bullet$$

EJEMPLO 5 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \tan^3 4x$.

Solución Notamos primero que $f(x) = \tan^3 4x = (\tan 4x)^3$. Aplicando la Regla de la Potencia para Funciones (3.28) con $u = \tan 4x$ y $n = 3$,

$$f'(x) = 3(\tan 4x)^2 D_x \tan 4x = (3\tan^2 4x) D_x \tan 4x.$$

Luego, por el Teorema (8.20),

$$D_x \tan 4x = (\sec^2 4x) D_x(4x) = (\sec^2 4x)(4) = 4\sec^2 4x.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = (3\tan^2 4x)(4\sec^2 4x) = 12\tan^2 4x \sec^2 4x \quad \bullet$$

EJEMPLO 6 Encontrar $f'(x)$ para **(a)** $f(x) = e^{-3x}\tan 2x$; **(b)** $f(x) = \sec^2(3x - 1)$.

Solución

(a) Usando primero la Regla del Producto y luego los Teoremas (8.20) y (7.14),

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-3x} D_x \tan 2x + (\tan 2x) D_x e^{-3x} \\ &= e^{-3x}(\sec^2 2x)(2) + (\tan 2x)(e^{-3x})(-3) \\ &= e^{-3x}(2 \sec^2 2x - 3 \tan 2x) \end{aligned}$$

(b) Aplicando la Regla de la Potencia y el Teorema (8.20) obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sec (3x - 1) D_x \sec (3x - 1) \\ &= 2 \sec (3x - 1) \sec (3x - 1) \tan (3x - 1)(3) \\ &= 6 \sec^2 (3x - 1) \tan (3x - 1) \end{aligned}$$

•

EJEMPLO 7 Sea $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$. Calcular los máximos y mínimos locales y trazar la gráfica de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución Derivando,

$$f'(x) = 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x.$$

Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, esto se puede escribir

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos x - 4 \operatorname{sen} x \cos x \\ &= 2 \cos x(1 - 2 \operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

La derivada existe para todo x y $f'(x) = 0$ si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ o bien $\cos x = 0$. Por lo tanto, los números críticos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$ son $\pi/6$, $5\pi/6$, $\pi/2$ y $3\pi/2$.

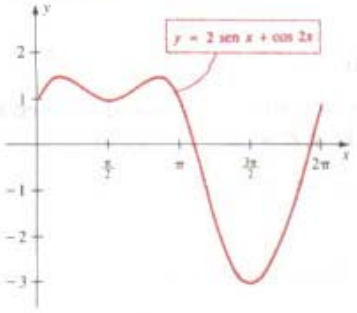
La segunda derivada de f es

$$f''(x) = -2 \operatorname{sen} x - 4 \cos 2x.$$

Sustituyendo x por los números críticos, queda

$$f''(\pi/6) = -3, \quad f''(5\pi/6) = -3, \quad f''(\pi/2) = 2, \quad f''(3\pi/2) = 6.$$

FIGURA 8.17



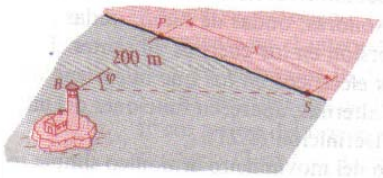
Aplicando el Criterio de la Segunda Derivada se ve que hay máximos locales en $\pi/6$ y $5\pi/6$, y mínimos locales en $\pi/2$ y $3\pi/2$. Por lo tanto,

Máximos locales: $f(\pi/6) = 3/2$ y $f(5\pi/6) = 3/2$
Mínimos locales: $f\pi/2) = 1$ y $f(3\pi/2) = -3$

Usando esta información y situando algunos puntos más obtenemos el croquis de la Figura 8.17. •

EJEMPLO 8 Un faro que se encuentra a 200 m del punto más cercano P de una costa recta gira dando una vuelta completa cada 15 s. Calcular la rapidez con la que el haz de luz se mueve al pasar por un punto a 400 m de P.

FIGURA 8.18



Solución La Figura 8.18 muestra un diagrama del problema. En ella B denota la localización del faro y φ denota el ángulo entre BP y el haz luminoso a un punto S de la costa a x m de P.

A causa de que la luz da cuatro vueltas por minuto, el ángulo φ cambia a razón de 8π radianes por minuto, es decir, $d\varphi/dt = 8\pi$. Usando el triángulo rectángulo PBS vemos que

$$\tan \varphi = \frac{x}{200} \quad \text{o bien} \quad x = 200 \tan \varphi.$$

Por consiguiente, la rapidez con la que el rayo de luz se mueve a lo largo de la orilla es

$$\frac{dx}{dt} = 200 \sec^2 \varphi \frac{d\varphi}{dt} = (200 \sec^2 \varphi)(8\pi) = 1600\pi \sec^2 \varphi.$$

Si $x = 400$, entonces

$$\tan \varphi = 400/200 = 2 \quad \text{and} \quad \sec \varphi = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

Por lo tanto,
$$\frac{dx}{dt} = 1600\pi(\sqrt{5})^2 = 8000\pi \approx 25{,}133 \text{ m/min}.$$ •

Las funciones seno y coseno desempeñan un papel importante en el estudio de las entidades físicas que vibran o tienen un movimiento periódico. Uno de los tipos de movimiento más importantes es el que se describe en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (8.21)

Si un punto P se mueve sobre una recta coordenada l de manera que su distancia $s(t)$ al origen al tiempo t está dada por

$$s(t) = a \cos(\omega t + b)$$

o bien

$$s(t) = a \operatorname{sen}(\omega t + b)$$

donde a y b son números reales arbitrarios y $\omega > 0$, entonces se dice que P está en **movimiento armónico simple**.

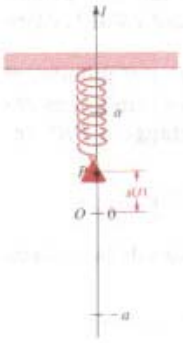
El movimiento armónico simple también se puede definir como aquél en que la aceleración $a(t)$ satisface la condición

$$a(t) = -\omega^2 s(t)$$

para todo t. Puede demostrarse (véase la Sección 19.5) que esta condición es equivalente a la de la Definición (8.21).

En el movimiento armónico simple, el punto P oscila entre los puntos de l con coordenadas $-a$ y a. La **amplitud** del movimiento es el desplazamiento máximo $|a|$ del punto desde el origen. El **periodo** es el tiempo $2\pi/\omega$ que se tarda en completar una oscilación. La **frecuencia** $\omega/2\pi$ es el número de oscilaciones por unidad de tiempo.

FIGURA 8.19



El movimiento armónico simple aparece en diversos tipos de movimientos ondulatorios, tales como las olas formadas en el agua, ondas sonoras, ondas de radio, ondas luminosas y ondas de distorsión en los cuerpos vibrantes. En el análisis de los circuitos eléctricos en los que interviene una tensión y una corriente alternas, aparecen funciones del mismo tipo que las de la Definición (8.21).

Como otro ejemplo del movimiento armónico simple se tiene el de un cuerpo fijo a un muelle o resorte que oscila verticalmente a lo largo de una recta coordenada, como se ilustra en la Figura 8.19. El número $s(t)$ representa la coordenada de un punto P del cuerpo. La amplitud $|a|$ del movimiento es constante cuando no hay fuerzas de fricción que se opongan al movimiento. Cuando existe rozamiento o fricción, la amplitud de la oscilación disminuye con el tiempo y se dice que el movimiento es *amortiguado*.

EJEMPLO 9 El cuerpo que se muestra en la Figura 8.19 está oscilando y su posición al tiempo t está dada por

$$s(t) = 10\cos\frac{\pi}{6}t$$

donde t está en segundos y $s(t)$ en centímetros. Describir el movimiento del cuerpo.

Solución De acuerdo con la Definición (8.1), el movimiento es armónico simple con $a = 10$, $b = 0$ y $\omega = \pi/6$. La amplitud a es de 10 cm. El periodo es $2\pi/\omega = 2\pi/(\pi/6) = 12$. Entonces, hay una oscilación completa cada 12 s. La frecuencia es $\omega/2\pi = (\pi/6)/2\pi = \frac{1}{12}$, es decir, hay $\frac{1}{12}$ de oscilación cada segundo.

Analicemos el movimiento durante el intervalo de tiempo [0, 12]. Las funciones de velocidad y aceleración están dadas por

$$v(t) = s'(t) = 10\left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}t,$$

$$a(t) = v'(t) = -\frac{5\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi^2}{18}\cos\frac{\pi}{6}t.$$

La velocidad se anula en $t = 0$, $t = 6$ y $t = 12$, pues $\operatorname{sen}[(\pi/6)t] = 0$ para estos valores de t. La aceleración se anula en $t = 3$ y $t = 9$, puesto que en estos casos $\cos[(\pi/6)t] = 0$. Los tiempos en que la velocidad y la aceleración son cero sugieren analizar los intervalos de tiempo (0, 3), (3, 6) y (9, 12). La tabla siguiente muestra las características más importantes del movimiento. Los signos de $v(t)$ y $a(t)$ en los intervalos se pueden determinar con valores de prueba (verifique cada dato).

Intervalo de tiempo	Signo de $v(t)$	Dirección del movimiento	Signo de $a(t)$	Comportamiento de $v(t)$	Rapidez $\lvert v(t)\rvert$
(0, 3)	−	Hacia abajo	−	Decreciente	Creciente
(3, 6)	−	Hacia abajo	+	Creciente	Decreciente
(6, 9)	+	Hacia arriba	+	Creciente	Creciente
(9, 12)	+	Hacia arriba	−	Decreciente	Decreciente

Si $0 < t < 3$, la velocidad $v(t)$ es negativa y decreciente; es decir, $v(t)$ se hace *más* negativa. Esto implica que la rapidez $|v(t)|$ es *creciente*. Si $3 < t < 6$, la velocidad es negativa y creciente ($v(t)$ se hace *menos* negativa). En este caso la rapidez de P es *decreciente* en el intervalo de tiempo (3, 6). Se pueden hacer observaciones similares para los intervalos (6, 9) y (9, 12).

El movimiento de P se puede resumir como sigue: en $t = 0$, $s(0) = 10$ y P está 10 cm arriba del origen O. Luego se mueve hacia abajo ganando rapidez hasta llegar al origen O en $t = 3$. A partir de ahí comienza a disminuir su rapidez hasta llegar a un punto 10 cm abajo de O, al cabo de 6 s. Entonces la dirección del movimiento se invierte y el cuerpo se mueve hacia arriba aumentando su rapidez hasta llegar a O en $t = 9$, después de lo cual comienza a disminuir hasta llegar a su posición inicial al cabo de 12 s. En ese momento la dirección del movimiento se vuelve a invertir y se repite lo mismo indefinidamente. •

EJERCICIOS 8.3

Ejercicios 1-40: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

1. $4 \cos x$
2. $x \operatorname{sen} x$
3. $\operatorname{sen}(x^2 + 2)$
4. $\cos(4 - 3x)$
5. $\cos^5 3x$
6. $\operatorname{sen}^4(x^3)$
7. $x^3 \cos \dfrac{1}{x}$
8. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$
9. $\tan(8x + 3)$
10. $\cot \frac{1}{2}x$
11. $\sec \sqrt{x - 1}$
12. $\csc(x^2 + 4)$
13. $\cot(x^3 - 2x)$
14. $\tan \sqrt[3]{5 - 6x}$
15. $\cos(3x^2) + \cos^2 3x$
16. $\tan^3 6x$
17. $\csc^2 2x$
18. $\sec e^{-2x}$
19. $x^2 \csc 5x$
20. $x \csc(1/x)$
21. $\tan^2 x \sec^3 x$
22. $x^2 \sec^3 4x$
23. $(\operatorname{sen} 5x - \cos 5x)^5$
24. $\operatorname{sen} \sqrt{x} + \sqrt{\operatorname{sen} x}$
25. $\cot^3(3x + 1)$
26. $e^{\cos 2x}$
27. $\dfrac{\cos 4x}{1 - \operatorname{sen} 4x}$
28. $\dfrac{\sec 2x}{1 + \tan 2x}$
29. $\ln|\csc x + \cot x|$
30. $\operatorname{sen}(2x + 3)^4$
31. $e^{-3x} \tan \sqrt{x}$
32. $\ln \csc^2 3x$
33. $\ln \ln \sec 2x$
34. $\csc(\cot 4x)$
35. $\tan^3 2x - \sec^3 2x$
36. $(\tan 2x - \sec 2x)^3$
37. $\dfrac{\csc 3x}{x^3 + 1}$
38. $4x^3 - x^2 \cot^3(1/x)$
39. $x^{\cot x}$
40. $(\tan x)^{3x}$

Ejercicios 41-46: Determine dy/dx y d^2y/dx^2.

41. $y = \sec^2 3x$
42. $y = \cot^3 5x$
43. $y = \operatorname{sen} x - x \cos x$
44. $y = \ln \tan x$
45. $y = \sqrt{\tan x}$
46. $y = \dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1}$

Ejercicios 47-50: Encuentre y' por derivación implícita.

47. $y^2 = x \cos y$
48. $xy = \tan y$
49. $e^x \cot y = xe^{2y}$
50. $y^2 + 1 = x^2 \sec y$

Ejercicios 51-56: Calcule los máximos y mínimos locales de f en el intervalo $[0, 2\pi]$ y determine dónde f es creciente o decreciente en $[0, 2\pi]$. Trace la gráfica de f correspondiente a $0 \le x \le 2\pi$.

51. $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$
52. $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$
53. $f(x) = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$
54. $f(x) = x + 2 \cos x$
55. $f(x) = 2 \cos x + \operatorname{sen} 2x$
56. $f(x) = 2 \cos x + \cos 2x$
57. Halle los máximos y mínimos locales y trace la gráfica de $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le 4\pi$.
58. Halle los máximos y mínimos locales de $f(x) = e^{-x} \sec x$ para $0 \le x \le 2\pi$.

Ejercicios 59-60: Calcule el máximo y el mínimo absolutos de f en el intervalo $[a, b]$.

59. $f(x) = \tan x - \sqrt{2}\sec x$, $[0, \pi/3]$

60. $f(x) = 3\cot x + 4x$, $[\pi/6, 5\pi/6]$

Ejercicios 61-62: Encuentre ecuaciones para las rectas tangente y normal a la gráfica de la ecuación en el punto P.

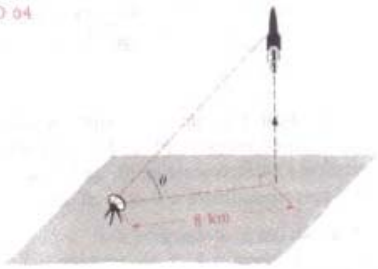
61. $y = \frac{1}{8}\csc^3 x$; $P(\pi/6, 1)$

62. $y = \tan x - \sqrt{2}\operatorname{sen} x$; $P(3\pi/4, -2)$

63. Un avión vuela con velocidad y altura constantes a lo largo de una recta que pasa directamente arriba de una estación de radar en tierra. En el momento en que el avión está a 20 km de la estación, un observador nota que su ángulo de elevación es 30° y va aumentando a razón de 0.5° por segundo. Calcule la velocidad del avión.

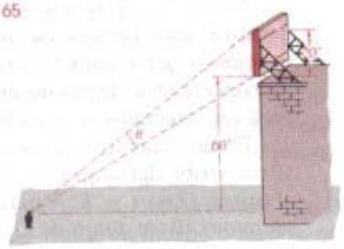
64. Un cohete despega verticalmente desde un punto a 8 km de una estación rastreadora que se encuentra a la misma altitud (véase la figura). Durante los primeros 20 s de vuelo, el ángulo de elevación θ aumenta a una razón constante de 2° por segundo. Calcule la velocidad del cohete cuando el ángulo de elevación es de 30°.

EJERCICIO 64



65. Una cartelera rectangular de 20 pie de altura está instalada arriba de un edificio de manera que su orilla inferior está 60 pie arriba del nivel de los ojos de un observador (véase la figura). ¿A qué distancia del edificio se debe colocar el observador para que el ángulo θ entre las rectas que van de sus ojos a la orilla de arriba y a la de abajo de la cartelera sea máxima? (Este ángulo será aquél con el que se obtiene una mejor vista del cartel.)

EJERCICIO 65



66. Un hombre en una pequeña isla I, que se encuentra a k kilómetros del punto más cercano A sobre una costa recta, desea llegar a un campamento que se encuentra a d kilómetros de A sobre la misma costa (véase la figura). El hombre planea nadar hasta algún punto P de la costa y caminar el resto del trayecto. Suponiendo que disipa c_1 calorías por kilómetro cuando nada y c_2 calorías por kilómetro cuando camina y que $c_1 > c_2$.

(a) Encuentre una fórmula para el número total c de calorías que disipa en el recorrido.

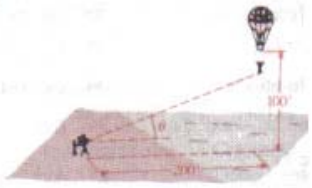
(b) ¿Para qué ángulo AIP el número de calorías c es mínimo?

EJERCICIO 66



67. Un acróbata de cine salta desde un globo de aire caliente que permanece a una altura constante de 100 pie sobre un lago. Una cámara de televisión que se encuentra en tierra a 200 pie del punto del lago que está directamente abajo del globo, lo va enfocando durante su descenso (véase la figura). ¿Con qué rapidez va cambiando el ángulo de elevación θ de la cámara a los 2 s de haber saltado? (Desprecie la altura de la cámara.)

EJERCICIO 67



68. Si un objeto que tiene un peso W se arrastra

bre un plano horizontal con una fuerza aplicada a una cuerda que está atada al objeto y la cual forma un ángulo θ con la horizontal, entonces la magnitud de la fuerza de tiro está dada por

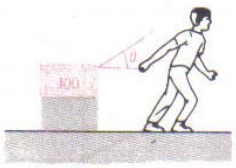
$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción*. Un hombre tira una caja con masa de 100 kg sobre una superficie para la que $\mu = 0.2$ (véase la figura).

(a) Usando diferenciales, calcule aproximadamente la diferencia entre las fuerzas aplicadas cuando el ángulo θ cambia de 45° a 46°.

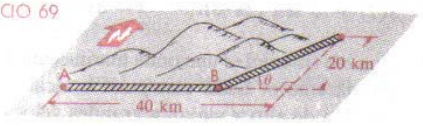
(b) Calcule el ángulo para el cual F es mínima cuando $\mu = \sqrt{3}/3$.

EJERCICIO 68



69. Se va a construir una vía de ferrocarril de un pueblo A a un pueblo C, que cambiará su dirección θ grados hacia C en un punto B (véase la figura). Debido a las montañas que hay entre A y C, el punto B de la curva debe estar por lo menos 20 km al este de A. El costo de la construcción es de \$50 000 (dólares) por kilómetro entre A y B, y de \$100 000 por kilómetro entre B y C. Calcule el ángulo θ para el cual el costo de la construcción es mínimo.

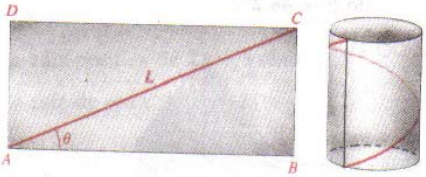
EJERCICIO 69



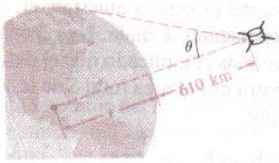
70. Se desea construir un cilindro juntando los lados AD y BC de un rectángulo de material elástico (véase la figura). Para hacer más resistente el cilindro, se colocará un alambre de longitud fija L según la diagonal del rectángulo. Calcule el ángulo θ para el cual el volumen del cilindro es máximo.

71. Un laboratorio espacial gira alrededor de la Tierra a una altura de 610 km. Un astronauta mira hacia el horizonte a un ángulo θ de 65.8° de la vertical (véase la figura) y el máximo error posible en la medición del ángulo es de 0.5°. Usando diferenciales, estime el error que el astronauta puede cometer al calcular el radio de la Tierra con estos datos.

EJERCICIO 70

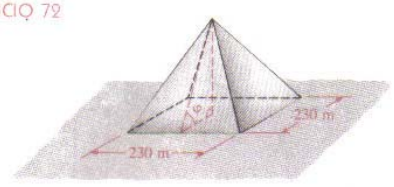


EJERCICIO 71



72. La Gran Pirámide de Egipto tiene una base cuadrada de 230 m de lado (véase la figura). Para calcular la altura h de esta gigantesca construcción, un observador se coloca en el punto medio de uno de los lados y mira hacia el vértice de la pirámide. Encuentra que el ángulo φ de elevación es de 52°. ¿Cuán precisa debe ser la medición del ángulo para que el error en el cálculo de h esté entre -1 y 1 m?

EJERCICIO 72



73. Un cilindro circular recto de radio R está coronado por un cono (véase la figura). El cilindro no tiene tapas y el volumen total V es una constante previamente especificada.

(a) Demuestre que el área total S de la superficie está dada por

$$S = \frac{2V}{R} + \pi R^2 \left(\csc \theta - \frac{2}{3} \cot \theta \right)$$

(b) Demuestre que S alcanza un mínimo cuando $\theta \approx 48.2°$.

EJERCICIO 73



74. En el problema clásico de la estructura de un panal, un prisma hexagonal de radio (y lado) fijo R se corona con tres rombos idénticos que se encuentran en un vértice común (véase la figura). La base del prisma es abierta y el volumen total *es una constante* V *dada. Un razonamiento geométrico* más complicado que el del Ejercicio 73, demuestra que el área total S de la superficie está dada por

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{3}\frac{V}{R} - \frac{3}{2}R^2 \cot\theta + \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 \csc\theta.$$

Demuestre que S alcanza su valor mínimo cuando $\theta \approx 54.7°$. (Se sabe que las abejas construyen sus panales de manera que el total de cera requerida es mínimo.)

EJERCICIO 74



75. Dos pasillos de 3 m y 4 m de ancho se encuentran formando un ángulo recto. Evalúe la longitud de la barra rígida más larga que puede transportarse horizontalmente dando vuelta a la esquina, como se muestra en la figura (desprecie el grosor de la barra).

76. Cuando la luz viaja de un punto a otro lo hace a lo largo de la trayectoria que requiere el menor tiempo. Suponiendo que la luz tiene velocidad v_1 en el aire y v_2 en el agua, con $v_1 > v_2$, demuestre que la trayectoria que requiere el mínimo tiempo cuando la luz va de un punto P en el aire a un punto Q en el agua (véase la figura) es aquella para la cual

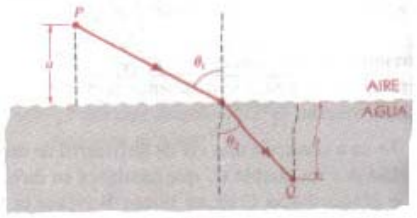
$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

(Éste es un ejemplo de la *ley de refracción de Snell.*)

EJERCICIO 75



EJERCICIO 76



Ejercicios 77-80: Se tiene que s es la función de posición de una partícula en movimiento armónico simple y t es el tiempo en segundos. Calcule la amplitud, el periodo y la frecuencia, y describa el movimiento de la partícula durante una oscilación completa.

77. $s(t) = 5 \cos(\pi/4)t$

78. $s(t) = 4 \operatorname{sen} \pi t$

79. $s(t) = 6 \operatorname{sen}(2\pi/3)t$

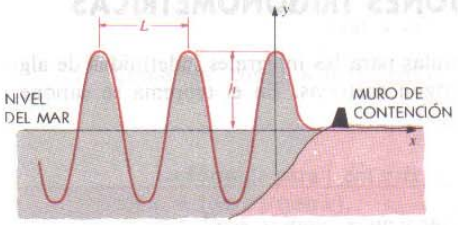
80. $s(t) = 3 \cos 2t$

81. Una *ola tsunami* es una onda marina causada por un maremoto. Estas olas pueden alcanzar más de 30 m de alto y viajan a grandes velocidades. En geofísica se representan las olas tsunami mediante expresiones trigonométricas de la forma $y = a \cos bt$, y se usan estas expresiones para estimar la efectividad de muros de contención. Una ola tiene una altura de 8 m, un periodo de 30 s y viaja a 60 m/s.

(a) Sea (x, y) un punto sobre la ola representada en la figura. Exprese y como una función del tiempo si $y = 8$ m cuando $t = 0$.

(b) ¿Cuán rápidamente asciende (o desciende) la ola cuando $y = 3$ m?

EJERCICIO 81

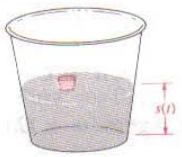


82. Un tapón de corcho sube y baja en un recipiente con agua de manera que la distancia del fondo del recipiente al centro del corcho al tiempo $t \geq 0$, está dada por $s(t) = 12 + \cos(\pi t)$, donde $s(t)$ se expresa en centímetros y t en segundos (véase la figura).

(a) Calcule la velocidad del corcho cuando $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, $t = \frac{3}{2}$ y $t = 2$.

(b) ¿Durante qué intervalos de tiempo el corcho está subiendo? ¿Cuándo está bajando?

EJERCICIO 82



83. Un punto $P(x, y)$ se mueve con rapidez constante alrededor de una circunferencia que tiene ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. Demuestre que el punto $Q(x, 0)$ que es la proyección sobre el eje x del punto P, tiene movimiento armónico simple.

84. Un punto P se mueve sobre una recta coordenada de manera que

$$s(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t,$$

pruebe que el movimiento de P es armónico simple

(a) usando el comentario a continuación de la Definición (8.21).

(b) usando únicamente métodos trigonométricos. (*Sugerencia:* Demuestre que $s(t) = A \cos(\omega t - c)$ para algunas constantes A y c.)

Ejercicios 85-86: Use el método de Newton para calcular la raíz real indicada con una precisión de cuatro decimales.

85. La raíz positiva de $2x - 3 \operatorname{sen} x = 0$

86. La raíz de $\cos x + x = 2$

Ejercicios 87-88: Use el método de Newton para calcular todas las raíces reales de la ecuación con una precisión de dos decimales.

87. $2x - 5 - \operatorname{sen} x = 0$ **88.** $x^2 - \cos 2x = 0$

89. Se pueden generar estimaciones de π aplicando el método de Newton a $f(x) = \operatorname{sen} x$ y tomando $x_1 = 3$.

(a) Calcule las primeras cinco aproximaciones a π.

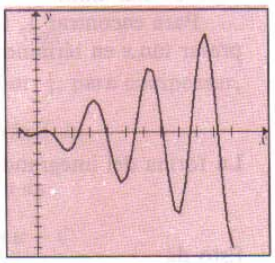
(b) ¿Qué sucede con las aproximaciones si $x_1 = 6$?

90. Un ejemplo notable del fenómeno de *resonancia* se tiene cuando una cantante ajusta su tono de voz haciendo que se rompa una copa de cristal. En el análisis de tales vibraciones aparecen funciones dadas por $f(x) = ax \cos bx$. En la figura aparece una gráfica generada por computadora de $f(x) = x \cos 2x$.

(a) Demuestre que la gráfica tiene tangentes horizontales en los valores de x para los cuales $\cos 2x - 2x \operatorname{sen} 2x = 0$.

(b) Use el método de Newton para calcular las raíces entre 1 y 2 de la ecuación en la parte (a) con una precisión de tres decimales.

EJERCICIO 90



8.4 INTEGRALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El siguiente teorema presenta las fórmulas para las integrales indefinidas de algunas de las más importantes expresiones trigonométricas. En el teorema se supone que $u = g(x)$, donde g es derivable.

TEOREMA (8.22)

$$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

Demostración Se verificarán algunas de las fórmulas y las demás quedarán como ejercicio. Basta considerar el caso $u = x$, pues las fórmulas para $u = g(x)$ se obtienen aplicando el Teorema (5.31).

La fórmula de integración $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$ es consecuencia del hecho de que $D_x(-\cos x) = \operatorname{sen} x$. Análogamente, $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ se cumple porque $\operatorname{sen} x$ es una antiderivada de $\cos x$.

Para encontrar $\int \tan x\,dx$, se usa primero una identidad trigonométrica para expresar $\tan x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, como sigue:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx.$$

La forma del integrando del lado derecho sugiere hacer la sustitución

$$v = \cos x, \qquad dv = -\operatorname{sen} x\,dx.$$

Esto da

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{1}{\cos x} \operatorname{sen} x\,dx = -\int \frac{1}{v}\,dv$$

Si $\cos x \neq 0$, entonces por el Teorema (7.16),

$$\int \tan x\, dx = -\ln|v| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Como $-\ln|\cos x| = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, la fórmula anterior se puede escribir

$$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C.$$

La fórmula para $\int \cot x\, dx$ se obtiene de manera parecida comenzando por escribir $\cot x = (\cos x)/(\operatorname{sen} x)$.

Para obtener una fórmula para $\int \sec x\, dx$ se procede como sigue:

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx.$$

Usando la sustitución

$$v = \sec x + \tan x, \qquad dv = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx$$

se obtiene

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{1}{v}\, dv$$

$$= \ln|v| + C$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Para verificar una fórmula como $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$, basta observar que $D_x \tan x = \sec^2 x$.

En los siguientes ejemplos se usarán muchas de las fórmulas del Teorema (8.22). En cada ejemplo se supone que $u = g(x)$, donde $g(x)$ es la expresión al lado derecho del símbolo sen, cot, sec, etcétera, de la función trigonométrica. De la Definición (3.22), se deduce que $du = g'(x)\, dx$.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int \operatorname{sen} 5x\, dx$

Solución Usamos la sustitución

$$u = 5x, \qquad du = 5\, dx$$

Multiplicando el integrando por 5 y la integral por $\frac{1}{5}$, para compensar,

$$\int \operatorname{sen} 5x\, dx = \tfrac{1}{5} \int (\operatorname{sen} 5x) 5\, dx$$

$$= \tfrac{1}{5} \int \operatorname{sen} u\, du$$

$$= -\tfrac{1}{5} \cos u + C$$

$$= -\tfrac{1}{5} \cos 5x + C$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\int x \cot x^2\, dx$.

Solución Para obtener la forma $\int \cot u\, du$, hacemos la sustitución

$$u = x^2, \qquad du = 2x\, dx.$$

Luego se multiplica por 2 el integrando como sigue:

$$\int x \cot x^2\, dx = \frac{1}{2}\int (\cot x^2) 2x\, dx$$

Como $u = x^2$ y $du = 2x\, dx$,

$$\int x \cot x^2\, dx = \frac{1}{2}\int \cot u\, du = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x^2| + C. \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \sec x(\sec x + \tan x)\, dx$.

Solución Cambiando el integrando y usando luego dos de las fórmulas del Teorema (8.22),

$$\int \sec x\,(\sec x + \tan x)\, dx = \int (\sec^2 x + \sec x \tan x)\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \sec x \tan x\, dx$$

$$= \tan x + \sec x + C. \quad \bullet$$

Como de costumbre, en la solución del Ejemplo 3, las constantes de las dos integrales indefinidas se combinaron en una sola constante C.

EJEMPLO 4 Evaluar $\int \dfrac{\csc^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Solución Primero escribimos

$$\int \frac{\csc^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int (\csc^2 \sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Luego hacemos la sustitución

$$u = \sqrt{x}, \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx.$$

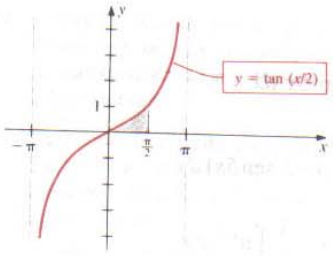
y resulta la fórmula $\int \csc^2 u\, du$ multiplicando por $\frac{1}{2}$ como sigue:

$$\int \frac{\csc^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int (\csc^2 \sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= 2\int \csc^2 u\, du = -2\cot u + C$$

$$= -2\cot \sqrt{x} + C. \quad \bullet$$

FIGURA 8.20



EJEMPLO 5 Calcular el área A de la región bajo la gráfica de $y = \tan(x/2)$ entre $x = 0$ y $x = \pi/2$.

Solución En la Figura 8.20 se muestra la región citada. Como en la Sección 6.1,

$$A = \int_0^{\pi/2} y\,dx = \int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,dx.$$

Ahora se hace la sustitución

$$u = \frac{x}{2}, \qquad du = \frac{1}{2}\,dx$$

y notamos que si $x = 0$, entonces $u = 0$ y si $x = \pi/2$, entonces $u = \pi/4$. Por tanto,

$$\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \tan u\,du = 2\ln\sec u\Big]_0^{\pi/4}.$$

En este caso puede omitirse el signo de valor absoluto que aparece en el Teorema (8.22) porque $\sec u$ es positivo para u entre 0 y $\pi/4$. Como $\ln\sec(\pi/4) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$ y $\ln\sec 0 = \ln 1 = 0$, resulta que

$$\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}\ln 2 = \ln 2 \approx 0.69. \quad \bullet$$

EJEMPLO 6 Evaluar $\int e^{2x}\sec e^{2x}\,dx$.

Solución Tomamos

$$u = e^{2x}, \qquad du = 2e^{2x}\,dx$$

y se procede como sigue:

$$\int e^{2x}\sec e^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}\int (\sec e^{2x})2e^{2x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \sec u\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|\sec e^{2x} + \tan e^{2x}| + C. \quad \bullet$$

EJEMPLO 7 Evaluar $\int(\csc x - 1)^2\,dx$.

Solución

$$\int(\csc x - 1)^2\,dx = \int(\csc^2 x - 2\csc x + 1)\,dx$$

$$= \int \csc^2 x\,dx - 2\int \csc x\,dx + \int dx$$

$$= -\cot x - 2\ln|\csc x - \cot x| + x + C. \quad \bullet$$

EJEMPLO 8 Evaluar $\int \sqrt{\cos 5x}\, \operatorname{sen} 5x\, dx$.

Solución Si tomamos

$$u = \cos 5x, \qquad du = -5 \operatorname{sen} 5x\, dx$$

entonces

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\cos 5x}\, \operatorname{sen} 5x\, dx &= -\frac{1}{5}\int \sqrt{\cos 5x}(-5 \operatorname{sen} 5x)\, dx \\ &= -\frac{1}{5}\int \sqrt{u}\, du = -\frac{1}{5}\int u^{1/2}\, du \\ &= -\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C \\ &= -\frac{2}{15}(\cos 5x)^{3/2} + C. \quad \bullet\end{aligned}$$

En el Capítulo 9 se discutirán otros métodos para integrar expresiones trigonométricas.

EJERCICIOS 8.4

Ejercicios 1-34: Evalúe la integral.

1. $\int \cos 4x\, dx$
2. $\int \sec^2 5x\, dx$
3. $\int \tan 3x \sec 3x\, dx$
4. $\int x^2 \cot x^3 \csc x^3\, dx$
5. $\int (\tan 3x + \sec 3x)\, dx$
6. $\int \dfrac{1}{\sec 2x}\, dx$
7. $\int \dfrac{1}{\cos 2x}\, dx$
8. $\int \dfrac{\cot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$
9. $\int x \csc^2 (x^2 + 1)\, dx$
10. $\int (x + \csc 8x)\, dx$
11. $\int \cot 6x \operatorname{sen} 6x\, dx$
12. $\int \operatorname{sen} 2x \tan 2x\, dx$
13. $\int \cos 3x \sqrt[4]{\operatorname{sen} 3x}\, dx$
14. $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}\, dx$
15. $\int \operatorname{sen} x(1 + \sqrt{\cos x})^2\, dx$
16. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$
17. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$
18. $\int \dfrac{\cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}\, dx$
19. $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\, dx$
20. $\int \csc^2 x \cot x\, dx$
21. $\int \dfrac{\tan^2 2x}{\sec 2x}\, dx$
22. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx$
23. $\int_{\pi/6}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$
24. $\int \dfrac{\cos^2 x}{\csc x}\, dx$
25. $\int \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \cos x}\, dx$
26. $\int \dfrac{e^x}{\cos e^x}\, dx$
27. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$
28. $\int_0^{\pi/4} (1 + \sec x)^2\, dx$
29. $\int e^x(1 + \tan e^x)\, dx$
30. $(\csc^2 x)2^{\cot x}\, dx$
31. $\int \dfrac{e^{\cos x}}{\csc x}\, dx$
32. $\int \dfrac{\tan e^{-3x}}{e^{3x}}\, dx$
33. $\int \dfrac{\sec^2 x}{2 \tan x + 1}\, dx$
34. $\int \dfrac{\sec x \tan x}{1 + 3 \sec x}\, dx$
35. Calcule el área de la región bajo la gráfica de $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.
36. Obtenga el área de la región bajo la gráfica de $y = 2 \tan x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.
37. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = \sec x$, $y = x$, $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$.
38. Determine el área de la región acotada por las

gráficas de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = -\pi/2$ y $x = \pi/6$.

39. La región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \sec x$, $x = -\pi/3$, $x = \pi/3$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido resultante.

40. La región localizada entre la gráfica de $y = \tan(x^2)$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = \sqrt{\pi}/2$, gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.

41. Verifique la fórmula

$$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

42. Verifique la fórmula

$$\int \cot x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

Ejercicios 43-44: Verifique la fórmula evaluando la integral de dos maneras diferentes. ¿Cómo se pueden conciliar las dos respuestas?

43. $\int \tan x \sec^2 x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + C = \frac{1}{2}\sec^2 x + D$

44. $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$
$= -\frac{1}{2}\cos^2 x + D = -\frac{1}{4}\cos 2x + E$

Ejercicios 45-46: Use (a) la Regla del Trapecio y (b) la Regla de Simpson con el valor de n indicado, para calcular aproximadamente la integral definida. Use aproximaciones a $f(x_k)$ con una precisión de cuatro decimales y redondee las respuestas a dos decimales.

45. $\int_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx,\ n = 6$

46. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx,\ n = 4$

Ejercicios 47-48: (a) Plantee una integral para calcular la longitud de arco L de la gráfica de la ecuación entre A y B. (b) Escriba la fórmula para estimar L por medio de la Regla de Simpson con $n = 4$. (c) Calcule aproximación dada por la fórmula en la parte (b).

47. $y = \sec \frac{1}{2}x$; $A(0, 1)$, $B(\pi/2, \sqrt{2})$

48. $y = \tan x$; $A(0, 0)$, $B(\pi/4, 1)$

49. Una especie que tiene *crecimiento de población por temporada*, aumenta su población $q(t)$ al tiempo t (en años) durante la primavera y el verano, pero disminuye durante el otoño y el invierno. Para describir este tipo de crecimiento se usa a veces la ecuación diferencial $q'(t)/q(t) = k \operatorname{sen} 2\pi t$ con $k > 0$, donde $t = 0$ corresponde al primer día de la primavera.

(a) Demuestre que la población $q(t)$ tiene crecimiento por temporada.

(b) Encuentre una fórmula explícita para $q(t)$, suponiendo que $q_0 = q(0)$.

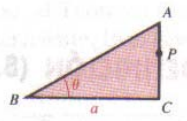
50. Los extremos de un abrevadero de 6 pie de largo tienen la forma de la gráfica de $y = \sec x$ entre $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$, donde x se expresa en pies. Suponiendo que el abrevadero está lleno,

(a) plantee una integral definida con respecto a y, que sea igual al trabajo de bombeo que se requiere para extraer el agua por arriba del abrevadero.

(b) Cambie la integral en (a) a una integral con respecto a x y utilice la Regla de Simpson con $n = 4$ en el intervalo $[-\pi/3, \pi/3]$ para estimar el trabajo requerido.

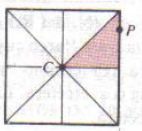
51. Dado el triángulo rectángulo ABC que se muestra en la figura, sea θ el ángulo ABC (en radianes), sea a la longitud del lado BC y P un punto sobre el lado AC. Demuestre que la distancia media de P a B es $(a/\theta)\ln(\sec\theta + \tan\theta)$. (*Sugerencia:* Exprese la longitud del lado BP como una función f del ángulo PBC y calcule el valor medio de f.)

EJERCICIO 51



52. Consulte el Ejercicio 51. En un estudio realizado en 1970 de 244 áreas urbanizadas, se encontró que sólo diez de ellas tenían formas considerablemente diferentes de un círculo, un cuadrado, un hexágono o un rectángulo de 2 por 1. Sea C el centro de una ciudad, P un punto en el límite con los suburbios de la ciudad y A el área de la zona urbana en kilómetros cuadrados. Suponiendo que la forma de la ciudad es un cuadrado (véase la figura) o un hexágono y usando la fórmula del Ejercicio 51, demuestre que la distancia media de la frontera al centro de la ciudad es $0.56\sqrt{A}$ kilómetros.

EJERCICIO 52



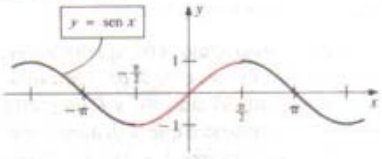
8.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si f es una función biunívoca con dominio D y contradominio E, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio E y contradominio D. Además,

$$y = f^{-1}(x) \quad \text{si y sólo si} \quad f(y) = x$$

para todo x en D y para todo y en E (véase la Sección 7.1). Las funciones trigonométricas no tienen funciones inversas porque no son biunívocas. Sin embargo, si se restringen sus dominios, pueden obtenerse funciones que toman los mismos valores que las funciones trigonométricas (sobre los dominios de menor extensión) y que *sí* tienen funciones inversas.

FIGURA 8.21



Consideremos primero la función seno cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su contradominio es el intervalo cerrado $[-1, 1]$ (véase la Figura 8.21). La función seno no es biunívoca porque, por ejemplo, en los números $\pi/6$, $5\pi/6$ y $-7\pi/6$ toma el mismo valor $\frac{1}{2}$. Si se restringe el dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$, como se ilustra en la porción coloreada de la curva en la Figura 8.21, se obtiene una función creciente que toma todos los valores de la función seno una y sólo una vez. Esta nueva función con dominio $[-\pi/2, \pi/2]$ y contradominio $[-1, 1]$, es continua y creciente, y entonces, por el Teorema (7.27), tiene una función inversa que también es continua y creciente. La función inversa tiene dominio $[-1, 1]$ y contradominio $[-\pi/2, \pi/2]$. Esto justifica la siguiente definición.

DEFINICIÓN (8.23)

La función **seno inverso**, que se denota por sen^{-1}, se define mediante

$$y = \text{sen}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \text{sen}\, y = x$$

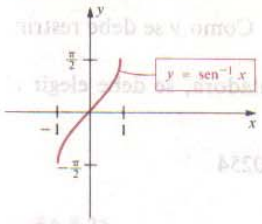
para todo $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

La función seno inverso también se llama función **arco seno** y se denota por $\text{arcsen}\, x$ en lugar de $\text{sen}^{-1} x$.* El símbolo $^{-1}$ en sen^{-1} no debe considerarse un exponente sino sólo un signo para denotar la inversa de una función o función inversa. Obsérvese que por la Definición (8.23),

$$-\frac{\pi}{2} \le \text{sen}^{-1} x \le \frac{\pi}{2} \quad \text{o bien} \quad -\frac{\pi}{2} \le \text{arcsen}\, x \le \frac{\pi}{2}.$$

* **(N. del R.)** La notación "arc sen x" antecedió a la más usada actualmente de "$\text{sen}^{-1} x$". Su origen es la frase "arco cuyo seno es x". Lo correspondiente a las demás funciones inversas es arc cos, arc tan, etcétera. (El término "arco" tiene el significado de "ángulo en radianes".) Se usó también la notación áng sen, áng cos, etcétera. Las notaciones sen^{-1}, $\cos^{-1}$, etc., pueden leerse apropiadamente como **antiseno**, **anticoseno** etcétera.

FIGURA 8.22



Se puede trazar la gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$ usando el método de la Sección 7.2 para representar gráficamente una función inversa, efectuando la reflexión de la parte coloreada de la Figura 8.21 con respecto a la recta $y = x$. (También se puede obtener graficando $x = \text{sen}\, y$ para $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.) Resulta así la Figura 8.22.

Como sen y sen^{-1} son funciones inversas entre sí,

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

y

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Estas fórmulas también pueden escribirse

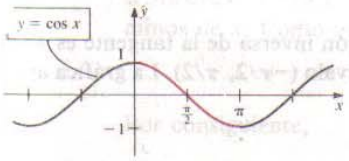
$$\text{arcsen}(\text{sen}\, x) = x \quad \text{y} \quad \text{sen}(\text{arcsen}\, x) = x.$$

EJEMPLO 1 Evaluar $\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$ y $\text{arcsen}(-\frac{1}{2})$.

Solución Si $y = \text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$, entonces $\text{sen}\, y = \sqrt{2}/2$ y por lo tanto, $y = \pi/4$. Nótese que es necesario escoger y en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Un número como $3\pi/4$ es una respuesta incorrecta a pesar de que $\text{sen}(3\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

Si $y = \text{arcsen}(-\frac{1}{2})$, entonces $\text{sen}\, y = -\frac{1}{2}$ y, por consiguiente, $y = -\pi/6$. •

FIGURA 8.23



Pueden definirse análogamente las funciones inversas de las otras cinco funciones trigonométricas. Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo $[0, \pi]$ (véase la porción coloreada de la Figura 8.23), se obtiene una función continua y decreciente que, por el Teorema (7.28), tiene una función inversa continua y decreciente. Esto lleva a la siguiente definición.

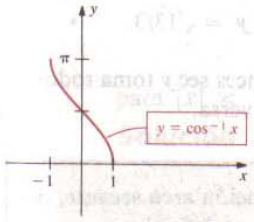
DEFINICIÓN (8.24)

La función **coseno inverso**, que se denota por $\cos^{-1}$, se define por

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \cos y = x$$

para $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

FIGURA 8.24



La función inversa del coseno se llama también función **arco coseno** y se emplea entonces la notación $\arccos x$ en lugar de $\cos^{-1} x$. Adviértase que

$$\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

La gráfica de la función coseno inverso se puede trazar reflejando la porción coloreada de la Figura 8.23 con respecto a la recta $y = x$. Esto da el croquis que se muestra en la Figura 8.24. También podría usarse la ecuación $x = \cos y$, con $0 \leq y \leq \pi$, para situar puntos de la gráfica.

EJEMPLO 2 Calcular $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$.

Solución Si $y = \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$, entonces $\cos y = -\sqrt{3}/2$. Como y se debe restringir al intervalo $[0, \pi]$, resulta que $y = 5\pi/6$.

Para obtener el valor de $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$ usando una calculadora, se debe elegir el modo de radianes y proceder como sigue:

INTRODUCIR: $-\sqrt{3}/2 \approx -0.8660254$

PULSAR [INV] [COS] : 2.6179939.

La expresión decimal que resulta es una aproximación a $5\pi/6$. •

Si se restringe el dominio de la función tangente al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, se llega a una función biunívoca. Esto conduce a la siguiente definición.

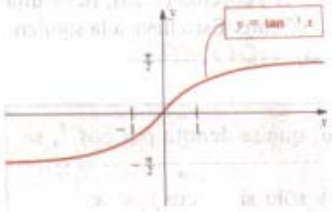
DEFINICIÓN (8.25)

La función **tangente inversa**, o función **arco tangente**, que se denota por $\tan^{-1}$, o bien arctan, se define por

$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \quad \text{si y sólo si} \quad \tan y = x$$

para todo número real x y $-\pi/2 < y < \pi/2$.

FIGURA 8.25



El dominio de la función inversa de la tangente es $\mathbb{R}$ y su contradominio es el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. La gráfica aparece en la Figura 8.25.

EJEMPLO 3 Calcular $\sec(\arctan \frac{2}{3})$ sin usar calculadora ni tablas.

Solución Si $y = \arctan \frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Aplicando $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ y el hecho de que $\sec y > 0$ para $0 < y < \pi/2$,

$$\sec y = \sqrt{1 + \tan^2 y} = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Por lo tanto, $\sec(\arctan \frac{2}{3}) = \sec y = \sqrt{13}/3$. •

Si y recorre los dos intervalos $[0, \pi/2)$ y $[\pi, 3\pi/2)$, entonces $\sec y$ toma todos sus valores una y sólo una vez y puede definirse una función inversa.

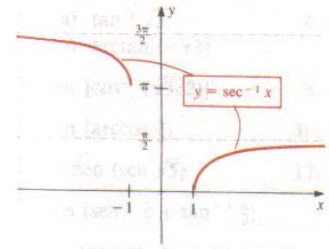
DEFINICIÓN (8.26)

La función **secante inversa**, o función **arco secante**, denotada por $\sec^{-1}$, o bien **arcsec**, se define por

$y = \sec^{-1} x = \operatorname{arcsec} x$ si y sólo si $\sec y = x$ para $|x| \geq 1$ y y en $[0, \pi/2)$ o en $[\pi, 3\pi/2)$.

En la Figura 8.26 aparece la gráfica de $y = \sec^{-1} x$. Los valores de y se restringieron a los intervalos que se indican en la Definición (8.26) en vez de a los intervalos "más naturales" $[0, \pi/2)$ y $(\pi/2, \pi]$, porque de esta manera la fórmula de la derivada de arcsec es más sencilla. En la siguiente sección se demostrará que $D_x \sec^{-1} x = 1/(x\sqrt{x^2-1})$. Entonces, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \sec^{-1} x$ es negativa si $x < -1$ y positiva si $x > 1$ (véase la Figura 8.26). Si se utilizan los intervalos más naturales, la pendiente es siempre positiva y $D_x \sec^{-1} x = 1/(|x|\sqrt{x^2-1})$.

FIGURA 8.26



Los siguientes ejemplos muestran algunas manipulaciones con las funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 4 Escribir $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$ como una expresión algebraica en x para $-1 \leq x \leq 1$.

Solución Sea $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. Entonces, $\operatorname{sen} y = x$. Deseamos expresar $\cos y$ en términos de x. Como $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, resulta que $\cos y \geq 0$ y por lo tanto,

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Por consiguiente,

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

FIGURA 8.27
$y = \operatorname{sen}^{-1} x$



La última identidad es clara geométricamente si $0 < x < 1$. En este caso, $0 < y < \pi/2$ y se puede considerar a y como la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo tal que $\operatorname{sen} y = x$, como se ilustra en la Figura 8.27. (El lado de longitud $\sqrt{1 - x^2}$ se calcula aplicando el Teorema de Pitágoras.) Refiriéndonos al triángulo,

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \cos y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}. \quad \bullet$$

EJEMPLO 5 Verificar la identidad

$$\frac{1}{2}\cos^{-1} x = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

para $|x| < 1$.

Solución Sea $y = \cos^{-1} x$. Queremos demostrar que

$$\frac{y}{2} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

Aplicando la fórmula para la mitad de un ángulo,

$$\left|\tan\frac{y}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}.$$

Como $y = \cos^{-1} x$ y $|x| < 1$, resulta que $0 < y < \pi$ y, por lo tanto, $0 < (y/2) < \pi/2$. De manera que $\tan(y/2) > 0$ y se puede eliminar el símbolo de valor absoluto, con lo que se obtiene

$$\tan\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}.$$

Usando el hecho de que $\cos y = x$,

$$\tan\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{y}{2} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

que es lo que queríamos demostrar. •

EJEMPLO 6 Encontrar las soluciones de la ecuación

$$5\,\text{sen}^2 t + 3\,\text{sen}\, t - 1 = 0$$

en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Solución Podemos considerar la ecuación como una de segundo grado en sen t. Aplicando la fórmula para la ecuación de segundo grado,

$$\text{sen}\, t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+20}}{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}.$$

Usando la definición de la función inversa del seno, obtenemos las soluciones,

$$t = \text{sen}^{-1}\tfrac{1}{10}(-3+\sqrt{29})$$

y

$$t = \text{sen}^{-1}\tfrac{1}{10}(-3-\sqrt{29}).$$

Para obtener valores aproximados de t se puede emplear una calculadora (en el modo de radianes) y para ello se procede como sigue:

INTRODUCIR: $\tfrac{1}{10}(-3+\sqrt{29}) \approx 0.2385165$

PULSAR [INV] [SEN]: 0.240838

Por lo tanto,

$$t \approx 0.2408.$$

Análogamente,

$$t = \text{sen}^{-1}\tfrac{1}{10}(-3-\sqrt{29}) \approx \text{sen}^{-1}(-0.8385165) \approx -0.9946.$$ •

EJERCICIOS 8.5

Ejercicios 1-18: Calcule el valor exacto sin usar tablas ni calculadora.

1. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-\sqrt{3}/2)$
2. (a) $\operatorname{sen}^{-1} 0$ (b) $\arccos 0$
3. (a) $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-\sqrt{2}/2)$
4. (a) $\operatorname{arcsen}(-1)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$
5. (a) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (b) $\arctan(-\sqrt{3})$
6. (a) $\tan^{-1}(-1)$ (b) $\arccos\frac{1}{2}$
7. $\operatorname{sen}[\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)]$
8. $\cos(\operatorname{sen}^{-1} 0)$
9. $\operatorname{sen}(\arccos\frac{3}{5})$
10. $\tan(\tan^{-1} 10)$
11. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\sqrt{5})$
12. $\tan^{-1}(\cos 0)$
13. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{4}{3})$
14. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + \arccos 0)$
15. $\tan(\arctan\frac{3}{4} + \arccos\frac{3}{5})$
16. $\cos(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{8}{17})$
17. $\operatorname{sen}[2\arccos(-\frac{4}{5})]$
18. $\operatorname{sen}(\arctan\frac{1}{2} - \arccos\frac{4}{5})$

Ejercicios 19-22: Escriba la expresión dada como una de tipo algebraico en x.

19. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$
20. $\tan(\arccos x)$
21. $\cos(\frac{1}{2}\arccos x)$
22. $\cos(2\tan^{-1} x)$

Ejercicios 23-30: Verifique la identidad.

23. $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$.
(*Sugerencia:* Tome $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x$, $\beta = \cos^{-1} x$ y considere $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$.)
24. $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2,\ x > 0$
25. $\operatorname{arcsen}\dfrac{2x}{1+x^2} = 2\arctan x,\ |x| \le 1$
26. $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}(2x^2 - 1),\ 0 \le x \le 1$
27. $\operatorname{sen}^{-1}(-x) = -\operatorname{sen}^{-1} x$
28. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
29. $\operatorname{sen}^{-1} x = \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
30. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ para $|x| < 1$ y $|y| < 1$
31. Defina $\cot^{-1}$ restringiendo el dominio de cot al intervalo $(0, \pi)$.
32. Defina $\csc^{-1}$ restringiendo el dominio de csc a $(0, \pi/2]$ y $(\pi, 3\pi/2]$.

Ejercicios 33-42: Trace la gráfica de la ecuación.

33. $y = \operatorname{sen}^{-1} 2x$
34. $y = \cos^{-1}\frac{1}{2}x$
35. $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x$
36. $y = 2\cos^{-1} x$
37. $y = 2\tan^{-1} x$
38. $y = \tan^{-1} 2x$
39. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$
40. $y = \operatorname{sen}(\arccos x)$
41. $y = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$
42. $y = \arccos(\cos x)$

Ejercicios 43-44: Demuestre que la ecuación *no* es una identidad.

43. $\tan^{-1} x = 1/(\tan x)$
44. $(\operatorname{arcsen} x)^2 + (\arccos x)^2 = 1$

Ejercicios 45-50: (a) Encuentre las soluciones de la ecuación en el intervalo dado usando las funciones trigonométricas inversas y (b) calcule aproximadamente las soluciones de la parte (a) con una precisión de cuatro decimales, con ayuda de calculadora.

45. $2\tan^2 t + 9\tan t + 3 = 0;\ (-\pi/2, \pi/2)$
46. $3\operatorname{sen}^2 t + 7\operatorname{sen} t + 3 = 0;\ [-\pi/2, \pi/2]$
47. $15\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0;\ [0, \pi]$
48. $3\tan^4\theta - 19\tan^2\theta + 2 = 0;\ (-\pi/2, \pi/2)$
49. $6\operatorname{sen}^3\theta + 18\operatorname{sen}^2\theta - 5\operatorname{sen}\theta - 15 = 0;$ $(-\pi/2, \pi/2)$
50. $6\operatorname{sen} 2x - 8\cos x + 9\operatorname{sen} x - 6 = 0;$ $(-\pi/2, \pi/2)$

Ejercicios 51-55: Aplique aquí una calculadora.

51. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 2) \neq 2$. Explique por qué la respuesta no es 2. ¿Es afirmativo que $\cos^{-1}(\cos 2) = 2$? ¿Por qué?
52. Demuestre que $\cos^{-1}(\cos(-1)) \neq -1$. Explique por qué la respuesta no es -1. ¿Es cierto que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(-1)) = -1$? ¿Por qué?
53. ¿Es cierto que si se introduce en una calculadora un número entre -1 y 1, siempre es posible esti-

mar sen^{-1} ($\text{sen}^{-1} x$) pulsando dos veces la teclas [INV] [SEN] ? Si no es así, encuentre los valores de x para los que no aparecen mensajes de error.

54. ¿Hay cualquier número real x para el cual aparezca un mensaje de error cuando se oprimen las teclas [INV] [TAN] tres veces seguidas? Explique su respuesta.

55. En muchos lenguajes de programación, la única función trigonométrica inversa que aparece es $\tan^{-1}$. (Por ejemplo, en BASIC la función se denota por ATN(X).) Exprese $\text{sen}^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ y $\cot^{-1} x$ en términos de $\tan^{-1}$ (véase el Ejercicio 29). ¿Son válidas estas fórmulas en todo el dominio de la función inversa?

8.6 DERIVADAS E INTEGRALES RELACIONADAS CON LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Esta sección se refiere principalmente a las funciones inversas del seno, el coseno, la tangente y la secante. En los tres teoremas siguientes se presentan las fórmulas para sus derivadas y las integrales que llevan a funciones trigonométricas inversas. En estos teoremas se supone que $u = g(x)$, donde g es una función derivable y x se restringe a los valores para los que las expresiones indicadas tienen sentido.

TEOREMA (8.27)

$$D_x \text{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u \qquad D_x \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$D_x \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} D_x u \qquad D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

Demostración Como las fórmulas para $u = g(x)$ se pueden obtener aplicando la Regla de la Cadena al caso especial en que $u = x$, basta considerar este caso.

Tomando $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = \text{sen}^{-1} x$ en el Teorema (7.29), se obtiene que la función seno inverso g es derivable para $|x| < 1$. Se derivará implícitamente para encontrar $g'(x)$. Nótese primero que las ecuaciones

$$y = \text{sen}^{-1} x \quad \text{y} \quad \text{sen}\, y = x$$

son equivalentes si $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Derivando $\text{sen}\, y = x$ implícitamente,

$$\cos y\, D_x y = 1$$

y por lo tanto,

$$D_x \text{sen}^{-1} x = D_x y = \frac{1}{\cos y}.$$

Como $-\pi/2 < y < \pi/2$, $\cos y$ es positivo y por consiguiente,

$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Entonces,

$$D_x \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para $|x| < 1$. La función inversa del seno no es derivable en ± 1. Este hecho resulta evidente de la Figura 8.22, pues en los extremos de la gráfica las rectas tangentes son verticales.

Análogamente, para encontrar la derivada de la función inversa del coseno, se empieza con las ecuaciones equivalentes

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{y} \quad \cos y = x$$

para $|x| < 1$ y $0 < y < \pi$. Derivando $\cos y = x$ implícitamente,

$$-\operatorname{sen} y \, D_x y = 1$$

y, por lo tanto,

$$D_x \cos^{-1} x = D_x y = \frac{1}{\operatorname{sen} y}.$$

Como $0 < y < \pi$, sen y es positivo y sen $y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Entonces, si $|x| < 1$,

$$D_x \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Del Teorema (7.29) se deduce que la función inversa de la tangente es derivable en todos los números reales. Considerando las ecuaciones equivalentes

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{y} \quad \tan y = x$$

para $-\pi/2 < y < \pi/2$. Derivando $\tan y = x$ implícitamente, se obtiene

$$\sec^2 y \, D_x y = 1.$$

Por lo tanto,

$$D_x \tan^{-1} x = D_x y = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Usando el hecho de que $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, se obtiene

$$D_x \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Finalmente, considerando las ecuaciones equivalentes

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{y} \quad \sec y = x$$

para y en $(0, \pi/2)$ o en $(\pi, 3\pi/2)$ y derivando $\sec y = x$ implícitamente, se obtiene

$$\sec y \tan y \, D_x y = 1.$$

Como $0 < y < \pi/2$ o bien $\pi < y < 3\pi/2$, resulta que $\sec y \tan y \neq 0$ y, por lo tanto,

$$D_x \sec^{-1} x = D_x y = \frac{1}{\sec y \tan y}.$$

Aplicando el hecho de que $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$,

$$D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

para $|x| > 1$. La función inversa de la secante no es derivable en $x = \pm 1$. La gráfica tiene rectas tangentes verticales en los puntos con estas abscisas (véase la Figura 8.26).

EJEMPLO 1 Evaluar dy/dx para $y = \text{sen}^{-1} 3x - \cos^{-1} 3x$.

Solución Aplicando el Teorema (7.27) con $u = 3x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}} - \frac{-3}{\sqrt{1 - 9x^2}} = \frac{6}{\sqrt{1 - 9x^2}}. \quad \bullet$$

EJEMPLO 2 Evaluar $f'(x)$ para $f(x) = \tan^{-1} e^{2x}$.

Solución Usando (8.27) con $u = e^{2x}$,

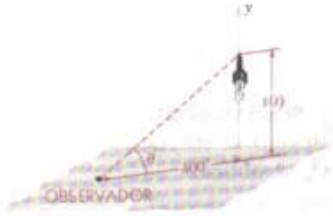
$$f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{2x})^2} D_x e^{2x} = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}}. \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Determinar y' para $y = \sec^{-1}(x^2)$.

Solución Aplicando el Teorema (8.27) con $u = x^2$,

$$y' = \frac{1}{x^2\sqrt{x^4 - 1}}(2x) = \frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}. \quad \bullet$$

FIGURA 8.28



EJEMPLO 4 Se dispara un cohete verticalmente hacia arriba y consume su combustible de manera que mantiene una aceleración constante de 50 pie/s^2 para $0 \le t \le 5$, donde el tiempo t se expresa en segundos. Como se ilustra en la Figura 8.28, un observador que se encuentra a 400 pie de la plataforma de lanzamiento, sigue con la vista el vuelo del cohete.

(a) Expresar el ángulo de elevación θ del cohete como una función de t.

(b) Al observador le parece que el cohete se eleva más rápidamente cuando $d\theta/dt$ es mayor. (Por supuesto, esto es sólo una ilusión, pues la velocidad crece uniformemente.) Calcular la altura del cohete en el momento en que alcanza su máxima velocidad aparente.

Solución

(a) Denotemos por $s(t)$ la altura del cohete al tiempo t (véase la Figura 8.28). Como la aceleración es siempre 50, obtenemos la ecuación diferencial $s''(t) = 50$. Las condiciones iniciales son $s'(0) = 0$ y $s(0) = 0$. Tomando la antiderivada dos veces seguidas (véase el Ejemplo 4 de la Sección 4.7) obtenemos $s(t) = 25t^2$. De la Figura 8.28, con $s(t) = 25t^2$,

$$\tan\theta = \frac{25t^2}{400} = \frac{t^2}{16} \quad \text{o bien} \quad \theta = \arctan\frac{t^2}{16}.$$

(b) Por el Teorema (8.27), la rapidez de cambio de θ con respecto a t es

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + (t^2/16)^2}\left(\frac{2t}{16}\right) = \frac{32t}{256 + t^4}.$$

Como queremos encontrar el valor máximo de $d\theta/dt$, se buscan primero los números críticos de $d\theta/dt$. Usando la Regla del Cociente,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{(256 + t^4)(32) - 32t(4t^3)}{(256 + t^4)^2} = \frac{32(256 - 3t^4)}{(256 + t^4)^2}.$$

Poniendo $d^2\theta/dt^2 = 0$, obtenemos el número crítico $t = \sqrt[4]{256/3}$. Del Criterio de la Primera (o de la Segunda) Derivada se deduce que $d\theta/dt$ tiene un máximo en $t = \sqrt[4]{256/3}. \approx 3.04$ segundos. La altura del cohete en este tiempo es

$$s(\sqrt[4]{256/3}) = 25(\sqrt[4]{256/3})^2 = 25\sqrt{256/3} \approx 230.9 \text{ pie.} \quad \bullet$$

Usando las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, se obtienen las siguientes fórmulas de integración.

TEOREMA (8.28)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1} u + C$$

$$\int \frac{1}{1 + u^2}\,du = \tan^{-1} u + C$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\,du = \sec^{-1} u + C$$

EJEMPLO 5 Evaluar $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}\,dx$.

Solución La integral puede expresarse como en la primera fórmula del Teorema (8.28) por medio de la sustitución

$$u = e^{2x}, \qquad du = 2e^{2x}\,dx.$$

Multiplicamos el integrando por 2 y se procede como sigue:

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - (e^{2x})^2}}\,2e^{2x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} u + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} e^{2x} + C. \quad \bullet$$

Las fórmulas del Teorema (8.28) pueden generalizarse para cualquier número rea a diferente de cero.

TEOREMA (8.29)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

Demostración Se demostrará solamente la segunda fórmula. Si $u = g(x)$ y g es derivable, entonces por el Teorema (8.27),

$$D_x\left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{g(x)}{a}\right] = \frac{1}{a}\frac{1}{1 + [g(x)/a]^2}D_x\left[\frac{1}{a}g(x)\right]$$

$$= \frac{1}{a}\frac{a^2}{a^2 + [g(x)]^2}\frac{1}{a}g'(x) = \frac{1}{a^2 + [g(x)]^2}g'(x).$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{a^2 + [g(x)]^2}g'(x)\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{g(x)}{a} + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C.$$

Las otras dos fórmulas pueden verificarse de manera parecida. • •

EJEMPLO 6 Evaluar $\int \frac{x^2}{5 + x^6}\,dx$.

Solución La integral se puede escribir como en la segunda fórmula del Teorema (8.29) haciendo la sustitución

$$u = x^3, \qquad du = 3x^2\,dx.$$

Multiplicamos el integrando por 3 y procedemos como sigue:

$$\int \frac{x^2}{5 + x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{5 + (x^3)^2}3x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{(\sqrt{5})^2 + u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{15}\tan^{-1}\frac{x^3}{\sqrt{5}} + C. \quad •$$

EJEMPLO 7 Evaluar $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-9}}\,dx$.

Solución La integral puede expresarse en la forma apropiada mediante la sustitución

$$u = x^2, \qquad du = 2x\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-9}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2\sqrt{(x^2)^2-9}}\,2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-9}}\,du \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{u}{3} + C \\ &= \frac{1}{6}\sec^{-1}\frac{x^2}{3} + C. \quad \bullet\end{aligned}$$

EJERCICIOS 8.6

Ejercicios 1-24: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

1. $\tan^{-1}(3x-5)$
2. $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}x$
3. $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}$
4. $\tan^{-1}x^2$
5. $e^{-x}\operatorname{arcsec}e^{-x}$
6. $\sqrt{\operatorname{arcsec}3x}$
7. $x^2\arctan x^2$
8. $\tan^{-1}\operatorname{sen}2x$
9. $(1+\cos^{-1}3x)^3$
10. $x^2\sec^{-1}5x$
11. $\ln\arctan x^2$
12. $\operatorname{arcsen}\ln x$
13. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1}x}$
14. $\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$
15. $\sec^{-1}\sqrt{x^2-1}$
16. $\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{x}\right)^4$
17. $(\arctan x)/(x^2+1)$
18. $\cos^{-1}\cos e^x$
19. $\sqrt{x}\sec^{-1}\sqrt{x}$
20. $e^{2x}/(\operatorname{sen}^{-1}5x)$
21. $3^{\operatorname{arcsen}x^3}$
22. $x\arccos\sqrt{4x+1}$
23. $(\tan x)^{\arctan x}$
24. $(\tan^{-1}4x)e^{\tan^{-1}4x}$

Ejercicios 25-26: Determine y'.

25. $x^2 + x\operatorname{sen}^{-1}y = ye^x$
26. $\ln(x+y) = \tan^{-1}xy$

Ejercicios 27-42: Evalúe la integral.

27. $\int_0^4 \frac{1}{x^2+16}\,dx$
28. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$
29. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$
30. $\int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$
31. $\int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x+1}\,dx$
32. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$
33. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$
34. $\int \frac{1}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx$
35. $\int \frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}}\,dx$
36. $\int \frac{\sec x\tan x}{1+\sec^2 x}\,dx$
37. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^6-4}}\,dx$
38. $\int \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\,dx$
39. $\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$
40. $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$
41. $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-25}}\,dx$
42. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}\,dx$
43. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = 4/\sqrt{16-x^2}$, $x = -2$, $x = 2$ y $y = 0$.
44. Sea $f(x) = x^2/(1+x^6)$. Calcule el área de la región bajo la gráfica de f entre $x = 0$ y $x = 1$.

45. El piso de un depósito tiene la forma de un triángulo rectángulo. El cateto opuesto a un ángulo θ mide 10 m y el adyacente, 7 m. Hay un error posible de 2 cm en la medición de los 10 m. Use la diferencial y una función trigonométrica inversa para estimar el error en el cálculo de θ.

46. Aplique diferenciales para estimar el cambio en arcsen x cuando x varía de 0.25 a 0.26.

47. Un avión vuela a una altura constante de 5 km y a una velocidad de 500 km/h y se aleja de un observador en tierra. Use las funciones trigonométricas inversas para calcular la rapidez con la que varía el ángulo de elevación cuando la aeronave vuela sobre un punto en tierra que se encuentra a 2 km del observador.

48. Un faro buscador se encuentra a $\frac{1}{8}$ de kilómetro del punto más cercano P de una carretera recta y apunta a un automóvil que viaja sobre la carretera a 50 km/h. Use funciones trigonométricas inversas para calcular la rapidez de giro del haz de luz cuando el automóvil se encuentra a $\frac{1}{4}$ de kilómetro de P.

49. Una cartelera de 6 m de alto se encuentra arriba de un edificio y su parte inferior se encuentra 20 m arriba del nivel de los ojos de un observador. Use las funciones trigonométricas inversas para calcular la distancia a la que se debe situar del edificio el observador para que sea máximo el ángulo entre las visuales a la parte de arriba y a la de abajo del cartel (véase el Ejemplo 65 de la Sección 8.3).

50. Dados los puntos $A(3, 1)$ y $B(6, 4)$ en un sistema de coordenadas rectangulares, encuentre la abscisa del punto P sobre el eje x para la que el *ángulo APB toma su mayor valor.*

51. Obtenga ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de $y = \text{sen}^{-1}(x - 1)$ en el punto $(\frac{1}{2}, \pi/6)$.

52. Halle los puntos de la gráfica de $y = \tan^{-1} 2x$ en los que la recta tangente es paralela a la recta $13y - 2x + 5 = 0$.

53. Halle los intervalos en los que la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ tiene (a) concavidad hacia arriba, (b) concavidad hacia abajo.

54. La velocidad al tiempo t de un punto que se mueve sobre una recta coordenada es $(1 + t^2)^{-}$ m/s. El punto está en el origen cuando $t = 0$. Encuentre su posición en el instante en que la aceleración y la velocidad tienen el mismo valor absoluto.

55. La región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = e^x$, $y = 1/\sqrt{x^2 + 1}$, y $x = 1$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

56. Utilice diferenciales para calcular aproximadamente la longitud de arco de la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ de $A(0, 0)$ a $B(0.1, \tan^{-1} 0.1)$.

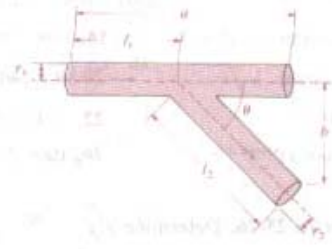
57. Un cohete se lanza verticalmente desde un punto a 5 km de una estación rastreadora que está a la misma altitud. Durante los primeros 20 s de vuelo, el ángulo de elevación aumenta con rapidez constante de 2° por segundo. Use funciones trigonométricas inversas para calcular la velocidad del proyectil cuando el ángulo de elevación es de 30° (véase el Ejercicio 64 de la Sección 8.3).

58. Cuando la sangre circula por las venas, hay una pérdida de energía debida a la fricción. La *Ley de Poiseuille* dice que la pérdida de energía E está dada por $E = kl/r^4$ para una vena de radio r y longitud l, donde k es una constante. Una vena de radio r_2 y longitud l_2 se aparta a un ángulo θ de otra vena de radio r_1 y longitud l_1, como se ilustra en la figura, donde las flechas indican el sentido del flujo sanguíneo. La pérdida de energía es entonces la suma de las pérdidas individuales de energía, es decir,

$$E = (kl_1/r_1^4) + (kl_2/r_2^4).$$

Exprese l_1 y l_2 en términos de a, b y θ, y calcule el ángulo para el cual la energía perdida es mínima.

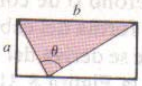
EJERCICIO 58



59. Demuestre que $\int_0^1 [4/(1 + x^2)]\,dx = \pi$ y luego aplique la Regla de Simpson con $n = 10$ para estimar π.

60. De un rectángulo de lados a y b se va a recortar un triángulo de base a y altura b, como se muestra en la figura. ¿Cómo se debe cortar el rectángulo para obtener el mayor ángulo θ posible?

EJERCICIO 60



8.7 FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las expresiones exponenciales

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

aparecen en las aplicaciones avanzadas del cálculo. Sus propiedades son en muchos sentidos análogas a las de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Más adelante se explica por qué se llaman *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico* de x.

DEFINICIÓN (8.30)

La función **seno hiperbólico**, que se denota por **senh**, y la función **coseno hiperbólico**, que se denota por **cosh**, se definen como

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

para todo número real x.

La gráfica de $y = \cosh x$ se puede obtener por el método de **suma de ordenadas**. Para utilizar el método, se trazan primero las gráficas de $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en un sistema coordenado, como se muestra en la Figura 8.29 con las líneas en tono gris. Luego se suman las ordenadas de los puntos de estas gráficas para obtener la gráfica de $y = \cosh x$. El contradominio de cosh es $[1, \infty)$.

La gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ se obtiene sumando las ordenadas de las gráficas de $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$, como se muestra en la Figura 8.30.

La función coseno hiperbólico se puede usar para describir la forma de un cable flexible o una cadena uniforme cuyos extremos están fijos a la misma altura y penden por acción sólo de su peso. Como se ilustra en la Figura 8.31, los cables de líneas de

FIGURA 8.29

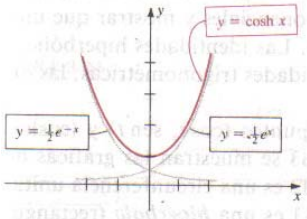


FIGURA 8.30

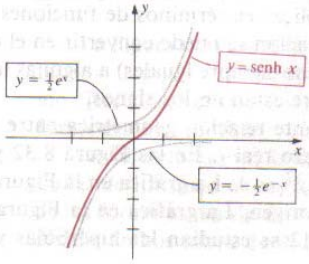
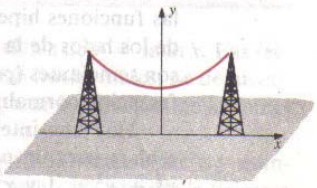


FIGURA 8.31



teléfono o de corriente eléctrica están suspendidos de torres o postes de esta manera. La forma del cable se parece a una parábola pero es en realidad una **catenaria** (palabra que se deriva del latín *catena*, cadena). Si se introduce un sistema de coordenadas como en la Figura 8.31, puede demostrarse que la forma asumida por el cable es la gráfica de la ecuación $y = a\cosh(x/b)$, para dos números reales a y b.

La función coseno hiperbólico aparece también en el análisis del movimiento en un medio que ofrece resistencia. Si un objeto se deja caer desde cierta altura y se desprecia la resistencia del aire, entonces la distancia y que recorre en t segundos es $y = \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad. Sin embargo, no siempre puede despreciarse la resistencia del aire. A medida que la velocidad del objeto aumenta, la resistencia del aire puede afectar de manera importante el movimiento. Por ejemplo, si la resistencia del aire es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces la distancia y que el objeto ha recorrido a los t segundos, está dada por

$$y = A \ln(\cosh Bt)$$

donde A y B son constantes (véase el Ejercicio 56).

Hay muchas identidades semejantes a las de las funciones trigonométricas en el caso de las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico. Por ejemplo, si $\cosh^2 x$ y $\operatorname{senh}^2 x$ simbolizan $(\cosh x)^2$ y $(\operatorname{senh} x)^2$, respectivamente, se tiene la siguiente identidad

TEOREMA (8.31)

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Demostración De la Definición (8.30),

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1. \quad \bullet\bullet$$

El Teorema (8.31) es análogo a la identidad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. En los ejercicios se tratan otras identidades hiperbólicas. Para verificar una identidad, basta expresar las funciones hiperbólicas en términos de funciones exponenciales y mostrar que uno de los lados de la ecuación se puede convertir en el otro. Las identidades hiperbólicas son semejantes (pero no siempre iguales) a algunas identidades trigonométricas; las diferencias normalmente están en los signos.

Hay una interesante relación geométrica entre los puntos $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ y $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ para un número real t. En las Figura 8.32 y 8.33 se muestran las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$. La gráfica en la Figura 8.32 es una circunferencia unitaria con centro en el origen. La gráfica en la Figura 8.33 es una *hipérbola* (rectangular. (En el Capítulo 12 se estudian las hipérbolas y sus propiedades.) Como $\cos^2 t$

FIGURA 8.32

$x^2 + y^2 = 1$

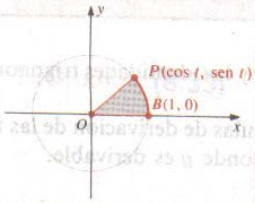
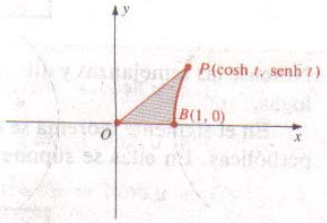


FIGURA 8.33

$x^2 - y^2 = 1$



$\text{sen}^2 t = 1$, el punto $P(\cos t, \text{sen } t)$ está en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Por otro lado, de acuerdo con el Teorema (8.31), $\cosh^2 t - \text{senh}^2 t = 1$, y por lo tanto, el punto $P(\cosh t, \text{senh } t)$ está en la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Ésta es la razón por la que cos y sen se llaman funciones *circulares*, mientras que cosh y senh se denominan funciones *hiperbólicas*.

Las gráficas de las Figuras 8.32 y 8.33 están relacionadas también de otra manera. Si $0 < t < \pi/2$, entonces t es la medida en radianes del ángulo BOP, indicado en la Figura 8.32. Por el Teorema (8.17), el área A del sector circular sombreado es $A = \frac{1}{2}(1)^2 t = \frac{1}{2}t$, y por lo tanto, $t = 2A$. Análogamente, si $P(\cosh t, \text{senh } t)$ es el punto indicado en la Figura 8.33 y A es el área del sector hiperbólico sombreado, entonces $t = 2A$ (véase el Ejercicio 53).

Las sorprendentes analogías entre el seno y el coseno trigonométricos y el seno y el coseno hiperbólicos se pueden aprovechar para definir otras funciones hiperbólicas correspondientes a las otras cuatro funciones trigonométricas. Las funciones **tangente hiperbólica**, **cotangente hiperbólica**, **secante hiperbólica** y **cosecante hiperbólica**, que se denotan por **tanh**, **coth**, **sech** y **csch**, respectivamente, se definen como sigue.

DEFINICIÓN (8.32)

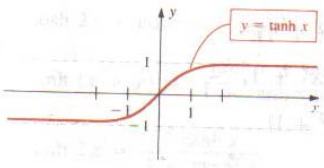
$$\tanh x = \frac{\text{senh } x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\text{senh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0$$

$$\text{sech } x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{csch } x = \frac{1}{\text{senh } x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0.$$

FIGURA 8.34



La Figura 8.34 muestra la gráfica de $y = \tanh x$. Las rectas $y = 1$ y $y = -1$ son asíntotas horizontales. Se dejan como ejercicios, verificar esto y trazar las gráficas de las otras funciones hiperbólicas.

Dividiendo ambos lados de (8.31) entre $\cosh^2 x$ y usando las definiciones de $\tanh x$ y $\text{sech } x$, se obtiene la primera de las fórmulas del siguiente teorema. La segunda resulta de dividir ambos lados de (8.31) entre $\text{senh}^2 x$.

TEOREMA (8.33)

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

Nótense las semejanzas y diferencias entre (8.33) y las identidades trigonométricas análogas.

En el siguiente teorema se enuncian las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas. En ellas se supone que $u = g(x)$, donde g es derivable.

TEOREMA (8.34)

$$\begin{aligned}
D_x \operatorname{senh} u &= \cosh u\, D_x u \\
D_x \cosh u &= \operatorname{senh} u\, D_x u \\
D_x \tanh u &= \operatorname{sech}^2 u\, D_x u \\
D_x \coth u &= -\operatorname{csch}^2 u\, D_x u \\
D_x \operatorname{sech} u &= -\operatorname{sech} u \tanh u\, D_x u \\
D_x \operatorname{csch} u &= -\operatorname{csch} u \coth u\, D_x u
\end{aligned}$$

Demostración Como de costumbre, basta considerar el caso $u = x$. Como $D_x e^x = e^x$ y $D_x e^{-x} = -e^{-x}$,

$$D_x \operatorname{senh} x = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$D_x \cosh x = D_x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x.$$

Para derivar $\tanh x$ se aplica la Regla del Cociente como sigue:

$$\begin{aligned}
D_x \tanh x &= D_x \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \\
&= \frac{\cosh x\, D_x \operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x\, D_x \cosh x}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x.
\end{aligned}$$

Se dejan al lector las demostraciones de las fórmulas restantes. • •

EJEMPLO 1 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \cosh(x^2 + 1)$.

Solución Aplicando el Teorema (8.34) con $u = x^2 + 1$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \operatorname{senh}(x^2 + 1) \cdot D_x(x^2 + 1) \\
&= 2x \operatorname{senh}(x^2 + 1).
\end{aligned}$$

•

Las fórmulas de integración correspondientes a las fórmulas de derivación en el Teorema (8.34), son las siguientes.

TEOREMA (8.35)

$$\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$$
$$\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$$
$$\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$$
$$\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$$
$$\int \operatorname{sech} u \tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$$
$$\int \operatorname{csch} u \coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C.$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\int x^2 \operatorname{senh} x^3\,dx$.

Solución Si tomamos $u = x^3$, entonces $du = 3x^2\,dx$, y

$$\int x^2 \operatorname{senh} x^3\,dx = \tfrac{1}{3}\int (\operatorname{senh} x^3)\,3x^2\,dx$$
$$= \tfrac{1}{3}\int \operatorname{senh} u\,du = \tfrac{1}{3}\cosh u + C$$
$$= \tfrac{1}{3}\cosh x^3 + C$$

EJERCICIOS 8.7

Ejercicios 1-14: Verifique la identidad.

1. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$
2. $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$
3. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
4. $\cosh(-x) = \cosh x$
5. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
6. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
7. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
8. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
9. $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
10. $\tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$
11. $\cosh \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cosh x}{2}}$
12. $\tanh \dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{senh} x}{1 + \cosh x}$
13. $\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh} \tfrac{1}{2}(x + y) \cosh \tfrac{1}{2}(x - y)$
14. $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$ para todo entero positivo n. (*Sugerencia:* Utilice el Ejercicio 1.)

Ejercicios 15-30: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

15. $\operatorname{senh} 5x$
16. $\cosh \sqrt{4x^2 + 3}$
17. $\sqrt{x} \tanh \sqrt{x}$
18. $x \operatorname{csch} e^{4x}$

19. $\dfrac{\operatorname{sech} x^2}{x^2+1}$

20. $\dfrac{\coth x}{\cot x}$

21. $\cosh x^3$

22. $\operatorname{senh}(x^2+1)$

23. $\cosh^3 x$

24. $\operatorname{senh}^2 3x$

25. $\ln \operatorname{senh} 2x$

26. $\arctan \tanh x$

27. $e^{3x} \operatorname{sech} x$

28. $\sqrt{\operatorname{sech} 5x}$

29. $\dfrac{1}{\tanh x + 1}$

30. $\dfrac{1+\cosh x}{1-\cosh x}$

31. Halle y' suponiendo que $\operatorname{senh} xy = ye^x$.

32. Encuentre y' suponiendo que $x^2 \tanh y = \ln y$.

Ejercicios 33-44: Evalúe la integral.

33. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{\cosh \ln x}{x}\,dx$

35. $\displaystyle\int \coth x\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 3x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x \cosh x\,dx$

38. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 x \tanh x\,dx$

39. $\displaystyle\int \tanh 3x \operatorname{sech} 3x\,dx$

40. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\sqrt{\cosh x}\,dx$

41. $\displaystyle\int \tanh^2 3x \operatorname{sech}^2 3x\,dx$

42. $\displaystyle\int \tanh x\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sech}^2 x}{1-2\tanh x}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{senh} x}}{\operatorname{sech} x}\,dx$

45. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{senh} 3x$, $y = 0$ y $x = 1$.

46. Calcule la longitud de arco de la gráfica de $y = \cosh x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

47. Encuentre los puntos de la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ en los que la recta tangente tiene pendiente 2.

48. La región acotada por las gráficas de $y = \cosh x$, $x = -1$, $x = 1$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

49. Verifique que la gráfica de $y = \tanh x$ corresponde al croquis en la Figura 8.34 y demuestre que las rectas $y = 1$ y $y = -1$ son asíntotas horizontales.

Ejercicios 50-52: Trace la gráfica de la ecuación.

50. $y = \coth x$

51. $y = \operatorname{sech} x$

52. $y = \operatorname{csch} x$

53. Demuestre que si A es la región sombreada en la Figura 8.33, entonces $t = 2A$.

54. Trace la gráfica de $x^2 - y^2 = 1$ y demuestre que cuando t varía el punto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ describe la parte de la gráfica que se encuentra en los cuadrantes I y IV.

55. El Gateway Arch en San Luis, Missouri, Estados Unidos, posee la forma de una catenaria invertida. Tiene 630 pie de altura en el centro y 630 pie de anchura en la base. El perfil del arco corresponde a la fórmula

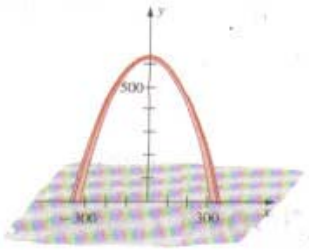
$$y = -127.7 \cosh(x/127.7) + 757.7$$

para $-315 \le x \le 315$.

(a) Calcule el área total bajo el arco.

(b) Calcule la longitud total del arco.

EJERCICIO 55



56. Si se deja caer una bola de acero en el agua, la distancia $s(t)$ que recorre a los t segundos, está dada por $s(t) = A \ln(\cosh Bt)$, donde A y B son constantes positivas.

(a) Evalúe la función de velocidad v y verifique que $v(0) = 0$. ¿Cuánto vale $\lim_{t\to\infty} v(t)$?

(b) Demuestre que si $A = m/k$ y $B^2 = gk/m$, entonces v satisface la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} + kv^2 = mg$$

donde m es la masa, g la aceleración de la gravedad y $k > 0$.

57. Si una ola con longitud de onda L, se desplaza por una masa de agua que tiene una profundidad D (véase la figura), su velocidad de propa-

gación v, o *celeridad*, está relacionada con L y B por la fórmula

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi}\tanh\frac{2\pi D}{L}$$

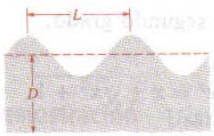
donde g es la aceleración de la gravedad.

(a) Determine $\lim_{D\to\infty} v^2$ para demostrar que $v \approx \sqrt{gL/2\pi}$ en agua profunda.

(b) Si f es una función continua y x es un número pequeño, entonces por el Teorema del Valor Medio (5.22), $f(x) - f(0) \approx f'(0)x$. Use este hecho para demostrar que $v \approx \sqrt{gD}$ si D/L es pequeño. Observe que esto demuestra que en agua poco profunda, la velocidad de la ola es independiente de su longitud de onda.

58. Una película de jabón se forma entre dos anillos paralelos concéntricos, como se muestra en la figura. Si los anillos no están muy separados, puede demostrarse que la función f cuya gráfica genera esta superficie de revolución, satisface la ecuación diferencial $yy'' = 1 + (y')^2$. Pruebe que si A y B son constantes positivas, $y = A\cosh Bx$ con $A > 0$ es una solución si y sólo si $AB = 1$. Observe que esto demuestra que la gráfica es una catenaria.

EJERCICIO 57



EJERCICIO 58



8.8 FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

La función seno hiperbólico es continua y creciente para todo x y, por lo tanto, según el Teorema (7.27), tiene una función inversa que también es continua y creciente. Esta función se denomina **seno hiperbólico inverso** y se denota por senh^{-1}. Como $\operatorname{senh} x$ está definida en términos de e^x, es de esperar que senh^{-1} pueda expresarse en términos de la inversa de la función exponencial natural, es decir, de logaritmo natural (ln). La primera de las fórmulas en el teorema siguiente muestra que así es.*

TEOREMA (8.36)

$$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < x \leq 1$$

* **(N. del R.)** Las funciones hiperbólicas inversas se denotan impropiamente a veces como arcsenh, arccosh, etcétera. En ocasiones se prefiere la simbolización argsenh, etc., que significa "argumento cuyo seno hiperbólico es", etcétera. La nomenclatura siguiente es más apropiada: senh^{-1} = seno hiperbólico inverso o **antiseno hiperbólico**, y así sucesivamente.

Demostración Para demostrar la fórmula de $\operatorname{senh}^{-1} x$, observamos primero que

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \operatorname{senh} y.$$

La ecuación $x = \operatorname{senh} y$ puede utilizarse para encontrar una forma explícita para $\operatorname{senh}^{-1} x$. De modo que si

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

entonces

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0.$$

Multiplicando ambos lados por e^y, se obtiene

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado,

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} \quad \text{o bien} \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Como e^y no es nunca negativo, hay que descartar el signo menos. Haciendo esto y tomando el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación,

$$y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

es decir,

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Las fórmulas para las funciones inversas de las funciones hiperbólicas restantes se obtienen de manera parecida. Como en el caso de las funciones trigonométricas, algunas de ellas existen sólo si se restringe el dominio. Por ejemplo, si el dominio de $\cosh x$ se restringe al conjunto de los números reales no negativos, entonces la función resultante es continua y creciente y su función inversa $\cosh^{-1}$ se define por medio de

$$y = \cosh^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \cosh y = x, \quad y \geq 0.$$

Usando el mismo proceso que para $\operatorname{senh}^{-1} x$ se llega a la fórmula logarítmica de $\cosh^{-1} x$.

Análogamente, puede escribirse

$$y = \tanh^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \tanh y = x \quad \text{para } |x| < 1.$$

Usando la Definición (8.32), $\tanh y = x$ se puede expresar

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x.$$

Despejando y resulta la forma logarítmica de $\tanh^{-1} x$.

Finalmente, si el dominio de sech se restringe a los números no negativos, se obtiene una función biunívoca y se define que

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \operatorname{sech} y = x, \quad y \geq 0.$$

Escribiendo la última igualdad con exponenciales se llega a la cuarta fórmula del enunciado del teorema. • •

En el teorema siguiente se supone que $u = g(x)$, donde g es derivable, y que x está restringido de manera apropiada.

TEOREMA (8.37)

$$D_x \operatorname{senh}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} D_x u$$

$$D_x \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u, \quad u > 1$$

$$D_x \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} D_x u, \quad |u| < 1$$

$$D_x \operatorname{sech}^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u, \quad 0 < u < 1.$$

Demostración Usando el Teorema (8.36),

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{senh}^{-1} x &= D_x \ln (x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Esta fórmula se puede generalizar a $D_x \operatorname{senh}^{-1} u$ aplicando la Regla de la Cadena en la forma acostumbrada. Las demostraciones de las fórmulas restantes se dejan como ejercicio al lector. • •

EJEMPLO 1 Encontrar y' para $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$.

Solución Usando el Teorema (8.37) con $u = \tan x$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} D_x \tan x = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x}} \sec^2 x$$

$$= \frac{1}{|\sec x|} |\sec x|^2 = |\sec x|$$

El siguiente teorema se puede demostrar derivando el lado derecho de cada fórmula. Como antes, $u = g(x)$, donde g es derivable.

TEOREMA (8.38)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}} du = \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\,du = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad u > a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad a > 0, \ |u| < a$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 + u^2}}\,du = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{|u|}{a} + C, \quad a > 0, \ 0 < |u| < a$$

Si se usa el Teorema (8.36), las fórmulas de integración del teorema anterior pueden expresarse en términos de la función logaritmo natural. Por ejemplo,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}}\,du = \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C = \ln\left(\frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1}\right) + C.$$

En el Ejercicio 29 se pide demostrar que si $a > 0$, esto se puede escribir también como

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}}\,du = \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + D$$

donde D es una constante arbitraria. En la Sección 9.3 se presenta otro método para evaluar las integrales del Teorema (8.38).

EJEMPLO 2 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25 + 9x^2}}\,dx$.

Solución Podemos expresar la integral como en la primera fórmula del Teorema (8.38) tomando $u = 3x$ y $du = 3dx$. Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{25 + 9x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{5^2 + (3x)^2}}\,3\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{senh}^{-1}\frac{3x}{5} + C$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\displaystyle\int \frac{e^x}{16 - e^{2x}}\,dx$.

Solución Tomando $u = e^x$, $du = e^x\,dx$ y aplicando el Teorema (8.38),

$$\int \frac{e^x}{16 - e^{2x}}\,dx = \int \frac{1}{4^2 - (e^x)^2}\,e^x\,dx = \int \frac{1}{4^2 - u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\tanh^{-1}\frac{u}{4} + C$$

$$= \frac{1}{4}\tanh^{-1}\frac{e^x}{4} + C$$

para $e^x < 4$.

EJERCICIOS 8.8

1. Deduzca la fórmula para $\cosh^{-1} x$ en el Teorema (8.36).
2. Deduzca la fórmula para $\tanh^{-1} x$ en el Teorema (8.36).

Ejercicios 3-6: Verifique la fórmula.

3. $D_x \cosh^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} D_x u, \quad u > 1$
4. $D_x \tanh^{-1} u = \dfrac{1}{1 - u^2} D_x u, \quad |u| < 1$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u > a > 0$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad a > 0, \ |u| < a$

Ejercicios 7-10: Trace la gráfica de la ecuación.

7. $y = \operatorname{senh}^{-1} x$
8. $y = \cosh^{-1} x$
9. $y = \tanh^{-1} x$
10. $y = \operatorname{sech}^{-1} x$

Ejercicios 11-20: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

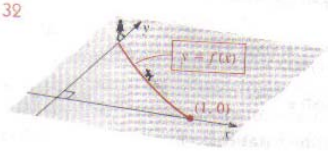
11. $\operatorname{senh}^{-1} 5x$
12. $\operatorname{senh}^{-1} e^x$
13. $\cosh^{-1} \sqrt{x}$
14. $\sqrt{\cosh^{-1} x}$
15. $\tanh^{-1} (x^2 - 1)$
16. $\tanh^{-1} \operatorname{sen} 3x$
17. $x \operatorname{senh}^{-1} (1/x)$
18. $1/(\operatorname{senh}^{-1} x^2)$
19. $\ln \cosh^{-1} 4x$
20. $\cosh^{-1} \ln 4x$

Ejercicios 21-28: Evalúe la integral.

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{81 + 16x^2}}\, dx$
22. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16x^2 - 9}}\, dx$
23. $\displaystyle\int \frac{1}{49 - 4x^2}\, dx$
24. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\, dx$
25. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 16}}\, dx$
26. $\displaystyle\int \frac{2}{5 - 3x^2}\, dx$
27. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9 - x^4}}\, dx$
28. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5 - e^{2x}}}\, dx$

29. Demuestre que si $a > 0$, entonces
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}}\, du = \ln (u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C.$$
30. Demuestre que si $u > a > 0$, entonces
$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \ln (u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C.$$
31. Una partícula se mueve sobre la recta $x = 1$ en un plano coordenado y con una velocidad proporcional a su distancia al origen. Exprese la ordenada de la partícula como una función del tiempo t (en segundos) suponiendo que la posición inicial de la partícula es (1, 0) y que la velocidad inicial es 3 m/s.
32. En la figura se muestra un diagrama del problema del perro que sigue a su amo. El perro, que inicialmente se encontraba en el punto (1, 0), ve a su amo en el punto (0, 0), el cual camina a lo largo del eje y con velocidad constante. El perro corre directamente hacia él en todo momento con el doble de la velocidad con que se desplaza el amo. La ecuación diferencial que satisface la ecuación $y = f(x)$ que describe la trayectoria del perro es
$$2xy'' = \sqrt{1 + (y')^2}.$$
Resuelva esta ecuación definiendo $z = dy/dx$. Esto lleva a la ecuación $2xz' = \sqrt{1 + z^2}$ que al resolverse da $z = \frac{1}{2}[\sqrt{x} - (1/\sqrt{x})]$. Finalmente, determine $y = \frac{1}{2}[\sqrt{x} - (1/\sqrt{x})]$.

EJERCICIO 32



8.9 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Límites de las funciones trigonométricas.
2. Fórmulas de derivación para las funciones trigonométricas.

3. Movimiento armónico simple.
4. Fórmulas de integración para las expresiones trigonométricas.
5. Funciones trigonométricas inversas.
6. Derivadas e integrales relacionadas con las funciones trigonométricas inversas.
7. Funciones hiperbólicas.
8. Funciones hiperbólicas inversas.

EJERCICIOS 8.9

Ejercicios 1-6: Calcule el límite si es que existe.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+\operatorname{sen}^2 x}{4x^2}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} 2x}{3x}$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2-\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos x+3x-2}{5x}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x+1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$

Ejercicios 7-50: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

7. $\cos\sqrt{3x^2+x}$
8. $x^2\cot 2x$
9. $(\sec x+\tan x)^5$
10. $\sqrt[3]{x^3+\csc 6x}$
11. $x^2\operatorname{arcsec} x^2$
12. $\tan^{-1}(\ln 3x)$
13. $\dfrac{(3x+7)^4}{\operatorname{sen}^{-1} 5x}$
14. $\dfrac{\operatorname{sen} 8x}{4x^2-x}$
15. $(\cos x)^{x+1}$
16. $5^{\tan 2x}$
17. $\sqrt{2x^2+\operatorname{sech} 4x}$
18. $x\sec^{-1} 4x$
19. $\ln(\csc^3 2x)$
20. $\log(\sec 2x)$
21. $\dfrac{1}{2x+\sec^2 x}$
22. $\cot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\cot x}$
23. $e^{\cos x}+(\cos x)^e$
24. $\dfrac{\ln\operatorname{senh} x}{x}$
25. $\cosh e^{-5x}$
26. $(\cos x)^{\cot x}$
27. $\tanh^{-1}(\tanh\sqrt[3]{x})$
28. $\sec(\sec x)$
29. $2^{\operatorname{arctan} 2x}$
30. $(1+\operatorname{arcsec} 2x)^{\sqrt{2}}$
31. $\operatorname{sen}^3 e^{-2x}$
32. $\ln\operatorname{sen}(\pi/3)$
33. $e^{-x^2}\cot x^2$
34. $\sec 5x\tan 5x$
35. $\ln\tan^{-1} x^2$
36. $\dfrac{1-x^2}{\arccos x}$
37. $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{1-x^2}$
38. $\sqrt{\operatorname{sen}^{-1}(1-x^2)}$
39. $\tan(\operatorname{sen} 3x)$
40. $\tan^{-1}\sqrt{\tan 2x}$
41. $(\tan x+\tan^{-1} x)^4$
42. $e^{4x}\sec^{-1} e^{4x}$
43. $\tan^{-1}(\tan^{-1} x)$
44. $e^{x\cosh x}$
45. $e^{-x}\operatorname{senh} e^{-x}$
46. $\ln\tanh(5x+1)$
47. $\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x-\operatorname{senh} x}$
48. $\dfrac{1}{x}\tanh\dfrac{1}{x}$
49. $\operatorname{senh}^{-1} x^2$
50. $\cosh^{-1}\tan x$

Ejercicios 51-88: Evalúe la integral.

51. $\int\cos(5-3x)\,dx$
52. $\int\csc\dfrac{x}{2}\cot\dfrac{x}{2}\,dx$
53. $\int\dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
54. $\int\dfrac{\sec(1/x)}{x^2}\,dx$
55. $\int(\cot 9x+\csc 9x)\,dx$
56. $\int x\csc^2(3x^2+4)\,dx$
57. $\int e^x\tan e^x\,dx$
58. $\int\cot 2x\csc 2x\,dx$
59. $\int(\csc 3x+1)^2\,dx$
60. $\int\dfrac{\operatorname{sen} x+1}{\cos x}\,dx$
61. $\int\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\tan 4x}\,dx$
62. $\int x\cos x^2\,dx$
63. $\int x^2\cos(2x^3)\,dx$
64. $\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen} 2x\cos^2 2x\,dx$
65. $\int_0^{\pi/2}\cos x\sqrt{3+5\operatorname{sen} x}\,dx$
66. $\int_0^{\pi/4} D_x(x\operatorname{sen}^2 x)\,dx$
67. $\int\dfrac{\cos 3x}{\operatorname{sen}^3 3x}\,dx$
68. $\int\dfrac{\cos 2x}{1-2\operatorname{sen} 2x}\,dx$
69. $\int\dfrac{x}{4+9x^2}\,dx$
70. $\int\dfrac{1}{4+9x^2}\,dx$
71. $\int\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$
72. $\int\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

73. $\int \frac{x}{\operatorname{sech} x^2}\,dx$

74. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$

75. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

76. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

77. $\int \sec^2 x\,(1+\tan x)^2\,dx$

78. $\int (1+\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx$

79. $\int \frac{\csc^2 x}{2+\cot x}\,dx$

80. $\int (\operatorname{sen} x)e^{\cos x+1}\,dx$

81. $\int \frac{\operatorname{senh}(\ln x)}{x}\,dx$

82. $\int \operatorname{sech}^2(1-2x)\,dx$

83. $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

84. $\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

85. $\int \frac{1}{x\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

86. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-9}}\,dx$

87. $\int \frac{x}{\sqrt{25x^2+36}}\,dx$

88. $\int \frac{1}{\sqrt{25x^2+36}}\,dx$

89. Halle los puntos de la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} 3x$ en los que la recta tangente es paralela a la recta que pasa por $A(2, -3)$ y $B(4, 7)$.

90. Encuentre una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y = \pi \tan(y/x) + x^2 - 16$ en el punto $(4, \pi)$.

91. Determine los máximos y mínimos locales de $f(x) = 8\sec x + \csc x$ en el intervalo $(0, \pi/2)$ y describa dónde es creciente y decreciente $f(x)$ en ese intervalo.

92. Encuentre los puntos de inflexión y analice la concavidad de la gráfica de $y = x\operatorname{sen}^{-1} x$.

93. La región entre la gráfica de $y = \tan x$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = \pi/4$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante. (*Sugerencia:* $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.)

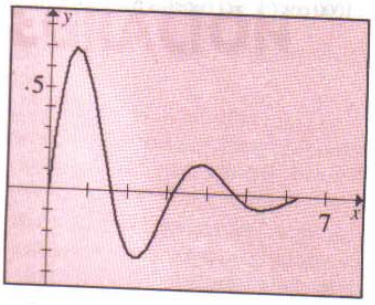
94. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = x/(1+x^4)$, $x = 1$ y $y = 0$.

95. Las oscilaciones amortiguadas son oscilaciones en las que la amplitud disminuye debido a las fuerzas de fricción (véase la Sección 19.5). En la figura se muestra una gráfica generada por computadora de la oscilación amortiguada que se da por la ecuación $y = e^{-x/2}\operatorname{sen} 2x$.

(a) Encuentre las abscisas de los máximos y mínimos relativos para $0 \le x \le 2\pi$.

(b) Calcule aproximadamente las abscisas en la parte (a) con una precisión de dos decimales.

EJERCICIO 95



96. Use el Teorema del Valor Medio para demostrar que si u y v son dos números reales cualesquiera, entonces $|\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v| \le |u - v|$.

97. Una persona de pie en un suelo a nivel observa el ascenso vertical de un globo que se soltó desde un punto en tierra a 0.5 km del observador. El globo se eleva con velocidad constante de 2 m/s. Calcule la rapidez con la que el ángulo de elevación respecto al observador aumenta en el momento en que el globo se encuentra 100 m arriba del nivel de los ojos del observador.

98. Una pintura con forma cuadrada de 60 cm de largo, cuelga en una pared de manera que la base se encuentra a 1.8 m del suelo. Una persona cuyos ojos están a una altura de 1.5 m del piso, se acerca al cuadro a razón de 60 cm/s. Sea θ el ángulo entre las líneas visuales a la parte de abajo y a la parte de arriba del cuadro. Calcule (a) la rapidez con la que θ cambia cuando la persona está a 2.4 m de la pared y (b) la distancia a la pared para la que θ es mayor.

99. El proceso rítmico de respiración consta de intervalos alternantes de inhalación y exhalación. Un ciclo completo toma normalmente unos cinco segundos. Si V denota el volumen de aire en los pulmones al tiempo t, entonces dV/dt es el flujo del aire en la respiración.

(a) Suponga que la máxima rapidez de flujo es 0.6 l /s (litros por segundo) y encuentre una fórmula $dV/dt = a\operatorname{sen} bt$ que se ajuste a la información dada.

(b) Use la fórmula de la parte (a) para calcular la cantidad de aire inhalada en un ciclo.

100. Muchas poblaciones anuales tienen ciclos de fluctuación con un periodo de diez años. Suponga que la tasa de crecimiento de una población de ciertos conejos está dada por la fórmula $dN/dt = 1000 \cos(\frac{1}{5}\pi t)$ conejos por año, donde N denota el tamaño de la población al tiempo t (en años) y $t = 0$ corresponde al inicio del ciclo. Se estima que la población a los 5 años es de 3000 conejos. Encuentre una fórmula para N al tiempo t. Calcule la población máxima.

CAPÍTULO 9

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

En este capítulo se presentan métodos para evaluar integrales de muy diversos tipos. Se comienza con una lista de las integrales obtenidas previamente y que se usarán con frecuencia a lo largo del capítulo.

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

$$\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$$

$$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{|u|}{a} + C$$

9.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

El siguiente resultado es útil para simplificar ciertas integrales.

FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES (9.1)

Si $u = f(x)$, $v = g(x)$, y si f' y g' son continuas, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Demostración Por la Regla del Producto,

$$D_x\,[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

o, equivalentemente,

$$f(x)g'(x) = D_x\,[f(x)g(x)] - g(x)f'(x).$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int D_x\,[f(x)g(x)]\,dx - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Por el Teorema (5.29) (ii), la primera integral del lado derecho es igual a $f(x)\,g(x) + C$. Como de la segunda integral se obtendrá otra constante de integración, se puede omitir C en esta fórmula, es decir,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Puesto que $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$, esta fórmula puede escribirse como en (9.1). • •

Cuando se aplica la fórmula (9.1) a una integral, se empieza por hacer que una parte del integrando corresponda a dv. La expresión que se usa para dv debe incluir a la diferencial dx. Después de elegir dv, se toma u como el resto del integrando y se encuentra du. Como este procedimiento requiere partir en dos el integrando, la aplicación de (9.1) se llama **integración por partes**. Es muy importante elegir dv de manera apropiada. Normalmente se escoge la porción más complicada del integrando que se puede integrar directamente. *Los siguientes ejemplos ilustran este método de integración.*

EJEMPLO 1 Evaluar $\int xe^{2x}\,dx$.

Solución Hay cuatro elecciones posibles para dv, a saber, dx, $x\,dx$, $e^{2x}\,dx$ o $xe^{2x}\,dx$. Si tomamos $dv = e^{2x}\,dx$, entonces lo que queda del integrando debe ser u, es decir, $u = x$. Para encontrar v integramos dv, obteniendo $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Nótese que en este paso de la solución no se agrega una constante de integración. (En el Ejercicio 51 se pide demostrar que si se agregara una constante a v se obtendría el mismo resultado.) Como $u = x$, $du = dx$. Para referirnos a ellas fácilmente se muestran estas expresiones como sigue:

$$dv = e^{2x}\,dx \qquad u = x$$
$$v = \tfrac{1}{2}e^{2x} \qquad du = dx.$$

Sustituyendo lo anterior en la Fórmula (9.1), es decir, *integrando por partes*, obtenemos

$$\int xe^{2x}\,dx = x(\tfrac{1}{2}e^{2x}) - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\,dx.$$

La integral del lado derecho se puede evaluar usando el Teorema (7.22). Esto da

$$\int xe^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x} + C \quad \bullet$$

Se requiere mucha práctica para adquirir la habilidad de escoger apropiadamente dv. Por ejemplo, si se hubiese escogido $dv = x\,dx$ en el Ejemplo 1, habría sido necesario tomar $u = e^{2x}$, lo cual daría

$$dv = x\,dx \qquad u = e^{2x}$$
$$v = \tfrac{1}{2}x^2 \qquad du = 2e^{2x}\,dx.$$

Integrando por partes resulta

$$\int xe^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2e^{2x} - \int x^2e^{2x}\,dx.$$

Como el exponente de x aumentó, la integral del lado derecho es más complicada que la original. Esto indica que la elección de dv no es apropiada.

EJEMPLO 2 Evaluar $\int x \sec^2 x\, dx$.

Solución Como $\sec^2 x$ puede integrarse directamente, tomamos $dv = \sec^2 x\, dx$. El resto del integrando es x y, por lo tanto, debemos tomar $u = x$. Entonces,

$$dv = \sec^2 x\, dx \qquad u = x$$
$$v = \tan x \qquad du = dx.$$

e integrando por partes queda

$$\int x \sec^2 x\, dx = x \tan x - \int \tan x\, dx$$
$$= x \tan x - \ln|\sec x| + C. \quad \bullet$$

Si en el Ejemplo 2 se hubiese escogido $dv = x\,dx$ y $u = \sec^2 x$, entonces la fórmula de integración por partes (9.1) habría llevado a una integral más complicada. (Compruébelo.)

En el siguiente ejemplo se integra por partes para encontrar una antiderivada de la función logaritmo natural.

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \ln x\, dx$.

Solución Sean

$$dv = dx \qquad u = \ln x$$
$$v = x \qquad du = \frac{1}{x}\, dx.$$

Integrando por partes:

$$\int \ln x\, dx = (\ln x)x - \int (x)\frac{1}{x}\, dx$$
$$= x \ln x - \int dx$$
$$= x \ln x - x + C. \quad \bullet$$

A veces, para resolver un problema, hay que integrar por partes más de una vez. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Determinar $\int x^2 e^{2x}\, dx$.

Solución Tomando

$$dv = e^{2x}\, dx \qquad u = x^2$$
$$v = \tfrac{1}{2}e^{2x} \qquad du = 2x\, dx$$

e integrando por partes:

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = x^2(\tfrac{1}{2}e^{2x}) - \int (\tfrac{1}{2}e^{2x})2x\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\, dx.$$

Para evaluar la integral del lado derecho de la ecuación anterior, debemos integrar por partes de nuevo. Procediendo como en el Ejemplo 1,

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{2x} - \tfrac{1}{2}xe^{2x} + \tfrac{1}{4}e^{2x} + C. \bullet$$

El siguiente ejemplo enseña un artificio muy útil para evaluar algunas integrales integrando por partes dos veces.

EJEMPLO 5 Evaluar $\int e^x \cos x\,dx$.

Solución Tomando

$$dv = \cos x\,dx \qquad u = e^x$$
$$v = \operatorname{sen} x \qquad du = e^x\,dx$$

e integrando por partes:

(a)
$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int (\operatorname{sen} x)e^x\,dx$$
$$= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Ahora integramos por partes la integral del lado derecho de la ecuación (a). Tomando

$$dv = \operatorname{sen} x\,dx \qquad u = e^x$$
$$v = -\cos x \qquad du = e^x\,dx$$

e integrando por partes,

(b)
$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x(-\cos x) - \int (-\cos x)e^x\,dx$$
$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

Sustituyendo ahora la ecuación (b) en el lado derecho de la ecuación (a), obtenemos

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx\right]$$

o bien
$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Sumando $\int e^x \cos x\,dx$ a ambos lados,

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x).$$

Finalmente, dividiendo ambos lados entre 2 y agregando la constante de integración,

$$\int e^x \cos x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + C. \bullet$$

Al evaluar integrales como la del Ejemplo 5 hay que elegir con cuidado las sustituciones. Si al evaluar la integral del lado derecho de la ecuación (a) se hubiese usado

$$dv = e^x\,dx \qquad u = \operatorname{sen} x$$
$$v = e^x \qquad du = \cos x\,dx$$

al integrar por partes se habría obtenido

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = (\operatorname{sen} x)\, e^x - \int e^x \cos x\, dx$$
$$= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Sustituyendo en (a),

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx\right]$$

lo que se reduce a

$$\int e^x \cos x\, dx = \int e^x \cos x\, dx.$$

Aunque esta igualdad es cierta, no es una solución del problema. Por cierto, la integral del Ejemplo 5 *puede* evaluarse usando $dv = e^x\, dx$ en las *dos* integraciones por partes.

EJEMPLO 6 Evaluar $\int \sec^3 x\, dx$.

Solución Tomando

$$dv = \sec^2 x\, dx \qquad u = \sec x$$
$$v = \tan x \qquad du = \sec x \tan x\, dx$$

e integrando por partes:

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx.$$

En vez de integrar otra vez por partes, se cambia la forma de la integral del lado derecho aprovechando la identidad $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. Esto da

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x\, (\sec^2 x - 1)\, dx$$

o bien

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx.$$

Sumando $\int \sec^3 x\, dx$ a ambos lados de esta última ecuación obtenemos

$$2 \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx.$$

Si ahora se evalúa $\int \sec x\, dx$ y se dividen entre 2 ambos miembros de la ecuación resultante (y luego se agrega la constante de integración) resulta

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2} \sec x \tan x + \tfrac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C \quad \bullet$$

La integración por partes puede servir a veces para obtener **fórmulas de reducción** de algunas integrales. Dichas fórmulas pueden usarse para escribir una integral con alguna potencia de una cierta expresión, en términos de integrales con potencias menores de la misma expresión.

EJEMPLO 7 Encontrar una fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$.

Solución Tomando

$$dv = \operatorname{sen} x\,dx \qquad u = \operatorname{sen}^{n-1} x$$
$$v = -\cos x \qquad du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\,dx$$

e integrando por partes:

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Como $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, podemos escribir

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx.$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx + (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

El primer miembro de la ecuación anterior se reduce a $n\int \operatorname{sen}^n x\,dx$. Dividiendo ambos lados entre n,

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx \quad \bullet$$

EJEMPLO 8 Aplicar la fórmula de reducción del Ejemplo 7 para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

Solución Usando la fórmula con $n = 4$ obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = -\tfrac{1}{4}\cos x \operatorname{sen}^3 x + \tfrac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$$

Aplicando la fórmula con $n = 2$ a la integral del lado derecho,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\tfrac{1}{2}\cos x \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2}\int dx$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cos x \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2}x + C.$$

Por tanto,

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = -\tfrac{1}{4}\cos x \operatorname{sen}^3 x - \tfrac{3}{8}\cos x \operatorname{sen} x + \tfrac{3}{8}x + D$$

donde $D = \frac{3}{4}C$. $\bullet$

Es evidente que si se aplica suficientes veces la fórmula del Ejemplo 7, puede llegarse a evaluar $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ para cualquier entero positivo n, pues estas reducciones terminan en $\int \operatorname{sen} x\,dx$ o en $\int dx$; estas dos integrales se pueden evaluar directamente.

EJERCICIOS 9.1

Ejercicios 1-38: Evalúe la integral.

1. $\int xe^{-x}\,dx$
2. $\int x \operatorname{sen} x\,dx$
3. $\int x^2 e^{3x}\,dx$
4. $\int x^2 \operatorname{sen} 4x\,dx$
5. $\int x \cos 5x\,dx$
6. $\int xe^{-2x}\,dx$
7. $\int x \sec x \tan x\,dx$
8. $\int x \csc^2 3x\,dx$

9. $\int x^2 \cos x\,dx$
10. $\int x^3 e^{-x}\,dx$
11. $\int \tan^{-1} x\,dx$
12. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$
13. $\int \sqrt{x} \ln x\,dx$
14. $\int x^2 \ln x\,dx$
15. $\int x \csc^2 x\,dx$
16. $\int x \tan^{-1} x\,dx$
17. $\int e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$
18. $\int e^{3x} \cos 2x\,dx$
19. $\int \operatorname{sen} x \ln \cos x\,dx$
20. $\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$
21. $\int \csc^3 x\,dx$
22. $\int \sec^5 x\,dx$
23. $\int_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
24. $\int \operatorname{sen} \ln x\,dx$
25. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} 2x\,dx$
26. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} x \sec^2 x\,dx$
27. $\int x(2x+3)^{99}\,dx$
28. $\int \dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$
29. $\int e^{4x} \operatorname{sen} 5x\,dx$
30. $\int x^3 \cos(x^2)\,dx$
31. $\int (\ln x)^2\,dx$
32. $\int x\,2^x\,dx$
33. $\int x^3 \operatorname{senh} x\,dx$
34. $\int (x+4) \cosh 4x\,dx$
35. $\int \cos \sqrt{x}\,dx$
36. $\int \cot^{-1} 3x\,dx$
37. $\int \cos^{-1} x\,dx$
38. $\int (x+1)^{10}(x+2)\,dx$

Ejercicios 39-42: Use integración por partes para deducir la fórmula de reducción.

39. $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\,dx$
40. $\int x^n \operatorname{sen} x\,dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\,dx$
41. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\,dx$
42. $\int \sec^n x\,dx = \dfrac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\,dx \quad \text{para } n \neq 1.$
43. Use el Ejercicio 39 para evaluar $\int x^5 e^x\,dx$.
44. Emplee el Ejercicio 41 para evaluar $\int (\ln x)^4\,dx$.
45. Sea $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$. Calcule el área de la región bajo la gráfica de f entre $x = 0$ y $x = \pi^2$.
46. La región entre la gráfica de $y = x\sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = \pi/2$, gira alrededor del eje x. Evalúe el volumen del sólido resultante.
47. La región acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$, gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.
48. La fuerza $f(x)$ que actúa en el punto con abscisa x de una recta coordenada l está dada por $f(x) = x^5\sqrt{x^3+1}$. Determine el trabajo realizado al mover un objeto de $x = 0$ a $x = 1$.
49. Los extremos de un abrevadero tienen la forma de la región que se encuentra entre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x entre $x = \pi$ y $x = 2\pi$. Calcule la fuerza hidrostática total sobre uno de los lados cuando el abrevadero está lleno de agua.
50. La velocidad (al tiempo t) de un punto que se mueve sobre una recta coordenada es t/e^{2t} m/s. Calcule la posición al tiempo t si el punto se encuentra en el origen en $t = 0$.
51. Demuestre que cuando se aplica la Fórmula de Integración por Partes (9.1), se obtiene el mismo resultado si al integrar dv se toma $v + C$ en vez de v.
52. El razonamiento dado en el Capítulo 6 para justificar la fórmula para el cálculo de volúmenes por medio de envolventes cilíndricas (véase la Definición (6.7)) es incompleto porque no se demuestra que se obtiene el mismo resultado que cuando se usa el método de discos. Demuestre que si f es derivable y $f'(x) > 0$ en $[a, b]$ o $f'(x) < 0$ en $[a, b]$, entonces el volumen V del sólido que se obtiene al girar la región acotada por las gráficas de f, $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje x que se obtiene usando el método de discos es igual al que se obtiene usando el método de envolventes o cortezas. (*Sugerencia:* Tome g como la función inversa de f e integre por partes $\int_a^b \pi [f(x)]^2\,dx$.)
53. Analice la siguiente aplicación de la Fórmula (9.1).

Dada $\int (1/x)\,dx$, sea $dv = dx$ y $u = 1/x$, de manera que $v = x$ y $du = (-1/x^2)\,dx$. Entonces,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{1}{x}\right)x - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

o bien

$$\text{or} \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx.$$

Por consiguiente, $0 = 1$.

54. Demuestre la fórmula

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

de integración por partes para integrales definidas, análoga a la Fórmula (9.1), donde $u = f(x)$ y $v = g(x)$; a y b son los valores extremos de la variable x.

9.2 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

En el Ejemplo 7 de la Sección 9.1 se obtuvo una fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$. Algunas integrales de este tipo también se pueden evaluar sin integrar por partes. Si n es un entero positivo impar, se comienza escribiendo

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Como el entero $n - 1$ es par, se puede aplicar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para obtener una integral más fácil, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

Solución Como se dijo en la discusión anterior,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\,dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx \\ &= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x\,dx.\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$u = \cos x, \qquad du = -\operatorname{sen} x\,dx$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(-\operatorname{sen} x)\,dx \\ &= -\int (1 - 2u^2 + u^4)\,du \\ &= -u + \tfrac{2}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5 + C \\ &= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C\end{aligned}$$

Análogamente, para potencias impares de $\cos x$ se escribe

$$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx$$

y se utiliza el hecho de que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, para obtener una integral más sencilla.

Cuando el integrando es $\operatorname{sen}^n x$ o bien $\cos^n x$, para n *par*, las fórmulas para la mitad de un ángulo

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{o bien} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

pueden ayudar a simplificar el integrando.

EJEMPLO 2 Evaluar $\int \cos^2 x\, dx$.

Solución Usando la fórmula para la mitad de un ángulo,

$$\int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

Solución

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx$$
$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx.$$

Aplicamos otra vez la fórmula para la mitad de un ángulo y escribimos

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 4x.$$

Sustituyendo en la última integral y simplificando queda

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \tfrac{1}{4}\int (\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x)\, dx$$
$$= \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C \quad \bullet$$

Las integrales en las que sólo aparecen productos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se pueden evaluar usando la siguiente guía.

GUÍA PARA EVALUAR INTEGRALES DE LA FORMA $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ (9.2)

1. Si m y n son ambos enteros pares, reducir los exponentes de $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ usando las fórmulas para la mitad de un ángulo.
2. Si n es impar, escribir la integral como
$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-1} x \cos x\, dx$$
y expresar $\cos^{n-1} x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ aprovechando la identidad trigonométrica $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Usar la sustitución $u = \operatorname{sen} x$ para evaluar la integral resultante.
3. Si m es un entero impar, escribir la integral como
$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \int \operatorname{sen}^{m-1} x \cos^n x \operatorname{sin} x\, dx$$
y expresar $\operatorname{sen}^{m-1} x$ en términos de $\cos x$ aprovechando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Aplicar la sustitución $u = \cos x$ para evaluar la integral resultante.

EJEMPLO 4 Evaluar $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

Solución Usando el punto 2 de la Guía (9.2),

$$\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx$$

$$= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx.$$

Si tomamos $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \cos x\, dx$ y la integral puede escribirse

$$\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int (1 - u^2)u^4\, du = \int (u^4 - u^6)\, du$$

$$= \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{7}u^7 + C$$

$$= \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C$$

GUÍA PARA EVALUAR INTEGRALES DE LA FORMA $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ (9.3)

1. Si n es un entero par, escribir la integral como

$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx = \int \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 x\, dx$$

y expresar $\sec^{n-2} x$ en términos de $\tan x$ aprovechando la identidad trigonométrica $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Usar la sustitución $u = \tan x$ para evaluar la integral resultante.

2. Si m es un entero impar, escribir la integral como

$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx = \int \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx.$$

Como $m - 1$ es par, $\tan^{m-1} x$ puede expresarse en términos de $\sec x$ aprovechando la identidad trigonométrica $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. Usar la sustitución $u = \sec x$ para evaluar la integral resultante.

3. Si m es par y n es impar, emplear otro método como, por ejemplo, integración por partes.

EJEMPLO 5 Evaluar $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$.

Solución Usando el punto 1 de la Guía (9.3),

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^2 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x\, dx.$$

Si tomamos $u = \tan x$, entonces $du = \sec^2 x\, dx$, y

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int u^2(u^2 + 1)\, du = \int (u^4 + u^2)\, du$$

$$= \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{5}\tan^5 x + \tfrac{1}{3}\tan^3 x + C.$$

EJEMPLO 6 Evaluar $\int \tan^3 x \sec^5 x\,dx$.

Solución Usando el punto 2 de la Guía (9.3),

$$\int \tan^3 x \sec^5 x\,dx = \int \tan^2 x \sec^4 x (\sec x \tan x)\,dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^4 x (\sec x \tan x)\,dx.$$

Sustituyendo $u = \sec x$ y $du = \sec x \tan x\,dx$, obtenemos

$$\int \tan^3 x \sec^5 x\,dx = \int (u^2 - 1)u^4\,du$$
$$= \int (u^6 - u^4)\,du$$
$$= \tfrac{1}{7}u^7 - \tfrac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \tfrac{1}{7}\sec^7 x - \tfrac{1}{5}\sec^5 x + C. \bullet$$

Las integrales de la forma $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$ pueden evaluarse de manera parecida. Finalmente, las integrales de la forma $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx$, se pueden determinar usando las Fórmulas para Productos (8.13), como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 Evaluar $\int \cos 5x \cos 3x\,dx$.

Solución Aplicando la Fórmula para Productos (8.13) a $\cos u \cos v$, obtenemos

$$\cos 5x \cos 3x = \tfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x).$$

Por lo tanto,

$$\int \cos 5x \cos 3x\,dx = \tfrac{1}{2}\int (\cos 8x + \cos 2x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{16}\operatorname{sen} 8x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C \bullet$$

EJERCICIOS 9.2

Ejercicios 1-30: Evalúe la integral.

1. $\int \cos^3 x\,dx$
2. $\int \operatorname{sen}^2 2x\,dx$
3. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$
4. $\int \cos^7 x\,dx$
5. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$
6. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\,dx$
7. $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx$
8. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx$
9. $\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx$
10. $\int \sec^6 x\,dx$
11. $\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx$
12. $\int \tan^5 x \sec x\,dx$
13. $\int \tan^6 x\,dx$
14. $\int \cot^4 x\,dx$
15. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^3 x\,dx$
16. $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$
17. $\int (\tan x + \cot x)^2\,dx$
18. $\int \cot^3 x \csc^3 x\,dx$
19. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 x\,dx$
20. $\int_0^1 \tan^2(\tfrac{1}{4}\pi x)\,dx$
21. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x\,dx$
22. $\int_0^{\pi/4} \cos x \cos 5x\,dx$
23. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 3x \cos 2x\,dx$
24. $\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\,dx$
25. $\int \csc^4 x \cot^4 x\,dx$

26. $\int (1 + \sqrt{\cos x})^2 \operatorname{sen} x \, dx$

27. $\int \frac{\cos x}{2 - \operatorname{sen} x} dx$

28. $\int \frac{\tan^2 x - 1}{\sec^2 x} dx$

29. $\int \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} dx$

30. $\int \frac{\sec x}{\cot^5 x} dx$

31. La región acotada por el eje x y la gráfica de $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ y $x = 2\pi$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

32. La región acotada por las gráficas de $y = \tan^2 x$ y $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = \pi/4$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

33. La velocidad (al tiempo t) de un punto que se mueve sobre una recta coordenada se expresa por $\cos^2 \pi t$ m/s. ¿Qué distancia recorre el punto en 5 s?

34. La aceleración (al tiempo t) de un punto que se mueve sobre una recta coordenada se expresa por $\operatorname{sen}^2 t \cos t$ m/s^2. En $t = 0$ el punto se encuentra en el origen y su velocidad es 10 m/s. Calcule su posición al tiempo t.

35. (a) Demuestre que si m y n son enteros positivos,

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + C & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2mx}{4m} + C & \text{si } m = n \end{cases}$$

(b) Deduzca fórmulas análogas a las de la parte (a) para

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx$$

y

$$\int \cos mx \cos nx \, dx.$$

36. (a) Use la parte (a) del Ejercicio 35 para demostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

(b) Evalúe

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$

9.3 SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Si un integrando contiene una de las expresiones $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o bien $\sqrt{x^2 - a^2}$, donde $a > 0$, se puede eliminar el radical haciendo una de las sustituciones trigonométricas de la siguiente lista.

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS (9.4)

Expresión en el integrando	Sustitución trigonométrica
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$

Al hacer una sustitución de este tipo se supone que θ está en el contradominio de la función trigonométrica inversa correspondiente. Así, para la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, se tiene que $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. En este caso, $\cos \theta \geq 0$ y

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta} \quad = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a \cos \theta. \end{aligned}$$

Si $\sqrt{a^2 - x^2}$ aparece en el denominador se agrega la restricción $|x| \neq a$, o equivalentemente, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

EJEMPLO 1 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\,dx$.

Solución El integrando contiene $\sqrt{16 - x^2}$, que es de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$ con $a = 4$. Entonces por (9.4), tomamos

$$x = 4\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{para } -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Resulta que

$$\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16\,\text{sen}^2\theta} = 4\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} = 4\sqrt{\cos^2\theta} = 4\cos\theta.$$

Como $x = 4\,\text{sen}\,\theta$, $dx = 4\cos\theta\,d\theta$. Reemplazando en la integral dada,

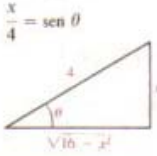
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{(16\,\text{sen}^2\theta)4\cos\theta}\,4\cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{16}\int \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{16}\int \csc^2\theta\,d\theta \\ &= -\frac{1}{16}\cot\theta + C.\end{aligned}$$

Ahora hay que expresar esto en términos de la variable de integración original x. Como $\theta = \text{arcsen}\,(x/4)$, podríamos escribir $-\frac{1}{16}\cot\theta$ como $-\frac{1}{16}\cot\text{arcsen}\,(x/4)$. Sin embargo, como el integrando contiene $\sqrt{16 - x^2}$ y no tiene funciones trigonométricas, es deseable que el resultado tampoco tenga funciones trigonométricas y que quede expresado en términos del radical. Hay un método geométrico sencillo para hacer esto. Si $0 < \theta < \pi/2$ y $\text{sen}\,\theta = x/4$, el ángulo θ puede interpretarse como uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo con cateto opuesto e hipotenusa de longitudes x y 4, respectivamente (véase la Figura 9.1). Por el Teorema de Pitágoras, la longitud del cateto adyacente es $\sqrt{16 - x^2}$. Haciendo referencia al triángulo,

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}.$$

Puede demostrarse que esta fórmula es válida también para $-\pi/2 < \theta < 0$. Entonces, la Figura 9.1 se puede utilizar para θ positivo o negativo.

FIGURA 9.1



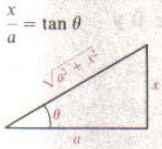
Substituyendo $\cot\theta$ por $\sqrt{16 - x^2}/x$ en la evaluación de la integral,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\,dx &= -\frac{1}{16}\cdot\frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} + C \\ &= -\frac{\sqrt{16 - x^2}}{16x} + C.\end{aligned}$$

Si un integrando contiene $\sqrt{a^2 + x^2}$, con $a > 0$, entonces la sustitución indicada en (9.4), $x = a \tan \theta$ elimina el radical. Cuando se emplea esta técnica se supone que θ está en el contradominio de la función inversa de la tangente, es decir, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. En tal caso, $\sec \theta > 0$ y

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} \\ &= a \sec \theta.\end{aligned}$$

FIGURA 9.2



Después de hacer la sustitución y evaluar la integral trigonométrica resultante, hay que expresar el resultado en términos de la variable x. Las fórmulas anteriores muestran que

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \quad \text{y} \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}.$$

Como en la solución del Ejemplo 1, la relación entre las funciones trigonométricas de θ y x pueden encontrarse haciendo referencia al triángulo de la Figura 9.2, tanto si θ es positivo como negativo.

EJEMPLO 2 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx$.

Solución El integrando contiene $\sqrt{4 + x^2}$, que es de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$ con $a = 2$. Entonces por (9.4), hacemos la sustitución:

$$x = 2 \tan \theta, \qquad dx = 2 \sec^2 \theta\, d\theta$$

Por lo tanto,

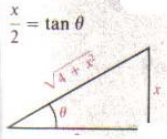
$$\sqrt{4 + x^2} = \sqrt{4 + 4 \tan^2 \theta} = 2\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = 2\sqrt{\sec^2 \theta} = 2 \sec \theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx = \int \frac{1}{2 \sec \theta} 2 \sec^2 \theta\, d\theta$$

y

$$\begin{aligned}&= \int \sec \theta\, d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C.\end{aligned}$$

FIGURA 9.3



Como $\tan \theta = x/2$, del triángulo de la Figura 9.3 se ve que

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2}$$

y por tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx = \ln \left| \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C.$$

La expresión del lado derecho se puede escribir

$$\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right| + C = \ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| - \ln 2 + C.$$

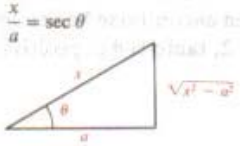
Como $\sqrt{4+x^2} + x > 0$ para todo x, el símbolo de valor absoluto puede omitirse. Si se define también $D = -\ln 2 + C$, entonces

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \ln\left(\sqrt{4+x^2}+x\right) + D \quad \bullet$$

Si un integrando contiene $\sqrt{x^2-a^2}$, se efectúa el reemplazo indicado en (9.4), $x = a\sec\theta$, donde θ se escoge en el contradominio de la función inversa de la secante; es decir, $0 \le \theta < \pi/2$ o bien $\pi \le \theta < 3\pi/2$. En este caso, $\tan\theta \ge 0$ y

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-a^2} &= \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}\\ &= \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)}\\ &= \sqrt{a^2\tan^2\theta}\\ &= a\tan\theta.\end{aligned}$$

FIGURA 9.4



Como $\sec\theta = \dfrac{x}{a}$ y $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

resulta que para cambiar de la variable θ a la x puede utilizarse el triángulo de la Figura 9.4.

EJEMPLO 3 Evaluar $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$.

Solución El integrando contiene $\sqrt{x^2-9}$, que es de la forma $\sqrt{x^2-a^2}$ con $a = 3$. Hacemos la sustitución indicada en (9.4):

$$x = 3\sec\theta, \qquad dx = 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta.$$

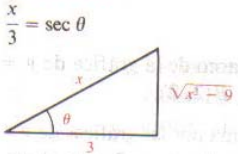
Por lo tanto,

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\sec^2\theta - 9} = 3\sqrt{\sec^2\theta - 1} = 3\sqrt{\tan^2\theta} = 3\tan\theta$$

y entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx &= \int \frac{3\tan\theta}{3\sec\theta}\,3\sec\theta\tan\theta\,d\theta\\ &= 3\int \tan^2\theta\,d\theta\\ &= 3\int(\sec^2\theta - 1)\,d\theta = 3\int\sec^2\theta\,d\theta - 3\int d\theta\\ &= 3\tan\theta - 3\theta + C.\end{aligned}$$

FIGURA 9.5



Como $\sec\theta = x/3$, se tiene que $\theta = \sec^{-1}(x/3)$. Empleando el triángulo de la Figura 9.5 se ve también que $\tan\theta = \sqrt{x^2-9}/3$. Por lo tanto,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = 3\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - 3\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C \quad \bullet$$

Para simplificar ciertas integrales pueden usarse también las funciones hiperbólicas. Por ejemplo, $\cosh^2 u = 1 + \operatorname{senh}^2 u$ y por lo tanto, si un integrando contiene la expresión $\sqrt{a^2+x^2}$, la sustitución $x = a\operatorname{senh} u$ lleva a

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2\operatorname{senh}^2 u}\\ &= \sqrt{a^2(1+\operatorname{senh}^2 u)}\\ &= \sqrt{a^2\cosh^2 u}\\ &= a\cosh u.\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$ usando funciones hiperbólicas.

Solución La integral es la misma que la del Ejemplo 2. Se realiza la sustitución hiperbólica

$$x = 2\operatorname{senh} u, \qquad dx = 2\cosh u\,du.$$

Resulta entonces que

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\operatorname{senh}^2 u} = \sqrt{4\cosh^2 u} = 2\cosh u$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{2\cosh u}\,2\cosh u\,du\\ &= \int du = u + C\\ &= \operatorname{senh}^{-1}(x/2) + C.\end{aligned}$$

Por el Teorema (8.36) vemos que esta solución es equivalente a la del Ejemplo 2. •

Estos nuevos métodos de integración no reemplazan a los anteriores, los cuales hay que tenerlos presentes siempre. Por ejemplo, la integral $\int (x/\sqrt{9+x^2})\,dx$ puede evaluarse por medio de la sustitución trigonométrica $x = 3\tan\theta$, pero es más fácil usar la sustitución algebraica $u = 9 + x^2$ y $du = 2x\,dx$, pues de esta manera la integral toma la forma $\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$ que es posible integrar directamente por medio de la Regla de la Potencia. En los ejercicios siguientes hay algunas integrales que se pueden evaluar con métodos de integración más sencillos que el de sustitución trigonométrica.

EJERCICIOS 9.3

Ejercicios 1-22: Evalúe la integral.

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
2. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$
3. $\int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}}\,dx$
4. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}\,dx$
5. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-25}}\,dx$
6. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-25}}\,dx$
7. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
8. $\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$
9. $\int \frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}\,dx$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}\,dx$
11. $\int \frac{1}{(36+x^2)^2}\,dx$
12. $\int \frac{1}{(16-x^2)^{5/2}}\,dx$
13. $\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$
14. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$
15. $\int \frac{x}{(16-x^2)^2}\,dx$
16. $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$
17. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9x^2+49}}\,dx$
18. $\int \frac{1}{x\sqrt{25x^2+16}}\,dx$
19. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-3}}\,dx$
20. $\int \frac{x^2}{(1-9x^2)^{3/2}}\,dx$
21. $\int \frac{(4+x^2)^2}{x^3}\,dx$
22. $\int \frac{3x-5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

23.-28. Use sustituciones trigonométricas para obtener las fórmulas en los Teoremas (8.28) y (8.29).

29. La región acotada por las gráficas de $y = 0$, $x = 5$, $y = x(x^2 + 25)^{-1/2}$, gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.

30. Determine el área de la región acotada por la gráfica de $y = x^3(10 - x^2)^{-1/2}$, el eje x y la recta $x = 1$.

31. Calcule la longitud de arco de la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$, entre $A(0, 0)$ y $B(2, 2)$.

32. La región que está acotada por las gráficas de $y = 1/(x^2 + 1)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

33. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x^2 + 4}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$.

34. Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de $4x^2 + y^2 = 16$.

35. Sean $y = f(x)$ y $x\,dy - \sqrt{x^2 - 16}\,dx = 0$. Encuentre $f(x)$ suponiendo que $f(4) = 0$.

36. Suponga que dos variables x y y están relacionadas de manera que $\sqrt{1 - x^2}\,dy = x^3\,dx$. Exprese y como una función de x considerando que $y = 0$ cuando $x = 0$.

Ejercicios 37-40: Evalúe la integral mediante una sustitución hiperbólica.

37. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{25+x^2}}\,dx$
38. $\int \frac{x^2}{(x^2+9)^{3/2}}\,dx$
39. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (*Sugerencia:* Tome $x = \tanh u$ y use (8.33).)
40. $\int \frac{1}{16-x^2}\,dx$

Ejercicios 41-46: Use una sustitución trigonométrica para demostrar la fórmula de la Tabla de Integrales indicada (véase el Apéndice IV).

41. Fórmula 21
42. Fórmula 27
43. Fórmula 31
44. Fórmula 36
45. Fórmula 41
46. Fórmula 44

9.4 INTEGRALES DE LAS FUNCIONES RACIONALES

Si q es una función racional, entonces $q(x) = f(x)/g(x)$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios. En esta sección se dan reglas para evaluar $\int q(x)\,dx$. Consideremos el ejemplo específico $q(x) = 2/(x^2 - 1)$. Puede verificarse fácilmente que

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}.$$

La expresión al lado derecho de la ecuación se llama *descomposición en fracciones parciales* de $2/(x^2-1)$. Para evaluar $\int [2/(x^2-1)]\,dx$, basta integrar cada una de las fracciones de la descomposición, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-1}{x+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.\end{aligned}$$

Teóricamente *cualquier* expresión racional $f(x)/g(x)$ se puede expresar como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores son potencias de polinomios de grado menor o igual que 2. Concretamente, puede demostrarse que si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios *y el grado de* $f(x)$ *es menor que el de* $g(x)$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F_1 + F_2 + \cdots + F_r$$

donde cada término F_k de la suma es de la forma

$$\frac{A}{(px+q)^m} \quad \text{o bien} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

A y B son números reales, m y n son enteros no negativos y $ax^2 + bx + c$ es **irreducible**, en el sentido de que es un polinomio cuadrático que no tiene ceros reales; es decir, $b^2 - 4ac < 0$. En este caso, $ax^2 + bx + c$ no se puede expresar como un producto de dos polinomios de primer grado.

La suma $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ es la **descomposición en fracciones parciales** de $f(x)/g(x)$ y cada F_k se llama **fracción parcial**. No demostraremos este resultado algebraico pero sí se dará una guía para obtener tal descomposición.

La guía para obtener la descomposición en fracciones parciales de $f(x)/g(x)$ debe usarse sólo si $f(x)$ tiene grado menor que $g(x)$. Si no es así, hay que dividir un polinomio entre el otro hasta llegar a la forma apropiada. Por ejemplo, dada

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1}$$

dividiendo los polinomios se obtiene

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} = x - 6 + \frac{6x - 9}{x^2 - 1}.$$

Realizado lo precedente se puede encontrar la descomposición en fracciones parciales de $(6x - 9)/(x^2 - 1)$.

GUÍA PARA OBTENER LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES DE $f(x)/g(x)$ (9.5)

1. Si el grado de $f(x)$ no es menor que el de $g(x)$, dividir los polinomios para obtener la forma apropiada.
2. Expresar $g(x)$ como un producto de factores lineales $px + q$ o formas cuadráticas irreducibles $ax^2 + bx + c$, y agrupar los factores repetidos para que $g(x)$ quede expresado como un producto de factores *distintos* de la forma $(px + q)^m$ o bien $(ax^2 + bx + c)^n$, con m y n enteros no negativos.
3. Aplicar las siguientes reglas.

REGLA (a) Por cada factor de la forma $(px + q)^m$ con $m \geq 1$, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de m fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{px + q} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px + q)^m}$$

donde cada numerador A_k es un número real.

REGLA (b) Por cada factor $(ax^2 + bx + c)^n$, $n \geq 1$ donde $ax^2 + bx + c$, es irreducible, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

donde todos los A_k y B_k son números reales.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}\,dx$.

Solución *El denominador del integrando puede factorizarse como $x(x + 3)(x - 1)$. Cada factor tiene la forma apropiada para que se aplique la Regla (a) de (9.5), con $m = 1$.* Entonces al factor x le corresponde una fracción parcial de la forma A/x. Análogamente, a los factores $x + 3$ y $x - 1$ les corresponden fracciones parciales $B/(x + 3)$ y $C/(x - 1)$, respectivamente. Entonces, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x + 3)(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador (el del lado izquierdo), obtenemos

$$(*) \qquad 4x^2 + 13x - 9 = A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3),$$

donde el símbolo (*) servirá para referencia posterior. En un caso como éste, en que los factores son lineales y no se repiten, los valores de A, B y C pueden encontrarse

sustituyendo x por valores que hagan que varios de los factores sean cero. Tomando $x = 0$ en (*), se tiene que

$$-9 = -3A \quad \text{o bien} \quad A = 3.$$

Tomando $x = 1$ en (*), obtenemos

$$8 = 4C \quad \text{o bien} \quad C = 2.$$

Finalmente, si $x = -3$ entonces

$$-12 = 12B \quad \text{o bien} \quad B = -1.$$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x + 3)(x - 1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x + 3} + \frac{2}{x - 1}.$$

Integrando y denotando por K la suma de las constantes de integración,

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x + 3)(x - 1)}\,dx &= \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{-1}{x + 3}\,dx + \int \frac{2}{x - 1}\,dx \\ &= 3 \ln|x| - \ln|x + 3| + 2 \ln|x - 1| + K \\ &= \ln|x^3| - \ln|x + 3| + \ln|x - 1|^2 + K \\ &= \ln\left|\frac{x^3(x - 1)^2}{x + 3}\right| + K\end{aligned}$$

Otro método para calcular A, B y C es comparar los coeficientes de las potencias de x. Si desarrollamos el lado derecho de (*) y agrupamos los términos con la misma potencia en x, obtenemos

$$4x^2 + 13x - 9 = (A + B + C)x^2 + (2A - B + 3C)x - 3A.$$

Ahora se utiliza el hecho de que si los dos polinomios son iguales, entonces los coeficientes de las mismas potencias son iguales. Así,

$$\begin{aligned} A + B + C &= 4 \\ 2A - B + 3C &= 13 \\ -3A \qquad\quad &= -9 \end{aligned}$$

Podemos demostrar que la solución de este sistema de ecuaciones es $A = 3$, $B = -1$ y $C = 2$. •

EJEMPLO 2 Evaluar $\int \frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x + 1)(x - 2)^3}\,dx$.

Solución Por la Regla (a) de (9.5), hay una fracción parcial de la forma $A/(x + 1)$ correspondiente al factor $x + 1$ en el denominador del integrando. Para el factor

$(x-2)^3$, se aplica la Regla (a) (con $m = 3$) y se obtiene la suma de tres fracciones parciales $B/(x-2)$, $C/(x-2)^2$ y $D/(x-2)^3$. Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}.$$

Multiplicando ambos lados por $(x+1)(x-2)^3$,

$$(*) \qquad 3x^3 - 18x^2 + 29x - 4 = A(x-2)^3 + B(x+1)(x-2)^2 + C(x+1)(x-2) + D(x+1).$$

Dos de las constantes se pueden obtener fácilmente. Si tomamos $x = 2$ en (*), entonces

$$24 - 72 + 58 - 4 = 3D, \quad 6 = 3D \quad \text{y} \quad D = 2.$$

Análogamente, tomando $x = -1$ en (*),

$$-3 - 18 - 29 - 4 = -27A, \quad -54 = -27A \quad \text{y} \quad A = 2.$$

Es posible determinar las otras constantes comparando coeficientes. Desarrollando el lado derecho de (*) y agrupando las potencias iguales de x, vemos que el coeficiente de x^3 es $A + B$. Esto debe ser igual al coeficiente de x^3 en el lado izquierdo, es decir,

$$A + B = 3.$$

Como $A = 2$, resulta que $B = 3 - A = 3 - 2 = 1$. Finalmente, se comparan los términos constantes en (*) tomando $x = 0$. Esto da

$$-4 = -8A + 4B - 2C + D.$$

Sustituyendo los valores encontrados de A, B y D, se llega a

$$-4 = -16 + 4 - 2C + 2$$

que da la solución $C = -3$. Entonces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Para evaluar la integral dada integramos cada una de las fracciones parciales del lado derecho de esta última ecuación y así

$$2\ln|x+1| + \ln|x-2| + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + K$$

donde K es la suma de las cuatro constantes de integración. Lo anterior puede escribirse en la forma

$$\ln[(x+1)^2|x-2|] + \frac{3x-7}{(x-2)^2} + K.$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}\,dx$.

Solución El denominador puede factorizarse como sigue:

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 = x^2(2x - 1) + 4(2x - 1) = (x^2 + 4)(2x - 1).$$

Aplicando la Regla (b) de (9.5) al factor cuadrático irreducible $x^2 + 4$, vemos que una de las fracciones parciales tiene la forma $(Ax + B)/(x^2 + 4)$. Por la Regla (a), también hay una fracción parcial $C/(2x - 1)$ correspondiente al factor $2x - 1$. Por lo cual,

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}.$$

Como en los ejemplos anteriores, esto lleva a

$$(*) \qquad x^2 - x - 21 = (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4).$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{2}$, obtenemos $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 21 = \frac{17}{4}C$, que tiene la solución $C = -5$. Las otras constantes se pueden encontrar comparando coeficientes. Reordenando el lado derecho de (*), obtenemos

$$x^2 - x - 21 = (2A + C)x^2 + (-A + 2B)x - B + 4C.$$

Al comparar los coeficientes de x^2 vemos que $2A + C = 1$. Como $C = -5$, resulta que $2A = 6$ y así $A = 3$. Análogamente, comparando los términos constantes, $-B + 4C = -21$ y por lo tanto, $-B - 20 = -21$ o bien $B = 1$. Entonces, la descomposición del integrando en fracciones parciales es

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}$$

$$= \frac{3x}{x^2 + 4} + \frac{1}{x^2 + 4} - \frac{5}{2x - 1}.$$

La integral dada puede evaluarse ahora integrando el segundo miembro de la última ecuación. Esto da

$$\frac{3}{2}\ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\ln|2x - 1| + K. \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Evaluar $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2}\,dx$.

Solución Aplicando la Regla (b) de (9.5) con $n = 2$,

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

y, por lo tanto,

$$5x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D$$

o bien

$$5x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D).$$

Comparando los coeficientes de x^3 y x^2, obtenemos $A = 5$ y $B = -3$. De los coeficientes de x resulta que $A + C = 7$ o bien $C = 7 - A = 7 - 5 = 2$. Finalmente, los términos constantes dan $B + D = -3$ o bien $D = -3 - B = -3 - (-3) = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x - 3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{5x}{x^2 + 1} - \frac{3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Integrando resulta

$$\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2}\,dx = \frac{5}{2}\ln(x^2 + 1) - 3\tan^{-1}x - \frac{1}{x^2 + 1} + K \quad \bullet$$

EJERCICIOS 9.4

Ejercicios 1-32: Evalúe la integral.

1. $\int \frac{5x - 12}{x(x - 4)}\,dx$
2. $\int \frac{x + 34}{(x - 6)(x + 2)}\,dx$
3. $\int \frac{37 - 11x}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}\,dx$
4. $\int \frac{4x^2 + 54x + 134}{(x - 1)(x + 5)(x + 3)}\,dx$
5. $\int \frac{6x - 11}{(x - 1)^2}\,dx$
6. $\int \frac{-19x^2 + 50x - 25}{x^2(3x - 5)}\,dx$
7. $\int \frac{x + 16}{x^2 + 2x - 8}\,dx$
8. $\int \frac{11x + 2}{2x^2 - 5x - 3}\,dx$
9. $\int \frac{5x^2 - 10x - 8}{x^3 - 4x}\,dx$
10. $\int \frac{4x^2 - 5x - 15}{x^3 - 4x^2 - 5x}\,dx$
11. $\int \frac{2x^2 - 25x - 33}{(x + 1)^2(x - 5)}\,dx$
12. $\int \frac{2x^2 - 12x + 4}{x^3 - 4x^2}\,dx$
13. $\int \frac{9x^4 + 17x^3 + 3x^2 - 8x + 3}{x^5 + 3x^4}\,dx$
14. $\int \frac{5x^2 + 30x + 43}{(x + 3)^3}\,dx$
15. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 63}{(x^2 - 9)^2}\,dx$
16. $\int \frac{1}{(x - 7)^5}\,dx$
17. $\int \frac{5x^2 + 11x + 17}{x^3 - 5x^2 + 4x + 20}\,dx$
18. $\int \frac{4x^3 - 3x^2 + 6x - 27}{x^4 + 9x^2}\,dx$
19. $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$
20. $\int \frac{4x}{(x^2 + 1)^3}\,dx$
21. $\int \frac{2x^3 + 10x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

22. $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^3}\,dx$

23. $\int \frac{x^3 + 3x - 2}{x^2 - x}\,dx$

24. $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{x^3 - 4x}\,dx$

25. $\int \frac{x^6 - x^3 + 1}{x^4 + 9x^2}\,dx$

26. $\int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2}\,dx$

27. $\int \frac{2x^3 - 5x^2 + 46x + 98}{(x^2 + x - 12)^2}\,dx$

28. $\int \frac{-2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x^2(x + 1)^3}\,dx$

29. $\int \frac{4x^3 + 2x^2 - 5x - 18}{(x - 4)(x + 1)^3}\,dx$

30. $\int \frac{10x^2 + 9x + 1}{2x^3 + 3x^2 + x}\,dx$

31. $\int \frac{2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$

32. $\int \frac{x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 5}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}\,dx$

Ejercicios 33-36: Use fracciones parciales para evaluar la integral (véanse las Fórmulas 19, 49, 50 y 52 de la Tabla de Integrales en el Apéndice IV).

33. $\int \frac{1}{a^2 - u^2}\,du$

34. $\int \frac{1}{u(a + bu)}\,du$

35. $\int \frac{1}{u^2(a + bu)}\,du$

36. $\int \frac{1}{u(a + bu)^2}\,du$

37. Sea $f(x) = x/(x^2 - 2x - 3)$. Calcule el área de la región bajo la gráfica de f entre $x = 0$ y $x = 2$.

38. La región delimitada por las gráficas de $y = 1/(x - 1)(4 - x)$, $y = 0$, $x = 2$ y $x = 3$ gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.

39. La región descrita en el Ejercicio 38 gira ahora alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

40. La velocidad (al tiempo t) de una partícula (punto) que se mueve sobre una recta coordenada es $(t + 3)/(t^3 + t)$ m/s. ¿Qué distancia recorre el punto durante el intervalo de tiempo $[1, 2]$?

41. Como una alternativa a las fracciones parciales, demuestre que una integral de la forma

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx}\,dx$$

puede evaluarse escribiéndola como

$$\int \frac{(1/x^2)}{a + (b/x)}\,dx$$

y usando la sustitución $u = a + (b/x)$.

42. Generalice el Ejercicio 41 a integrales de la forma

$$\int \frac{1}{ax^n + bx}\,dx.$$

43. Sea $g(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$, donde n es un entero positivo y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números reales diferentes entre sí. Demuestre que si $f(x)$ es un polinomio de grado menor que n, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - c_1} + \frac{A_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - c_n}$$

donde $A_k = f(c_k)/g'(c_k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. (Éste es un método para encontrar la descomposición en fracciones parciales cuando el denominador se puede factorizar en factores lineales distintos.)

44. Use el Ejercicio 43 para encontrar la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{2x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x + 7}{x^5 - 5x^3 + 4x}.$$

9.5 INTEGRALES EN LAS QUE APARECEN EXPRESIONES CUADRÁTICAS

De la descomposición en fracciones parciales pueden resultar integrandos con expresiones cuadráticas irreducibles $ax^2 + bx + c$. Si $b \neq 0$, a veces es necesario completar el

cuadrado como sigue:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

La sustitución $u = x + (b/2a)$ puede llevar a una integral inmediata.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 6x + 13}\,dx$.

Solución Observamos que la expresión cuadrática $x^2 - 6x + 13$ es irreducible, pues $b^2 - 4ac = 36 - 52 = -16 < 0$. Completamos el cuadrado como sigue:

$$x^2 - 6x + 13 = (x^2 - 6x \quad\;) + 13$$
$$= (x^2 - 6x + 9) + 13 - 9 = (x - 3)^2 + 4.$$

Si se lleva a cabo la sustitución

$$u = x - 3, \qquad x = u + 3, \qquad dx = du$$

entonces

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 - 6x + 13}\,dx = \int \frac{2x - 1}{(x - 3)^2 + 4}\,dx$$
$$= \int \frac{2(u + 3) - 1}{u^2 + 4}\,du$$
$$= \int \frac{2u + 5}{u^2 + 4}\,du$$
$$= \int \frac{2u}{u^2 + 4}\,du + 5\int \frac{1}{u^2 + 4}\,du$$
$$= \ln(u^2 + 4) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2} + C$$
$$= \ln(x^2 - 6x + 13) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x - 3}{2} + C \quad \bullet$$

Este método de completar el cuadrado también puede servir cuando aparece una expresión cuadrática bajo el radical.

EJEMPLO 2 Evaluar $\int \frac{1}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}\,dx$.

Solución Podemos completar el cuadrado de la expresión cuadrática $8 + 2x - x^2$ como sigue:

$$8 + 2x - x^2 = 8 - (x^2 - 2x) = 8 + 1 - (x^2 - 2x + 1)$$
$$= 9 - (x - 1)^2$$

Tomando

$$u = x - 1, \qquad du = dx,$$

obtenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{9-u^2}}\,du \quad = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{3} + C$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\frac{x-1}{3} + C \qquad \bullet$$

En el siguiente ejemplo se hará una sustitución trigonométrica después de completar el cuadrado.

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx$.

Solución Completamos el cuadrado de la expresión cuadrática como sigue:

$$x^2 + 8x + 25 = (x^2 + 8x \quad\;) + 25$$
$$= (x^2 + 8x + 16) + 25 - 16$$
$$= (x+4)^2 + 9.$$

Entonces, $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2+9}}\,dx.$$

Si ahora se hace la sustitución trigonométrica

$$x + 4 = 3\tan\theta,$$

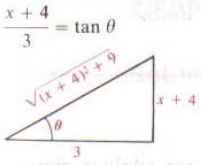
resulta

$$dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$$

y

$$\sqrt{(x+4)^2+9} = \sqrt{9\tan^2\theta + 9} = 3\sqrt{\tan^2\theta + 1} = 3\sec\theta.$$

FIGURA 9.6



Por lo tanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx = \int \frac{1}{3\sec\theta}\,3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C.$$

Para expresar esto en términos de la variable x, usamos el triángulo de la Figura 9.6. Esto da

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+8x+25}}{3} + \frac{x+4}{3}\right| + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2+8x+25} + x + 4\right| + K$$

donde $K = C - \ln 3$.

Otra manera de evaluar la integral después de completar el cuadrado es utilizando el Teorema (8.38). Lo anterior conduce a

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2+9}}\,dx = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x+4}{3} + C \quad \bullet$$

EJERCICIOS 9.5

Ejercicios 1-18: Evalúe la integral.

1. $\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{7+6x-x^2}}\,dx$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$
4. $\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$
5. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{9-8x-x^2}}\,dx$
6. $\int \frac{x+5}{9x^2+6x+17}\,dx$
7. $\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$
8. $\int \frac{x^3}{x^3-1}\,dx$
9. $\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$
10. $\int \frac{1}{x^4-4x^3+13x^2}\,dx$
11. $\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^{3/2}}\,dx$
12. $\int \sqrt{x(6-x)}\,dx$
13. $\int \frac{1}{2x^2-3x+9}\,dx$
14. $\int \frac{2x}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$
15. $\int_2^3 \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5}\,dx$
16. $\int \frac{x}{2x^2+3x-4}\,dx$
17. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$
18. $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$
19. Calcule el área de la región que está delimitada por las gráficas de $y = (x^3+1)^{-1}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.
20. La región que está acotada por la gráfica de $y = 1/(x^2+2x+10)$, los ejes coordenados y la recta $x = 2$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.
21. La región descrita en el Ejercicio 20 gira ahora alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.
22. La velocidad (al tiempo t) de una partícula que se mueve sobre una recta coordenada está dada por $(75+10t-t^2)^{-1/2}$ m/s. ¿Qué distancia recorre la misma durante el intervalo de tiempo $[0, 5]$?

9.6 SUSTITUCIONES DIVERSAS

En esta sección se presentan algunas sustituciones que son útiles para evaluar ciertas integrales. El siguiente ejemplo indica que si una integral contiene una expresión de la forma $\sqrt[n]{f(x)}$, entonces una de las sustituciones $u = \sqrt[n]{f(x)}$ o bien $u = f(x)$ puede simplificar la evaluación.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx$.

Solución 1 La sustitución $u = \sqrt[3]{x^2 + 4}$ lleva a las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$u = \sqrt[3]{x^2 + 4}, \qquad u^3 = x^2 + 4, \qquad x^2 = u^3 - 4.$$

Tomando la diferencial en ambos lados de la última ecuación, obtenemos

$$2x\,dx = 3u^2\,du \quad \text{o bien} \quad x\,dx = \tfrac{3}{2}u^2\,du.$$

Ahora se reemplaza en la integral dada como sigue:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+4}} \cdot x\,dx \\ &= \int \frac{u^3 - 4}{u} \cdot \frac{3}{2}u^2\,du = \frac{3}{2}\int (u^4 - 4u)\,du \\ &= \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{5}u^5 - 2u^2) + C = \tfrac{3}{10}u^2(u^3 - 10) + C \\ &= \tfrac{3}{10}(x^2+4)^{2/3}(x^2 - 6) + C\end{aligned}$$

Solución 2 Si sustituimos u en lugar de la expresión *bajo* el radical, entonces

$$u = x^2 + 4 \qquad x^2 = u - 4$$
$$2x\,dx = du \qquad x\,dx = \tfrac{1}{2}\,du.$$

En este caso podemos escribir

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+4}} \cdot x\,dx \\ &= \int \frac{u-4}{u^{1/3}} \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int (u^{2/3} - 4u^{-1/3})\,du \\ &= \tfrac{1}{2}[\tfrac{3}{5}u^{5/3} - 6u^{2/3}] + C = \tfrac{3}{10}u^{2/3}[u - 10] + C \\ &= \tfrac{3}{10}(x^2+4)^{2/3}(x^2 - 6) + C\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx.$

Solución Si se toma $u = \sqrt[6]{x}$, entonces

$$x = u^6, \qquad \sqrt{x} = u^3, \qquad \sqrt[3]{x} = u^2, \qquad dx = 6u^5\,du$$

y

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1}{u^3 + u^2}\,6u^5\,du = 6\int \frac{u^3}{u+1}\,du.$$

Efectuando la división,

$$\frac{u^3}{u+1} = u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = 6\int\left[u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right]du$$
$$= 6(\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{2}u^2+u-\ln|u+1|)+C$$
$$= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C \quad \blacksquare$$

Si un integrando es una expresión racional en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, entonces la sustitución $u = \tan(x/2)$ para $-\pi < x < \pi$ transforma el integrando en una expresión racional (algebraica) en u. Para demostrar esto, obsérvese primero que

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sec(x/2)} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x/2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$
$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \tan\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = u\,\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2u}{1+u^2},$$
$$\cos x = 1-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1-\frac{2u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Además, como $x/2 = \tan^{-1}u$, se tiene que $x = 2\tan^{-1}u$ y entonces

$$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du.$$

El siguiente teorema resume este análisis.

TEOREMA (9.6)

Si un integrando es una expresión racional en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, las siguientes sustituciones lo transforman en una expresión racional en u:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

donde $u = \tan(x/2)$.

EJEMPLO 3 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}\,dx$.

Solución Aplicando el Teorema (9.6) y simplificando el integrando,

$$\int \frac{1}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}\,dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)-3\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$= \int \frac{2}{8u - 3(1 - u^2)}\, du$$

$$= 2 \int \frac{1}{3u^2 + 8u - 3}\, du$$

Mediante fracciones parciales,

$$\frac{1}{3u^2 + 8u - 3} = \frac{1}{10}\left(\frac{3}{3u - 1} - \frac{1}{u + 3}\right)$$

y así,

$$\int \frac{1}{4 \operatorname{sen} x - 3 \cos x}\, dx = \frac{1}{5} \int \left(\frac{3}{3u - 1} - \frac{1}{u + 3}\right) du$$

$$= \frac{1}{5}(\ln |3u - 1| - \ln |u + 3|) + C$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left|\frac{3u - 1}{u + 3}\right| + C$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left|\frac{3 \tan (x/2) - 1}{\tan (x/2) + 3}\right| + C$$

A veces son útiles otras sustituciones pero es imposible dar reglas para aplicar en todos los casos.

EJERCICIOS 9.6

Ejercicios 1-28: Evalúe la integral.

1. $\int x \sqrt[3]{x + 9}\, dx$
2. $\int x^2 \sqrt{2x + 1}\, dx$
3. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x + 2}}\, dx$
4. $\int \frac{5x}{(x + 3)^{2/3}}\, dx$
5. $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x} + 4}\, dx$
6. $\int_0^{25} \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{x}}}\, dx$
7. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\, dx$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\, dx$
9. $\int \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x - 2}}\, dx$
10. $\int_0^4 \frac{2x + 3}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$
11. $\int \frac{x + 1}{(x + 4)^{1/3}}\, dx$
12. $\int \frac{x^{1/3} + 1}{x^{1/3} - 1}\, dx$
13. $\int e^{3x} \sqrt{1 + e^x}\, dx$
14. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1 + e^x}}\, dx$
15. $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 4}\, dx$
16. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\, dx$
17. $\int \operatorname{sen} \sqrt{x + 4}\, dx$
18. $\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$
19. $\int_2^3 \frac{x}{(x - 1)^6}\, dx$
(*Sugerencia:* Tome $u = x - 1$.)
20. $\int \frac{x^2}{(3x + 4)^{10}}\, dx$
(*Sugerencia:* Tome $u = 3x + 4$.)
21. $\int \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x}\, dx$
22. $\int \frac{1}{3 + 2 \cos x}\, dx$
23. $\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$
24. $\int \frac{1}{\tan x + \operatorname{sen} x}\, dx$
25. $\int \frac{\sec x}{4 - 3 \tan x}\, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 8}\,dx$

(*Sugerencia:* Tome $u = \operatorname{sen} x$.)

28. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{5\cos x + \cos^2 x}\,dx$

(*Sugerencia:* Tome $u = \cos x$.)

Ejercicios 29-30: Demuestre la identidad para todos los números m y n, usando una sustitución apropiada.

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$

31. Use una sustitución apropiada para demostrar que

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad \text{para } x > 0$$

y luego aplique este resultado para demostrar la identidad

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

(véase el Ejercicio 24 de la Sección 8.5).

32. Demuestre que

$$\int \frac{1}{(x+a)^{3/2} + (x-a)^{3/2}}\,dx$$

se puede transformar, mediante la sustitución $x = \frac{1}{2}a(t^2 + t^{-2})$, en la integral de una función racional.

Ejercicios 33-34: Use el Teorema (9.6) para verificar la fórmula.

33. $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{1}{2}x}{1-\tan\frac{1}{2}x}\right| + C$

34. $\displaystyle\int \csc x\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C$

9.7 TABLAS DE INTEGRALES

En matemáticas y en otras actividades científicas en las que se usan integrales, a veces hay que consultar las tablas de integrales. Muchas de las fórmulas que aparecen en esas tablas se pueden obtener con los métodos estudiados en este capítulo. En general, las tablas de integrales se deben usar cuando se haya adquirido experiencia con los métodos comunes de integración. Al evaluar integrales complicadas, a menudo se necesita efectuar sustituciones o utilizar fracciones parciales, integración por partes u otros métodos, para obtener los integrandos que aparecen en las tablas.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo aplicar algunas de las fórmulas que figuran en la pequeña Tabla de Integrales del Apéndice IV. Para verificar que no se hayan cometido errores al usar la tabla, siempre hay que comprobar la respuesta por derivación.

EJEMPLO 1 Evaluar $\displaystyle\int x^3 \cos x\,dx$.

Solución Usamos primero la Fórmula 85 de la Tabla de Integrales con $n = 3$ y $u = x$ para reducir el exponente de x. Así,

$$\int x^3 \cos x\,dx = x^3 \operatorname{sen} x - 3\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx.$$

A continuación se aplica la Fórmula 84 con $n = 2$ y luego la Fórmula 83, obteniendo

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx \\ &= -x^2\cos x + 2[\cos x + x\operatorname{sen} x] + C.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera expresión, obtenemos

$$\int x^3 \cos x \, dx = x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6 \cos x - 6x \operatorname{sen} x + C$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{3 + 5x^2}}\, dx$ para $x > 0$.

Solución El integrando sugiere usar la parte de la tabla en la que aparece la forma $\sqrt{a^2 + u^2}$. Concretamente, la Fórmula 28 dice que

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$$

(la diferencial *du* se coloca en el numerador en vez de a la derecha del integrando para hacer más compacta la notación). A fin de usar esta fórmula, debemos ajustar antes el integrando para que coincida *exactamente* con la fórmula. Si definimos

$$a^2 = 3 \quad \text{y} \quad u^2 = 5x^2$$

entonces la expresión bajo el radical queda ajustada, pero también necesitamos que aparezcan

(i) u^2 a la izquierda del radical.
(ii) *du* en el numerador.

Se puede lograr (i) escribiendo la integral como

$$5 \int \frac{1}{5x^2\sqrt{3 + 5x^2}}\, dx.$$

Para (ii), notamos que

$$u = \sqrt{5}x \quad \text{y} \quad du = \sqrt{5}\, dx$$

y se expresa la integral anterior como

$$5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{5x^2\sqrt{3 + 5x^2}} \sqrt{5}\, dx.$$

Esta última integral coincide exactamente con la de la Fórmula 28 y por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{3 + 5x^2}}\, dx = \sqrt{5}\left[-\frac{\sqrt{3 + 5x^2}}{3(\sqrt{5}x)}\right] + C$$

$$= -\frac{\sqrt{3 + 5x^2}}{3x} + C$$

A veces, antes de recurrir a la tabla para evaluar una integral, es necesario hacer alguna sustitución, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}\,dx$.

Solución Comenzamos por escribir la integral como sigue:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}\,dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}\,dx$$

Puesto que no hay fórmulas en la tabla que tengan esta forma, consideramos la sustitución $u = \cos x$. Entonces, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$ y la integral puede escribirse como

$$2\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}\,dx = -2\int \frac{\cos x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}(-\operatorname{sen} x)\,dx$$

$$= -2\int \frac{u}{\sqrt{3 - 5u}}\,du.$$

Consultando la Tabla de Integrales, vemos que la Fórmula 55 dice que

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu}.$$

Usando este resultado con $a = 3$ y $b = -5$, resulta

$$-2\int \frac{u}{\sqrt{3 - 5u}}\,du = -2\left(\frac{2}{75}\right)(-5u - 6)\sqrt{3 - 5u} + C.$$

Finalmente, como $u = \cos x$,

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}\,dx = \frac{4}{75}(5\cos x + 6)\sqrt{3 - 5\cos x} + C \quad \bullet$$

EJERCICIOS 9.7

Ejercicios 1-30: Use la Tabla de Integrales en el Apéndice IV para evaluar la integral.

1. $\int \frac{\sqrt{4 + 9x^2}}{x}\,dx$
2. $\int \frac{1}{x\sqrt{2 + 3x^2}}\,dx$
3. $\int (16 - x^2)^{3/2}\,dx$
4. $\int x^2\sqrt{4x^2 - 16}\,dx$
5. $\int x\sqrt{2 - 3x}\,dx$
6. $\int x^2\sqrt{5 + 2x}\,dx$
7. $\int \operatorname{sen}^6 3x\,dx$
8. $\int x\cos^5(x^2)\,dx$
9. $\int \csc^4 x\,dx$
10. $\int \operatorname{sen} 5x\cos 3x\,dx$
11. $\int x\operatorname{sen}^{-1} x\,dx$
12. $\int x^2\tan^{-1} x\,dx$
13. $\int e^{-3x}\operatorname{sen} 2x\,dx$
14. $\int x^5 \ln x\,dx$
15. $\int \frac{\sqrt{5x - 9x^2}}{x}\,dx$
16. $\int \frac{1}{x\sqrt{3x - 2x^2}}\,dx$
17. $\int \frac{x}{5x^4 - 3}\,dx$
18. $\int \cos x\sqrt{\operatorname{sen}^2 x - 4}\,dx$
19. $\int e^{2x}\cos^{-1} e^x\,dx$
20. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$
21. $\int x^3\sqrt{2 + x}\,dx$
22. $\int \frac{7x^3}{\sqrt{2 - x}}\,dx$
23. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{4 + 9\operatorname{sen} x}\,dx$
24. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{4 + 3\sec x}}\,dx$
25. $\int \frac{\sqrt{9 + 2x}}{x}\,dx$
26. $\int \sqrt{8x^3 - 3x^2}\,dx$
27. $\int \frac{1}{x(4 + \sqrt[3]{x})}\,dx$
28. $\int \frac{1}{2x^{3/2} + 5x^2}\,dx$
29. $\int \sqrt{16 - \sec^2 x}\tan x\,dx$
30. $\int \frac{\cot x}{\sqrt{4 - \csc^2 x}}\,dx$

9.8 REPASO

Discuta lo siguiente:

1. Integración por partes.
2. Sustituciones trigonométricas.
3. *Integrales de las funciones racionales.*
4. Integrales en las que aparecen expresiones cuadráticas.

EJERCICIOS 9.8

Ejercicios 1-100: Evalúe la integral.

1. $\int x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$
2. $\int \sec^3(3x)\,dx$
3. $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$
4. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$
5. $\int \cos^3 2x \operatorname{sen}^2 2x\,dx$
6. $\int \cos^4 x\,dx$
7. $\int \tan x \sec^5 x\,dx$
8. $\int \tan x \sec^6 x\,dx$
9. $\int \frac{1}{(x^2+25)^{3/2}}\,dx$
10. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$
11. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$
12. $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$
13. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$
14. $\int \frac{1}{x+x^3}\,dx$
15. $\int \frac{x^3-20x^2-63x-198}{x^4-81}\,dx$
16. $\int \frac{x-1}{(x+2)^5}\,dx$
17. $\int \frac{x}{\sqrt{4+4x-x^2}}\,dx$
18. $\int \frac{x}{x^2+6x+13}\,dx$
19. $\int \frac{\sqrt[3]{x+8}}{x}\,dx$
20. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x+3}\,dx$
21. $\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx$
22. $\int \cos(\ln x)\,dx$
23. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx$
24. $\int \cot^2 3x\,dx$
25. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
26. $\int \frac{1}{x\sqrt{9x^2+4}}\,dx$
27. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^3+2x^2}\,dx$
28. $\int \frac{x^3}{x^3-3x^2+9x-27}\,dx$
29. $\int \frac{1}{x^{3/2}+x^{1/2}}\,dx$
30. $\int \frac{2x+1}{(x+5)^{100}}\,dx$
31. $\int e^x \sec e^x\,dx$
32. $\int x \tan x^2\,dx$
33. $\int x^2 \operatorname{sen} 5x\,dx$
34. $\int \operatorname{sen} 2x \cos x\,dx$
35. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{1/2} x\,dx$
36. $\int \operatorname{sen} 3x \cot 3x\,dx$
37. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$
38. $\int x(4x^2+25)^{-1/2}\,dx$
39. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x^2+25}}\,dx$
40. $\int \frac{3x+2}{x^2+8x+25}\,dx$
41. $\int \sec^2 x \tan^2 x\,dx$
42. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\,dx$
43. $\int x \cot x \csc x\,dx$
44. $\int (1+\csc 2x)^2\,dx$
45. $\int x^2(8-x^3)^{1/3}\,dx$
46. $\int x(\ln x)^2\,dx$
47. $\int \sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$
48. $\int x\sqrt{5-3x}\,dx$
49. $\int \frac{e^{3x}}{1+e^x}\,dx$
50. $\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}\,dx$
51. $\int \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}}\,dx$
52. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,dx$
53. $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$
54. $\int \frac{x}{25-9x^2}\,dx$
55. $\int \frac{1-2x}{x^2+12x+35}\,dx$
56. $\int \frac{7}{x^2-6x+18}\,dx$
57. $\int \tan^{-1} 5x\,dx$
58. $\int \operatorname{sen}^4 3x\,dx$
59. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$
60. $\int \frac{x}{\csc 5x^2}\,dx$
61. $\int \frac{1}{\sqrt{7+5x^2}}\,dx$
62. $\int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx$
63. $\int \cot^6 x\,dx$
64. $\int \cot^5 x \csc x\,dx$
65. $\int x^3\sqrt{x^2-25}\,dx$
66. $\int (\operatorname{sen} x)10^{\cos x}\,dx$
67. $\int (x^2-\operatorname{sech}^2 4x)\,dx$
68. $\int x \cosh x\,dx$

69. $\int x^2 e^{-4x}\,dx$

70. $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

71. $\int \frac{3}{\sqrt{11-10x-x^2}}\,dx$

72. $\int \frac{12x^3+7x}{x^4}\,dx$

73. $\int \tan 7x \cos 7x\,dx$

74. $\int e^{1+\ln 5x}\,dx$

75. $\int \frac{4x^2-12x-10}{(x-2)(x^2-4x+3)}\,dx$

76. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{16-x^2}}\,dx$

77. $\int (x^3+1)\cos x\,dx$

78. $\int (x-3)^2(x+1)\,dx$

79. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x^2}\,dx$

80. $\int \frac{4x^3-15x^2-6x+81}{x^4-18x^2+81}\,dx$

81. $\int (5-\cot 3x)^2\,dx$

82. $\int x(x^2+5)^{3/4}\,dx$

83. $\int \frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})}\,dx$

84. $\int \frac{x}{\cos^2 4x}\,dx$

85. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$

86. $\int \frac{4x^2-6x+4}{(x^2+4)(x-2)}\,dx$

87. $\int \frac{x^2}{(25+x^2)^2}\,dx$

88. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\,dx$

89. $\int \tan^3 x \sec x\,dx$

90. $\int \frac{x}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx$

91. $\int \frac{2x^3+4x^2+10x+13}{x^4+9x^2+20}\,dx$

92. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^3}\,dx$

93. $\int \frac{(x^2-2)^2}{x}\,dx$

94. $\int \cot^2 x \csc x\,dx$

95. $\int x^{3/2}\ln x\,dx$

96. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

97. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+3}}\,dx$

98. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cot x}\,dx$

99. $\int x^3 e^{(x^2)}\,dx$

100. $\int (x+2)^2(x+1)^{10}\,dx$

CAPÍTULO **10**

FORMAS INDETERMINADAS, INTEGRALES IMPROPIAS Y FÓRMULAS DE TAYLOR

En este capítulo se presentan algunos métodos que son útiles para investigar ciertos límites. También se estudian las integrales definidas con integrandos discontinuos o con extremos (o límites) de integración infinitos. La última sección contiene un método para aproximar funciones por medio de polinomios. Estos temas tienen muchas aplicaciones en física y en matemáticas; sin embargo, la más importante aplicación se pospone para el siguiente capítulo referente a ***series infinitas****.*

10.1 LAS FORMAS INDETERMINADAS 0/0 Y ∞/∞

Con frecuencia aparecen límites de la forma $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$, donde ambas funciones f y g tienen límite 0 cuando x tiende a c. Se dice que $f(x)/g(x)$ tiene la **forma indeterminada 0/0** en $x = c$. Quizá los ejemplos más importantes de la forma 0/0 aparecen al usar la fórmula para la derivada

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Si los límites de $f(x)$ y $g(x)$ son ∞ o bien $-\infty$ cuando x tiende a c, se dice que $f(x)/g(x)$ tiene la **forma indeterminada** ∞/∞ en $x = c$.

En el Capítulo 2 se estudió

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6}.$$

El cociente tiene la forma indeterminada 0/0; sin embargo, el límite se puede obtener como sigue:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(2x-1)(x-2)}{(5x+3)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{5x+3} = \frac{3}{13}.$$

Otras formas indeterminadas requieren métodos más complicados. Por ejemplo en el Capítulo 8 se usó un razonamiento geométrico para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

En esta sección se demuestra *la regla de L'Hôpital* y se aplica a las formas indeterminadas. La demostración utiliza la siguiente fórmula que lleva el nombre del famoso matemático francés A. Cauchy (1789-1857).

FÓRMULA DE CAUCHY (10.1)

Si las funciones f y g son continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivables en el intervalo abierto (a, b) y si $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), entonces existe un número w en (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}.$$

Demostración Nótese primero que $g(b) - g(a) \neq 0$, ya que si $g(a) = g(b)$, entonces por el Teorema de Rolle (4.10), existe un número c en (a, b) tal que $g'(c) = 0$, lo que contradice la hipótesis sobre g'.

Sea h una nueva función definida como sigue:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

para todo x en $[a, b]$. Se deduce que h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $h(a) = h(b)$. Por el Teorema de Rolle, existe un número w en (a, b) tal que $h'(w) = 0$; es decir;

$$[f(b) - f(a)]g'(w) - [g(b) - g(a)]f'(w) = 0.$$

Esto equivale a la Fórmula de Cauchy. • •

Tomando $g(x) = x$ en (10.1) se obtiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(w)}{1}$$

o, equivalentemente

$$f(b) - f(a) = f'(w)(b - a).$$

Lo anterior demuestra que la Fórmula de Cauchy es una generalización del Teorema del Valor Medio (4.12).

El siguiente resultado es el teorema más importante sobre formas indeterminadas.

REGLA DE L'HÔPITAL* (10.2)

Sea (a, b) un intervalo abierto que contiene a c. Sean f y g funciones definidas y derivables en (a, b), excepto posiblemente en c. Si $g'(x) \neq 0$ para $x \neq c$ y $f(x)/g(x)$ tiene la forma indeterminada 0/0 o bien ∞/∞ en $x = c$, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que $\lim_{x \to c}[f'(x)/g'(x)]$ exista o en su caso $\lim_{x \to c}[f'(x)/g'(x)] = \infty$.

Demostración Supongamos que $f(x)/g(x)$ tiene la forma indeterminada 0/0 en $x = c$ y que $\lim_{x \to c}[f'(x)/g'(x)] = L$ para un número L. Se quiere demostrar que $\lim_{x \to c}[f(x)/g(x)] = L$. Sean F y G tales que

$$F(x) = f(x) \text{ si } x \neq c \quad \text{y} \quad F(c) = 0,$$
$$G(x) = g(x) \text{ si } x \neq c \quad \text{y} \quad G(c) = 0.$$

Como

$$\lim_{x \to c} F(x) = \lim_{x \to c} f(x) = 0 = F(c),$$

la función F es continua en c y por tanto es continua *en todo* el intervalo (a, b). Análogamente, G es continua en (a, b). Además, $F'(x) = f'(x)$ y $G'(x) = g'(x)$, siempre

* G. L'Hôpital (1661-1704) fue un noble francés que publicó el primer libro de Cálculo. La regla apareció en ese libro; sin embargo, fue descubierta realmente por su maestro, el matemático suizo Johann Bernoulli (1667-1748), quien participó el resultado a L'Hôpital en 1694.

que $x \neq c$. Aplicando la Fórmula de Cauchy a uno de los intervalos $[c, x]$ o $[x, c]$ resulta que existe un número w entre c y x tal que

$$\frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F'(w)}{G'(w)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}.$$

Aprovechando el hecho de que $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$ y $F(c) = G(c) = 0$, se obtiene que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}.$$

FIGURA 10.1



Como w se encuentra entre c y x (véase la Figura 10.1), resulta que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(w)}{g'(w)} = \lim_{w \to c} \frac{f'(w)}{g'(w)} = L$$

que es lo que se quería demostrar.

En el caso en que $\lim_{x \to c} [f'(x)/g'(x)] = \infty$, se puede aplicar un razonamiento análogo. La demostración para la forma indeterminada ∞/∞ es más difícil. El lector podrá encontrarla en textos de Cálculo avanzado. • •

Con frecuencia, al aplicar la regla de L'Hôpital se comete el error de derivar $f(x)/g(x)$. Nótese que en (10.2) se toman las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$ *por separado* y posteriormente se busca el límite de $f'(x)/g'(x)$.

EJEMPLO 1 Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x + 2x - 1}{3x}$.

Solución El cociente tiene la forma indeterminada 0/0 en $x = 0$. Por la Regla de L'Hôpital (10.2),

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 2x - 1}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + 2}{3} = \frac{2}{3}. \quad \bullet$$

Para hacer completamente rigurosa la solución del Ejemplo 1, se debería haber demostrado que $\lim_{x \to 0} (-\operatorname{sen} x + 2)/3$ existe *antes* de igualarlo a 2/3; sin embargo, para simplificar las soluciones se supone que el límite existe y se procede como en este caso.

A veces es necesario aplicar la Regla de L'Hôpital varias veces en un mismo problema, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$.

Solución El cociente tiene la forma indeterminada 0/0. Por la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} 2x}$$

suponiendo que el segundo límite existe. Como este último cociente tiene la forma indeterminada 0/0, aplicamos la Regla de L'Hôpital por segunda vez y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4 \cos 2x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

De esto se deduce que el límite existe y es igual a $\frac{1}{2}$. •

La Regla de L'Hôpital también puede aplicarse a los límites unilaterales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Calcular $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{4 \tan x}{1 + \sec x}$.

Solución La forma indeterminada es ∞/∞. Por la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4 \tan x}{1 + \sec x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4 \sec^2 x}{\sec x \tan x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4 \sec x}{\tan x}.$$

Este último cociente tiene también la forma ∞/∞ en $x = \pi/2$; sin embargo, al volver a aplicar la Regla de L'Hôpital se obtiene otra vez la forma ∞/∞ (compruebe este hecho). En este caso el límite puede calcularse usando identidades trigonométricas para modificar el cociente como sigue:

$$\frac{4 \sec x}{\tan x} = \frac{4/(\cos x)}{(\operatorname{sen} x)/(\cos x)} = \frac{4}{\operatorname{sen} x}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4 \tan x}{1 + \sec x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4}{\operatorname{sen} x} = \frac{4}{1} = 4. \quad \bullet$$

Puede demostrarse otra forma de la Regla de L'Hôpital para los casos $x \to \infty$ y $x \to -\infty$. A continuación se presenta una demostración parcial de este hecho. Supongamos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Definiendo $u = 1/x$ y aplicando la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f(1/u)}{g(1/u)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{D_u f(1/u)}{D_u g(1/u)}.$$

Por la Regla de la Cadena,

$$D_u f(1/u) = f'(1/u)(-1/u^2) \quad \text{y} \quad D_u g(1/u) = g'(1/u)(-1/u^2).$$

Sustituyendo en el límite anterior y simplificando,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f'(1/u)}{g'(1/u)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A esta fórmula también se la llama Regla de L'Hôpital. Los dos ejemplos siguientes muestran cómo se aplica esta regla a la forma ∞/∞.

EJEMPLO 4 Determinar $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Solución La forma indeterminada es ∞/∞. Por la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}.$$

Esta última expresión tiene la forma indeterminada 0/0. Al aplicar de nuevo la Regla de L'Hôpital se obtiene otra vez 0/0 (compruébese este hecho). En cambio, podemos obtener el límite simplificando algebraicamente la expresión como sigue:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0. \quad \bullet$$

EJEMPLO 5 Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$, si es que existe.

Solución La forma indeterminada es ∞/∞. En este caso se debe aplicar la Regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{2} = \infty.$$

Por lo tanto, la expresión dada no tiene límite sino que tiende a infinito cuando x tiende a ∞. •

Antes de aplicar la Regla de L'Hôpital es muy importante comprobar que el cociente tiene una de las formas indeterminadas 0/0 *o bien* ∞/∞. Si se aplica la regla a una forma que no es indeterminada puede obtenerse un resultado incorrecto, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$, si es que existe.

Solución El cociente *no* tiene ninguna de las formas indeterminadas 0/0 o bien ∞/∞ en $x = 0$. Para evaluar el límite escribimos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} (e^x + e^{-x})\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Como

$$\lim_{x\to 0} (e^x + e^{-x}) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

del Teorema (4.27) (ii) obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \infty.$$

Si pasamos por alto que el cociente no tiene ninguna de las formas indeterminadas 0/0 o bien ∞/∞ en $x = 0$, y aplicamos (incorrectamente) la Regla de L'Hôpital, resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}.$$

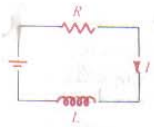
Como este cociente tiene la forma indeterminada 0/0, se aplica de nuevo la regla mencionada y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Esto lleva a la conclusión (errónea) de que el límite existe y es igual a 1. •

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las formas indeterminadas al análisis de un circuito eléctrico.

FIGURA 10.2



EJEMPLO 7 La corriente I al tiempo t en un circuito eléctrico está dada por $I = V(1 - e^{-Rt/L})/R$ donde V es la tensión aplicada (voltaje), R es la resistencia y L es la inductancia (véase la Figura 10.2). Calcular $\lim_{L\to 0^+} I$ tomando a L como la única variable independiente. Evaluar $\lim_{R\to 0^+} I$ tomando a R *como la única variable independiente.*

Solución Considerando a V, R y t como constantes y a L como variable, la expresión que se obtiene para I no es una forma indeterminada en $L = 0$. Usando los teoremas comunes sobre límites obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{L\to 0^+} I &= \lim_{L\to 0^+} \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \\ &= \frac{V}{R}\left(1 - \lim_{L\to 0^+} e^{-Rt/L}\right) \\ &= \frac{V}{R}(1 - 0) = \frac{V}{R}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, en estas condiciones la corriente está dada por la ley de Ohm $I = V/R$.

Considerando a V, L y t como constantes y a R como variable, I toma la forma indeterminada 0/0 en $R = 0$. Aplicando la Regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}\lim_{R\to 0^+} I &= V \lim_{R\to 0^+} \frac{(1 - e^{-Rt/L})}{R} \\ &= V \lim_{R\to 0^+} \frac{0 - e^{-Rt/L}(-t/L)}{1} \\ &= V[0 - (1)(-t/L)] = \frac{V}{L}t.\end{aligned}$$

Esto puede interpretarse como sigue. Cuando $R \to 0^+$, la corriente I es directamente proporcional al tiempo t, con constante de proporcionalidad V/L. Por lo tanto, en $t = 1$ la corriente es V/L; en $t = 2$ es $(V/L)(2)$; en $t = 3$ es $(V/L)(3)$, etcétera. •

EJERCICIOS 10.1

Ejercicios 1-52: Calcule el límite si es que existe.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x}{\tan x}$
3. $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$
4. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x+4}-2}$
5. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$
6. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9}$
7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x-1}$
8. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-x-7}$
9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{\tan x - x}$
10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x - \tan x}$
11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+1-e^x}{x^2}$
12. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x+1-e^x}{x^3}$
13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$
14. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$
15. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$
16. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{x}$
17. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{2+\sec x}{3\tan x}$
18. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot x}$
19. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$
20. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$
21. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \operatorname{sen} 2x}$
22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{\tan^{-1} x}$
23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2\operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$
24. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\ln (x-1)}{x-2}$
25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x + e^{-x}}{x^2}$
26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2e^x - 3x - e^{-x}}{x^2}$
27. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+3x+1}{5x^2+x+4}$
28. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^3+x+1}{3x^3+4}$
29. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x \ln x}{x + \ln x}$
30. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^{3x}}{\ln x}$
31. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$, $n > 0$
32. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^n}$, $n > 0$
33. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{\ln (x-1)}{(x-2)^2}$
34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x - 2}{\cos^2 x - x \operatorname{sin} x - 1}$
35. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} 2x}{\operatorname{sen}^{-1} x}$
36. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln (\ln x)}{\ln x}$
37. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3 \tan x}$
38. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3-5x^2+6x-3}{x^3-2x^2+x-1}$
39. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3-3^x}{5-5^x}$
40. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2-e^x-e^{-x}}{1-\cos^2 x}$
41. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$
42. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4+x^3-3x^2-x+2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$
43. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\tan^{-1} x}{x \operatorname{sen} x}$
44. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$
45. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^{3/2}+5x-4}{x \ln x}$
46. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen}^{-1} x}{x - \operatorname{sen} x}$
47. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\tan^{-1} x}$
48. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\tan x}{\cot 2x}$
49. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2e^{-x}+\ln x}{e^{3x}+x^2}$
50. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$
51. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x-\cos x}{x}$
52. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x+\cosh x}{x^2+1}$

53. Desde un globo de aire caliente se deja caer un cuerpo de masa m. Si la fuerza resistente debida al aire es directamente proporcional a la velocidad $v(t)$ del objeto al tiempo t, entonces

$$v(t) = (mg/k)(1 - e^{-(k/m)t})$$

donde k es una constante y g es la aceleración de la gravedad (véase el Ejemplo 4 de la Sección 19.2). Demuestre que $\lim_{k\to 0^+} v(t) = -gt$.

54. Un cuerpo esférico de masa m se suelta en agua (véase el Ejercicio 56 de la Sección 8.7). Si la fuerza de resistencia debida al agua es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces la distancia $s(t)$ recorrida por la pelota al tiempo t está dada por

$$s(t) = (m/k) \ln \cosh (\sqrt{gk/m}\, t)$$

donde k es una constante y g es la aceleración

de la gravedad. Demuestre que $\lim_{k\to 0^+} s(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

55. Consulte la Definición (8.21) del movimiento armónico simple. Un cuerpo de masa m se fija a un resorte colgado de un soporte. Se pone en movimiento al cuerpo moviendo el soporte de acuerdo con la ecuación $D = A\cos\omega t$, donde A y ω son constantes positivas y t es el tiempo. Si se desprecian las fuerzas de fricción, el desplazamiento s del cuerpo con respecto a su posición inicial, al tiempo t, está dado por

$$s = \frac{A\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)$$

para $\omega \neq \omega_0$, donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ para alguna constante positiva k. Calcule $\lim_{\omega\to\omega_0} s$, y demuestre que la amplitud de las oscilaciones es creciente. Éste es un ejemplo del fenómeno de *resonancia*.

56. El modelo logístico para el crecimiento poblacional predice el tamaño $y(t)$ de una población al tiempo t por medio de la fórmula $y(t) = K/(1 + ce^{-rt})$, donde r y K son constantes positivas y $c = [K - y(0)]/y(0)$. Los ecologistas llaman a K *capacidad del medio* y la interpretan como el número máximo de individuos que el medio o ambiente natural puede soportar. Calcule $\lim_{t\to\infty} y(t)$ y $\lim_{K\to\infty} y(t)$ e ilustre gráficamente el significado de estos límites.

57. La *integral senaria* $Si(x) = \int_0^x [(\operatorname{sen} u)/u]\,du$ es una función especial de las matemáticas aplicadas. Calcule

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{Si(x)}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{Si(x) - x}{x^3}$

58. La *integral cosenaria de Fresnel* cuya fórmula es $C(x) = \int_0^x \cos u^2\,du$, se utiliza en el estudio de la difracción de la luz. Calcule

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{C(x)}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{C(x) - x}{x^5}$

59. Sea $x > 0$. Se sabe que $\int_1^x t^n\,dt = [t^{n+1}/(n+1)]_1^x$ para $n \neq -1$. *Demuestre que*

$$\lim_{n\to -1} \int_1^x t^n\,dt = \int_1^x t^{-1}\,dt.$$

60. Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ para

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt \quad \text{y} \quad g(x) = e^{x^2}.$$

10.2 OTRAS FORMAS INDETERMINADAS

Se asevera que $f(x)g(x)$ tiene la **forma indeterminada** $0 \cdot \infty$ en $x = c$, si se tiene $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ o bien $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$. Se usa la misma terminología para límites unilaterales y cuando $x \to \infty$ o bien $x \to -\infty$. Esta forma se puede cambiar a una de las indeterminadas $0/0$ o bien ∞/∞ escribiendo

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{o bien} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

EJEMPLO 1 Calcular $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$.

Solución La forma indeterminada es $0 \cdot \infty$. Escribimos

$$x^2 \ln x = \frac{\ln x}{1/x^2}$$

y se aplica luego la Regla de L'Hôpital a la forma indeterminada resultante que es del tipo ∞/∞. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3}.$$

Este último cociente tiene la forma indeterminada ∞/∞; sin embargo, si aplicáramos de nuevo la Regla de L'Hôpital volveríamos a obtener ∞/∞. En vez de eso se simplifica algebraicamente el cociente y se determina el límite como sigue:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0.$$

EJEMPLO 2 Calcular $\lim_{x\to \pi/2} (2x - \pi) \sec x$.

Solución La forma indeterminada es $0 \cdot \infty$. Comenzamos por escribir

$$(2x - \pi) \sec x = \frac{2x - \pi}{1/(\sec x)} = \frac{2x - \pi}{\cos x}.$$

Puesto que esta última expresión tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = \pi/2$, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital como sigue:

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{2x - \pi}{\cos x} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{2}{-\operatorname{sen} x} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Las formas indeterminadas que se denotan por $\mathbf{0^0}$, $\boldsymbol{\infty^0}$ y $\mathbf{1^\infty}$ provienen de expresiones como $f(x)^{g(x)}$. Para estudiar estas formas es conveniente escribir

$$y = f(x)^{g(x)}$$

y tomar el logaritmo natural a ambos lados, con lo que se obtiene

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x).$$

Si la forma indeterminada para y es 0^0 o bien ∞^0, entonces la forma indeterminada para $\ln y$ es $0 \cdot \infty$, que se puede resolver usando los métodos anteriores. Análogamente, si y tiene la forma 1^∞, entonces la forma indeterminada para $\ln y$ es $\infty \cdot 0$. Resulta así que

$$\text{si } \lim_{x\to c} \ln y = L, \quad \text{entonces} \quad \lim_{x\to c} y = \lim_{x\to c} e^{\ln y} = e^L,$$

es decir,

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^L.$$

Este método se puede resumir como sigue.

GUÍA PARA ANALIZAR $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ CUANDO LA FORMA INDETERMINADA ES 0^0, 1^∞ O BIEN ∞^0 (10.3)

1. Sea $y = f(x)^{g(x)}$.
2. Tomar logaritmos: $\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$.
3. Calcular $\lim_{x\to c} \ln y$, si es que existe.
4. Si $\lim_{x\to c} \ln y = L$, entonces $\lim_{x\to c} y = e^L$.

A veces se comete el error de parar en el paso 3 y concluir que la expresión tiene el límite L. Es importante recordar que *se desea calcular el límite de* y. Por lo tanto,

si $\ln y$ tiene por límite L, entonces y tiene el límite e^L. La guía también se puede usar cuando $x \to \infty$, o bien $x \to -\infty$ y para el caso de límites unilaterales.

EJEMPLO 3 Calcular $\lim_{x\to 0} (1 + 3x)^{1/(2x)}$.

Solución La forma indeterminada es 1^∞. Siguiendo la guía (10.3), escribimos

1. $$y = (1 + 3x)^{1/(2x)}.$$

2. $$\ln y = \frac{1}{2x} \ln (1 + 3x) = \frac{\ln (1 + 3x)}{2x}.$$

Esta última expresión tiene la forma indeterminada 0/0 en $x = 0$. Por la Regla de L'Hôpital,

3. $$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1 + 3x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3/(1 + 3x)}{2} = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto,

4. $$\lim_{x\to 0} (1 + 3x)^{1/(2x)} = \lim_{x\to 0} y = e^{3/2}.$$ •

Si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$, entonces $f(x) - g(x)$ *tiene la forma indeterminada* $\infty - \infty$ en $x = c$. En este caso es necesario modificar la expresión para obtener una de las formas estudiadas anteriormente.

EJEMPLO 4 Calcular $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$.

Solución La forma es $\infty - \infty$; sin embargo, la diferencia puede escribirse con un denominador común, como sigue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - x}.$$

Esto da la forma indeterminada 0/0. Para resolverla es necesario aplicar dos veces la Regla de L'Hôpital ya que la primera aplicación da la forma indeterminada 0/0. Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{xe^x + e^x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{xe^x + 2e^x} = -\frac{1}{2}.$$ •

EJEMPLO 5 Consultar el Ejercicio 53 de la Sección 7.3. La velocidad v de un impulso eléctrico a través de un cable está dada por

$$v = -k \left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln \left(\frac{r}{R}\right)$$

FIGURA 10.3



donde R es el radio exterior (con el aislamiento) del cable, r es el radio de la parte conductora y k es una constante positiva (véase la Figura 10.3). Calcular

(a) $\lim_{R\to r^+} v$ **(b)** $\lim_{r\to 0^+} v$.

Solución

(a) La notación de límite indica que r es fijo y R es variable En este caso la expresión para v no es indeterminada y

$$\lim_{R\to r^+} v = -k \lim_{R\to r^+} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) = -k(1)^2 \ln 1 = -k(0) = 0.$$

(b) Si R es fijo y r es variable, entonces la expresión para v tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$ en $r = 0$. Comenzamos por modificar algebraicamente la forma de la expresión como sigue:

$$\lim_{r\to 0^+} v = -k \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln (r/R)}{(r/R)^{-2}} = -kR^2 \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln r - \ln R}{r^{-2}}$$

Como el cociente anterior tiene la forma indeterminada ∞/∞ en $r = 0$, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital, y obtener

$$\lim_{r\to 0^+} v = -kR^2 \lim_{r\to 0^+} \frac{(1/r) - 0}{-2r^{-3}}$$

$$= -kR^2 \lim_{r\to 0^+} \left(\frac{r^2}{-2}\right) = -kR^2(0) = 0 \quad \bullet$$

EJERCICIOS 10.2

Ejercicios 1-42: Calcule el límite si es que existe.

1. $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$
2. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x \ln \operatorname{sen} x$
3. $\lim_{x\to\infty} (x^2 - 1)e^{-x^2}$
4. $\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1)$
5. $\lim_{x\to 0} e^{-x} \operatorname{sen} x$
6. $\lim_{x\to -\infty} x \tan^{-1} x$
7. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sin} x \ln \operatorname{sen} x$
8. $\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$
9. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
10. $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \ln x$
11. $\lim_{x\to 0} x \sec^2 x$
12. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{x+1}$
13. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$
14. $\lim_{x\to 0^+} (e^x + 3x)^{1/2}$
15. $\lim_{x\to 0^+} (e^x - 1)^x$
16. $\lim_{x\to 0^+} x^x$
17. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$
18. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$
19. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan x)^x$
20. $\lim_{x\to 2^+} (x - 2)^x$
21. $\lim_{x\to 0^+} (2x + 1)^{\cot x}$
22. $\lim_{x\to 0^+} (1 + 3x)^{\csc x}$
23. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\right)$
24. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$
25. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$
26. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$
27. $\lim_{x\to 1^-} (1 - x)^{\ln x}$
28. $\lim_{x\to\infty} (1 + e^x)^{e^{-x}}$
29. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x}\right)$
30. $\lim_{x\to 0} (\cot^2 x - \csc^2 x)$
31. $\lim_{x\to 0} \cot 2x \tan^{-1} x$
32. $\lim_{x\to\infty} x^3 2^{-x}$

33. $\lim_{x\to 0} (\cot^2 x - e^{-x})$

34. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+4} - \tan^{-1} x)$

35. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (1+\cos x)^{\tan x}$

36. $\lim_{x\to 0} (1+ax)^{b/x}$

37. $\lim_{x\to -3} \left(\dfrac{4}{x^2+2x-3} - \dfrac{4}{x+3}\right)$

38. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^4+5x^2+3} - x^2)$

39. $\lim_{x\to 0} (x+\cos 2x)^{\csc 3x}$

40. $\lim_{x\to\pi/2} \sec x \cos 3x$

41. $\lim_{x\to\infty} (\operatorname{senh} x - x)$

42. $\lim_{x\to\infty} [\ln(4x+3) - \ln(3x+4)]$

Ejercicios 43-44: Trace la gráfica de f para $x > 0$. Calcule los máximos y mínimos locales y describa el comportamiento de $f(x)$ cerca de $x = 0$. Encuentre las asíntotas horizontales si es que existen.

43. $f(x) = x^{1/x}$ **44.** $f(x) = x^x$

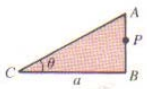
45. La *media geométrica* de dos números reales positivos a y b se define como $\sqrt{ab}$. Use la Regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\sqrt{ab} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2}\right)^x.$$

46. Si una cantidad P de dinero se invierte con una tasa de interés de $100r$ por ciento al año, con capitalización m veces al año, entonces el capital al cabo de t años está dado por $P(1 + rm^{-1})^{mt}$. Si se toma a m como un número real y se le hace tender a infinito, entonces se dice que el interés se *capitaliza* o *compone continuamente*. Aplique la Regla de L'Hôpital para demostrar que en este caso el capital a los t años es Pe^{rt}.

47. Consulte el Ejercicio 51 de la Sección 8.4. Sea ABC un triángulo rectángulo (véase la figura). La distancia media k del vértice C a un punto P sobre el lado AB es $k = (a/\theta)\ln(\sec\theta + \tan\theta)$.
(a) Use su intuición geométrica para calcular $\lim_{\theta\to 0} k$.
(b) Use la Regla de L'Hôpital para comprobar su respuesta en (a).

EJERCICIO 47



48. Consulte el Ejercicio 53 de la Sección 10.1. En la fórmula de la velocidad

$$v(t) = (mg/k)(1 - e^{-(k/m)t})$$

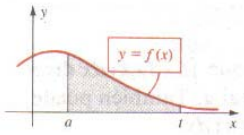
m representa la masa de un cuerpo que cae. Calcule $\lim_{m\to\infty} v(t)$ y concluya que cuando la masa m es muy grande $v(t)$ es aproximadamente proporcional al tiempo t.

10.3 INTEGRALES CON EXTREMOS (O LÍMITES) DE INTEGRACIÓN INFINITOS

Sea f una función continua no negativa definida en un intervalo infinito $[a, \infty)$ tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Si $t > a$, entonces el área $A(t)$ bajo la gráfica de f entre a y t, ilustrada en la Figura 10.4, está dada por

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

FIGURA 10.4
$\int_a^t f(x)\,dx$



Si $\lim_{t\to\infty} A(t)$ existe, entonces el límite se puede interpretar como el área de la región que se encuentra bajo la gráfica de f, arriba del eje x y a la derecha de $x = a$, como se ilustra en la Figura 10.5. Para denotar este número se utiliza el símbolo $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

La parte (i) de la siguiente definición es una generalización del comentario anterior al caso en que $f(x)$ puede tomar valores negativos en $[a, \infty)$.

DEFINICIÓN (10.4)

(i) Si f es continua en $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

si el límite existe.

(ii) Si f es continua en $(-\infty, a]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$$

si el límite existe.

FIGURA 10.5
$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

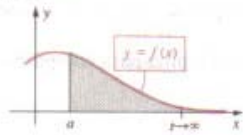
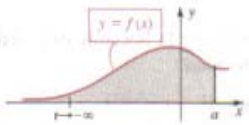


FIGURA 10.6
$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$



Si $f(x) \geq 0$ para todo x, entonces el límite en la Definición (10.4) (ii) puede considerarse como el área bajo la gráfica de f, arriba del eje x y a la *izquierda* de $x = a$ (véase la Figura 10.6).

Las expresiones en la Definición (10.4) se llaman **integrales impropias**. Difieren de las integrales definidas en que uno de sus extremos de integración no es un número real. Se dice que una integral impropia **converge** si el límite correspondiente existe, y en ese caso el **valor** de la integral impropia es ese límite. Si el límite no existe entonces la integral impropia **diverge**.

La Definición (10.4) tiene muchas aplicaciones. En el Ejemplo 4 se usa una integral impropia para calcular el trabajo realizado al enviar un objeto de la superficie de la Tierra a un punto fuera del campo gravitatorio terrestre. Su aplicación al estudio de las series infinitas es muy importante (véase el Teorema (11.22)).

Una integral impropia puede tener *dos* extremos de integración infinitos como en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (10.5)

Sea f una función continua para todo x. Si a es un número real, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

siempre y cuando converjan las dos integrales impropias del lado derecho de la igualdad.

Si diverge una de las integrales en (10.5), entonces se dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ **diverge**. Se puede demostrar que (10.5) es independiente del número real a. También puede demostrarse que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ no es lo mismo que $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$.

EJEMPLO 1 Investigar si la integral converge o diverge. Calcular su valor si converge.

(a) $\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ (b) $\int_2^\infty \frac{1}{x-1}\,dx$

Solución

(a) De la Definición (10.4) (i),

$$\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{x-1}\right]_2^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{t-1}+\frac{1}{2-1}\right) = 0+1 = 1.$$

Por lo tanto la integral converge y su valor es 1.

(b) De la Definición (10.4) (i),

$$\int_2^\infty \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\ln(x-1)\right]_2^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\ln(t-1)-\ln(2-1)\right]$$

$$= \lim_{t\to\infty}\ln(t-1) = \infty.$$

Por lo tanto, la integral impropia diverge. •

En las Figuras 10.7 y 10.8 aparecen las gráficas de las funciones dadas como integrandos en el Ejemplo 1. Nótese que aunque las gráficas se parecen para $x \geq 2$, puede asignarse un valor al área de la región infinita bajo la curva en la Figura 10.7 pero no para la de la Figura 10.8.

FIGURA 10.7

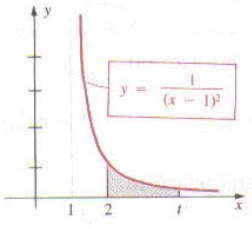
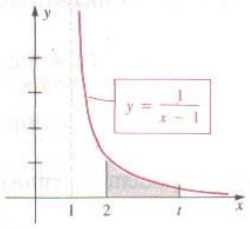


FIGURA 10.8



La gráfica de la Figura 10.8 tiene una propiedad interesante. Si la región bajo la gráfica de $y = 1/(x-1)$ entre 2 y t gira alrededor del eje x, genera un sólido cuyo volumen es

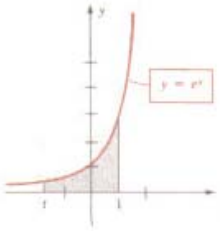
$$\pi\int_2^t \frac{1}{(x-1)^2}\,dx.$$

Se puede considerar a la integral impropia

$$\pi \int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

como el volumen del sólido *no acotado* (o *infinito*) que se obtiene al girar alrededor del eje x la región bajo la gráfica de $y = 1/(x-1)$ para $x \geq 2$. Por (a) del Ejemplo 1, el valor de esta integral impropia es $\pi \cdot 1$, es decir π. Esto muestra un hecho curioso: aunque no se puede asignar un número real al área de la región, sí se puede asignar un valor finito al volumen del sólido de revolución generado al girar la región. (En el Ejercicio 35 se describe otro caso parecido.)

FIGURA 10.9



EJEMPLO 2 Asignar un valor al área de la región que se encuentra bajo la gráfica de $y = e^x$, arriba del eje x y a la izquierda de $x = 1$.

Solución En la Figura 10.9 aparece un croquis de la región acotada por las gráficas de $y = e^x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = t$, para $t < 1$. El área de la región *infinita* a la izquierda de $x = 1$ es

$$\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^1 e^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \left[e^x\right]_t^1$$
$$= \lim_{t\to-\infty} (e - e^t) = e - 0 = e \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Trazar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e interpretar la integral como un área.

Solución Usando la Definición (10.5) con $a = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

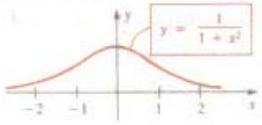
Aplicando ahora la Definición (10.4) (i),

$$\int_0^s \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to s} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\arctan x\right]_0^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} (\arctan t - \arctan 0) = \pi/2 - 0 = \pi/2.$$

Usando (10.4) (ii) podemos demostrar en forma análoga que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

FIGURA 10.10



Por lo tanto, la integral impropia converge y su valor es $(\pi/2) + (\pi/2) = \pi$.

La gráfica de $y = 1/(1 + x^2)$ está en la Figura 10.10. La región infinita que se encuentra bajo la gráfica y arriba del eje x tiene un área finita de π unidades cuadradas.

FIGURA 10.11



Terminamos esta sección con una aplicación de las integrales impropias a la física. Sean a y b las coordenadas de dos puntos A y B sobre una recta coordenada l (véase la Figura 10.11). Si $f(x)$ es la fuerza que actúa sobre una partícula P en un punto de coordenada x, entonces de la Definición (6.16), el trabajo realizado cuando P se mueve de A a B está dado por

$$W = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Análogamente, se puede usar la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ para definir el trabajo realizado cuando P se mueve indefinidamente a la derecha (en las aplicaciones se dice que *P se va al infinito*). Por ejemplo, si $f(x)$ es la fuerza de atracción entre una partícula fija en un punto A y otra partícula móvil P, y si $c > a$, entonces $\int_c^\infty f(x)\,dx$ representa el trabajo requerido para desplazar P desde el punto con coordenada c hasta el infinito.

EJEMPLO 4 Consultar el Ejercicio 19 de la Sección 6.6 Sea l la recta coordenada con el origen O en el centro de la Tierra, como se ilustra en la Figura 10.12. La fuerza de gravedad ejercida en un punto sobre l a una distancia x de O, está dada por $f(x) = k/x^2$, donde k es una constante. Calcular el trabajo requerido para enviar un objeto con un peso de 100 libras fuerza (lbf), desde la superficie de la Tierra hasta un punto fuera de su campo de atracción gravitatoria, a lo largo de la recta l. Usar 4000 mi (6400 km) como valor del radio de la Tierra.

FIGURA 10.12



Solución Teóricamente la fuerza de gravedad $f(x)$ *nunca* deja de actuar sobre un objeto; pero podemos considerar el envío del cuerpo en cuestión desde la superficie de la Tierra hasta el infinito. De acuerdo con el párrafo anterior a este ejemplo, se desea calcular

$$W = \int_{4000}^\infty f(x)\,dx.$$

Por definición, $f(x)$ es el peso (fuerza gravitatoria) del objeto cuando está a una distancia x de O. Entonces,

$$100 = F(4000) = \frac{k}{(4000)^2}$$

o bien

$$k = 100(4000)^2 = 10^2 \cdot 16 \cdot 10^6 = 16 \cdot 10^8.$$

Por lo tanto,

$$W = \int_{4000}^\infty 16 \cdot 10^8 \frac{1}{x^2}\,dx = 16 \cdot 10^8 \lim_{t\to\infty} \int_{4000}^t \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= 16 \cdot 10^8 \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{4000}^t = 16 \cdot 10^8 \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{4000}\right]$$

$$= \frac{16 \cdot 10^8}{4000} = 4 \cdot 10^5 \text{ lbf} \cdot \text{mi}$$

En términos de libras fuerza-pie,

$$W = 5280 \cdot 4 \cdot 10^5 \approx (2.1)10^9 \text{ lbf} \cdot \text{pie}$$

ya que 1 mi = 5280 pie. Esto equivale a aproximadamente 290 millones de kilográmetros. •

EJERCICIOS 10.3

Ejercicios 1-24: Determine si la integral converge o diverge y, si converge, calcule su valor.

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{4/3}}\,dx$
2. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$
3. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/4}}\,dx$
4. $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$
5. $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{5-2x}\,dx$
6. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^4+9}\,dx$
7. $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$
8. $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$
9. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx$
10. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$
11. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-8)^{2/3}}\,dx$
12. $\int_1^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$
13. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$
14. $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx$
15. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$
16. $\int_{-\infty}^\infty \cos^2 x\,dx$
17. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$
18. $\int_3^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$
19. $\int_0^\infty \cos x\,dx$
20. $\int_{-\infty}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx$
21. $\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech} x\,dx$
22. $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$
23. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$
24. $\int_4^\infty \frac{x+18}{x^2+x-12}\,dx$

Ejercicios 25-28: Si f y g son funciones continuas tales que $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo x en $[a, \infty)$, entonces los siguientes *criterios de convergencia para integrales impropias* son válidos:

(i) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

(ii) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *diverge, entonces* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *diverge.*

Use estos criterios para determinar si las integrales impropias convergen o divergen.

25. $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$
26. $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}\,dx$
27. $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,dx$
28. $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$

Ejercicios 29-32: Asignar cuando sea posible, un valor a (a) el área de la región R y (b) el volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje x.

29. $R = \{(x, y): x \ge 1,\ 0 \le y \le 1/x\}$
30. $R = \{(x, y): x \ge 1,\ 0 \le y \le 1/\sqrt{x}\}$
31. $R = \{(x, y): x \ge 4,\ 0 \le y \le x^{-3/2}\}$
32. $R = \{(x, y): x \ge 8,\ 0 \le y \le x^{-2/3}\}$

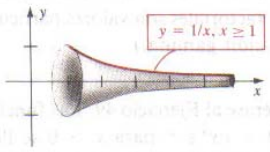
33. La región infinita que se encuentra a la derecha del eje y y entre las gráficas de $y = e^{-x^2}$ y $y = 0$ gira alrededor del eje y. Demuestre que se puede asignar un valor real al volumen del sólido infinito resultante. ¿Cuál es el valor del volumen?

34. La gráfica de $y = e^{-x}$ para $x \ge 0$ gira alrededor del eje x. Demuestre que se puede asignar un valor real al área del sólido infinito resultante. ¿Cuál es el área?

35. El sólido de revolución llamado *trompeta de Gabriel* (el "arcángel Gabriel") se genera al girar la región bajo la gráfica de $y = 1/x$ para $x \ge 1$, alrededor del eje x (véase la figura).
 (a) Demuestre que la trompeta de Gabriel tiene un volumen finito de π unidades cúbicas.
 (b) ¿Se obtiene un volumen finito si la gráfica gira alrededor del eje y?
 (c) Compruebe que el área de la superficie de la trompeta de Gabriel se halla dada por $\int_1^\infty 2\pi(1/x)\sqrt{x^4+1}\,dx$. *Use un criterio de comparación (véanse los Ejercicios 25-28)*

con $f(x) = 2\pi/x$ para demostrar que esta integral diverge. Por lo tanto, aunque el volumen del sólido es finito, no se puede asignar un valor real al área de la superficie.

EJERCICIO 25.



36. Un cohete espacial lleva una carga de combustible de masa m. Como medida de conservación, el comandante decide quemar el combustible a razón de $R(t) = mke^{-kt}$ g/s, donde k es una constante positiva.

(a) ¿Qué representa la integral impropia $\int_0^\infty R(t)\,dt$?

(b) ¿Cuánto tarda en acabarse el combustible?

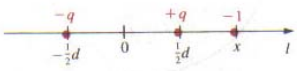
37. La fuerza (en dinas) con la que dos electrones se repelen es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (en cm) que los separa. Suponiendo que un electrón está fijo en el punto A de la Figura 10.11, calcule el trabajo realizado cuando el otro electrón se mueve desde el punto B, que está a 1 cm de A, hasta el infinito, sobre la recta l.

38. Un dipolo eléctrico consta de un par de cargas de signo opuesto separadas una pequeña distancia d. Suponga que se colocan cargas de $+q$ y $-q$ unidades en una recta coordenada l, en $\frac{1}{2}d$ y $-\frac{1}{2}d$, respectivamente (véase la figura). Según la ley de Coulomb, la fuerza que actúa sobre una carga de -1 unidades en $x > \frac{1}{2}d$ está dada por

$$f(x) = \frac{-kq}{(x - \frac{1}{2}d)^2} + \frac{kq}{(x + \frac{1}{2}d)^2}$$

donde k es una constante positiva. Suponiendo que $a > \frac{1}{2}d$, calcule el trabajo realizado al mover la carga unitaria a lo largo de l desde a hasta el infinito.

EJERCICIO 38



39. La confiabilidad $R(t)$ de un producto es la probabilidad de que no necesite ninguna reparación en t años. Para elaborar una garantía el fabricante debe conocer el tiempo medio de servicio de un producto antes de su primera reparación, que está dado por la integral impropia $\int_0^\infty (-t)\,R'(t)\,dt$.

(a) Para muchos productos de alta calidad $R(t)$ tiene la forma e^{-kt}, donde k es una constante positiva. Encuentre una expresión en términos de k para el tiempo medio de servicio antes de la primera reparación.

(b) ¿Se puede fabricar un producto para el cual $R(t) = 1/(t + 1)$?

40. Se deposita una cierta cantidad de dinero en una cuenta que paga un interés de 8% al año, compuesto continuamente (véase el Ejercicio 46 de la Sección 10.2). Dentro de T años se empezará a retirar el dinero a razón de $f(t)$ unidades monetarias al año, y se continuará haciéndolo indefinidamente; $f(t)$ se llama *tasa de flujo de capital*. Para generar un ingreso futuro como éste es necesario depositar una cantidad mínima A, llamada *valor actual del flujo de capital*, dada por la integral impropia $A = \int_T^\infty f(t)e^{-0.08t}\,dt$. Calcule A suponiendo que el ingreso que se desea tener dentro de 20 años es

(a) 12 000 unidades monetarias al año;

(b) $12\,000e^{0.04t}$ unidades monetarias al año.

41. (a) Demuestre la siguiente fórmula integrando por partes:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a^{3/2}} \int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$

El valor de esta integral es $\sqrt{\pi}/2$ (véase el Ejercicio 26 de la Sección 17.7).

(b) El número de moléculas de un gas contenido en un recipiente que se mueven a una velocidad v cm/s está dado por la *distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann* F:

$$F(v) = cv^2 e^{-mv^2/(2kT)}$$

donde T es la temperatura (en K), m la masa de una molécula; c y k son constantes positivas. La constante c debe elegirse de tal manera que $\int_0^\infty F(v)\,dv = 1$. Use la parte (a) para expresar c en términos de k, T y m.

42. La *transformada de Fourier* es útil para resolver algunas ecuaciones diferenciales. La *transformada cosenoidal de Fourier* de una función f está definida por

$$F_C[f(x)] = \int_0^\infty f(x) \cos sx\,dx$$

para todo número real s para el que converge la integral impropia. Calcule $F_C[e^{-ax}]$ para $a > 0$.

Ejercicios 43-48: En la teoría de las ecuaciones diferenciales, si f es una función, entonces la *transformada de Laplace* L de $f(x)$ está dada por

$$L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

para todo número real s para el que converge la integral impropia. Calcule $L[f(x)]$ para las expresiones $f(x)$ dadas.

43. 1 44. x 45. $\cos x$

46. $\operatorname{sen} x$ 47. e^{ax} 48. $\operatorname{sen} ax$

49. La *función gamma* (o *gama*) Γ está dada por $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$ para todo número real positivo n.

(a) Calcule $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ y $\Gamma(3)$.

(b) Demuestre que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. (*Sugerencia:* Integrar por partes.)

(c) Demuestre valiéndose de inducción matemática que si n es un entero positivo entonces $\Gamma(n+1) = n!$. (Esto demuestra que los factoriales son valores particulares de la función gamma.)

50. Refiérase al Ejercicio 49. Las funciones dadas por $f(x) = cx^k e^{-ax}$ para $x > 0$ se llaman *distribuciones gamma* y desempeñan un papel importante en la teoría de la probabilidad. La constante c debe elegirse de manera que $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$. Exprese c en términos de las constantes positivas k y a, y de la función gamma Γ.

10.4 INTEGRALES CON INTEGRANDOS DISCONTINUOS

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces por el Teorema (5.12) la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. Aun si la función f tiene una discontinuidad infinita en algún número del intervalo puede asignarse a veces un valor a la integral. Por ejemplo, sea f continua y no negativa en el intervalo semiabierto $[a, b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Si $a < t < b$, entonces el área $A(t)$ bajo la gráfica de f entre a y t (*véase la Figura 10.13*) está dada por

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Si $\lim_{t\to b^-} A(t)$ existe, entonces el límite puede interpretarse como el área de la región infinita que se encuentra bajo la gráfica de f, arriba del eje x y entre $x = a$ y $x = b$. Este número se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$.

Para el caso ilustrado en la Figura 10.14, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, y se define $\int_a^b f(x)\,dx$ como el límite de $\int_t^b f(x)\,dx$ cuando $t \to a^+$.

FIGURA 10.13

$\int_a^t f(x)\,dx$

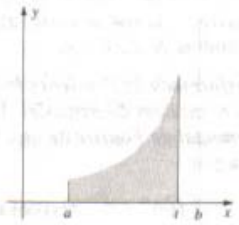
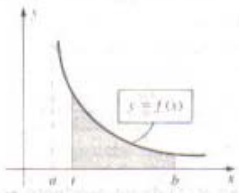


FIGURA 10.14

$\int_t^b f(x)\,dx$



Estos comentarios motivan la siguiente definición.

DEFINICIÓN (10.6)

(i) Si f es continua en $[a, b)$ y discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si el límite existe.

(ii) Si f es continua en $(a, b]$ y discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si el límite existe.

Como en la sección anterior, las integrales definidas en (10.6) se llaman *integrales impropias* y se dice que *convergen* si el límite existe. Los límites se llaman *valores* de las integrales impropias. Si los límites no existen se dice que las integrales impropias *divergen*.

Otra clase de integrales impropias se define como sigue.

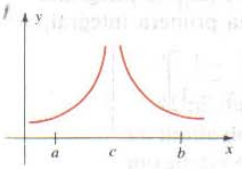
DEFINICIÓN (10.7)

Si f tiene una discontinuidad en un número c del intervalo abierto (a, b) pero es continua en todos los demás puntos de $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

siempre y cuando converjan *las dos* integrales impropias que están al lado derecho de la igualdad. Si ambas convergen, el valor de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es la suma de los dos valores.

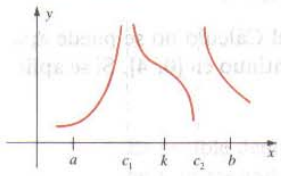
FIGURA 10.15



En la Figura 10.15 aparece la gráfica de una función que satisface las condiciones de la Definición (10.7).

Cuando f tiene un número finito de discontinuidades en (a, b) se puede usar una definición semejante a (10.7). Por ejemplo, sea f una función que tiene discontinuidades en c_1 y c_2, donde $c_1 < c_2$, pero es continua en el resto de $[a, b]$. La Figura 10.16 ilustra este caso. En esta situación se escoge un número k entre c_1 y c_2 y se expresa $\int_a^b f(x)\,dx$ como la suma de cuatro integrales impropias sobre los intervalos $[a, c_1]$, $[c_1, k]$, $[k, c_2]$ y $[c_2, b]$, respectivamente. Por definición, $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y sólo si convergen las cuatro integrales impropias de la suma. Puede demostrarse que esta definición es independiente del número k.

FIGURA 10.16



Finalmente, si f es continua en (a, b) pero tiene discontinuidades infinitas en a y b, $\int_a^b f(x)\,dx$ se define mediante (10.7).

EJEMPLO 1 Evaluar $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$.

Solución Como el integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 3$, aplicamos la Definición (10.6) (i) como sigue:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx &= \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx \\ &= \lim_{t\to 3^-} \left[-2\sqrt{3-x}\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to 3^-} \left[-2\sqrt{3-t} + 2\sqrt{3}\right] \\ &= 0 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

•

EJEMPLO 2 Determinar si la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ converge o diverge.

Solución El integrando no está definido en $x = 0$. Aplicando (10.6) (ii),

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln x\right]_t^1 \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left[0 - \ln t\right] = \infty.\end{aligned}$$

Como el límite no existe la integral impropia diverge. •

EJEMPLO 3 Determinar si la integral impropia $\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$ converge o diverge

Solución El integrando no está definido en $x = 3$. Como este número se encuentra en el intervalo (0, 4), usamos la Definición (10.7) con $c = 3$:

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Para que converja la integral del lado izquierdo se necesita que *las dos* integrales de lado derecho converjan. Aplicando la Definición (10.6) (i) a la primera integral

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx &= \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \lim_{t\to 3^-} \left[\frac{-1}{x-3}\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to 3^-} \left(\frac{-1}{t-3} - \frac{1}{3}\right) = \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral impropia diverge. •

Es importante señalar que el Teorema Fundamental del Cálculo no se puede aplicar a la integral del Ejemplo 3 ya que el integrando no es continuo en [0, 4]. Si se aplica (incorrectamente) el Teorema Fundamental, se obtiene

$$\left[\frac{-1}{x-3}\right]_0^4 = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Es claro que este resultado es incorrecto ya que el integrando nunca es negativo.

EJEMPLO 4 Evaluar $\int_{-2}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx$.

Solución El integrando no está definido en $x = -1$, que es un número del intervalo $(-2, 7)$. Entonces aplicamos la Definición (10.7) con $c = -1$ y obtenemos

$$\int_{-2}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx + \int_{-1}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx$$

Ahora se estudia cada una de las integrales del lado derecho de la ecuación. Usando (10.6) (i) con $b = -1$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx &= \lim_{t\to -1^-} \int_{-2}^{t} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx \\ &= \lim_{t\to -1^-} \left[3(x+1)^{1/3}\right]_{-2}^{t} \\ &= \lim_{t\to -1^-} \left[3(t+1)^{1/3} - 3(-1)^{1/3}\right] \\ &= 0 + 3 = 3.\end{aligned}$$

Análogamente, usando (10.6) (ii) con $a = -1$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx &= \lim_{t\to -1^+} \int_{t}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx \\ &= \lim_{t\to -1^+} \left[3(x+1)^{1/3}\right]_{t}^{7} \\ &= \lim_{t\to -1^+} \left[3(8)^{1/3} - 3(t+1)^{1/3}\right] \\ &= 6 - 0 = 6.\end{aligned}$$

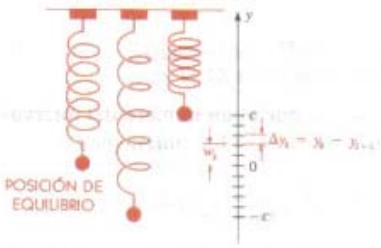
En razón de que ambas integrales convergen, la integral dada converge y su valor es $3 + 6 = 9$. •

Una integral impropia puede tener una discontinuidad en el integrando y también un límite de integración infinito. Estas integrales se pueden estudiar expresándolas como sumas de integrales impropias, cada una de las cuales tiene *una* de las formas definidas anteriormente. Por ejemplo, como el integrando de $\int_0^\infty (1/\sqrt{x})\,dx$ es discontinuo en $x = 0$, eligiendo algún número mayor que 0, por ejemplo 1, puede escribirse

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Es posible demostrar que la primera integral del lado derecho de esta ecuación converge y la segunda diverge. Por tanto (por definición) la integral dada es divergente.

FIGURA 10.17



Las integrales impropias del tipo considerado en esta sección tienen aplicaciones en física. La Figura 10.17 es un esquema de un resorte al que está fijado un cuerpo que oscila entre dos puntos con coordenadas $-c$ y c sobre una recta coordenada y (se indica el eje y a la derecha para mayor claridad). El **periodo** T es el tiempo que tarda en completarse una oscilación, es decir, el doble del que tarda el cuerpo en recorrer el intervalo $[-c, c]$. El siguiente ejemplo muestra cómo puede utilizarse una integral impropia para obtener una fórmula para T.

EJEMPLO 5 Sea $v(y)$ la velocidad del cuerpo oscilante de la Figura 10.17 cuando se encuentra en el punto de ordenada $[-c, c]$. Demostrar que el periodo T está dado por

$$T = 2\int_{-c}^{c} \frac{1}{v(y)}\,dy$$

Solución Subdividimos el intervalo $[-c, c]$ en la forma acostumbrada. Sea $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ la distancia recorrida por el cuerpo durante el intervalo de tiempo Δt_k. Sea w_k cualquier número del subintervalo $[y_{k-1}, y_k]$. Entonces $v(w_k)$ es la velocidad del oscilador cuando se encuentra en el punto con coordenada w_k. Si la norma de la partición es pequeña y suponemos que v es una función continua, entonces la distancia Δy_k es aproximadamente igual al producto $v(w_k)\,\Delta t_k$; es decir,

$$\Delta y_k \approx v(w_k)\,\Delta t_k.$$

Entonces el tiempo requerido por el cuerpo para recorrer la distancia Δy_k se puede estimar por

$$\Delta t_k \approx \frac{1}{v(w_k)}\,\Delta y_k$$

y por tanto,

$$T = 2\sum_k \Delta t_k \approx 2\sum_k \frac{1}{v(w_k)}\,\Delta y_k.$$

Considerando el límite de las sumas del lado derecho y la definición de integral definida,

$$T = 2\int_{-c}^{c} \frac{1}{v(y)}\,dy.$$

Nótese que $v(c) = 0$ y $v(-c) = 0$, por lo que la integral es impropia.

EJERCICIOS 10.4

Ejercicios 1-30: *Determine si la integral converge o diverge y, si converge, halle su valor.*

1. $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+2)^{5/4}}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec^2 x\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

7. $\int_0^4 \frac{1}{(4-x)^{3/2}}\,dx$

8. $\int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

9. $\int_0^4 \frac{1}{(4-x)^{2/3}}\,dx$

10. $\int_1^2 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

11. $\int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$

12. $\int_{-1}^1 x^{-4/3}\,dx$

13. $\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

14. $\int_{-2}^0 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

15. $\int_{-1}^2 \frac{1}{x}\,dx$

16. $\int_0^4 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

17. $\int_0^1 x \ln x\,dx$

18. $\int_0^{\pi/2} \tan^2 x\,dx$

19. $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$

20. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

21. $\int_2^4 \frac{x-2}{x^2-5x+4}\,dx$

22. $\int_{1/e}^e \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

23. $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$

24. $\int_0^{\pi} \sec x\,dx$

25. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx$

26. $\int_0^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

27. $\int_0^4 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$

28. $\int_{-1}^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$

29. $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$

30. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x+2}\,dx$

Ejercicios 31-34: Sean f y g funciones continuas en $(a, b]$, discontinuas en $x = a$ y tales que $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo x en $(a, b]$. Se pueden demostrar los siguientes *criterios de convergencia por comparación:*
(i) Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
(ii) Si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

Pueden enunciarse criterios semejantes para el caso en que las funciones son continuas en $[a, b)$ pero discontinuas en $x = b$. Use estos criterios para determinar si las integrales impropias convergen o divergen.

31. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$

32. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec x}{x^3}\,dx$

33. $\int_0^2 \frac{\cosh x}{(x-2)^2}\,dx$

34. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{2/3}}\,dx$

Ejercicios 35-36: Encuentre todos los valores de n para los que la integral converge.

35. $\int_0^1 x^n\,dx$

36. $\int_0^1 x^n \ln x\,dx$

Ejercicios 37-40: Asigne un valor, cuando sea posible, (a) al área de la región R, y (b) al volumen del sólido que se obtiene al girar R alrededor del eje x.

37. $R = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1/\sqrt{x}\}$

38. $R = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1/\sqrt[3]{x}\}$

39. $R = \{(x, y)\colon -4 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 1/(x+4)\}$

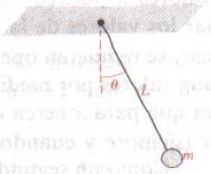
40. $R = \{(x, y)\colon 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1/(x-1)\}$

41. Consulte el Ejemplo 5. Si el cuerpo en la Figura 10.17 tiene masa m, el resorte obedece la ley de Hooke (con constante de fuerza $k > 0$), y no hay fuerzas de fricción, la velocidad v del cuerpo satisface la ecuación diferencial

$$mv\frac{dv}{dy} + ky = 0.$$

(a) Ejecute la demostración por separación de variables (véase la Sección 7.6) de que $v^2 = (k/m)(c^2 - y^2)$.
(*Sugerencia:* Recuérdese el hecho de que $v(c) = v(-c) = 0$.)
(b) Calcule el periodo T de la oscilación.

EJERCICIO 42



42. El péndulo simple consta de una bola de masa m fija a una cuerda de longitud L (véase la figura). Si la cuerda no tiene masa y no hay fuerzas de fricción, entonces la velocidad angular $\omega = d\theta/dt$ satisface la ecuación diferencial

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0$$

donde g es la aceleración de la gravedad.
(a) Suponiendo que $\omega = 0$ en $\theta = \pm\theta_0$ demuestre por separación de variables que

$$\omega^2 = (2g/L)(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

(b) El periodo T del péndulo es el doble del tiempo que se necesita para que θ cambie de

$-\theta_0$ a θ_0. Demuestre que T está dado por la integral impropia

$$T = 2\sqrt{2L/g}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta.$$

43. Cuando una dosis de y_0 mg de cierto medicamento se inyecta en la sangre, el tiempo medio T que una molécula se mantiene en la corriente sanguínea está dado por $T = (1/y_0)\int_0^{y_0} t\,dy$, donde t es el tiempo en el que hay exactamente y mg.
 (a) Explique por qué la integral para T es impropia si $y = y_0e^{-kt}$ para alguna constante positiva k.
 (b) Demuestre que $T = \tau/\ln 2$, donde τ es la semivida ("o vida media") del medicamento en la corriente sanguínea.

44. En la piscicultura, el conjunto de peces que resulta de una reproducción anual se llama *cohorte*. El número de peces N que siguen vivos después de t años está dado normalmente por una función exponencial. Para el bacalao del Mar del Norte, $N = N_0e^{-0.2t}$ cuando el tamaño de una cohorte es N_0. La semivida T (en años) de un bacalao en una cohorte está dado por la fórmula $T = (1/N_0)\int_0^{N_0} t\,dN$, donde t es el tiempo en el que quedan exactamente N peces vivos.
 (a) Calcule la semivida (o periodo medial) T del bacalao del Mar del Norte.
 (b) ¿Es posible que para alguna especie $N = N_0/(1 + kN_0t)$, donde k es una constante positiva? Si es así, calcule T para esa especie.

10.5 FÓRMULA DE TAYLOR

Recordemos que f es una función polinomial de grado n si

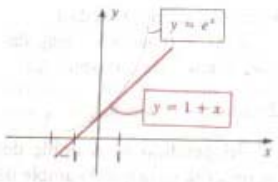
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

donde cada a_k es un número real, $a_n \neq 0$, y los exponentes son enteros no negativos. Las funciones polinomiales son las más fáciles de usar para hacer cálculos ya que sus valores se pueden obtener con sumas y multiplicaciones de números reales. Para calcular los valores de la función logarítmica, la exponencial y las funciones trigonométricas, se requieren operaciones más complicadas. Sin embargo, a veces pueden *estimarse* sus valores por medio de polinomios. Por ejemplo, como $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$, resulta que para x cerca de 0, $\operatorname{sen} x \approx x$; es decir, $\operatorname{sen} x$ *puede estimarse por el polinomio* x (siempre y cuando x esté cerca de 0).

Como un segundo ejemplo, sea f la función exponencial natural, es decir, $f(x) = e^x$ para todo x. Supóngase que deseamos calcular valores de f para x cerca de 0. Como $f'(x) = e^x$, la pendiente de la recta tangente en el punto (0, 1) de la gráfica de f es $f'(0) = e^0 = 1$. Por lo tanto la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = 1(x - 0) \quad \text{o bien} \quad y = 1 + x.$$

FIGURA 10.18



En la Figura 10.18 se puede ver que si x está cerca de 0, entonces el punto $(x, 1 + x)$ sobre la recta tangente se halla cerca del punto (x, e^x) sobre la gráfica de f y, por lo tanto, puede escribirse $e^x \approx 1 + x$. Esta fórmula permite estimar e^x por un polinomio de grado 1. Como esta aproximación es muy deficiente, a menos que x esté muy cerca de 0, ha de buscarse un polinomio de segundo grado

$$g(x) = a + bx + cx^2$$

tal que $e^x \approx g(x)$. La primera y la segunda derivadas de $g(x)$ son

$$g'(x) = b + 2cx \quad \text{y} \quad g''(x) = 2c.$$

Si queremos que la gráfica de g (una parábola) tenga (i) la misma intersección con el eje y, (ii) la misma recta tangente, y (iii) la misma concavidad que la gráfica de f en el punto (0, 1), entonces

$$\text{(i) } g(0) = f(0), \quad \text{(ii) } g'(0) = f'(0), \quad \text{(iii) } g''(0) = f''(0).$$

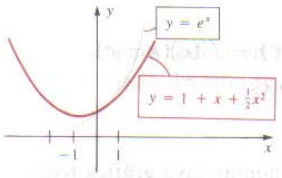
Como todas las derivadas de e^x son iguales a e^x, y $e^0 = 1$, estas tres ecuaciones implican que

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \text{y} \quad 2c = 1$$

y por lo tanto

$$e^x \approx g(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2.$$

FIGURA 10.19



Las gráficas de f y g están en la Figura 10.19. Comparando tales gráficas con la Figura 10.18 vemos que si x está cerca de 0, entonces e^x está más cerca de $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ que de $1 + x$.

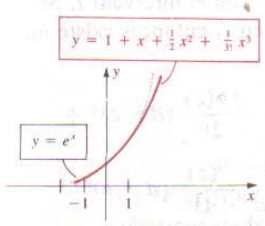
Si se quiere estimar $f(x) = e^x$ por medio de un polinomio de *tercer* grado $h(x)$, es natural esperar que $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$ y $h'''(0)$ sean iguales a $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$, respectivamente. En este caso las gráficas de f y h tienen la misma recta tangente y la misma concavidad en (0, 1) y además, las *tasas de variación de la relación de concavidad* con respecto a x (es decir, las terceras derivadas) son iguales. Usando el mismo procedimiento que antes obtenemos

$$e^x \approx h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3.$$

Para tener una idea del grado de precisión de esta aproximación, en la siguiente tabla se muestran algunos valores de e^x y $h(x)$, con precisión al centésimo.

x	−1.5	−1.0	−0.5	0	0.5	1.0	1.5
e^x	0.22	0.37	0.61	1	1.65	2.72	4.48
$h(x)$	0.06	0.33	0.60	1	1.65	2.67	4.19

FIGURA 10.20



Obsérvese que el error en la aproximación crece a medida que $|x|$ lo hace. Las gráficas de f y h están en la Figura 10.20. Nótese que la aproximación mejora cerca de $x = 0$.

Continuando de esta manera puede obtenerse un polinomio de grado n cuyas primeras n derivadas coinciden con las de f en $x = 0$, con lo que se tiene la estimación

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Más adelante en esta sección se podrá ver que la fórmula anterior tan sencilla puede servir para estimar e^x con tanta precisión como se desee.

Ahora se plantean dos preguntas:

1. ¿Existe una fórmula *general* que pueda usarse para estimar cualesquiera funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, trigonométricas inversas y otras funciones trascendentes o algebraicas, por medio de funciones polinomiales?

2. ¿Se pueden aplicar estas nociones al caso de que x esté cerca de un número arbitrario $c \neq 0$?

Ambas preguntas tienen respuesta afirmativa si la función tiene un número suficientemente grande de derivadas. Para ver esto, sea f una función con muchas derivadas y sea c un número en el dominio de f. Procederemos como en el caso especial de e^x, pero con c en vez de 0. Primero notamos que el único polinomio de grado 0 que coincide con f en c es la constante $f(c)$. Para estimar $f(x)$ cerca de c con un polinomio de grado 1, se toma el polinomio cuya gráfica es la recta tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$. La ecuación de esta recta tangente es

$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \quad \text{o bien} \quad y = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Por lo tanto, el polinomio de primer grado que se desea es

$$f(c) + f'(c)(x - c).$$

Debe obtenerse una mejor aproximación usando un polinomio cuya gráfica tenga la misma *concavidad* y la misma recta tangente que f en $(c, f(c))$. Se puede verificar que el polinomio de segundo grado

$$f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2$$

satisface estas condiciones. Considerando el polinomio de tercer grado

$$g(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - c)^3$$

es posible verificar que además de $g'(c) = f'(c)$ y $g''(c) = f''(c)$, ahora también $g'''(c) = f'''(c)$. Si se prosigue de esta manera, aparentemente se deben obtener mejores aproximaciones a $f(x)$ para x cerca de c. Así se generan los primeros $n + 1$ términos del segundo miembro de la Fórmula (10.9). El último término de dicha fórmula se obtiene del siguiente resultado.

TEOREMA (10.8)

Sea n un entero positivo y f una función tal que la derivada $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x en el intervalo I. Si c y d son dos números distintos en I, entonces existe un número z entre c y d tal que

$$f(d) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(d - c) + \frac{f''(c)}{2!}(d - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(d - c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(d - c)^{n+1}$$

Demostración Para cada entero positivo n definimos R_n como sigue:

$$R_n = f(d) - \left[f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(d-c) + \frac{f''(c)}{2!}(d-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(d-c)^n \right].$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$f(d) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(d-c) + \frac{f''(c)}{2!}(d-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(d-c)^n + R_n.$$

Basta demostrar que para algún z apropiado, R_n es igual al último término de la fórmula en el enunciado del teorema.

Sea g la función definida por

$$g(x) = f(d) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(d-x) - \frac{f''(x)}{2!}(d-x)^2 - \cdots$$

$$- \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(d-x)^n - R_n \frac{(d-x)^{n+1}}{(d-c)^{n+1}}$$

para todo x en I. Al derivar en ambos miembros de la ecuación, varios términos del lado derecho se cancelan. Se deja como ejercicio demostrar que

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(d-x)^n + R_n(n+1)\frac{(d-x)^n}{(d-c)^{n+1}}.$$

Es fácil ver que $g(d) = 0$. Además, sustituyendo x por c en la expresión para $g(x)$ y usando la segunda ecuación de la demostración resulta $g(c) = 0$. Por el Teorema de Rolle, existe un número z entre c y d tal que $g'(z) = 0$. Evaluando $g'(x)$ en z y despejando R_n, se obtiene

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(d-c)^{n+1}$$

que es lo que se quería demostrar. • •

Sustituyendo d por x en el Teorema (10.8) se obtiene el siguiente resultado que lleva el nombre del matemático inglés Brook Taylor (1685-1731).

FÓRMULA DE TAYLOR CON RESIDUO (10.9)

Sea f una función con $n+1$ derivadas en un intervalo que contiene a c. Si x es un número del intervalo, entonces existe un número z entre c y x tal que

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

En (i) de la siguiente definición se denota por $P_n(x)$ la suma de los primeros $n+1$ términos de la Fórmula de Taylor y se le da un nombre especial.

DEFINICIÓN (10.10)

(i) El **Polinomio de Taylor $P_n(x)$ de grado n** de f en c es

$$P_n(x) = f(x) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

(ii) El **Residuo de Taylor $R_n(x)$ de** f en c es

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

para un número z entre c y x dado por (10.9).

Con estas definiciones puede enunciarse el siguiente resultado.

TEOREMA (10.11)

Sea f una función con $n+1$ derivadas en un intervalo que contiene a c. Si x es un número del intervalo, entonces

(i) $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.
(ii) $f(x) \approx P_n(x)$ si $x \approx c$.

El error en la aproximación es $|R_n(x)|$.

Demostración La Parte (i) no es más que un nuevo enunciado de la Fórmula (10.9) usando la notación (10.10). La Parte (ii) se deduce a partir de que $|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)|$. • •

En los dos ejemplos que siguen se utilizan los polinomios de Taylor para estimar valores funcionales. Para analizar la precisión de las estimaciones es necesario definir lo que significa que una estimación tenga una precisión de 1 cifra decimal, de 2 decimales, etcétera. Sea E el error en una estimación. Convenimos en que la estimación tiene una precisión de k decimales si $|E| < 0.5 \times 10^{-k}$. Por ejemplo, se tiene precisión de

$$\begin{aligned} &1 \text{ decimal si } |E| < 0.5 \times 10^{-1} = 0.05 \\ &2 \text{ decimales si } |E| < 0.5 \times 10^{-2} = 0.005 \\ &3 \text{ decimales si } |E| < 0.5 \times 10^{-3} = 0.0005. \end{aligned}$$

Si se desea una precisión de k cifras decimales al estimar una suma, se aproxima cada término de la misma con una precisión de $k+1$ decimales, y se redondea el resultado final a k cifras. En algunos casos esto no da el grado de aproximación deseado; sin embargo, es costumbre proceder de esta manera cuando no se requiere mucho rigor. En libros de *análisis numérico* se pueden encontrar métodos más precisos.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = \ln x$.

(a) Encontrar la Fórmula de Taylor con Residuo para $n = 3$ y $c = 1$.

(b) Estimar $\ln(1.1)$ usando la parte (a) y evaluar la precisión de esta aproximación.

Solución

(a) Para $n = 3$ en la Fórmula de Taylor (10.9) se necesitan las primeras cuatro derivadas de f. Es conveniente hacer una lista de las derivadas como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= x^{-1} & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -x^{-2} & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= 2x^{-3} & f'''(1) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -6x^{-4} & f^{(4)}(z) &= -6z^{-4} \end{aligned}$$

Por (10.9),

$$\ln x = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6z^{-4}}{4!}(x-1)^4$$

para algún z entre 1 y x. Simplificando,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4z^4}(x-1)^4$$

(b) Sustituyendo x por 1.1 en la fórmula de la Parte (a),

$$\ln(1.1) = 0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4z^4}(0.1)^4$$

para un z tal que $1 < z < 1.1$. Sumando los tres primeros términos obtenemos $\ln(1.1) \approx 0.0953$. Si $z > 1$, entonces $1/z < 1$ y $1/z^4 < 1$. Por lo tanto,

$$|R_3(1.1)| = \left|\frac{(0.1)^4}{4z^4}\right| < \left|\frac{0.0001}{4}\right| = 0.000025.$$

A causa de que $0.000025 < 0.00005$, del Teorema (10.11) se deduce que la estimación $\ln(1.1) \approx 0.0953$ tiene una precisión de 4 decimales. •

Para estimar el valor de una función $f(x)$ en un x es conveniente elegir el número c en (10.9) de manera que el residuo $R_n(x)$ sea pequeño (cercano a 0) para n relativamente pequeño (por ejemplo, $n = 3$ o $n = 4$). Esto se cumple cuando se toma c cerca de x. Además debe elegirse c de manera que las primeras $n + 1$ derivadas de f en c sean fáciles de calcular. Lo anterior se hizo en el Ejemplo 1, en donde se escogió $c = 1$ para estimar $\ln x$ en $x = 1.1$. El siguiente ejemplo muestra otra elección adecuada de c.

EJEMPLO 2 Estimar $\cos 61°$ con un Polinomio de Taylor y calcular la precisión de la aproximación.

Solución Deseamos estimar $f(x) = \cos x$ para $x = 61°$. Obsérvese primero que $61°$ está cerca de $60°$ que equivale a $\pi/3$ radianes, y que es fácil calcular los valores de las funciones trigonométricas en $\pi/3$. Esto sugiere elegir $c = \pi/3$ en (10.9). La elección de n dependerá del grado de precisión que se desee. Tomemos $n = 2$. Para este caso se requieren las tres primeras derivadas de f, por lo que se forma la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(\pi/3) &= 1/2 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x & f'(\pi/3) &= -\sqrt{3}/2 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(\pi/3) &= -1/2 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x & f'''(z) &= \operatorname{sen} z \end{aligned}$$

De la Definición (10.10) (i), el Polinomio de Taylor de segundo grado de f en $\pi/3$ es

$$P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}/2}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1/2}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2.$$

Antes de sustituir x debemos convertir 61° a radianes. Escribiendo

$$61° = 60° + 1° = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}$$

y sustituyendo en $P_2(x)$ obtenemos

$$P_2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \approx 0.48481.$$

Por el Teorema (10.11),

$$\cos 61° \approx 0.48481.$$

Para evaluar la precisión de la aproximación consideramos

$$|R_2(x)| = \left|\frac{\operatorname{sen} z}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right|.$$

Sustituyendo $x = (\pi/3) + (\pi/180)$ y usando el hecho de que $|\operatorname{sen} z| \leq 1$,

$$\left|R_2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} z}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\right| \leq \left|\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\right| \leq 0.000001.$$

Del Teorema (10.11) deducimos que la aproximación $\cos 61° \approx 0.48481$ tiene una precisión de cinco cifras decimales. Para obtener mayor precisión es necesario encontrar un número n para el cual el valor máximo de $|R_n[(\pi/3) + (\pi/180)]|$ sea menor que o igual al grado de precisión deseado. •

Tomando $c = 0$ en la Fórmula (10.9) se obtiene la siguiente fórmula, que lleva el nombre del matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746).

FÓRMULA DE MACLAURIN (10.12)

Sea f una función con $n + 1$ derivadas en un intervalo que contiene a 0. Si x es un número del intervalo, entonces existe un número z entre 0 y x tal que

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

EJEMPLO 3

(a) Encontrar la Fórmula de Maclaurin para $f(x) = e^x$ y un entero positivo n arbitrario.

(b) Usar la parte (a) con $n = 9$ para estimar e y calcular el error en la estimación.

Solución

(a) Para todo entero positivo k se tiene que $f^{(k)}(x) = e^x$, y por lo tanto $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$. Sustituyendo en (10.12),

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}$$

para un z entre 0 y x.

(b) Usando la fórmula de la parte (a) con $n = 9$ y $x = 1$ obtenemos

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.71828153.$$

Para calcular el error consideramos

$$R_9(x) = \frac{e^z}{10!}x^{10}.$$

Si $x = 1$ entonces $0 < z < 1$. Usando los resultados del Capítulo 7 acerca de e^x, vemos que $e^z < e^1 < 3$ y

$$|R_9(1)| = \left|\frac{e^z}{10!}(1)\right| < \frac{3}{10!} < 0.000001.$$

Por lo tanto, la aproximación $e \approx 2.71828$ tiene una precisión de cinco decimales. •

La fórmula que se obtuvo en el Ejemplo 3 es útil para estimar los valores de la función exponencial natural. En el siguiente capítulo se estudia otra aplicación importante de esta fórmula en la representación de funciones por series infinitas.

EJEMPLO 4 Encontrar la Fórmula de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$ con $n = 8$ y evaluar el error si se usa la fórmula para estimar sen (0.1).

Solución Necesitamos las primeras nueve derivadas de $f(x)$. Comenzamos como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

Puesto que $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$, las siguientes derivadas siguen el mismo patrón, y en particular

$$f^{(9)}(x) = \cos x \qquad f^{(9)}(z) = \cos z.$$

Sustituyendo en (10.12) y notando que tanto el término constante como los coeficientes de x^2, x^4, x^6 y x^8 son 0, obtenemos

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{1!}x + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{(-1)}{7!}x^7 + \frac{\cos z}{9!}x^9$$

que se puede escribir

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\cos z}{9!}x^9.$$

Si usamos esta fórmula para aproximar sen (0.1) entonces el error será menor que $|R_8(0.1)|$. Como $|\cos z| \leq 1$,

$$|R_8(0.1)| = \left|\frac{\cos z}{9!}(0.1)^9\right| \leq \frac{(0.1)^9}{9!} < 2.7 \times 10^{-15} < 0.5 \times 10^{-14}.$$

Por lo tanto la estimación tiene una precisión de 14 decimales. •

EJERCICIOS 10.5

Ejercicios 1-12: Encuentre la Fórmula de Taylor con Residuo para los valores dados de c y n.

1. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $c = \pi/2$, $n = 3$
2. $f(x) = \cos x$, $c = \pi/4$, $n = 3$
3. $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 4$, $n = 3$
4. $f(x) = e^{-x}$, $c = 1$, $n = 3$
5. $f(x) = \tan x$, $c = \pi/4$, $n = 4$
6. $f(x) = 1/(x-1)^2$, $c = 2$, $n = 5$
7. $f(x) = 1/x$, $c = -2$, $n = 5$
8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $c = -8$, $n = 3$
9. $f(x) = \tan^{-1} x$, $c = 1$, $n = 2$
10. $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$, $c = \pi/6$, $n = 3$
11. $f(x) = xe^x$, $c = -1$, $n = 4$
12. $f(x) = \log x$, $c = 10$, $n = 2$

Ejercicios 13-24: Halle la Fórmula de Maclaurin para los valores de n dados.

13. $f(x) = \ln(x+1)$, $n = 4$
14. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $n = 7$
15. $f(x) = \cos x$, $n = 8$
16. $f(x) = \tan^{-1} x$, $n = 3$
17. $f(x) = e^{2x}$, $n = 5$
18. $f(x) = \sec x$, $n = 3$
19. $f(x) = 1/(x-1)^2$, $n = 5$
20. $f(x) = \sqrt{4-x}$, $n = 3$
21. $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $n = 2$
22. $f(x) = e^{-x^2}$, $n = 3$
23. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 7$, $n = 4$ y $n = 5$
24. $f(x) = \cosh x$, $n = 4$ y $n = 5$

Ejercicios 25-28: Usando el ejercicio indicado y el hecho de que $\pi/180 \approx 0.0175$, estime con una precisión de cuatro decimales el número que se da. Demuestre que la respuesta es correcta probando que $|R_n(x)| < 0.5 \times 10^{-4}$.

25. sen 89° (Ejercicio 1)
26. cos 47° (Ejercicio 2)
27. $\sqrt{4.03}$ (Ejercicio 3)
28. $e^{-1.02}$ (Ejercicio 4)

Ejercicios 29-34: Estime el número dado usando el ejercicio que se indica y calcule el error de la estimación usando $R_n(x)$.

29. $-1/2.2$ (Ejercicio 7)
30. $\sqrt[3]{-8.5}$ (Ejercicio 8)
31. ln (1.25) (Ejercicio 13)
32. sen 0.1 (Ejercicio 14)

33. $\cos 30^\circ$ (Ejercicio 12)

34. $\log 10.01$ (Ejercicio 15)

Ejercicios 35-40: Use la Fórmula de Maclaurin para obtener la fórmula de aproximación dada y calcule la precisión de la estimación para $|x| \leq 0.1$.

35. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$

36. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{3}x$

37. $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

38. $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$

39. $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

40. $\cosh x \approx 1 + \dfrac{x^2}{2}$

41. Verifique la fórmula para $g'(x)$ en la demostración del Teorema (10.8).

42. Sea $f(x)$ un polinomio de grado n y a un número real. Demuestre que $f(x) = P_n(x)$ donde $P_n(x)$ está dado por la Definición (10.10) (i).

10.6 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Formas indeterminadas.
2. Fórmula de Cauchy.
3. Regla de L'Hôpital.
4. Integrales impropias.
5. Fórmula de Taylor.
6. Fórmula de Maclaurin.

EJERCICIOS 10.6

Ejercicios 1-16: Encuentre el límite si existe.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-x)}{1+e^{2x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - \tan 2x}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{\ln(x+1)}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1} x}{\operatorname{sen}^{-1} x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\tan x}{\sec x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^e}{e^x}$

8. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \cos x \ln \cos x$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} (1 - 2e^{1/x})x$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \tan^{-1} x \csc x$

11. $\lim\limits_{x\to 0} (1+8x^2)^{1/x^2}$

12. $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x)^{x-1}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x + 1)^{1/x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{x}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x + 2x}{x^3 + 1}$

Ejercicios 17-28: Determine si la integral converge o diverge y, si es convergente, calcule su valor.

17. $\int_4^\infty \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

18. $\int_4^\infty \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int_{-\infty}^0 \dfrac{1}{x+2}\,dx$

20. $\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,dx$

21. $\int_{-8}^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

22. $\int_{-4}^0 \dfrac{1}{x+4}\,dx$

23. $\int_0^2 \dfrac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$

24. $\int_1^2 \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

25. $\int_{-\infty}^\infty \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$

26. $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$

27. $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x}\,dx$

28. $\int_0^{\pi/2} \csc x\,dx$

29. Lleve a cabo la determinación de $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ para $f(x) = \int_1^x (\operatorname{sen} t)^{2/3}\,dt$ y $g(x) = x^2$.

30. La *función de error de Gauss* expresada por $\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-u^2}$ resulta de utilidad en la

teoría de la probabilidad Tiene la propiedad especial de que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$. Ejecute el cálculo de la expresión $\lim_{x\to\infty} e^{(x^2)}[1 - \operatorname{erf}(x)]$.

31. Obtenga la Fórmula de Taylor con residuo:

(a) $f(x) = \ln \cos x,\ c = \pi/6,\ n = 3$

(b) $f(x) = \sqrt{x-1},\ c = 2,\ n = 4$

32. Obtenga la Fórmula de Maclaurin:

(a) $f(x) = e^{-x^3},\ n = 3$

(b) $f(x) = 1/(1-x),\ n = 6$

33. Use la Fórmula de Taylor para estimar $\operatorname{sen}^2 43°$ con una precisión de cuatro decimales. (*Sugerencia:* $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)

34. Ponga de manifiesto que la estimación $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ tiene una precisión de cuatro decimales para $0 \le x \le \pi/4$ (es decir, para ángulos entre 0° y 45°).

CAPÍTULO 11

SERIES INFINITAS

Las series infinitas son útiles en los cursos avanzados de matemáticas, física e ingeniería, porque sirven para representar algunas funciones de manera especial. En este capítulo se discuten algunos de los resultados fundamentales relacionados con este concepto matemático tan importante.

11.1 SUCESIONES INFINITAS

Una sucesión infinita arbitraria normalmente se denota por

(11.1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

y se puede considerar como una colección de números reales para los que hay una correspondencia univoca con los enteros positivos. Por comodidad, a veces se llama simplemente *sucesiones* o (*secuencias*) a las sucesiones infinitas. Cada número real a_k es un **término** de la sucesión. La sucesión está *ordenada* ya que hay un **primer término** a_1, un **segundo término** a_2 y, para todo entero positivo n, un ***n*-ésimo** término a_n.

Las sucesiones infinitas se presentan en las matemáticas anteriores al Cálculo. Por ejemplo, la sucesión

$$0.6,\ 0.66,\ 0.666,\ 0.6666,\ 0.66666,\ \ldots$$

puede emplearse para representar el número racional $\frac{2}{3}$. En este caso, el n-ésimo término se va acercando cada vez más a $\frac{2}{3}$ cuando n crece.

Un uso importante de las sucesiones infinitas está en la definición de series infinitas en la Sección 11.2. Esta definición permite expresar un número racional como $\frac{2}{3}$ por medio de una *serie infinita* (o *suma infinita*). Para $\frac{2}{3}$, la serie infinita es

$$0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots$$

La *sucesión* para $\frac{2}{3}$ se puede obtener agregando más y más términos a la suma; es decir,

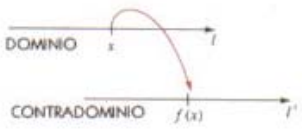
$$0.6 = 0.6, \qquad 0.66 = 0.6 + 0.06, \qquad 0.666 = 0.6 + 0.06 + 0.006,$$

etcétera.

El estudio de las series infinitas va mucho más allá de este ejemplo elemental. Más adelante, se representarán e^x, $\operatorname{sen} x$, $\tan^{-1} x$ y muchas otras expresiones como series infinitas. El uso de las series es de importancia no sólo en cálculos básicos sino también en las matemáticas superiores y sus aplicaciones.

Hasta ahora se han descrito solamente a nivel intuitivo. Para un estudio más riguroso hay que considerar a una sucesión infinita como una función. Recordemos que una función f es una correspondencia que asocia a cada número x del dominio un único número $f(x)$ en el contradominio, como se ilustra con las dos rectas coordenadas de la Figura 11.1. Si se restringe el dominio de una función a los enteros positivos 1, 2, 3, ..., se obtiene una sucesión infinita.

FIGURA 11.1



DEFINICIÓN (11.2)

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

En este libro se considera que el contradominio de una sucesión infinita es un subconjunto de los números reales.

Si f es una sucesión infinita, entonces a cada entero positivo k le corresponde un número real $f(k)$. Los números en el contradominio de f se pueden denotar por

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

en donde los tres puntos al final indican que la sucesión es interminable. Entonces (11.1) y (11.2) son esencialmente lo mismo. Para obtener la forma con subíndices (11.1) a partir de la forma (11.2), se toma $a_n = f(n)$ para cada entero positivo n. Recíprocamente, dada (11.1), se puede obtener una función definiendo $f(n) = a_n$ para todo entero positivo n.

A veces una sucesión con n-ésimo término a_n, se denota por $\{a_n\}$. Por ejemplo, la sucesión $\{2^n\}$ tiene el n-ésimo término $a_n = 2^n$. Según la Definición (11.2), la sucesión $\{2^n\}$ es la función f tal que $f(n) = 2^n$ para todo entero positivo n.

De la definición de igualdad de funciones, una sucesión $\{a_n\}$ es **igual** a otra sucesión $\{b_n\}$ si y sólo si $a_k = b_k$ para todo entero positivo k.

EJEMPLO 1 Escriba los cuatro primeros términos y el décimo término de cada sucesión:

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ **(b)** $\{2 + (0.1)^n\}$

(c) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$ **(d)** $\{4\}$

Solución Para encontrar los cuatro primeros términos sustituimos sucesivamente n por 1, 2, 3 y 4 en la fórmula para a_n. El décimo término se encuentra sustituyendo n por 10. Haciendo esto y simplificando obtenemos lo siguiente:

Sucesión	*n-ésimo término*	*Primeros cuatro términos*	*Décimo término*
(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{10}{11}$
(b) $\{2 + (0.1)^n\}$	$2 + (0.1)^n$	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001	2.0000000001
(c) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$	$(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$	$\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}$	$-\dfrac{100}{29}$
(d) $\{4\}$	4	4, 4, 4, 4	4

Para especificar algunas sucesiones, se da el primer término a_1 y una regla para obtener el término a_{k+1} del término anterior a_k, para todo $k \geq 1$. Esto se llama una **definición recurrente** y se dice que la sucesión está definida **recurrentemente**.

EJEMPLO 2 Encontrar los primeros cuatro términos y el n-ésimo término de la sucesión infinita definida recurrentemente como sigue:

$$a_1 = 3 \quad \text{y} \quad a_{k+1} = 2a_k \quad \text{para } k \geq 1$$

Solución La sucesión está definida en forma recurrente, pues se da el primer término y una manera de encontrar, a partir del término a_k, el siguiente término a_{k+1}. Así,

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6 \\ a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12 \\ a_4 &= 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24. \end{aligned}$$

Escribimos los términos como productos para tener una noción de la naturaleza del n-ésimo término. Continuando, obtendríamos $a_5 = 2^4 \cdot 3$ y $a_6 = 2^5 \cdot 3$; parecería que, $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$. Se puede demostrar por inducción matemática que esta conjetura es correcta. •

Una sucesión infinita $\{a_n\}$ puede tener la propiedad de que cuando n aumenta, a_n se acerca a algún número real L; es decir, $|a_n - L| \approx 0$ para n grande. Por ejemplo, sea

$$a_n = 2 + (-\tfrac{1}{2})^n.$$

Los primeros términos de la sucesión $\{a_n\}$ son

$$2 - \tfrac{1}{2},\ 2 + \tfrac{1}{4},\ 2 - \tfrac{1}{8},\ 2 + \tfrac{1}{16},\ 2 - \tfrac{1}{32},\ \ldots$$

y se ve que los términos se acercan progresivamente a 2 cuando n crece. De hecho, para todo entero positivo n,

$$|a_n - 2| = |2 + (-\tfrac{1}{2})^n - 2| = |(-\tfrac{1}{2})^n| = (\tfrac{1}{2})^n = 1/2^n$$

y el número $1/2^n$, y por lo tanto también $|a_n - 2|$, *se puede hacer arbitrariamente cercano a cero escogiendo n suficientemente grande*. En este caso, de acuerdo con la siguiente definición, la sucesión *tiene límite* 2 o *converge* a 2 y se escribe

$$\lim_{n \to \infty} [2 + (-\tfrac{1}{2})^n] = 2.$$

Este límite es casi idéntico a la definición de $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ dada en el Capítulo 4. La única diferencia es que si $f(n) = a_n$, el dominio de f es el conjunto de los enteros positivos y no un intervalo infinito de los números reales. Como en la Definición (4.21), pero usando a_n en vez de $f(x)$, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN (11.3)

Una sucesión $\{a_n\}$ **tiene el límite** L, o **converge a** L, lo cual se denota por

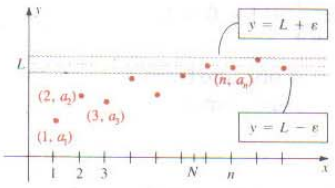
$$\lim_{n \to \infty} a_n = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número positivo N tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que } n > N.$$

Si tal número L no existe, la sucesión **no tiene límite** o **diverge**.

FIGURA 11.2



Se puede dar una interpretación geométrica para el límite de una sucesión, semejante a la que se dio en la Figura 4.43 para el límite de una función. La única diferencia es que la coordenada x del punto es siempre un entero positivo. En la Figura 11.2 se han trazado algunos puntos (k, a_k) para un caso específico en el que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Nótese que para cualquier $\varepsilon > 0$, los puntos (n, a_n) se encuentran entre las rectas $y = L \pm \varepsilon$, para n suficientemente grande. Por supuesto, la forma en que se acercan a L puede ser diferente de la que se ilustra en la figura (véanse, por ejemplo, las Figuras 11.3 y 11.6).

Si a_n se puede hacer tan grande como se quiera tomando n suficientemente grande, entonces diverge la sucesión $\{a_n\}$, pero en este caso se usa también la notación de límite y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Una manera más rigurosa de especificar esto es como sigue.

DEFINICIÓN (11.4)

La notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

significa que para todo número real P existe un número N tal que $a_n > P$ siempre que $n > N$.

Hay que recordar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *no* significa que el límite existe sino que los números a_n crecen sin acotación alguna cuando n aumenta. Asimismo, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ significa que a_n decrece sin acotación alguna cuando n aumenta.

El siguiente teorema es importante porque permite usar los resultados del Capítulo 4 para investigar la convergencia o divergencia de una sucesión. La demostración se deduce de las Definiciones (11.3) y (4.21).

TEOREMA (11.5)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión infinita y sea $f(n) = a_n$, donde $f(x)$ existe para todo número real $x \geq 1$.

(i) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$.

(ii) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (o bien $-\infty$), entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ (o bien $-\infty$).

El siguiente ejemplo ilustra cómo se usa este teorema.

EJEMPLO 3 Sea $a_n = 1 + (1/n)$. Determinar si $\{a_n\}$ converge o diverge.

Solución Definimos $f(n) = 1 + (1/n)$ y se considera

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{para todo número real } x \geq 1.$$

De la Sección 4.6,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 1 + 0 = 1.$$

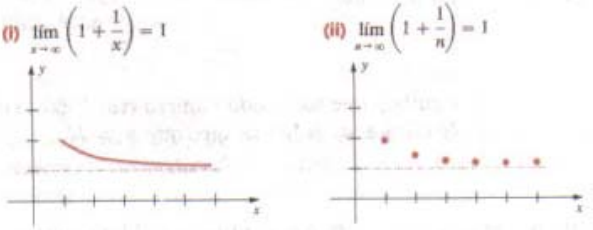
Entonces, por el Teorema (11.5),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ converge a 1. •

La diferencia entre $\lim_{x\to\infty}[1 + (1/x)] = 1$ y $\lim_{n\to\infty}[1 + (1/n)] = 1$ se ilustra en la Figura 11.3. Nótese que para $1 + (1/x)$, la función f es continua si $x \geq 1$ y la gráfica tiene una asíntota horizontal $y = 1$. Para $1 + (1/n)$ se toman sólo los puntos cuyas abscisas son enteros positivos.

FIGURA 11.3



EJEMPLO 4 Determinar si cada sucesión converge o diverge:

(a) $\{\frac{1}{4}n^2 - 1\}$ (b) $\{(-1)^{n-1}\}$

Solución (a) Si tomamos $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$, entonces $f(x)$ existe para todo $x \geq 1$ y

$$\lim_{x\to\infty}(\tfrac{1}{4}x^2 - 1) = \infty.$$

Entonces, por el Teorema (11.5),

$$\lim_{n\to\infty}(\tfrac{1}{4}n^2 - 1) = \infty.$$

Por lo tanto, la sucesión no tiene límite. La Figura 11.4 ilustra la forma en que la sucesión diverge.

FIGURA 11.4

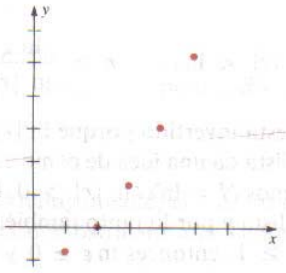
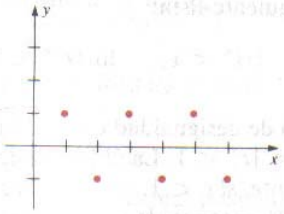


FIGURA 11.5



(b) Tomando $n = 1, 2, 3, \ldots$, vemos que los términos de $(-1)^{n-1}$ oscilan entre 1 y -1 como sigue:

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad \ldots$$

Esto se ilustra gráficamente en la Figura 11.5. Entonces, $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$ no existe y la sucesión diverge. •

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede usar la Regla de L'Hôpital para calcular los límites de algunas sucesiones.

EJEMPLO 5 Determinar si la sucesión $\{5n/e^{2n}\}$ converge o diverge.

Solución Sea $f(x) = 5x/e^{2x}$ para todo número real x. Como f toma la forma indeterminada ∞/∞ cuando $x \to \infty$, podemos usar la Regla de L'Hôpital, obteniendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2e^{2x}} = 0.$$

Entonces, por el Teorema (11.5), $\lim_{n\to\infty}(5n/e^{2n}) = 0$. Por lo tanto, la sucesión converge a 0. •

La demostración del siguiente teorema ilustra el uso de la Definición (11.3).

TEOREMA (11.6)

(i) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$

(ii) $\lim_{n\to\infty} |r^n| = \infty$ si $|r| > 1$.

Demostración Si $r = 0$, es evidente que el límite es 0. Supongamos que $0 < |r| < 1$. Para demostrar (i) usando la Definición (11.3), hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número positivo N tal que

$$\text{si} \quad n > N, \quad \text{entonces} \quad |r^n - 0| < \varepsilon.$$

La desigualdad $|r^n - 0| < \varepsilon$ es equivalente a todas y cada una de las desigualdades en la siguiente lista:

$$|r|^n < \varepsilon, \quad \ln |r|^n < \ln \varepsilon, \quad n \ln |r| < \ln \varepsilon, \quad n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |r|}.$$

El signo de desigualdad en la última expresión está invertido porque $\ln |r|$ es negativo para $0 < |r| < 1$. La última desigualdad de la lista da una idea de cómo elegir N. Concretamente, si $\varepsilon < 1$, entonces $\ln \varepsilon < 1$ y tomamos $N = \ln \varepsilon / \ln |r| > 0$. En este caso, si $n > N$, entonces la última desigualdad de la lista y por lo tanto también la primera, que es lo que se quería demostrar. Ahora, si $\varepsilon \geq 1$, entonces $\ln \varepsilon \geq 0$ y por lo tanto $\ln \varepsilon / \ln |r| \leq 0$. En este caso, si N es *un* número positivo *arbitrario*, entonces, siempre que $n > N$, la última desigualdad de la lista se satisface otra vez.

Para demostrar (ii), sea $|r| > 1$ y sea P un número real positivo arbitrario. Las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$|r|^n > P, \quad \ln |r|^n > \ln P, \quad n \ln |r| > \ln P, \quad n > \frac{\ln P}{\ln |r|}.$$

Si se escoge $N = \ln P / \ln |r|$, entonces, siempre que $n > N$, la última desigualdad se satisface y por tanto también la primera, es decir, $|r|^n > P$. Por la Definición (11.4), esto significa que $\lim_{n \to \infty} |r|^n = \infty$. • •

EJEMPLO 6 Escribir los primeros cuatro términos de cada sucesión y determinar si ésta converge o diverge.

(a) $\{(-\frac{2}{3})^n\}$ **(b)** $\{(1.01)^n\}$

Solución

(a) Los cuatro primeros términos de $\{(-\frac{2}{3})^n\}$ son

$$-\tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{4}{9}, \quad -\tfrac{8}{27}, \quad \tfrac{16}{81}.$$

De acuerdo con el Teorema (11.6) (i),

$$\lim_{n \to \infty} (-\tfrac{2}{3})^n = 0.$$

(b) Los cuatro primeros términos de $\{(1.01)^n\}$ son

$$1.01, \quad 1.0201, \quad 1.030301, \quad 1.04060401.$$

De acuerdo con el Teorema (11.6) (ii),

$$\lim_{n \to \infty} (1.01)^n = \infty. \quad \bullet$$

Se pueden demostrar teoremas para sucesiones análogos a los teoremas sobre límites que se usaron en la Sección 4.6 para sumas, restas, productos y cocientes de funciones. Por ejemplo, si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes, entonces

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right),$$

etcétera.

Si $a_n = c$ para todo n, tal que la sucesión infinita es $c, c, \ldots, c, \ldots$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

Análogamente, si c es un número real y k es un racional positivo, entonces, como en la demostración del Teorema (4.23),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0.$$

EJEMPLO 7 Calcular el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{2n^2}{5n^2-3}\right\}$.

Solución Queremos encontrar $\lim_{n\to\infty} a_n$ para $a_n = 2n^2/(5n^2 - 3)$. Dividiendo el numerador y el denominador de a_n entre n^2 y aplicando los teoremas sobre límites,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{5n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{5-(3/n^2)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2}{\lim_{n\to\infty}[5-(3/n^2)]}$$

$$= \frac{2}{\lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty}(3/n^2)} = \frac{2}{5-0} = \frac{2}{5}.$$

Entonces, la sucesión tiene límite $\frac{2}{5}$. También podríamos demostrar esto aplicando la Regla de L'Hôpital a $2x^2/(5x^2 - 3)$. •

El siguiente teorema, que es análogo al Teorema (2.22), afirma que si los términos de una sucesión infinita están siempre intercalados entre los términos correspondientes de dos sucesiones que tienen el mismo límite L, entonces la sucesión dada también tiene por límite a L. La demostración se da en el Apéndice II.

TEOREMA DE INTERCALACIÓN PARA SUCESIONES INFINITAS (11.7)

Si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones infinitas tales que $a_n \le b_n \le c_n$ para todo n, y si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

EJEMPLO 8 Calcular el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{\cos^2 n}{3^n}\right\}$.

Solución Como $0 < \cos^2 n < 1$ para todo entero positivo n,

$$0 < \frac{\cos^2 n}{3^n} < \frac{1}{3^n}.$$

Aplicando el Teorema (11.6) con $r = \frac{1}{3}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

Además, $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Del Teorema de Intercalación (11.7) con $a_n = 0$, $b_n = (\cos^2 n)/3^n$, y $c_n = (\frac{1}{3})^n$, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n} = 0.$$

Por lo tanto, el límite de la sucesión es 0. •

El siguiente teorema es una consecuencia directa de la Definición (11.3).

TEOREMA (11.8) Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 9 Sea una sucesión cuyo n-ésimo término es $a_n = (-1)^{n+1}(1/n)$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Solución Los términos de la sucesión son alternadamente positivos y negativo Por ejemplo, los cinco primeros términos son

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

del Teorema (11.8) se deduce que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. •

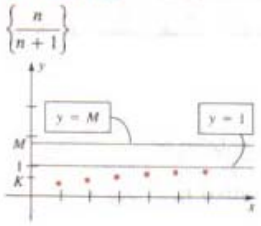
Se dice que una sucesión es **monótona** si sus términos sucesivos no decrecen, es decir,

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots$$

o bien si no crecen,

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$$

FIGURA 11.6



Se dice que una sucesión es **acotada** si existe un número real positivo M tal que $|a_k| \le M$ para todo k. Por ejemplo, la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$$

es monótona (sus términos van creciendo) y acotada (porque $k/(k+1) < 1$ para todo k). La sucesión se ilustra en la Figura 11.6. Nótese que cualquier número $M \ge 1$ es una cota de la sucesión. Sin embargo, si $K < 1$, entonces K no es una cota ya que $K < k/(k+1)$ para k suficientemente grande.

El siguiente teorema es fundamental para algunos desarrollos posteriores.

TEOREMA (11.9) Una sucesión infinita monótona y acotada tiene límite.

Para demostrar (11.9) se necesita usar una propiedad importante de los números reales. Se darán primero algunas definiciones. Si S es un conjunto no vacío de números reales, entonces se dice que un número u es una **cota superior** de S si $x \leq u$ para todo x en S. Se dice que un número v es una **cota superior mínima** de S si v es una cota superior y ningún número menor que v es también cota superior de S. Por lo tanto, la cota superior mínima es el menor de los números reales que es mayor que o igual a todo número en S. Por ejemplo, si S es el intervalo abierto (a, b), entonces cualquier número mayor que b es una cota superior de S, pero la cota superior mínima de S es única e igual a b.

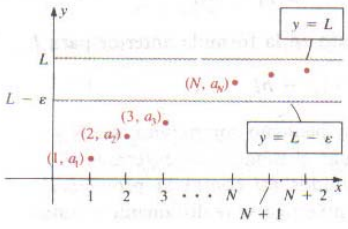
El siguiente enunciado es un axioma en el sistema de los números reales.

PROPIEDAD DE COMPLETITUD (11.10) Si un conjunto no vacío S de números reales tiene una cota superior, entonces S tiene una cota superior mínima.

Demostración del Teorema (11.9) Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona acotada de términos no decrecientes. Entonces,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

FIGURA 11.7



y existe un número M tal que $a_k \leq M$ para todo entero positivo k. Entonces, M es una cota superior del conjunto S de todos los números de la sucesión y, de la Propiedad de Completitud, se deduce que S tiene una cota superior mínima L tal que $L \leq M$ (véase la Figura 11.7).

Si $\varepsilon > 0$, entonces $L - \varepsilon$ no es una cota superior de S y por lo tanto, al menos uno de los términos de $\{a_n\}$ es mayor que $L - \varepsilon$; es decir,

$$L - \varepsilon < a_N \quad \text{para algún entero positivo } N,$$

como se muestra en la Figura 11.7. Como los términos de $\{a_n\}$ no decrecen, se tiene que

$$a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \cdots$$

y, por lo tanto,

$$L - \varepsilon < a_n \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Resulta que si $n > N$, entonces

$$0 \leq L - a_n < \varepsilon \quad \text{o bien} \quad |L - a_n| < \varepsilon.$$

Según la Definición (11.3), esto significa que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \leq M,$$

es decir, $\{a_n\}$ tiene un límite.

Se puede obtener la demostración para una sucesión no creciente $\{a_n\}$ de manera parecida o considerando la sucesión $\{-a_n\}$.

Como ilustración del Teorema (11.9) puede verse que la sucesión monótona $\{n/(n+1)\}$ representada en la Figura 11.6 tiene como cota superior mínima (y límite) a 1.

APLICACIÓN: EPIDEMIAS S → I → S

Las sucesiones infinitas se pueden aplicar al estudio del desarrollo en el tiempo de una epidemia del tipo S → I → S.* Supongamos que los médicos publican diariamente informes indicando el número de personas que han sido contagiadas de la enfermedad y el de las que han sanado. Se numeran los días de los informes como 1, 2, ..., n, ..., y se denota la población total por N. Además se define

I_n = número de personas que tienen la enfermedad en el día n

F_n = número de personas que contrajeron la enfermedad el día n

C_n = número de personas que sanaron el día n.

Resulta que para todo $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = I_n + F_{n+1} - C_{n+1}.$$

Supongamos que los funcionarios de salud pública encuentran que el número de casos nuevos en un día es directamente proporcional al producto del número de personas enfermas y el de personas no contagiadas el día anterior. (Esto se conoce como *Ley de Acción de Masas* y es típica en una población estudiantil.) Supóngase que además, el número de personas que sanan en un día es proporcional al número de personas todavía enfermas el día anterior. Entonces,

$$F_{n+1} = aI_n(N - I_n) \quad \text{y} \quad C_{n+1} = bI_n$$

en donde a y b son constantes. Sustituyendo esto en la fórmula anterior para I_{n+1},

$$I_{n+1} = I_n + aI_n(N - I_n) - bI_n.$$

En los primeros días de una epidemia, I_n es muy pequeño comparado con N y desde el punto de vista de la salud pública, al evaluar el número de enfermos es mejor *sobrestimarlo* que subestimarlo, y estar prevenidos así contra la propagación de la enfermedad. Tomando esto en cuenta, puede investigarse realistamente la dinámica inicial de una epidemia analizando la ecuación

$$I_{n+1} = I_n + aNI_n - bI_n = (1 + aN - b)I_n$$

en términos del número inicial I_1 de individuos enfermos. Si se toma $r = 1 + aN - b$, entonces $I_{n+1} = rI_n$ y por lo tanto,

$$I_2 = rI_1,\ I_3 = rI_2 = r^2I_1,\ I_4 = rI_3 = r^3I_1,\ \ldots,\ I_n = r^{n-1}I_1,\ \ldots$$

Esto da la siguiente sucesión de personas afectadas:

$$I_1,\ rI_1,\ r^2I_1,\ r^3I_1,\ \ldots,\ r^{n-1}I_1,\ \ldots$$

* El símbolo S → I → S es una abreviación de Susceptible → Infectado → Susceptible y significa que una persona infectada o contagiada que sana o se cura no queda inmunizada contra la enfermedad, sino que la puede contraer otra vez. El padecimiento gonorreico y algunas infecciones de la garganta son ejemplos de este tipo de enfermedades.

El número $r = 1 + aN - b$ (que se puede estimar a partir de los datos iniciales) es de una importancia crítica. Si $r > 1$, entonces por el Teorema (11.6), $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$ y la epidemia se extiende. En este caso, cuando n es grande, I_n ya no es pequeño comparado con N y la fórmula para I_{n+1} ya no es válida. Si $r < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ y los funcionarios de sanidad no tienen de qué preocuparse. El caso $r = 1$ lleva a la sucesión constante $I_1, I_1, \ldots, I_1, \ldots$

EJERCICIOS 11.1

Ejercicios 1-16: La expresión dada es el n-ésimo término a_n de una sucesión infinita $\{a_n\}$. Escriba los primeros cuatro términos y calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$ si es que existe.

1. $\dfrac{n}{3n+2}$
2. $\dfrac{6n-5}{5n+1}$
3. $\dfrac{7-4n^2}{3+2n^2}$
4. $\dfrac{4}{8-7n}$
5. -5
6. $\sqrt{2}$
7. $\dfrac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$
8. $8n+1$
9. $\dfrac{2}{\sqrt{n^2+9}}$
10. $\dfrac{100n}{n^{3/2}+4}$
11. $(-1)^{n+1}\dfrac{3n}{n^2+4n+5}$
12. $(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$
13. $1+(0.1)^n$
14. $1-(1/2^n)$
15. $1+(-1)^{n+1}$
16. $(n+1)/\sqrt{n}$

Ejercicios 17-42: Determine si la sucesión converge o diverge; si converge, calcule el límite.

17. $\{6(-5/6)^n\}$
18. $\{8-(7/8)^n\}$
19. $\{\arctan n\}$
20. $\{(\tan^{-1} n)/n\}$
21. $\{1000-n\}$
22. $\{(1.0001)^n/1000\}$
23. $\left\{(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}\right\}$
24. $\left\{\dfrac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}$
25. $\left\{\dfrac{4n^4+1}{2n^2-1}\right\}$
26. $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$
27. $\{e^n/n^4\}$
28. $\{e^{-n}\ln n\}$
29. $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$
30. $\{(-1)^n n^3 3^{-n}\}$
31. $\{2^{-n}\operatorname{sen} n\}$
32. $\left\{\dfrac{4n^3+5n+1}{2n^3-n^2+5}\right\}$
33. $\left\{\dfrac{n^2}{2n-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right\}$
34. $\left\{n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right\}$
35. $\{\cos n\pi\}$
36. $\{4+\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi n\}$
37. $\{n^{1/n}\}$
38. $\{n^2/2^n\}$
39. $\left\{\dfrac{n^{-10}}{\sec n}\right\}$
40. $\left\{(-1)^n\dfrac{n^2}{1+n^2}\right\}$
41. $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$
42. $\{\sqrt{n^2+n}-n\}$

Ejercicios 43-44: Consulte la Aplicación: Epidemia S → I → S.

43. Una población estable de 35 000 pájaros vive en tres islas. Cada año, 10% de la población de la isla A emigra a la isla B, 20% de la población de la isla B emigra a la isla C y 5% de la población de la isla C emigra a la isla A. Sean A_n, B_n y C_n las cantidades de aves que hay en el año n en las islas A, B y C, respectivamente, antes de la emigración.
 (a) Demuestre que $A_{n+1} = 0.9A_n + 0.05C_n$, $B_{n+1} = 0.1A_n + 0.80B_n$ y $C_{n+1} = 0.95C_n + 0.20B_n$.
 (b) Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} A_n$, $\lim_{n\to\infty} B_n$ y $\lim_{n\to\infty} C_n$ existen, calcule el número de pájaros que habrá en cada isla dentro de muchos años.

44. Una población de gatos se divide por edades en cachorros (menores de un año) y adultos (mayores de un año). Todas las hembras adultas, incluyendo las que nacieron el año anterior, tienen una camada cada mes de junio con un promedio de tres cachorros. La tasa de sobrevivencia de los animales jóvenes es 50% mientras que la de los adultos es de $66\frac{2}{3}$% por año. Sea K_n el número de gatos recién nacidos en junio del año n-ésimo, y sea A_n el número de individuos adul-

tos; suponga que la razón de machos a hembras es siempre 1.

(a) Demuestre que $K_{n+1} = \frac{3}{2}A_{n+1}$ y $A_{n+1} = \frac{2}{3}A_n + \frac{1}{2}K_n$.

(b) Deduzca que $A_{n+1} = \frac{17}{12}A_n$ y $K_{n+1} = \frac{17}{12}K_n$, y que $A_n = (\frac{17}{12})^{n-1}A_1$ y $K_n = (\frac{17}{12})^{n-1}K_1$. ¿Qué se puede decir de la población?

Ejercicios 45-47: Use una calculadora.

45. Los términos de una sucesión definida recurrentemente por $a_1 = 5$ y $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$, se pueden generar introduciendo $a_1 = 5$ en una calculadora y pulsando la tecla de raíz cuadrada repetidamente.

(a) Describa los que pasa a los términos de la sucesión cuando k aumenta.

(b) Demuestre que $a_n = 5^{1/2^n}$ y calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

46. Una sucesión se genera introduciendo un número N en una calculadora y pulsando repetidamente la tecla del recíproco [1/x]. ¿En qué condiciones tiene un límite esta sucesión?

47. Los términos de una sucesión que se definen recurrentemente por $a_1 = 1$ y $a_{k+1} = \cos a_k$, se pueden generar introduciendo 1 en una calculadora (en el modo de radianes) y pulsando la tecla del coseno repetidamente.

(a) Describa lo que sucede a los términos de la sucesión cuando k aumenta.

(b) Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, demuestre que $\cos L = L$. (*Indicación:* $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$.)

48. Una sucesión $\{x_n\}$ se define recurrentemente por $x_{k+1} = x_k - \tan x_k$.

(a) Escriba los primeros cinco términos de la sucesión tomando $x_1 = 3$. ¿Puede conjeturar el valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$?

(b) Escriba los cinco primeros términos de la sucesión tomando $x_1 = 6$. ¿Puede conjeturar el valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$?

(c) Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, demuestre que $L = \pi n$, para algún entero n.

49. Se pueden generar aproximaciones a $\sqrt{N}$ con la sucesión definida recurrentemente por

$$x_1 = \frac{N}{2}, \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{N}{x_k}\right).$$

(a) Calcule x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 para $N = 10$.

(b) Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, demuestre que $L = \sqrt{N}$.

50. La famosa *sucesión de Fibonacci* se define recurrentemente por $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ con $a_1 = a_2 = 1$.

(a) Encuentre los primeros diez términos de la sucesión.

(b) Los términos de la sucesión $r_k = a_{k+1}/a_k$ se aproximan cada vez más a τ, la *razón áurea*. Calcule aproximadamente los diez primeros términos de esta sucesión.

(c) Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} r_n = \tau$, demuestre que $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

11.2 SERIES INFINITAS CONVERGENTES O DIVERGENTES

En la Sección 11.1 se vio que es posible expresar el número $\frac{2}{3}$ como una *serie* (o *suma*) *infinita*.

$$0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + 0.00006 + \cdots$$

Como algebraicamente sólo se puede sumar un número finito de términos, hay que *definir* lo que significa una suma infinita de este tipo.

Comenzamos por introducir la terminología que se usará en el resto del capítulo.

DEFINICIÓN (11.11)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión infinita. La expresión

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

se denomina **serie infinita** o, simplemente, **serie**.

En la notación de una serie, como la de la Definición (11.11), se emplea la notación de sumatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{o bien} \quad \sum a_n.$$

En la última suma se sobreentiende que la variable de sumatoria es n. Cada número a_k es un **término** de la serie y a_n es el ***n*-ésimo término**.

DEFINICIÓN (11.12)

(i) La ***k*-ésima suma parcial** S_k de la serie infinita $\sum a_n$ es

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

(ii) La **sucesión de sumas parciales** asociada a la serie infinita $\sum a_n$ es

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

De la Definición (11.12) (i),

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Para calcular S_5, S_6 y S_7, hay que añadir cada vez más términos de la serie. Así, S_{1000} es la suma de los primeros mil términos de $\sum a_n$. Si la sucesión $\{S_n\}$ tiene un límite S (es decir, si converge a S), entonces S se denomina suma de la serie *infinita* a_n, como se formaliza en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (11.13)

Una serie infinita $\sum a_n$ es **convergente** (o **converge**) si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge; es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{para un número real } S.$$

El límite S se llama **suma** de la serie $\sum a_n$ y se escribe

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

La serie $\sum a_n$ es **divergente** (o **diverge**) si $\{S_n\}$ diverge. Una serie infinita divergente no tiene suma.

EJEMPLO 1 Demostrar que la serie infinita

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

converge y calcular su suma.

Solución La descomposición en fracciones parciales del n-ésimo término a_n es

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto, la n-ésima suma parcial de la serie se puede escribir como

$$\begin{aligned}S_n &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\\ &=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Como $$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

la serie converge y su suma es 1. •

La serie $\sum 1/[n(n+1)]$ del Ejemplo 1 se llama una **serie retráctil*** (o telescópica), pues al escribir S_n como se hizo en la solución, los términos se cancelan y la suma se reduce a $1-[1/(n+1)]$.

EJEMPLO 2 Demostrar que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ es divergente.

Solución La serie se puede escribir como

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

Nótese que $S_k=1$ si k es impar y $S_k=0$ si k es par. Como la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ alterna u oscila entre 1 y 0, resulta que $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe. Por lo tanto, la serie infinita diverge. •

EJEMPLO 3 Demostrar que la siguiente serie es divergente:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

Solución Se agrupan los términos de la serie como sigue:

$$1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{9}+\cdots+\tfrac{1}{16})+(\tfrac{1}{17}+\cdots+\tfrac{1}{32})+\cdots$$

Observamos que cada grupo contiene el doble número de términos que el grupo ante-

* **(N. del R.)** Este calificativo, **retráctil**, es más apropiado que el de "telescópica", que alude sólo a la característica constructiva de los anteojos astronómicos o telescopios de ser extensibles y retráctiles.

rior. Como la suma de los términos dentro de cada paréntesis es mayor que $\frac{1}{2}$, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$S_2 = 1 + \tfrac{1}{2} > 2(\tfrac{1}{2})$$

$$S_4 > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} > 3(\tfrac{1}{2})$$

$$S_8 > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} > 4(\tfrac{1}{2}).$$

Análogamente, $S_{16} > 5(\frac{1}{2})$ y $S_{32} > 6(\frac{1}{2})$. Por inducción matemática, podemos demostrar que

$$S_{2^k} > (k+1)(\tfrac{1}{2}) \quad \text{para todo entero positivo } k.$$

Resulta que S_n puede hacerse tan grande como se quiera tomando n suficientemente grande; es decir, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Como $\{S_n\}$ diverge, la suma infinita es divergente.

La serie en el Ejemplo 3 será útil más adelante. Se le asigna el siguiente nombre especial.

DEFINICIÓN (11.14)

La **serie armónica** es la serie infinita divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

En la siguiente sección se dará otra demostración de la divergencia de la serie armónica.

Algunas series infinitas aparecen frecuentemente en la solución de problemas aplicados. Una de las más importantes es la **serie geométrica**

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

donde a y r son números reales, con $a \neq 0$.

TEOREMA (11.15)

Sea $a \neq 0$. La serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

(i) es convergente y su suma es $\dfrac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$.

(ii) es divergente si $|r| \geq 1$.

Demostración Si $r = 1$, entonces $S_n = a + a + \cdots + a = na$ y la serie diverge porque $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe.

Si $r = -1$, entonces $S_k = a$ si k es impar y $S_k = 0$ si k es par. Como la sucesión de sumas parciales alterna entre a y 0, la serie diverge.

Si $r \neq 1$, consideramos

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

y

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n.$$

Restando los lados correspondientes de estas ecuaciones, se obtiene

$$(1 - r)S_n = a - ar^n.$$

Dividiendo ambos miembros entre $1 - r$,

$$S_n = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{a}{1 - r} - \lim_{n \to \infty} \frac{ar^n}{1 - r}$$

$$= \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n \to \infty} r^n.$$

Si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ (véase el Teorema (11.6) y por lo tanto,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}.$$

Si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n \to \infty} r^n$ no existe (véase el Teorema (11.6)) y por consiguiente, $\lim_{n \to \infty} S_n$ no existe. En este caso, la serie es divergente. • •

EJEMPLO 4 Demostrar que la siguiente serie infinita converge y calcular su suma.

$$0.6 + 0.06 + 0.006 + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots$$

Solución Ésta es la serie que se consideró al principio de la sección. Es una serie geométrica con $a = 0.6$ y $r = 0.1$. Por el Teorema (11.15) (i), la serie converge y su suma es

$$S = \frac{0.6}{1 - 0.1} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3}.$$

Entonces,

$$\frac{2}{3} = 0.6 + 0.06 + 0.006 + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots$$

Esto justifica la expresión decimal infinita $\frac{2}{3} = 0.66666 \ldots$ •

EJEMPLO 5 Demostrar que la siguiente serie es convergente y calcular su suma:

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$$

Solución La serie converge porque es una serie geométrica con $r = \frac{1}{3} < 1$. Por el Teorema (11.15) (i), la suma es

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \bullet$$

TEOREMA (11.16)

Si una serie infinita $\sum a_n$ es convergente, entonces tenemos $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración El n-ésimo término a_n de la serie infinita se puede expresar como

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, entonces también $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0 \quad \bullet\bullet$$

El teorema anterior afirma que *si* una serie converge, *entonces* su n-ésimo término a_n tiene límite cero cuando $n \to \infty$. Lo inverso no es cierto, es decir, *si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *no necesariamente es cierto* que la serie $\sum a_n$ sea convergente. La serie armónica (11.14) es un ejemplo de serie divergente $\sum a_n$ para la cual $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por lo tanto, para concluir que una serie infinita converge, *no basta* demostrar $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, porque esto puede ser cierto tanto para series convergentes como divergentes.

El siguiente resultado sobre *divergencia* es un corolario inmediato del Teorema (11.16).

CRITERIO DEL *n*-ÉSIMO TÉRMINO PARA LA DIVERGENCIA (11.17)

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie infinita $\sum a_n$ es divergente.

EJEMPLO 6 Aplicar el Criterio del n-ésimo Término (11.17) a cada serie y comentar el resultado:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$

Solución Tomando el límite del n-ésimo término a_n, obtenemos:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ (De acuerdo con el Criterio (11.17), la serie diverge.)

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ (No se puede aplicar el Criterio (11.17). La serie puede converger o diverger.)

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (No se puede aplicar el Criterio (11.17). La serie puede converger o diverger.)

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = \infty$ (De acuerdo con el Criterio (11.17), la serie diverge.)

En la siguiente sección se verá que la serie de la parte (b) es convergente y que la de la parte (c) diverge. •

El siguiente teorema expresa que si los términos correspondientes de dos series infinitas son iguales a partir de un cierto término, entonces las dos series convergen o las dos divergen.

TEOREMA (11.18) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series infinitas tales que $a_i = b_i$ para todo $i > k$, donde k es un entero positivo, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

Demostración Por hipótesis, puede escribirse que

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n + \cdots$$
$$\sum b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_k + a_{k+1} + \cdots + a_n + \cdots$$

Sean S_n y T_n las n-ésimas sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum b_n$, respectivamente. Se ve que si $n \geq k$, entonces,

$$S_n - S_k = T_n - T_k$$

o bien $$S_n = T_n + (S_k - T_k).$$

Por lo tanto, $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n + (S_k - T_k)$$

y así, los dos límites existen o ninguno de los dos existe. Esto es lo que se quería demostrar. Evidentemente, si las dos series convergen, entonces sus sumas difieren por $S_k - T_k$. • •

El Teorema (11.18) implica que cambiar un número finito de términos de una serie infinita no afecta su convergencia o su divergencia (aunque sí puede cambiar la suma de una serie convergente). En particular, si los primeros k términos de $\sum a_n$ se sustituyen por 0, la convergencia no se altera. Resulta que la serie

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n + \cdots$$

es convergente o divergente si $\sum a_n$ converge o diverge, respectivamente. La serie $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots$ se obtiene a partir de $\sum a_n$ **suprimiendo los primeros k términos.**

EJEMPLO 7 Demostrar que la siguiente serie converge:

$$\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots$$

Solución La serie converge porque puede obtenerse suprimiendo los primeros dos términos de la serie retráctil (o telescópica) convergente del Ejemplo 1. •

La demostración del siguiente teorema se deduce directamente de la Definición (11.13) y se deja como ejercicio.

TEOREMA (11.19) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes con sumas A y B, respectivamente, entonces

(i) $\sum (a_n + b_n)$ converge y su suma es $A + B$.

(ii) Si c es un número real, $\sum ca_n$ converge y su suma es cA.

(iii) $\sum (a_n - b_n)$ converge y su suma es $A - B$.

También es fácil demostrar que si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum ca_n$ es divergente para todo $c \neq 0$.

EJEMPLO 8 Demostrar que la siguiente serie converge y calcular su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^{n-1}} \right].$$

Solución La serie telescópica $\sum 1/[n(n+1)]$ se consideró en el Ejemplo 1 y se encontró que es convergente y que su suma es 1. Aplicando el Teorema (11.19) (ii) con $c = 7$ y $a_n = 1/[n(n+1)]$, vemos que $\sum 7/[n(n+1)]$ converge y su suma es $7(1) = 7$.

La serie geométrica $\sum 2/3^{n-1}$ es convergente y su suma es 3 (véase el Ejemplo 5). Entonces por el Teorema (11.19) (i), la serie dada converge y su suma es $7 + 3 = 10$. •

TEOREMA (11.20)

Si $\sum a_n$ es una serie convergente y $\sum b_n$ es divergente, entonces $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

Demostración Se hará por contradicción. Supongamos que $\sum (a_n + b_n)$ es convergente. Aplicando el Teorema (11.19) (iii), se obtiene que $\sum [(a_n + b_n) - a_n] = \sum b_n$ converge, lo cual es una contradicción. Entonces, la hipótesis resulta ser falsa, es decir, $\sum (a_n + b_n)$ es divergente. • •

EJEMPLO 9 Determinar si la siguiente serie converge o diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n} \right).$$

Solución Como $\sum (1/5^n)$ es una serie geométrica convergente y $\sum (1/n)$ es una serie armónica divergente, de acuerdo con el Teorema (11.20), la serie dada es divergente. •

APLICACIÓN: EPIDEMIAS S → I → S

Regresamos a la discusión del final de la Sección 11.1 acerca de las epidemias. Supóngase que en vez de I_n (el número de enfermos que hay el día n) interesa el *número total* S_n de individuos que han estado enfermos alguna vez entre el primer día y el n-ésimo. Como en la discusión anterior, estimamos S_n por arriba tomando el número F_{n+1} de casos nuevos el día $n + 1$ como aNI_n. Entonces,

$$\begin{aligned} S_n &= I_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \cdots + F_n \\ &= I_1 + aNI_1 + aNI_2 + aNI_3 + \cdots + aNI_{n-1}. \end{aligned}$$

Recordando que $I_n = r^{n-1}I_1$ con $r = 1 + aN - b$, se obtiene

$$\begin{aligned} S_n &= I_1 + aNI_1 + aNrI_1 + aNr^2I_1 + \cdots + aNr^{n-2}I_1 \\ &= I_1 + aNI_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2}). \end{aligned}$$

Como en la demostración del Teorema (11.15), esto puede escribirse

$$S_n = I_1 + aNI_1\left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{n-1}}{1-r}\right).$$

Si $r < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= I_1 + aNI_1\left(\frac{1}{1-r}\right) \\ &= I_1\left(1 + \frac{aN}{1-r}\right) \\ &= I_1\left(1 + \frac{aN}{b-aN}\right) \\ &= I_1\left(\frac{b}{b-aN}\right). \end{aligned}$$

Si a y b se calculan aproximadamente a partir de los datos iniciales, este resultado permite a los funcionarios de sanidad obtener una cota superior para el número total de individuos que enfermarán alguna vez durante la epidemia.

EJERCICIOS 11.2

Ejercicios 1-20: Determine si la serie infinita converge o diverge. Si es convergente, calcule su suma.

1. $3 + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{3}{4^{n-1}} + \cdots$
2. $3 + \frac{3}{(-4)} + \cdots + \frac{3}{(-4)^{n-1}} + \cdots$
3. $1 + \frac{(-1)}{\sqrt{5}} + \cdots + \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} + \cdots$
4. $1 + \left(\frac{e}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} + \cdots$
5. $0.37 + 0.0037 + \cdots + \frac{37}{(100)^n} + \cdots$
6. $0.628 + 0.000628 + \cdots + \frac{628}{(1000)^n} + \cdots$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}3^{n-1}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{n-1}4^{-n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$
10. $\sum (\sqrt{2})^{n-1}$
11. $\frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots$
12. $\frac{-1}{1\cdot 2} + \frac{-1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{-1}{n(n+1)} + \cdots$
13. $\frac{5}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{5}{n(n+1)} + \cdots$
14. $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+3} + \cdots$
15. $3 + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{3}{n} + \cdots$
16. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n-1}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (0.3)^n}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}\right)$

Ejercicios 21-28: Usando los ejemplos y los teoremas de esta sección, determine si la serie converge o diverge.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+3}\right)$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n}{7n-5}\right)$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n}\right]$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} - 2^{-3n})$

Ejercicios 29-32: Encuentre una fórmula para S_n y demuestre que la serie converge o diverge usando $\lim_{n\to\infty} S_n$ (véase el Ejemplo 1).

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{9n^2 + 3n - 2}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (*Sugerencia:* Racionalice el denominador.)

33. Demuestre o refute: Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ divergen, entonces $\sum (a_n + b_n)$ es divergente.

34. ¿Qué está mal en la siguiente "demostración" de que la serie geométrica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ tiene por suma 0 (véase el Ejemplo 2)?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \cdots$$
$$= 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

Ejercicios 35-38: La raya indica que los dígitos abajo de ella se repiten indefinidamente. Exprese el decimal periódico como una serie infinita y encuentre el número racional que representa.

35. $0.\overline{23}$

36. $5.\overline{146}$

37. $3.2\overline{394}$

38. 2.71828

39. Una pelota de goma se deja caer desde una altura de 10 m. En cada rebote sube hasta la mitad de la altura máxima anterior. Calcule la distancia total que recorre la pelota antes de quedar en reposo, usando una serie infinita geométrica.

40. El disco de un péndulo recorre un arco de 24 cm de longitud en su primera oscilación. Suponiendo que la longitud de cada oscilación es 5/6 de la anterior, calcule la distancia total que recorrerá antes de quedar en reposo. Utilice una serie infinita geométrica.

41. Cuando se administra a una persona una dosis de Q unidades de cierto medicamento, la cantidad que queda en la sangre a los t minutos está dada por Qe^{-ct}, donde c es una constante positiva. Suponga que se administra repetidamente la misma dosis cada T minutos.

(a) Demuestre que la cantidad $A(k)$ de medicamento en la sangre inmediatamente después de la k-ésima dosis está dada por

$$A(k) = \sum_{n=0}^{k-1} Qe^{-ncT}.$$

(b) Halle una cota superior para la cantidad de fármaco en la sangre para cualquier dosis.

(c) Calcule el tiempo mínimo entre dosis que asegura que $A(k)$ no sobrepasa un cierto nivel M.

42. Supóngase que cada unidad monetaria (u.m.) que se introduce a la economía circula de manera que 85% de u.m. original se gasta, luego se gasta 85% de los 0.85 de u.m. restantes, etcétera. Calcule el impacto económico (es decir, la cantidad total gastada) si se introducen 1 000 000 u.m. en la economía.

43. En un programa para erradicar una plaga, se liberan cada día N moscas macho esterilizadas y el 90% de ellas sobrevive al terminar el día.

(a) Demuestre que el número de moscas esterilizadas en la población a los n días es $N + (0.9)N + \cdots + (0.9)^{n-1}N$.

(b) Si el *objetivo a largo plazo* del programa es mantener 20 000 machos esterilizados en la población, ¿cuántas moscas deben liberarse cada día?

44. Cierto medicamento tiene una semivida (o "vida media") en la sangre de unas dos horas. Se administrarán dosis de K mg cada cuatro horas, en donde K aún no se ha determinado.

(a) Demuestre que el número de miligramos de medicamento en la sangre inmediatamente después de la n-ésima dosis es $K + \frac{1}{4}K + \cdots + (\frac{1}{4})^{n-1}K$ y que esta suma es aproximadamente $\frac{4}{3}K$ para valores grandes de n.

(b) Se considera que a partir de 500 mg de medicamento en la sangre, el nivel es peligroso. Calcule la mayor dosis que se puede administrar repetidamente durante un periodo largo.

(c) Consulte el Ejercicio 41. ¿Con qué frecuencia pueden administrarse sin peligro dosis de 50 mg del medicamento?

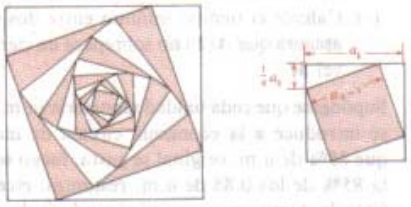
45. En la primera figura se muestra una sucesión anidada de cuadrados $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ Sean a_k, A_k y P_k el lado, el área y el perímetro del k-ésimo cuadrado S_k, respectivamente. El cuadrado S_{k+1} se construye a partir de S_k eligiendo cuatro puntos en las orillas de éste a una distancia

$\frac{1}{4}\,a_k$ de los vértices, y uniéndolos (véase la segunda figura).

(a) Encuentre la relación entre a_{k+1} y a_k y determine a_n, A_n y P_n.

(b) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

EJERCICIO 45



46. En la figura se muestra una sucesión de círculos y cuadrados anidados alternadamente. Cada círculo está inscrito en el cuadrado anterior y cada cuadrado (excepto el primero) está inscrito en el círculo anterior. Sea S_n el área del n-ésimo cuadrado y C_n la del n-ésimo círculo.

(a) Encuentre la relación entre S_n y C_n y entre C_n y S_{n+1}.

(b) ¿Qué proporción del cuadrado original ha quedado sombreada en la figura?

EJERCICIO 46



Ejercicios 47-50: Use el Teorema (11.15) para verificar cada igualdad.

47. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n+1}x^n + \cdots = \dfrac{1}{1+x}$, si $-1 < x < 1$

48. $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \dfrac{1}{1-x^2}$, si $-1 < x < 1$

49. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{(x-3)}{4} + \dfrac{(x-3)^2}{8} + \cdots + \dfrac{(x-3)^n}{2^{n+1}} + \cdots = \dfrac{1}{5-x}$, si $1 < x < 5$

50. $3 + (x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{3} + \cdots + \dfrac{(x-1)^n}{3^{n-1}} + \cdots = \dfrac{9}{4-x}$, si $-2 < x < 4$

11.3 SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

Es difícil determinar si una serie infinita $\sum a_n$ converge o diverge usando directamente la Definición (11.13) porque en la mayoría de los casos es imposible encontrar una fórmula sencilla para S_n. Sin embargo, se pueden desarrollar criterios de convergencia o divergencia basados en un análisis del n-ésimo término a_n. Estos criterios se aplican sólo para determinar si la serie converge o diverge, no para calcular la *suma*.

En esta sección se consideran solamente **series de términos positivos**, es decir, series en las que $a_n > 0$ para todo n. Aunque esto puede parecer muy particular, las series de términos positivos son el fundamento para un estudio general de las series infinitas. Como se verá más adelante, la convergencia o divergencia de una serie infinita *arbitraria* a menudo puede determinarse analizando la convergencia o la divergencia de alguna serie relacionada de términos positivos.

El siguiente teorema muestra que para determinar si una serie de términos positivos converge o diverge, basta investigar si es acotada la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$.

TEOREMA (11.21)

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Si existe un número M tal que $S_n < M$ para todo n, entonces la serie converge y tiene por suma $S \leq M$. Si tal número M no existe, entonces la serie diverge.

Demostración Si $\{S_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie de términos positivos $\sum a_n$, entonces

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots$$

y por lo tanto, $\{S_n\}$ es monótona. Si existe un número M tal que $S_n < M$ para todo n, entonces $\{S_n\}$ es monótona y acotada. De acuerdo con el Teorema (11.9),

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \leq M$$

para algún número S y por lo tanto, la serie converge. Si tal número M no existe, entonces $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ y la serie diverge. • •

Sea f una función definida para todo número real $x \geq 1$. Se puede considerar la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

Por ejemplo, si $f(x) = 1/x^2$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

La convergencia o divergencia de una serie de este tipo puede analizarse mediante una integral impropia, como se indica en el siguiente resultado.

CRITERIO DE LA INTEGRAL (11.22)

Si una función f es continua y decreciente y toma valores positivos en $x \geq 1$, entonces la serie infinita

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

(i) converge si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente,

(ii) diverge si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente.

FIGURA 11.8

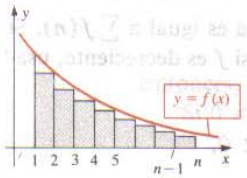
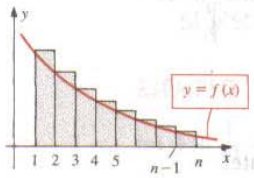


FIGURA 11.9



Demostración Si n es un entero positivo mayor que 1, entonces el área del polígono de rectángulos inscrito que se ilustra en la Figura 11.8 es

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n).$$

Análogamente, el área del polígono circunscrito que se ilustra en la Figura 11.9 es

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$

Como $\int_1^n f(x)\,dx$ es el área bajo la gráfica de f entre 1 y n,

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Si S_n denota la n-ésima suma parcial de la serie $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$, entonces esta desigualdad se puede escribir

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}.$$

Tal desigualdad implica que si la integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge y es igual a $K > 0$, entonces

$$S_n - f(1) \leq K \quad \text{o bien} \quad S_n \leq K + f(1)$$

para todo entero positivo n. Entonces, por el Teorema (11.21), la serie $\sum f(n)$ es convergente.

Si la integral impropia diverge,

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \infty$$

y como $\int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}$, también se tiene que $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \infty$; es decir, la serie $\sum f(n)$ es divergente. • •

EJEMPLO 1 Usar el Criterio de la Integral (11.22) para demostrar que la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

es divergente (véase el Ejemplo 3 de la Sección 11.2).

Solución Si definimos $f(x) = 1/x$, entonces f es una función continua y decreciente que toma valores positivos para $x \geq 1$ y, por lo tanto, se puede aplicar el Criterio de la Integral. Como

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \Big[\ln x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\ln t - \ln 1] = \infty,$$

por (11.22) (ii), la serie diverge. •

EJEMPLO 2 Determinar si la serie infinita $\sum ne^{-n^2}$ converge o diverge.

Solución Si definimos $f(x) = xe^{-x^2}$, entonces la serie dada es igual a $\sum f(n)$. Si $x \geq 1$, f es continua y toma valores positivos. Para investigar si f es decreciente, usamos la primera derivada. Como

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2) < 0,$$

f es decreciente en $[1, \infty)$. Por consiguiente puede aplicarse el Criterio de la Integral:

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} (-\tfrac{1}{2})e^{-x^2}\Big]_1^t$$

$$= (-\tfrac{1}{2}) \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{e^{t^2}} - \frac{1}{e}\right] = \frac{1}{2e}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con (11.22) (i), la serie es convergente. •

También se puede aplicar el criterio de la integral si f satisface la condición (11.22) para todo $x \geq m$, donde m es un entero positivo. En este caso, la integral en (11.22) se sustituye por $\int_m^\infty f(x)\,dx$. Esto corresponde a omitir los primeros $m - 1$ términos de la serie.

Si $f(x) = 1/x^p$ para $p > 0$, entonces la serie $\sum f(n)$ tiene la forma

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

la cual se llama **serie p**, o **serie hiperarmónica**. Esta serie es útil cuando se aplican los criterios de comparación más adelante. El siguiente teorema proporciona información sobre su convergencia o divergencia.

TEOREMA (11.23)

La serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

converge si $p > 1$ o bien diverge si $p \leq 1$.

Demostración Observamos primero que el caso $p = 1$ corresponde a la serie armónica divergente. Supongamos ahora que p es un número real positivo diferente de 1. Si se define $f(x) = 1/x^p = x^{-p}$, entonces f es continua y toma valores positivos para $x \geq 1$. Además, para estos valores de x se ve que $f'(x) = -px^{-p-1} < 0$, y por tanto, f es decreciente. Entonces, f satisface las condiciones del Criterio de la Integral (11.22). Consideremos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg]_1^t$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} [t^{1-p} - 1].$$

Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$ y la expresión anterior puede escribirse

$$\frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right] = \frac{1}{1-p}(0 - 1) = \frac{1}{p-1}.$$

Entonces, por (11.22) (i), la serie p converge para $p > 1$.

Si $0 < p < 1$, entonces $1 - p > 0$ y

$$\frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} [t^{1-p} - 1] = \infty.$$

Por lo tanto, de acuerdo con (11.22) (ii), la serie p es divergente.

Si $p \leq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$ y, por (11.17), la serie diverge. • •

EJEMPLO 3 Determinar si la serie converge o diverge.

(a) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$

(b) $5 + \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{5}{\sqrt{n}} + \cdots$

Solución

(a) La serie $\sum 1/n^2$ converge porque es la serie p con $p = 2 > 1$.

(b) La serie $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge porque es la serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$.

Por tanto, $\sum 5/\sqrt{n}$ diverge (véase el comentario a continuación del Teorema (11.19)).

El siguiente teorema indica cómo usar series convergentes (o divergentes) para demostrar que otras series también convergen (o divergen).

CRITERIO BÁSICO DE COMPARACIÓN (11.24)

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos.

(i) Si $\sum b_n$ converge y $a_n \leq b_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum a_n$ es convergente.

(ii) Si $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Demostración Sean S_n y T_n las n-ésimas sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum b_n$, respectivamente. Supongamos que $\sum b_n$ converge y que su suma es T. Si $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $S_n \leq T_n < T$ y, por el Teorema (11.21), $\sum a_n$ es convergente. Esto demuestra la parte (i).

Para demostrar (ii), supongamos que $\sum b_n$ diverge y que $a_n \geq b_n$ para todo n. Entonces $S_n \geq T_n$ y como T_n crece sin acotación alguna cuando n tiende a infinito, lo mismo sucede con S_n. Por lo tanto, $\sum a_n$ es divergente. • •

Como la convergencia o la divergencia de una serie no se altera al suprimir un número finito de términos, en (11.24) es suficiente que se cumplan las condiciones $a_n \geq b_n$ o bien $a_n \leq b_n$ a partir del k-ésimo término, para algún entero positivo k.

Se dice que una serie $\sum d_n$ **domina** a una serie $\sum c_n$ si $c_n \leq d_n$ para todo entero positivo n. Con esta terminología, (11.24) (i) expresa que una serie de términos positivos que está dominada por una serie convergente, también es convergente. La parte (ii) dice que si una serie domina a una serie divergente de términos positivos, entonces la primera diverge.

EJEMPLO 4 Determinar si la serie converge o diverge.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 5^n}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n} - 1}$

Solución

(a) Para todo $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2 + 5^n} < \frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Como $\sum (1/5)^n$ es una serie geométrica convergente, de acuerdo con (11.24) (i), la serie dada converge.

(b) La serie hiperarmónica $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge y por lo tanto, también la que se obtiene suprimiendo el primer término $1/\sqrt{1}$. Como

$$\frac{3}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{para } n \geq 2,$$

de (11.24) (ii) se deduce que la serie dada es divergente. •

A veces es más fácil aplicar el siguiente criterio de comparación que el básico (11.24).

CRITERIO DE COMPARACIÓN POR LÍMITE (11.25)

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series con términos positivos y si

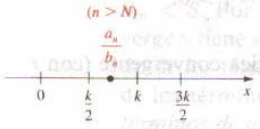
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$$

entonces las dos series convergen o las dos divergen.

Demostración Como $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = k > 0$, resulta que a_n/b_n está cerca de k, para n grande. Entonces, existe un número N tal que

$$\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2} \quad \text{siempre que } n > N$$

FIGURA 11.10



(véase la Figura 11.10). Esto equivale a

$$\frac{k}{2} b_n < a_n < \frac{3k}{2} b_n \quad \text{siempre que } n > N.$$

Si la serie $\sum a_n$ converge, entonces $\sum (k/2)b_n$ también lo hace, pues está dominada por $\sum a_n$. Aplicando (11.19) (ii),

$$\sum b_n = \sum \left(\frac{2}{k}\right)\left(\frac{k}{2}\right) b_n$$

es convergente.

Recíprocamente, si $\sum b_n$ converge, también $\sum a_n$ lo hace, pues está dominada por la serie convergente $\sum (3k/2)b_n$. Se demostró que $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum b_n$ converge también. Por consiguiente, $\sum a_n$ diverge si y sólo si $\sum b_n$ es divergente. • •

En los Ejercicios 51 y 52 se enuncian otros dos criterios de comparación.

EJEMPLO 5 Determinar si la serie converge o diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$

Solución

(a) La forma del n-ésimo término $a_n = 1/\sqrt[3]{n^2 + 1}$ sugiere que comparemos esta serie con aquélla cuyo n-ésimo término es $b_n = 1/\sqrt[3]{n^2}$. La serie $\sum b_n$ es la serie p divergente con $p = \frac{2}{3} < 1$. No se puede usar b_n en el Criterio de Comparación Básico (11.24) porque $a_n < b_n$ en vez de $a_n \geq b_n$. Sin embargo, aplicando el Criterio de Comparación por Límite (11.25),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2 + 1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2 + 1}} = 1 > 0,$$

y como $\sum b_n$ diverge, también $\sum a_n$ es divergente.

(b) Cuando se busca una serie $\sum b_n$ adecuada para compararla con $\sum a_n$, donde a_n es un cociente de dos expresiones, conviene despreciar todos los términos del numerador y del denominador excepto los que tienen mayor peso para n grande.

Consideremos

$$a_n = \frac{3n^2 + 5n}{2^n n^2 + 2^n}.$$

Como los términos de mayor peso son $3n^2$ en el numerador y $2^n n^2$ en el denominador, proponemos

$$b_n = \frac{3n^2}{2^n n^2} = \frac{3}{2^n}.$$

Aplicando el Criterio de Comparación por Límite (11.25),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n}{2^n(n^2 + 1)} \cdot \frac{2^n}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \frac{5}{3}n}{n^2 + 1} = 1 > 0.$$

Como, según el Teorema (11.15), $\sum b_n$ es una serie geométrica convergente (con $r = \frac{1}{2}$ y $a = 3$), la serie $\sum a_n$ también es convergente. •

EJEMPLO 6 Sea $a_n = \dfrac{8n + \sqrt{n}}{5 + n^2 + n^{7/2}}$. Determinar si $\sum a_n$ converge o diverge.

Solución Para encontrar una serie $\sum b_n$ adecuada para la comparación, despreciamos, tanto en el numerador como en el denominador, todas las potencias de n excepto las mayores y obtenemos así

$$b_n = \frac{8n}{n^{7/2}} = \frac{8}{n^{5/2}}.$$

Aplicando el Criterio de Comparación por Límite (11.25),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n + n^{1/2}}{5 + n^2 + n^{7/2}} \cdot \frac{n^{5/2}}{8}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^{7/2} + n^3}{40 + 8n^2 + 8n^{7/2}} = 1 > 0.$$

Como $\sum (1/n^{5/2})$ es una serie p convergente con $p = \frac{5}{2} > 1$, de (11.19) (ii) se deduce que $\sum b_n$ converge. Por lo tanto, por (11.25), $\sum a_n$ es también convergente. •

Concluimos esta sección con algunos comentarios generales sobre las series de términos positivos. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que los términos se agrupan de alguna manera. Por ejemplo, se podrían agrupar así:

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots$$

Si la serie que se obtiene se denota por $\sum b_n$, donde

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \ \ldots$$

entonces cualquier suma parcial de la serie $\sum b_n$ también es una suma parcial de $\sum a_n$. Por lo tanto, si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ converge también y tiene la misma suma. Se puede usar el mismo razonamiento para otras maneras de agrupar los términos de $\sum a_n$. Entonces, *si una serie de términos positivos converge, la serie que se obtiene agrupando los términos de cualquier manera es también convergente y tiene la misma suma*. No se puede decir lo mismo acerca de todas las series divergentes. Por ejemplo, los términos de la serie divergente $\sum (-1)^n$ pueden agruparse de manera que se obtiene una serie convergente (véase el Ejercicio 34 de la Sección 11.2).

Supongamos ahora que una serie convergente de términos positivos $\sum a_n$ tiene la suma S y que se forma una nueva serie $\sum b_n$ ordenando los términos de alguna manera. Por ejemplo, $\sum b_n$ podría ser la serie

$$a_2 + a_8 + a_1 + a_5 + a_7 + a_3 + \cdots$$

Si T_n es la n-ésima suma parcial de $\sum b_n$, entonces es una suma de términos de $\sum a_n$. Si m es el mayor subíndice de los términos a_k que aparecen en T_n, entonces $T_n \le S_m < S$. Por lo tanto, $T_n < S$ para todo n. Aplicando el Teorema (11.21), $\sum b_n$ converge y tiene suma $T \le S$. La demostración anterior es independiente del orden escogido de los términos. También puede considerarse la serie $\sum a_n$ como un ordenamiento de los términos de $\sum b_n$ y, con el mismo argumento, $S \le T$. Se demostró que *si los términos de una serie convergente de términos positivos $\sum a_n$ se reordenan de cualquier manera, entonces la serie resultante converge y tiene la misma suma.*

EJERCICIOS 11.3

Ejercicios 1-16: Use el Criterio de la Integral para determinar si la serie converge o diverge.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+n)^{3/2}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7}$
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+16n^2}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$
11. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(2n-5)}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n^2}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+9}$
15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$
16. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

Ejercicios 17-38: Use criterios de comparación para determinar si la serie converge o diverge.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n^3+1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+\sqrt{n}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+4n^3+1}{2n^8+n^4+2}$

25. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-5n}}$

26. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3n}{2n^2-7}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$ (*Indicación:* $\ln n < n$)

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3}{(n^3+1)^2}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{5n^2+1}}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n\cdot 2^n}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Ejercicios 39-45: Determine si la serie converge o diverge.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3+n+1}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^2+1}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{n+3^n}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n+2^n}{n+5^n}$

Ejercicios 47-48: Encuentre todos los números reales k para los que la serie converge.

47. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k \ln n}$

48. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$

49. (a) Aplique la demostración del Criterio de la Integral (11.22) para demostrar que para todo entero positivo n,

$$\ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\ln n$$

(b) Estime el número de términos de la serie armónica que se deben sumar para que $S_n > 100$.

50. Considere el problema que se ilustra en la figura, en el que se comienza con una bola de radio igual a 1 m y se van apilando sobre ella verticalmente otras bolas de manera que si el radio de la k-ésima se denota por r_k, entonces $r_{n+1} = r_n\sqrt{n/(n+1)}$ para todo entero positivo n.

(a) Demuestre que la altura de la pila se puede hacer tan grande como se quiera.

(b) Demuestre que si las bolas están construidas del mismo material homogéneo de densidad 1 kg/m^3, el peso total de la pila es siempre menor que 4π kilogramos.

EJERCICIO 50



51. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ es convergente. (Esto no es cierto para series con términos positivos y negativos.)

52. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \infty$ y $\sum b_n$ divergen, entonces $\sum a_n$ es divergente.

53. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos. Sea $f(n) = a_n$, donde f es continua y decreciente para $x \geq N$, donde N es un entero. Demuestre que el error al estimar la suma de la serie dada por $\sum_{n=1}^{N} a_n$ es menor que $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$

Ejercicios 54-56: Use el Ejercicio 53 para determinar el menor número de términos que deben sumarse para aproximar la suma de la serie con un error menor que E.

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $E = 0.001$

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $E = 0.0$

56. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^2}$, $E = 0.05$

57. Demuestre que si una serie de términos positivos $\sum a_n$ converge, entonces $\sum (1/a_n)$ diverge.

58. Demuestre que si una serie de términos positivos $\sum a_n$ es convergente, entonces $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. (*Sugerencia:* Demuestre primero que $\sqrt{a_n a_{n+1}} \le (a_n + a_{n+1})/2$.)

11.4 CRITERIOS DE LA RAZÓN Y DE LA RAÍZ

Para aplicar el Criterio de la Integral a una serie de términos positivos $\sum a_n$, donde $a_n = f(n)$, los términos deben decrecer y se debe poder integrar $f(x)$. Esto casi siempre excluye a las series con factoriales u otras expresiones complicadas. En esta sección se presentan dos criterios que se pueden emplear para determinar convergencia o divergencia cuando no es posible aplicar otros criterios. Desafortunadamente, como se indica en las partes (iii), los criterios no son concluyentes para algunas series.

CRITERIO DE LA RAZÓN (11.26)

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

(i) Si $L < 1$, la serie es convergente.

(ii) Si $L > 1$ o bien $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, la serie es divergente.

(iii) Si $L = 1$, hay que aplicar otro criterio; la serie puede ser convergente o divergente.

Demostración

(i) Supongamos que $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = L < 1$. Sea r un número cualquiera tal que $0 \le L < r < 1$. Como a_{n+1}/a_n se acerca a L para n grande, existe un entero N tal que siempre que $n \ge N$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \quad \text{o bien} \quad a_{n+1} < a_n r.$$

Sustituyendo n por N, $N + 1$, $N + 2$, ..., se obtiene

$$a_{N+1} < a_N r$$
$$a_{N+2} < a_{N+1} r < a_N r^2$$
$$a_{N+3} < a_{N+2} r < a_N r^3$$

y, en general,

$$a_{N+m} < a_N r^m \quad \text{siempre que } m > 0.$$

Del Criterio de Comparación Básico (11.24), se deduce que la serie

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_{N+m} + \cdots$$

converge porque sus términos son menores que los términos correspondientes de la serie geométrica convergente

$$a_N r + a_N r^2 + \cdots + a_N r^n + \cdots$$

Como la convergencia o divergencia no se altera si se suprime un número finito de términos, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

(ii) Supongamos que $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = L > 1$. Si r es un número real tal que $L > r > 1$, entonces existe un entero N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r > 1 \quad \text{siempre que } n \geq N.$$

Por lo tanto, $a_{n+1} > a_n$ si $n \geq N$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ y por el Criterio del n-ésimo Término para la Divergencia (11.17), la serie $\sum a_n$ diverge.

La demostración para el caso $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = \infty$ es parecida y se deja como ejercicio.

(iii) El criterio no es concluyente si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

porque es fácil verificar que el límite es 1 tanto para la serie convergente $\sum (1/n^2)$ como para la divergente $\sum (1/n)$. Por lo tanto, *si el límite es* 1, *hay que usar otro criterio*.

EJEMPLO 1 Determinar si la serie es convergente o divergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

Solución

(a) Aplicando el Criterio de la Razón,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

Como $0 < 1$, la serie es convergente.

(b) Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2 + 2n + 1} = 3 > 1$$

la serie diverge.

EJEMPLO 2 Determinar la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Solución Aplicando el Criterio de la Razón,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

La última igualdad es consecuencia del Teorema (7.25). En vista de que $e > 1$, la serie diverge. •

El siguiente criterio es útil cuando a_n tiene sólo potencias de n.

CRITERIO DE LA RAÍZ (11.27)

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

(i) Si $L < 1$, la serie es convergente.

(ii) Si $L > 1$ o bien $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$, la serie es divergente.

(iii) Si $L = 1$, hay que aplicar otro criterio; la serie puede ser convergente o divergente.

Demostración La demostración es parecida a la del Criterio de la Razón. Si $L < 1$, entonces como en (i), consideramos un número arbitrario r tal que $L < r < 1$. Por la definición de límite, existe un entero positivo N tal que si $n \geq N$, entonces

$$\sqrt[n]{a_n} < r \quad \text{o bien} \quad a_n < r^n.$$

Como $0 < r < 1$, entonces $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ es una serie geométrica convergente y así, por el Criterio de Comparación Básico (11.24), $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Esto demuestra (i). El resto de la demostración se deja como ejercicio. • •

EJEMPLO 3 Determinar la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$.

Solución Aplicando el Criterio de la Raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{3n+1}}{n^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3+(1/n)}}{n} = 0.$$

Como $0 < 1$, la serie converge. Se podría aplicar el Criterio de la Razón pero la evaluación del límite sería más complicada. •

EJERCICIOS 11.4

Ejercicios 1-26: Determine si la serie es convergente o divergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+4}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(3^{n+1})}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}+10}{n!}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n+4}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}$
11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^5}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+e^n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{5^{n-1}}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+2^n}{n!}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(5n+3n^{-1})^n}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(1.01)^n}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1/n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$
24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
25. $1 + \frac{1\cdot 3}{2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} + \cdots$
26. $\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 4}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} + \cdots$
27. Complete la demostración del Criterio de la Razón (11.26) comprobando que si
$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = \infty,$$
entonces $\sum a_n$ es divergente.
28. Complete la demostración del Criterio de la Raíz (11.27).

11.5 SERIES ALTERNANTES Y CONVERGENCIA ABSOLUTA

Los criterios de convergencia discutidos hasta ahora solamente se pueden aplicar a series de términos positivos. A continuación se consideran series infinitas que contienen términos positivos y negativos. Las **series alternantes** son unas de las más sencillas y útiles de este tipo. En ellas el signo de sus términos va alternándose entre positivo y negativo. Es costumbre expresar una serie alternante en una de las formas

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

o bien

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

donde $a_k > 0$ para todo k. El siguiente teorema proporciona el criterio de convergencia más importante para estas series. Se considerará el caso $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. Puede darse una demostración análoga para $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

CRITERIO PARA LAS SERIES ALTERNANTES (11.28)

Si $a_k \geq a_{k+1} > 0$ para todo k y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es convergente.

Demostración Consideremos primero las sumas parciales

$$S_2, S_4, S_6, \ldots, S_{2n}, \ldots$$
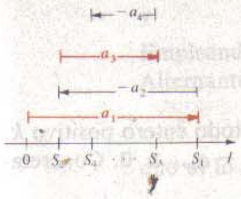
que contienen un número par de términos de la serie. Como

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

y $a_k - a_{k+1} \geq 0$ para todo k, se ve que

$$0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots,$$

FIGURA 11.11



es decir, $\{S_{2n}\}$ es una sucesión monótona. Este hecho resulta evidente de la Figura 11.11 en la que se han representado sobre una recta coordenada l las siguientes cuatro sumas parciales de la serie:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 - a_2, \quad S_3 = a_1 - a_2 + a_3,$$
$$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4.$$

Se sugiere al lector localizar los puntos de l correspondientes a S_5 y S_6. Hacerlo puede ser instructivo.

Se ve de la Figura 11.11 que $S_{2n} \leq a_1$ para todo entero positivo n. Esto también se puede demostrar algebraicamente observando que

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Por lo tanto, $\{S_{2n}\}$ es una sucesión monótona *acotada*. De acuerdo con el Teorema (11.9),

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq a_1$$

para algún número S. Considerando las sumas parciales S_{2n+1} que tienen un número *impar* de términos de la serie se ve que $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ y, como $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leq a_1,$$

es decir, la serie es convergente. • •

EJEMPLO 1 Determinar si la serie alternante converge o diverge.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n^2 - 3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n - 3}$

Solución

(a) Sea $a_n = f(n) = \frac{2n}{4n^2 - 3}$.

Para aplicar el Criterio para las Series Alternantes se debe cumplir que:

(i) $a_k \geq a_{k+1}$ para todo entero positivo k y

(ii) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Una manera de llegar a (i) es demostrar que $f(x) = 2x/(4x^2 - 3)$ es decreciente para $x \geq 1$. Por la Regla del Cociente,

$$f'(x) = \frac{(4x^2 - 3)(2) - (2x)(8x)}{(4x^2 - 3)^2}$$

$$= \frac{-8x^2 - 6}{(4x^2 - 3)^2} < 0.$$

Se deduce que f es decreciente y por lo tanto, $a_k \geq a_{k+1}$ para todo entero positivo k.

Podemos obtener el mismo resultado demostrando que $a_k - a_{k+1} \geq 0$. Concretamente, si $a_n = 2n/(4n^2 - 3)$, entonces

$$a_k - a_{k+1} = \frac{2k}{4k^2 - 3} - \frac{2(k+1)}{4(k+1)^2 - 3}$$

$$= \frac{8k^2 + 8k + 6}{(4k^2 - 3)(4k^2 + 8k + 1)} \geq 0$$

para todo entero positivo k. Otro método para demostrar $a_k \geq a_{k+1}$ es verificar que $a_{k+1}/a_k \leq 1$.

Para probar (ii) vemos que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{4n^2 - 3} = 0.$$

Por lo tanto, la serie alternante converge.

(b) Puede demostrarse que $a_k \geq a_{k+1}$ para todo k; sin embargo,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{4n - 3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

y por tanto, de acuerdo con el Criterio del n-ésimo Término para la Divergencia (11.17), la serie diverge. •

Si una serie infinita converge, la n-ésima suma parcial S_n se aproxima a la suma S de la serie. En la mayoría de los casos es difícil determinar la precisión de la aproximación. Sin embargo, el siguiente teorema proporciona una manera sencilla para estimar el error en el caso de una serie *alternante*.

TEOREMA (11.29)

Si $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ es una serie alternante tal que $a_k > a_{k+1} > 0$ para todo entero positivo k y si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces el error E que se comete al estimar la suma S mediante la n-ésima suma parcial S_n es menor que a_{n+1}.

Demostración Nótese que la serie alternante $\sum(-1)^{n-1}a_n$ satisface las condiciones del Criterio para las Series Alternantes (11.28) y por lo tanto, tiene una suma S. La serie que se obtiene suprimiendo los primeros n términos, es decir,

$$(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1}a_{n+2} + (-1)^{n+2}a_{n+3} + \cdots$$

también satisface las condiciones de (11.28) y por consiguiente tiene una suma R_n. Entonces

$$S - S_n = R_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots)$$

y

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots$$

Empleando el mismo razonamiento que en la demostración del Criterio para las Series Alternantes (pero cambiando $\leq$ por $<$), se ve que $|R_n| < a_{n+1}$. Por lo tanto,

$$E = |S - S_n| = |R_n| < a_{n+1}$$

que es lo que se quería demostrar. • •

EJEMPLO 2 Demostrar que la serie

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} + \cdots$$

es convergente y aproximar su suma con una precisión de cinco decimales.

Solución Obviamente, $a_n = 1/(2n-1)!$ tiene límite 0 cuando $n \to \infty$, y $a_k > a_{k+1}$ para todo entero positivo k. Entonces, según el Criterio para las Series Alternantes, la serie es convergente. Si usamos S_4 para estimar la suma S de la serie,

$$S \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}$$

$$= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} \approx 0.841468.$$

Por el Teorema (11.29), el error cometido en la aproximación es menor que

$$a_5 = \frac{1}{9!} < 0.000005.$$

Entonces, la aproximación 0.84147 tiene una precisión de cinco decimales. En (11.43) se verá que la suma de la serie es sen 1, y por lo tanto, sen $1 \approx 0.84147$. •

El siguiente concepto es útil para estudiar las series que tienen términos positivos y negativos, pero que no son alternantes. Este concepto permite usar los criterios para

series de términos positivos a fin de probar la convergencia de otros tipos de series (véase el Teorema (11.31)).

DEFINICIÓN (11.30) Una serie infinita $\sum a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

es convergente también.

Obsérvese que si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos, entonces $|a_n| = a_n$ y, por lo tanto, la convergencia absoluta es lo mismo que la convergencia.

EJEMPLO 3 Demostrar que la siguiente serie alternante es absolutamente convergente:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Solución Tomando el valor absoluto de cada término obtenemos

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

que es una serie p convergente. Entonces, de acuerdo con la Definición (11.30), la serie es absolutamente convergente. •

El siguiente teorema dice que la convergencia absoluta implica convergencia.

TEOREMA (11.31) Si una serie infinita $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

Demostración Si se toma $b_n = a_n + |a_n|$ y se usa la propiedad $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, se tiene que

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \quad \text{o bien} \quad 0 \leq b_n \leq 2|a_n|.$$

Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum |a_n|$ es convergente y, por el Teorema (11.19) (ii), $\sum 2|a_n|$ es convergente. Aplicando el Criterio de Comparación Básico (11.24), se deduce que $\sum b_n$ converge. Según (11.19)(iii), $\sum (b_n - |a_n|)$ es convergente. Como $b_n - |a_n| = a_n$, esto completa la demostración. • •

EJEMPLO 4 Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\operatorname{sen} 1 + \frac{\operatorname{sen} 2}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3}{3^2} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} + \cdots$$

Solución La serie contiene términos positivos y negativos pero no es una serie alternante porque, por ejemplo, los primeros tres términos son positivos y los tres siguientes son negativos. La serie de los valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}.$$

Como

$$\frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

la serie de los valores absolutos $\sum |(\operatorname{sen} n)/n^2|$ está dominada por la serie p convergente $\sum (1/n^2)$ y es por tanto convergente también. Entonces, la serie dada es absolutamente convergente y por lo tanto, de acuerdo con el Teorema (11.31), es convergente. •

A las series que son convergentes pero no absolutamente convergentes se les da un nombre especial, como se indica en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (11.32)

Una serie infinita $\sum a_n$ es **condicionalmente convergente** si $\sum a_n$ es convergente y $\sum |a_n|$ es divergente.

EJEMPLO 5 Demostrar que la siguiente serie es condicionalmente convergente:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

Solución La serie es convergente de acuerdo con el Criterio para las Series Alternantes. Tomando valores absolutos de las términos, obtenemos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

que es la serie armónica divergente. Entonces, de acuerdo con la Definición (11.32), la serie alternante dada es condicionalmente convergente. •

De la discusión anterior se ve que todas las series infinitas se pueden clasificar en *uno* de los siguientes tipos: (i) absolutamente convergente, (ii) condicionalmente convergente, (iii) divergente. Por supuesto, las series de términos positivos sólo pueden ser convergentes o divergentes.

La siguiente forma del Criterio de la Razón puede servir para investigar la convergencia absoluta de las series.

CRITERIO DE LA RAZÓN PARA LA CONVERGENCIA ABSOLUTA (11.33)

Sea $\sum a_n$ una serie de términos diferentes de cero tal que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

(i) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.

(ii) Si $L > 1$ o bien $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, la serie es divergente.

(iii) Si $L = 1$, hay que aplicar otro criterio; la serie puede ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

La demostración es parecida a la de (11.26). Obsérvese que los dos criterios de la razón coinciden para series de términos positivos.

También puede enunciarse un Criterio de la Raíz para la convergencia absoluta. El enunciado es el mismo que el de (11.27) pero sustituyendo $\sqrt{a_n}$ por $\sqrt{|a_n|}$.

EJEMPLO 6 Determinar si la siguiente serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+4}{2^n}.$$

Solución Usando el Criterio de la Razón (11.33),

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2+4}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2+4}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n^2+2n+5}{n^2+4}\right) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} < 1.$$

Entonces, de acuerdo con (11.33) (i), la serie es absolutamente convergente. •

Se puede demostrar que si una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente y si los términos se ordenan de cualquier manera, entonces la serie resultante es convergente y tiene la misma suma que la serie dada. Esto no es cierto para las series condicionalmente convergentes. Si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, entonces pueden ordenarse los términos de modo que se obtenga una serie divergente o una serie que converja a cualquier suma S.*

Se han presentado varios criterios que pueden utilizarse para investigar la convergencia o divergencia de series infinitas. Se necesita bastante habilidad para determinar qué criterio hay que aplicar a cada serie particular. Esta aptitud se obtiene resolviendo muchos ejercicios con series de diversos tipos. El siguiente resumen puede ayudar a decidir qué criterio aplicar. La convergencia o divergencia de algunas series infinitas no puede determinarse con ninguno de estos criterios. En tales casos es posible que se requieran resultados de cursos más avanzados de matemáticas.

* Véase por ejemplo, R. C. Buck. *Advanced Calculus*, 3a. ed., (Nueva York: McGraw-Hill, 1978), pp. 238-239.

RESUMEN DE CRITERIOS DE CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA PARA LAS SERIES

Criterio	Serie	Convergencia o divergencia	Comentarios
Término n-ésimo	$\sum a_n$	Diverge si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.	No es concluyente si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Serie Geométrica	$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$	(i) Converge a $a/(1-r)$ si $\lvert r\rvert < 1$. (ii) Diverge si $\lvert r\rvert \geq 1$.	Útil para pruebas de comparación.
Serie p (o Hiper-armónica)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	(i) Converge si $p > 1$. (ii) Diverge si $p \leq 1$.	Útil para pruebas de comparación.
Integral	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $a_n = f(n)$	(i) Converge si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge. (ii) Diverge si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.	La función f debe ser continua, positiva, decreciente y fácil de integrar.
Comparación	$\sum a_n$, $\sum b_n$ $a_n > 0$, $b_n > 0$	(i) $\sum a_n$ converge si $\sum b_n$ converge y $a_n \leq b_n$ para todo n. (ii) $\sum a_n$ diverge si $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$ para todo n. (iii) Si $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = k > 0$, entonces ambas series convergen o ambas divergen.	La serie $\sum b_n$ para comparar suele ser geométrica o una serie p.
Razón	$\sum a_n$	Si $\lim_{n\to\infty} \lvert a_{n+1}/a_n\rvert = L$ (o bien ∞), entonces la serie (i) converge (absolutamente) cuando $L < 1$. (ii) diverge cuando $L > 1$ (o bien ∞).	No es concluyente si $L = 1$. Útil cuando a_n tiene factoriales o potencias n-ésimas. Si $a_n > 0$ para todo n, el valor absoluto puede omitirse.
Raíz	$\sum a_n$	Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = L$ (o bien ∞), entonces la serie	No es concluyente si $L = 1$.

		(i) converge (absolutamente) si $L < 1$. (ii) diverge si $L > 1$ (o bien ∞).	Útil si a_n tiene potencias n-ésimas. Si $a_n > 0$ para todo n, el valor absoluto se puede omitir.
Serie Alternante	$\sum (-1)^n a_n$ $a_n > 0$	Converge si $a_k \geq a_{k+1}$ para todo k y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.	Sólo se aplica a series alternantes.
$\sum \lvert a_n \rvert$	$\sum a_n$	Si $\sum \lvert a_n \rvert$ es convergente, entonces $\sum a_n$ también es convergente.	Útil para series que tienen términos positivos y negativos.

EJERCICIOS 11.5

Ejercicios 1-24: Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2/3}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{n^3+1}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-5)^n}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{(2n-5)^2}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+4}}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^2}{n^5+1}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{6}n\pi}{n^2}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{(1.5)^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^2}$
19. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{1/n}}{n!}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(-5)^n}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^n}{(-n)^n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+4^n}{1+3^n}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{e^n}$

Ejercicios 25-30: Calcule aproximadamente la suma de la serie con tres decimales de precisión.

25. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$
26. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^5}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{5^n}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Ejercicios 31-34: Use el Teorema (11.29) para encontrar un entero positivo n tal que S_n se aproxima a la suma de la serie con una precisión de cuatro decimales.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$
32. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^n}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+1}$

Ejercicios 35-36: Demuestre que para todo entero positivo k la serie alternante converge.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^k}{n}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[k]{n}}$

37. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series convergentes, ¿también $\sum a_n b_n$ es convergente? Explique su respuesta.

38. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series divergentes, ¿también $\sum a_n b_n$ es divergente? Explique su respuesta.

11.6 SERIES DE POTENCIAS

En la Sección 11.1 se dijo que algunas expresiones como e^x, sen x y $\tan^{-1} x$ se pueden representar con series infinitas. Los términos de tales series contienen a la variable x. (En las secciones anteriores los términos de una serie eran constantes.) Como un primer ejemplo, si x es una variable, entonces de lo que se vio sobre las series geométricas (véase el Teorema (11.15)),

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x} \quad \text{si } |x| < 1.$$

Si se define $f(x) = 1/(1 - x)$ con $|x| < 1$, entonces

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Se dice que $f(x)$ está *representada* por esta serie de potencias infinita. Pueden encontrarse los valores de esta función calculando la suma de la serie. Por ejemplo,

$$f(\tfrac{1}{2}) = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^n + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Este nuevo método de representar una función permitirá investigar las propiedades de una función mediante series infinitas. En este capítulo se explorará más a fondo esta noción. En la presente sección se introducen algunos conceptos básicos acerca de series con términos variables. La siguiente definición puede considerarse como una generalización del concepto de polinomio en x a una serie de potencias infinita.

DEFINICIÓN (11.34)

Sea x una variable. Una **serie de potencias en x** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

donde cada a_k es un número real.

Si se sustituye x por un número en la Definición (11.34), se obtiene una serie de términos constantes cuya convergencia o divergencia puede estudiarse. Para simplificar la escritura del n-ésimo término de una serie de potencias, se supone que $x^0 = 1$ aún si $x = 0$. El principal objetivo de esta sección es determinar todos los valores de x para los que converge una serie de potencias. Evidentemente, todas las series de potencias en x convergen cuando $x = 0$. Para encontrar otros valores de x en los que una serie es convergente, a menudo se usa el Criterio de la Razón para la Convergencia Absoluta (11.33), como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Encontrar todos los valores de x para los que la serie de potencias es absolutamente convergente:

$$1 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5^2}x^2 + \cdots + \frac{n}{5^n}x^n + \cdots$$

Solución Si tomamos

$$u_n = \frac{n}{5^n}x^n = \frac{nx^n}{5^n},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{nx^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x}{5n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5n}\right)|x| = \tfrac{1}{5}|x|.$$

Por el Criterio de la Razón (11.33) con $L = \frac{1}{5}|x|$, la serie es absolutamente convergente si se satisfacen las siguientes desigualdades equivalentes:

$$\tfrac{1}{5}|x| < 1, \quad |x| < 5, \quad -5 < x < 5.$$

La serie diverge si $\frac{1}{5}|x| > 1$; es decir, si $x > 5$ o bien $x < -5$.

Si $\frac{1}{5}|x| = 1$, el Criterio de la Razón no es concluyente por lo que los números 5 y -5 requieren considerarse por separado. Sustituyendo x por 5 en la serie de potencias resulta

$$1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$$

que es divergente. Tomando $x = -5$, obtenemos

$$1 - 1 + 2 - 3 + \cdots + n(-1)^n + \cdots$$

que también es divergente. Por lo tanto, la serie de potencias es absolutamente convergente para todo x en el intervalo abierto $(-5, 5)$ y diverge para cualquier otro número x. •

EJEMPLO 2 Encontrar todos los valores de x para los que la siguiente serie de potencias es absolutamente convergente:

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

Solución Usaremos el mismo método que en el Ejemplo 1. Si definimos

$$u_n = \frac{1}{n!}x^n = \frac{x^n}{n!}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x| = 0.$$

Como el límite 0 es menor que 1 para todo valor de x, del Criterio de la Razón (11.33), se deduce que esta serie de potencias es absolutamente convergente para todo número real x. •

EJEMPLO 3 Encontrar todos los valores de x para los que $\sum n!x^n$ es convergente.

Solución Sea $u_n = n!x^n$. Si $x \neq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}|(n+1)x| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty$$

y, por el Criterio de la Razón (11.33), la serie diverge. Por lo tanto, la serie de potencias converge sólo para $x = 0$. •

El Teorema (11.36) muestra que las soluciones de los ejemplos anteriores son típicas en el sentido de que si una serie de potencias converge para valores de x diferentes de cero, entonces la serie es absolutamente convergente para todo número real o es convergente dentro de algún intervalo abierto $(-r, r)$ y diverge fuera del intervalo cerrado $[-r, r]$. La demostración de este hecho depende del siguiente teorema.

TEOREMA (11.35)

(i) Si una serie de potencias $\sum a_n x^n$ converge para un número c diferente de cero, entonces es absolutamente convergente siempre que $|x| < |c|$.

(ii) Si una serie de potencias $\sum a_n x^n$ diverge para algún d diferente de cero, entonces diverge siempre que $|x| > |d|$.

Demostración Si $\sum a_n c^n$ converge y $c \neq 0$, entonces, por el Teorema (11.16), $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$. Usando la Definición (11.3) con $\varepsilon = 1$, se tiene que existe un entero positivo N tal que

$$|a_n c^n| < 1 \quad \text{siempre que} \quad n \geq N.$$

Por lo tanto,

$$|a_n x^n| = \left|\frac{a_n c^n x^n}{c^n}\right| = |a_n c^n|\left|\frac{x}{c}\right|^n < \left|\frac{x}{c}\right|^n$$

siempre que $n \geq N$. Si $|x| < |c|$, entonces $|x/c| < 1$ y $\sum |x/c|^n$ es una serie geométrica convergente. Entonces, por el Criterio de Comparación Básico (11.24), la serie que se obtiene suprimiendo los primeros N términos de $\sum |a_n x^n|$ es convergente. De modo que, la serie $\sum |a_n x^n|$ también converge lo cual demuestra (i).

Para probar (ii), supongamos que la serie diverge para $x = d \neq 0$. Si la serie converge para algún número c_1 con $|c_1| > |d|$, entonces por (i), converge siempre que $|x| < |c_1|$. En particular, la serie es convergente para $x = d$, lo cual contradice la suposición. De manera que, la serie diverge siempre que $|x| > |d|$. • •

Con esto se demostrará el siguiente teorema.

TEOREMA (11.36)

Si $\sum a_n x^n$ es una serie de potencias, entonces se cumple una y sólo una de las tres afirmaciones siguientes:

(i) La serie converge sólo para $x = 0$.

(ii) La serie es absolutamente convergente para todo x.

(iii) Existe un número positivo r tal que la serie es absolutamente convergente para $|x| < r$ y divergente para $|x| > r$.

Demostración Si no se satisfacen (i) ni (ii), entonces existen números c y d diferentes de cero tales que la serie converge para $x = c$ y diverge para $x = d$. Sea S el conjunto de todos los números reales para los que la serie es absolutamente convergente. Por el Teorema (11.35), la serie diverge si $|x| > |d|$ y por lo tanto, todo número de S es menor o igual que $|d|$. Por la Propiedad de Completitud (11.10), S tiene una cota superior mínima r. Resulta que la serie es absolutamente convergente si $|x| < r$ y divergente si $|x| > r$. • •

FIGURA 11.12



Cuando la parte (iii) del Teorema (11.36) se cumple, entonces la serie de potencias $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente en todo el intervalo abierto $(-r, r)$, y divergente fuera del intervalo cerrado $[-r, r]$, como se ilustra en la Figura 11.12. El número r se llama **radio de convergencia** de la serie. En $-r$ o bien r, la serie puede converger o diverger, de acuerdo con su naturaleza.

El conjunto de todos los números para los que converge una serie de potencias, se llama **intervalo de convergencia**. Si el radio de convergencia r es positivo, entonces el intervalo de convergencia es uno de los siguientes:

$$(-r, r), \quad (-r, r], \quad [-r, r), \quad \text{o bien} \quad [-r, r].$$

Si (i) o (ii) del Teorema (11.36) se satisface, entonces el radio de convergencia se denota por 0 o ∞, respectivamente. En el Ejemplo 1 de esta sección, el intervalo de convergencia es $(-5, 5)$ y el radio de convergencia es 5. En el Ejemplo 2, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y se escribe $r = \infty$. En el Ejemplo 3, $r = 0$. El siguiente ejemplo ilustra el caso de un intervalo de convergencia semiabierto.

EJEMPLO 4 Halle el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$.

Solución Observamos que en este ejemplo, el coeficiente de x^0 es 0 y la suma comienza con $n = 1$. Definimos $u_n = x^n/\sqrt{n}$ y consideramos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} x\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,|x| = (1)|x| = |x|.$$

Del Criterio de la Razón (11.33), se deduce que la serie de potencias es absolutamente convergente para $|x| < 1$; es decir, si $-1 < x < 1$. La serie diverge si $|x| > 1$, es decir, si $x > 1$ o bien $x < -1$. La convergencia en los números 1 y -1 debe analizarse *sustituyéndolos directamente en la serie de potencias. Si tomamos $x = 1$, obtenemos*

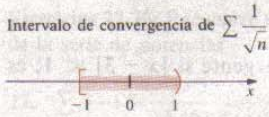
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(1)^n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

que es una serie p divergente. Si sustituimos $x = -1$, el resultado es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \cdots$$

que es convergente, de acuerdo con el Criterio para las Series Alternantes. Por lo tanto, la serie de potencias converge si $-1 \leq x < 1$. El intervalo de convergencia $[-1, 1)$ aparece representado en la Figura 11.13. •

FIGURA 11.13



DEFINICIÓN (11.37)

Sea c un número real y x una variable. Una **serie de potencias en $x - c$** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

donde cada a_k es un número real.

Para simplificar la escritura del n-ésimo término en (11.37), se debe suponer que $(x - c)^0 = 1$ aun cuando $x = c$. Como en la demostración del Teorema (11.36), pero sustituyendo x por $x - c$, puede demostrarse que se satisface una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(i) La serie converge sólo si $x - c = 0$; es decir, si $x = c$.

(ii) La serie es absolutamente convergente para todo x.

(iii) Existe un número positivo r tal que la serie es absolutamente convergente cuando $|x - c| < r$ y divergente cuando $|x - c| > r$.

Si (iii) se cumple, entonces la serie $\sum a_n(x - c)^n$ es absolutamente convergente si

$$-r < x - c < r \quad \text{o bien} \quad c - r < x < c + r,$$

es decir, si x está en el intervalo $(c - r, c + r)$, como se ilustra en la Figura 11.14. La convergencia en los extremos del intervalo debe analizarse por separado. Como antes, el conjunto de todos los números para los que la serie converge se llama **intervalo de convergencia** y r es el **radio de convergencia**.

FIGURA 11.14



EJEMPLO 5 Encontrar el intervalo de convergencia de la serie

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{3}(x-3)^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1}(x-3)^n + \cdots$$

Solución Si definimos

$$u_n = (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n+1}$$

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{(x-3)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}(x-3)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)|x-3| \\ &= (1)|x-3| = |x-3|.\end{aligned}$$

Por el Criterio de la Razón, la serie es absolutamente convergente si $|x-3| < 1$; es decir, si

$$-1 < x-3 < 1 \quad \text{o bien} \quad 2 < x < 4.$$

La serie diverge si $x < 2$ o bien $x > 4$. La convergencia en los números 2 y 4 debe analizarse por separado. Si $x = 4$, se obtiene la serie

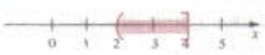
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \cdots$$

que es convergente, de acuerdo con el Criterio para las Series Alternantes. Para $x = 2$, se obtiene la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

que es una serie armónica divergente. Entonces, el intervalo de convergencia es $(2, 4]$ y se ilustra en la Figura 11.15. •

FIGURA 11.15
Intervalo de convergencia de $\sum (-1)^n \frac{1}{n+1}(x-3)^n$



EJERCICIOS 11.6

Ejercicios 1-26: Encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+4} x^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^{n+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} x^n$
7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n\sqrt{n}} x^n$
9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} x^n$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{n+1}}{3^{2n}} x^n$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n} (x-4)^n$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} (x-2)^n$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-4)^n} x^{2n+1}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n3^n}} x^n$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^{2n}$
18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} x^n$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n+1}(x-2)^n$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}(x-5)^n$

21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^{3n}}(x+4)^n$ **22.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}(x+3)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$ **24.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{2n-1}}(x-1)^{2n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n6^n}(2x-1)^n$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+4}}(3x+4)^n$

Ejercicios 27-30: Encuentre el radio de convergencia de la serie de potencias.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (3n)} x^n$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot (3n+1)} x^n$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ **30.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n}(x-5)^n$

Ejercicios 31-32: Encuentre el radio de convergencia de la serie de potencias dada, en la que c y d son enteros positivos.

31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+c)!}{n!(n+d)!} x^n$ **32.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cn)!}{(n!)^c} x^n$

33. Las *funciones de Bessel* son útiles en el análisis de problemas donde hay oscilaciones. Para cada entero positivo α, la función de Bessel $J_\alpha(x)$ *de primera clase y de orden* α se define con la serie de potencias

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\alpha)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

Demuestre que esta serie de potencias es convergente para todo número real.

34. Consulte el Ejercicio 33. Algunas veces, para aproximar la función de Bessel $1 - [x^2/2^2] + [x^4/(2^2 4^2)] - [x^6/(2^2 4^2 6^2)]$ de primera clase y de orden cero en $0 \le x \le 1$, se usa el polinomio de sexto grado $J_0(x)$. Demuestre que el error E en la aproximación es menor que 0.00001.

35. Compruebe que si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = k$ y $k \neq 0$, el radio de convergencia de $\sum a_n x^n$ es $1/k$.

36. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k$ y $k \neq 0$, el radio de convergencia de $\sum a_n x^n$ es $1/k$.

37. Demuestre que si $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia r, entonces el radio de convergencia de $\sum a_n x^{2n}$ es $\sqrt{r}$.

38. Demuestre que si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente para todo x en el intervalo $[-1, 1]$.

39. Demuestre que si el intervalo de convergencia de $\sum a_n x^n$ es $(-r, r]$, entonces la serie es condicionalmente convergente en r.

40. Demuestre que si $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente en uno de los extremos de su intervalo de convergencia, entonces también es absolutamente convergente en el otro.

11.7 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POR SERIES DE POTENCIAS

Se puede usar una serie de potencias $\sum a_n x^n$ para definir la función f cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Concretamente, para cada x en este intervalo, se define $f(x)$ como la suma de la serie; es decir,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Si una función f está definida de esta manera, se dice que $\sum a_n x^n$ es una **representación en serie de potencias de** $f(x)$ (o *para* $f(x)$). También se usa la expresión "**f está representada por la serie de potencias**".

Una representación en serie de potencias $f(x) = \sum a_n x^n$ permite encontrar los valores de la función de una manera nueva. Así, si c está en el intervalo de convergencia, entonces $f(c)$ puede calcularse (o estimarse) calculando (o estimando) la suma de la serie

$$a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n + \cdots$$

EJEMPLO 1 Encontrar una función f que esté representada por la serie de potencias

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

Solución Si $|x| < 1$, entonces, por el Teorema (11.15), la serie geométrica dada tiene suma $1/[1 - (-x)] = 1/(1 + x)$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

Ésta es una representación en serie de potencias para $f(x) = 1/(1 + x)$ en el intervalo $(-1, 1)$. •

Una función f definida por una serie de potencias tiene propiedades semejantes a las de un polinomio. En particular, f tiene una derivada cuya representación en serie de potencias puede encontrarse derivando cada término de la serie dada. Análogamente, las integrales definidas de f se pueden obtener integrando cada término de la serie. Estos hechos son consecuencia del siguiente teorema que se enuncia sin demostración.

TEOREMA (11.38)

Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias que tiene un radio de convergencia r diferente de cero y sea f la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

para todo x en el intervalo de convergencia. Si $-r < x < r$, entonces

(i) $$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_x (a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

(ii) $$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (a_n t^n)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \cdots.$$

La serie que se obtiene derivando en (i) o integrando en (ii) del Teorema (11.38) tiene el mismo radio de convergencia de $\sum a_n x^n$, aunque la convergencia en los extremos puede variar. Como un corolario de (i), se tiene que *una función que está representada en un intervalo* $(-r, r)$ *por una serie de potencias es continua en todo el intervalo* $(-r, r)$ (véase el Teorema (3.5)). Hay resultados análogos para las funciones representadas por series de potencias de la forma $\sum a_n (x - c)^n$.

EJEMPLO 2 Encontrar una representación en serie de potencias para $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Solución En el Ejemplo 1 vimos que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad \text{si } |x| < 1.$$

Si derivamos cada término de esta serie, entonces, por el Teorema (11.38) (i),

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 - \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots$$

Por lo tanto, si $|x| < 1$, entonces

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \cdots \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Encontrar una representación en serie de potencias de $\ln(1+x)$ para $|x| < 1$.

Solución Si $|x| < 1$, entonces

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= \int_0^x [1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^n t^n + \cdots]\,dt.$$

La última igualdad se deduce del Ejemplo 1. Por el Teorema (11.38) (ii), podemos integrar cada término de la serie como sigue:

$$\ln(1+x) = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \cdots + (-1)^n \int_0^x t^n\,dt + \cdots$$

$$= t\Big]_0^x - \frac{t^2}{2}\Big]_0^x + \frac{t^3}{3}\Big]_0^x - \cdots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big]_0^x + \cdots$$

Entonces,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

si $|x| < 1$. $\bullet$

EJEMPLO 4 Usar los resultados del Ejemplo 3 para calcular $\ln(1.1)$ con una precisión de cinco decimales.

Solución En el Ejemplo 3 encontramos una representación en serie de potencias para $\ln(1+x)$ si $|x| < 1$. Sustituyendo x por 0.1 en la serie, obtenemos

$$\ln(1.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{3} - \frac{(0.1)^4}{4} + \frac{(0.1)^5}{5} - \cdots$$

$$= 0.1 - 0.005 + 0.000333 - 0.000025 + 0.000002 - \cdots$$

Si sumamos los primeros cuatro términos del lado derecho y redondeamos a cuatro decimales,

$$\ln(1.1) \approx 0.09531.$$

Por el Teorema (11.29), el error E es menor que el valor absoluto 0.000002 del quinto término y por lo tanto, el número 0.09531 es una aproximación a ln (1.1) con una precisión de cinco decimales. •

EJEMPLO 5 Encontrar una representación en serie de potencias para $\arctan x$.

Solución Primero observamos que

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Luego se advierte que si $|t| < 1$, entonces, por el Teorema (11.15) con $a = 1$ y $r = -t^2$,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots$$

Gracias al Teorema (11.38) (ii), es posible integrar cada término de la serie y obtener

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

siempre y cuando $|x| < 1$. Puede demostrarse que esta representación en serie de potencias es válida también para $|x| = 1$. •

EJEMPLO 6 Demostrar que e^x tiene la representación en serie de potencias

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Solución En el Ejemplo 2 se consideró esta serie y se vio que es absolutamente convergente para todo número real x. Si denotamos por f a la función representada por la serie, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Aplicando el Teorema (11.38) (i),

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

es decir, $f'(x) = f(x)$ para todo x.

Si en el Teorema (7.26), tomamos $y = f(t)$, $t = x$ y $c = 1$, obtenemos

$$f(x) = f(0)e^x.$$

Sin embargo,

$$f(0) = 1 + 0 + \frac{0^2}{2!} + \cdots + \frac{0^n}{n!} + \cdots = 1$$

y por tanto, $$f(x) = e^x$$

que es lo que queríamos demostrar. •

Como consecuencia del Ejemplo 6, el número e se puede expresar como la suma de una serie convergente de términos positivos, concretamente,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

EJEMPLO 7 Calcular aproximadamente $\int_0^{0.1} e^{-x^2}\,dx$.

Solución Tomando $x = -t^2$ en la serie del Ejemplo 6, obtenemos

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} + \cdots$$

para todo t. Aplicando el Teorema (11.38) (ii),

$$\begin{aligned}\int_0^{0.1} e^{-x^2}\,dx &= \int_0^{0.1} e^{-t^2}\,dt \\ &= t\Big]_0^{0.1} - \frac{t^3}{3}\Big]_0^{0.1} + \frac{t^5}{10}\Big]_0^{0.1} - \cdots \\ &= 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3} + \frac{(0.1)^5}{10} - \cdots\end{aligned}$$

Si usamos los dos primeros términos para estimar la suma de esta serie convergente alternante, entonces, por el Teorema (11.29), el error que se comete es menor que el tercer término de la serie $(0.1)^5/10 = 0.000001$. Por lo tanto,

$$\int_0^{0.1} e^{-x^2}\,dx \approx 0.1 - \frac{0.001}{3} \approx 0.99667$$

con una precisión de cinco decimales. •

Hasta ahora han sido *indirectos* los métodos que se usan para obtener representaciones en series de potencias para las funciones, en el sentido de que se comienza con una serie conocida y luego se deriva o se integra. En la siguiente sección se estudiará un método *directo* para encontrar representaciones en series de potencias para una gran variedad de funciones.

EJERCICIOS 11.7

Ejercicios 1-10: Encuentre una representación en serie de potencias para la expresión dada y determine el intervalo de convergencia. (*Indicación:* Use (11.15), (11.38) o la división de polinomios, según se necesite.)

1. $\dfrac{1}{1-x}$ 2. $\dfrac{1}{1+x^2}$ 3. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ 4. $\dfrac{1}{1-4x}$

5. $\dfrac{x^2}{1-x^2}$ 6. $\dfrac{x}{1-x^4}$ 7. $\dfrac{x}{2-3x}$ 8. $\dfrac{x^3}{4-x^3}$

9. $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ 10. $\dfrac{3}{2x+5}$

11. Demuestre que

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^n}{n} \quad \text{si } |x| < 1.$$

Use este hecho para calcular ln (1.2) con una precisión de cinco decimales.

12. Use el Ejemplo 5 para demostrar que la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{3})^n/[\sqrt{3}(2n+1)]$ es $\pi/6$.

Ejercicios 13-18: Use el resultado que se obtuvo en el Ejemplo 6 para encontrar una representación de la función dada en serie de potencias.

13. e^{-x} 14. e^{2x} 15. $\cosh x$

16. $\operatorname{senh} x$ 17. xe^{3x} 18. $x^2e^{x^2}$

Ejercicios 19-24: Use una serie infinita para calcular aproximadamente la integral con una precisión de cuatro decimales.

19. $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{1}{1+x^6}\,dx$ 20. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arctan x^2\,dx$

21. $\displaystyle\int_{0.1}^{0.2} \frac{\arctan x}{x}\,dx$ 22. $\displaystyle\int_0^{0.2} \frac{x^3}{1+x^5}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2/10}\,dx$ 24. $\displaystyle\int_0^{0.5} e^{-x^3}\,dx$

25. Utilice la representación en serie de potencias de $(1-x^2)^{-1}$ para encontrar una representación de esta clase para $2x(1-x^2)^{-2}$.

26. Utilice el método del Ejemplo 3 para obtener una representación en serie de potencias para $\ln(3+2x)$.

27. Consulte el Ejercicio 33 de la Sección 11.6. Aplique el Teorema (11.38) para demostrar lo siguiente.
 (a) Si $J_0(x)$ y $J_1(x)$ son funciones de Bessel de primera clase y de órdenes 0 y 1, respectivamente, entonces $D_x J_0(x) = -J_1(x)$.
 (b) Si $J_2(x)$ y $J_3(x)$ son funciones de Bessel de primera clase y de órdenes 2 y 3, respectivamente, entonces

$$\int x^3 J_2(x)\,dx = x^3 J_3(x) + C.$$

28. La luz es absorbida en la retina ocular por los conos y los bastoncillos. El número de fotones absorbidos por un fotorreceptor durante un destello o descarga luminosa está dado por la *distribución de Poisson*. Concretamente, la probabilidad p_n de que un fotorreceptor absorba exactamente n fotones está dada por la fórmula $p_n = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ para algún $\lambda > 0$.
 (a) Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.
 (b) El fenómeno de la visión ocurre cuando un fotorreceptor absorbe dos o más fotones. Demuestre que la probabilidad de que esto ocurra es $1 - e^{-\lambda}(\lambda + 1)$.

Ejercicios 29-30: Encuentre una representación en serie de potencias para $f(x)$. Sea $g(t)$ el integrando. Suponga que el valor de $g(0)$ es $\lim_{t\to 0} g(t)$.

29. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

30. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt$

11.8 SERIES DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

Sea f una función representada por una serie de potencias en $x - c$, de manera que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$
$$= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + a_4(x-c)^4 + \cdots$$

donde el dominio de f es un intervalo abierto que contiene a c. Como en la sección anterior, se pueden hallar representaciones en serie de potencias para $f'(x)$, $f''(x)$, ... derivando los términos de la serie de $f(x)$. Entonces,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$$
$$= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-c)^{n-2}$$
$$= 2a_2 + (3\cdot 2)a_3(x-c) + (4\cdot 3)a_4(x-c)^2 + \cdots$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-c)^{n-3}$$
$$= (3\cdot 2)a_3 + (4\cdot 3\cdot 2)a_4(x-c) + \cdots$$

y, para todo entero positivo k,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k}.$$

Además, cada una de las series que se obtiene derivando tiene el mismo radio de convergencia que la serie original. Sustituyendo x por c en cada una de estas representaciones en serie, se obtiene

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = a_1, \quad f''(c) = 2a_2, \quad f'''(c) = (3\cdot 2)a_3$$

y, para todo entero positivo n,

$$f^{(n)}(c) = n!a_n \quad \text{o bien} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Con esto se demuestra que la serie de $f(x)$ tiene la forma que aparece en el siguiente teorema y que se llama *serie de Taylor de $f(x)$ en c*.

SERIE DE TAYLOR (11.39) PARA $f(x)$ EN c

Si f es una función tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

para todo x en un intervalo abierto que contiene a c, entonces $f^{(n)}(c)$ existe para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $a_n = f^{(n)}(c)/n!$. Por lo tanto,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

Usando la convención $f^{(0)}(c) = f(c)$, la serie de Taylor en (11.39) se puede escribir con la notación de sumatoria como sigue:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k.$$

El caso especial cuando $c = 0$ se llama *serie de Maclaurin de* $f(x)$. Esto se enuncia a continuación como referencia.

SERIE DE MACLAURIN PARA $f(x)$ (11.40)

Si f es una función tal que $f(x) = \sum a_n x^n$ para todo x en un intervalo abierto $(-r, r)$, entonces

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

EJEMPLO 1 En el Ejemplo 6 de la sección anterior vimos que e^x tiene la representación en serie

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

Verificar que ésta es una serie de Maclaurin.

Solución Si $f(x) = e^x$, entonces la k-ésima derivada de f es $f^{(k)}(x) = e^x$ y

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Por lo tanto, la serie de Maclaurin (11.40) es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

que es igual a la serie dada. •

El Teorema (11.39) implica que *si* una función f se representa por una serie de potencias en $x - c$, entonces la serie de potencias *debe* ser una serie de Taylor. Sin embargo, el teorema no da condiciones que garanticen la existencia de una representación en serie de potencias. A continuación se obtienen tales condiciones. Comenzamos por notar que la $(n + 1)$-ésima suma parcial de la serie de Taylor en (11.39) es el Polinomio de Taylor de grado n, $P_n(x)$ de f en c (véase la Definición (10.10)). Más aún, por el Teorema (10.11),

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

con

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}$$

para un número z entre c y x. En el siguiente teorema se usa $R_n(x)$ para obtener condiciones suficientes que garanticen la existencia de una representación en serie de potencias para $f(x)$.

TEOREMA (11.41)

Sea f una función que tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo que contiene a c, y sea $R_n(x)$ el Residuo de Taylor de f en c. Si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para todo x en el intervalo, entonces $f(x)$ está representada por la serie de Taylor de $f(x)$ en c.

Demostración El polinomio de Taylor $P_n(x)$ es el n-ésimo término de la sucesión de las sumas parciales de la serie de Taylor para $f(x)$ en c. Como $P_n(x) = f(x) - R_n(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x).$$

Por lo tanto, la sucesión de las sumas parciales converge a $f(x)$. Esto demuestra el teorema. • •

En el Ejemplo 2 de la Sección 11.6 se demostró que la serie de potencias $\sum x^n/n!$ es absolutamente convergente para todo número real. El Teorema (11.16) da el siguiente resultado.

TEOREMA (11.42)

Para todo número real x, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} = 0$.

El Teorema (11.42) se usará en la solución del ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Encontrar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ y demostrar que representa a $\operatorname{sen} x$ para todo número real x.

Solución Organizamos el trabajo como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

Las siguientes derivadas siguen el mismo patrón. Sustituyendo en (11.40), obtenemos la serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Hasta este momento lo que se sabe es que *si* $\operatorname{sen} x$ está representado por una serie de potencias en x, entonces la serie es ésta. Para demostrar que $\operatorname{sen} x$ *está* representado

por esta serie de Maclaurin, usamos el Teorema (11.41). Si n es un entero positivo, entonces

$$|f^{(n+1)}(x)| = |\cos x| \quad \text{o bien} \quad |f^{(n+1)}(x)| = |\operatorname{sen} x|.$$

Por lo tanto, $|f^{(n+1)}(z)| \leq 1$ para todo número z y, usando la fórmula para $R_n(x)$ con $c = 0$,

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

A partir del Teorema (11.42) y del Teorema de Intercalación (11.7), se deduce que $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$. Por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ y la representación en serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ es válida para todo x. •

EJEMPLO 3 Encontrar la serie de Maclaurin para $\cos x$.

Solución Podríamos proceder directamente como en el Ejemplo 2, pero obtendremos la serie para $\cos x$ derivando la serie de $\operatorname{sen} x$ que se obtuvo en ese ejemplo. Esto da

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Tal serie también puede obtenerse integrando los términos de la serie para $\operatorname{sen} x$. •

La serie de Maclaurin para e^x se obtuvo en el Ejemplo 6 de la sección anterior con un método indirecto (véase también el Ejemplo 1 de esta sección). En seguida se da una deducción directa de esta importante fórmula.

EJEMPLO 4 Encontrar la representación en serie de Maclaurin de e^x para todo número real x.

Solución Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo entero positivo k. Por lo tanto, $f^{(k)}(0) = 1$ y sustituyendo en (11.40), obtenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Como en la solución del Ejemplo 2, usamos el Teorema (11.41) para demostrar que esta representación en serie de potencias para e^x es válida para todo número real x. Usando la fórmula para $R_n(x)$ con $c = 0$,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}$$

para algún número z entre 0 y x. Si $0 < x$, entonces $e^z < e^x$, ya que la función exponencial natural es creciente y por tanto, para todo entero positivo n,

$$0 < R_n(x) < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Usando el Teorema (11.42),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1} = e^x \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

y, por el Teorema de Intercalación (11.7),

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Si $x < 0$, entonces también $z < 0$ y así, $e^z < e^0 = 1$. Por consiguiente,

$$0 < |R_n(x)| < \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

y se ve de nuevo que $R_n(x)$ tiene límite 0 cuando n tiende a infinito. Del Teorema (11.41) se deduce que la representación en serie de potencias para e^x es válida en todos los números x diferentes de cero. Por último, si $x = 0$, entonces la serie se reduce a $e^0 = 1$. •

EJEMPLO 5 Encontrar la serie de Taylor para $\operatorname{sen} x$ en potencias de $x - (\pi/6)$.

Solución En el Ejemplo 2 aparece una lista de las derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} x$. Si las evaluamos en $c = \pi/6$ resulta

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

y este patrón de cuatro números se repite indefinidamente. Sustituyendo en (11.39), obtenemos

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2(2!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2(3!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots$$

El n-ésimo término u_n de esta serie está dado por

$$u_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} \dfrac{1}{2(n!)}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^n & \text{si } n = 0, 2, 4, 6, \ldots \\ (-1)^{(n-1)/2} \dfrac{\sqrt{3}}{2(n!)}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^n & \text{si } n = 1, 3, 5, 7, \ldots \end{cases}$$

La demostración de que la serie representa a $\operatorname{sen} x$ para todo x es parecida a la que se dio en el Ejemplo 2 y por lo tanto se omite. •

Una función puede tener derivadas de todos los órdenes en algún número c, y aún así puede no tener una representación en serie de Taylor para ese número. Se necesita una condición adicional como $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ para garantizar la existencia de una serie de Taylor.

En los ejemplos anteriores se obtuvieron algunas de las series de Maclaurin de la lista siguiente. Las verificaciones de las otras se dejan como ejercicio.

(11.43)

SERIE DE MACLAURIN	INTERVALO DE CONVERGENCIA
(a) $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$	

$$+ \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (-\infty, \infty)$$

(b) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (-\infty, \infty)$$

(c) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (-\infty, \infty)$$

(d) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \qquad (-1, 1]$$

(e) $$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad [-1, 1]$$

(f) $$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (-\infty, \infty)$$

(g) $$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (-\infty, \infty)$$

Las series en (11.43) sirven para obtener representaciones en serie de potencias de otras funciones. Por ejemplo, como (c) se satisface para todo x, puede obtenerse una representación en serie de potencias para e^{-x^2} sustituyendo x por $-x^2$. Esto da

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

Análogamente, sustituyendo x por $-x$ en (c) se obtiene

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Como $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, puede encontrarse una serie de potencias para $\cosh x$ sumando los términos correspondientes de las series para e^x y e^{-x}, y multiplicando luego por $\frac{1}{2}$. Esto da

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Es instructivo comparar esta serie con la de $\cos x$ en (11.43).

Las series de Taylor y de Maclaurin pueden emplearse para estimar los valores de una función. Por ejemplo, para calcular sen (0.1), se puede usar (11.43) (a) y escribir

$$\operatorname{sen}(0.1) = 0.1 - \frac{0.001}{6} + \frac{0.00001}{120} - \cdots$$

Por el Teorema (11.29), el error que se comete al utilizar la suma de los dos primeros términos como una aproximación, es menor que $0.00001/120 \approx 0.00000008$. En general, se tiene la siguiente fórmula de aproximación por un polinomio:

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6}.$$

Por el Teorema (11.29), el error es menor que $|x^5|/5!$.

El siguiente ejemplo ilustra el uso de las series infinitas para estimar los valores de las integrales definidas.

EJEMPLO 6 *Calcular aproximadamente* $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$ *con una precisión de cuatro de*cimales.

Solución Sustituyendo x por x^2 en (11.43) (a),

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots$$

Integrando cada término de la serie obtenemos

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \cdots$$

Sumando los tres primeros términos,

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx \approx 0.3103.$$

Por el Teorema (11.29), el error es menor que $\frac{1}{75600} \approx 0.00001$. •

Cabe mencionar que en el ejemplo anterior se logró una precisión de cuatro decimales sumando solamente *tres* términos de la serie integrada de $\operatorname{sen} x^2$. Para obtener este grado de precisión con la Regla del Trapecio o con la Regla de Simpson, se necesitaría emplear un valor grande de n en el intervalo [0, 1]. Esto muestra algo importante. En las aplicaciones numéricas, además de analizar el problema dado debe buscarse también el método más eficiente para calcular la respuesta.

Para tener una representación en serie de Taylor o de Maclaurin de una función f mediante (11.39) o (11.40), respectivamente, es necesario encontrar una fórmula general para $f^{(n)}(x)$ y además investigar $\lim_{n\to\infty} R_n(x)$. Debido a esto, los ejemplos dados se han restringido a expresiones con $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y e^x. Este método no sirve, por ejemplo, si $f(x)$ es $\tan x$ o $\operatorname{sen}^{-1} x$, porque $f^{(n)}(x)$ se va complicando a medida que n aumenta. La mayoría de los ejercicios siguientes se basan en funciones cuyas n-ésimas derivadas pueden determinarse fácilmente o en representaciones por series previamente establecidas. En los casos más complicados nos limitaremos solamente a los primeros términos de la representación en serie de Taylor o de Maclaurin.

EJERCICIOS 11.8

Ejercicios 1-4: Use (11.40) para encontrar la serie de Maclaurin de la expresión dada y demuestre que la serie es válida para todo x, aprovechando el Teorema (11.43).

1. $\cos x$ 2. e^{-x} 3. e^{2x} 4. $\cosh x$

Ejercicios 5-12: Use (11.43) para encontrar la serie de Maclaurin de la expresión dada y determine el radio de convergencia.

5. x^2e^x
6. xe^{-2x}
7. $\operatorname{senh} x$
8. $x^2 \operatorname{sen} x$
9. $x \operatorname{sen} 3x$
10. $\cos x^2$
11. $\cos^2 x$ (*Indicación:* Haga uso de la fórmula $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.)
12. $\operatorname{sen}^2 x$

Ejercicios 13-18: Encuentre la serie de Taylor en el número c para la expresión dada. (No verifique que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.)

13. $\operatorname{sen} x;\ c = \pi/4$
14. $\cos x;\ c = \pi/3$
15. $1/x;\ c = 2$
16. $e^x;\ c = -3$
17. $10^x;\ c = 0$
18. $\ln(1 + x);\ c = 0$
19. Encuentre una representación en serie para e^{2x} en potencias de $x + 1$.
20. Halle una representación en serie para $\ln x$ en potencias de $x - 1$.

Ejercicios 21-26: Encuentre los cuatro primeros términos de la serie de Taylor en el número c para la expresión dada.

21. $\sec x;\ c = \pi/3$
22. $\tan x;\ c = \pi/4$
23. $\operatorname{sen}^{-1} x;\ c = 1/2$
24. $\csc x;\ c = 2\pi/3$
25. $xe^x;\ c = -1$
26. $\operatorname{sech} x;\ c = 0$

Ejercicios 27-38: Use una serie infinita para calcular el número dado con una precisión de cuatro decimales.

27. $\sqrt{e}$
28. e^{-1}
29. $\cos 3$
30. $\operatorname{sen} 1$
31. $\tan^{-1} 0.1$
32. $\ln 1.5$
33. $\operatorname{senh} 0.5$
34. $\cosh 0.1$
35. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$
36. $\int_0^{1.2} x \cos x^3\,dx$
37. $\int_0^{0.5} \cos x^2\,dx$
38. $\int_0^{0.1} \tan^{-1} x^2\,dx$

Ejercicios 39-42: Calcule aproximadamente la integral con una precisión de cuatro decimales. Suponga que si el integrando es $f(x)$, entonces

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x).$$

39. $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2}\,dx$
40. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$
41. $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1 + x)}{x}\,dx$
42. $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x}\,dx$
43. Use (11.43) (d) para evaluar la serie de Maclaurin de $\ln[(1 + x)/(1 - x)]$.
44. Use los cinco primeros términos de la serie en el Ejercicio 43 para calcular $\ln 2$, y compare su respuesta con el valor que se obtiene usando una calculadora o una tabla.
45. Use (11.43) (e) con $x = 1$ para representar π como la suma de una serie infinita. ¿Qué precisión se obtiene usando los cinco primeros términos de la serie para aproximar π? ¿Cuántos términos de la serie se requieren aproximadamente para obtener una precisión de cuatro decimales en la estimación de π?
46. Aplique la identidad $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \pi/4$ (véase el Ejercicio 30 de la Sección 8.5) para expresar π como la suma de dos series infinitas. Use los cinco primeros términos de cada serie para estimar π y compare el resultado con el que se obtiene en el Ejercicio 45.
47. Cuando se planea una carretera a través de un desierto, un topógrafo debe tomar en cuenta la curvatura de la Tierra al medir las diferencias de elevación (véase la figura).
 (a) Demuestre que si s es la longitud de la carretera y R es el radio de la Tierra, la corrección C que se debe hacer es
 $$C = R[\sec(s/R) - 1].$$
 (b) Use la serie de Maclaurin de $\sec x$ para demostrar que C es aproximadamente igual a $s^2/(2R) + (5s^4)/(24R^3)$.

EJERCICIO 47



(c) El radio medio de la Tierra es igual a 6370 km. Calcule la corrección que hay que efectuar con una precisión de 1 cm para una carretera de 8 km de longitud.

48. Consulte el Ejercicio 57 de la Sección 8.7. La velocidad v de una ola en el agua está relacionada con la longitud de onda L y la profundidad D del agua, a través de la fórmula $v^2 = (gL/2\pi)\tanh(2\pi D/L)$, donde g es la aceleración de la gravedad.

(a) Demuestre que $\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3$ si $x \approx 0$. (La serie de Maclaurin para $\tanh x$ es una serie alternante.)

(b) Use la parte (a) para obtener la fórmula de aproximación $v^2 \approx gD$ para el caso en que el cociente D/L es pequeño.

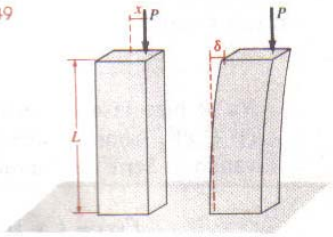
(c) Los oceanógrafos utilizan la estimación en la parte (b) cuando $0 < D/L < \frac{1}{20}$. Demuestre que el error $E = |v^2 - gD|$ es menor que 0.002.

49. Si se aplica una fuerza vertical hacia abajo P a una columna con extremo libre y de longitud L en un punto a una distancia de x unidades a la derecha del centro de su sección transversal (véase la figura), entonces la columna se flexiona. La desviación horizontal δ se puede expresar por

$$\delta = x\,\frac{1 - \cos kL}{\cos kL}, \quad \text{donde } k = \sqrt{P/(EI)}.$$

La constante EI se llama *rigidez a la flexión* del material. Use una serie de Maclaurin para demostrar que $\delta \approx PxL^2/(EI)$ cuando P es pequeña.

EJERCICIO 49



50. Demuestre que $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$ con una precisión de cuatro decimales si $0 \le x \le \pi/4$.

11.9 SERIE DEL BINOMIO

El Teorema del Binomio (3.9) dice que si k es un entero positivo, entonces para todos los números a y b,

$$(a + b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}a^{k-n}b^n + \cdots + b^k.$$

Tomando $a = 1$ y $b = x$, se obtiene

$$(1 + x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots + x^k.$$

Cuando k no es un entero positivo (o bien 0), el polinomio da lugar a una serie de potencias $\sum a_n x^n$, donde $a_0 = 1$ y $a_n = k(k-1)\cdots(k-n+1)/n!$ para $n \ge 1$. Esta serie infinita tiene la forma

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

y se llama **Serie del Binomio**. Si k es un entero no negativo, la serie se reduce a la suma finita dada en el Teorema del Binomio. En los otros casos, la serie es infinita. Se deja como ejercicio demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k-n}{n+1}\right||x| = |x|.$$

Entonces, según el Criterio de la Razón (11.33), la serie es absolutamente convergente si $|x| < 1$ y divergente si $|x| > 1$. Por lo tanto, la Serie del Binomio representa una función f dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n \quad \text{si } |x| < 1.$$

Ya se hizo la observación de que si k es un entero no negativo, entonces $f(x) = (1 + x)^k$. Ahora se demostrará que lo mismo sucede para *todo* número real k. Derivando la Serie del Binomio, se obtiene

$$f'(x) = k + k(k-1)x + \cdots + \frac{nk(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^{n-1} + \cdots$$

y por lo tanto,

$$xf'(x) = kx + k(k-1)x^2 + \cdots + \frac{nk(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Si se suman los términos correspondientes de las dos series de potencias anteriores, el coeficiente de x^n que se obtiene es

$$\frac{(n+1)k(k-1)\cdots(k-n)}{(n+1)!} + \frac{nk(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

que al simplificar puede escribirse

$$[(k-n)+n]\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} = ka_n.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) + xf'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ka_n x^n = kf(x)$$

y entonces,

$$f'(x)(1+x) - kf(x) = 0.$$

Si se define la función g por $g(x) = f(x)/(1+x)^k$, entonces

$$g'(x) = \frac{(1+x)^k f'(x) - f(x)k(1+x)^{k-1}}{(1+x)^{2k}}$$

$$= \frac{(1+x)f'(x) - kf(x)}{(1+x)^{k+1}} = 0.$$

Del Teorema (4.33) se deduce que $g(x) = c$ para alguna constante c, es decir,

$$\frac{f(x)}{(1+x)^k} = c.$$

Como $f(0) = 1$, se ve que $c = 1$ y por lo tanto, $f(x) = (1+x)^k$, que es lo que se quería demostrar. El siguiente enunciado resume esta discusión.

SERIE DEL BINOMIO (11.44)

Si $|x| < 1$, entonces para todo número real k,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

EJEMPLO 1 Encontrar una representación en serie de potencias para $\sqrt[3]{1+x}$.

Solución Usando (11.44) con $k = \frac{1}{3}$,

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdots(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

que se puede escribir

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdots(3n-4)}{3^n\cdot n!}x^n + \cdots$$

para $|x| < 1$. La fórmula para el n-ésimo término de esta serie es válida siempre y cuando $n \geq 2$. •

EJEMPLO 2 Encontrar una representación en serie de potencias para $\sqrt[3]{1+x^4}$.

Solución La serie de potencias puede obtenerse sustituyendo x por x^4 en la serie del Ejemplo 1. Por tanto, si $|x| < 1$, entonces

$$\sqrt[3]{1+x^4} = 1 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3^2\cdot 2!}x^8 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdots(3n-4)}{3^n\cdot n!}x^{4n} + \cdots$$ •

EJEMPLO 3 Calcular aproximadamente $\int_0^{0.3}\sqrt[3]{1+x^4}\,dx$.

Solución Integrando los términos de la serie que se obtuvo en el Ejemplo 2, resulta

$$\int_0^{0.3} \sqrt[3]{1 + x^4}\, dx = 0.3 + 0.000162 - 0.000000243 + \cdots$$

Por lo tanto, la integral es aproximadamente igual 0.300162 con una precisión de seis decimales pues el error es menor que 0.000000243. (¿Por qué?) •

La Serie del Binomio puede utilizarse para representar aproximadamente $(1 + x)^k$ mediante polinomios. Por ejemplo, si $|x| < 1$, entonces del Ejemplo 1,

$$\sqrt[3]{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{3}x,$$

donde el error en la aproximación es menor que el siguiente término $\frac{1}{9}x^2$. •

EJERCICIOS 11.9

Ejercicios 1-12: Encuentre una representación en serie de potencias para la expresión dada y determine el radio de convergencia.

1. (a) $\sqrt{1 + x}$ (b) $\sqrt{1 - x^3}$
2. (a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + x}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$
3. $(1 + x)^{-2/3}$
4. $(1 + x)^{1/4}$
5. $(1 - x)^{3.5}$
6. $(1 - x)^{2/3}$
7. $(1 + x)^{-2}$
8. $(1 + x)^{-4}$
9. $(1 + x)^{-3}$
10. $x(1 + 2x)^{-2}$
11. $\sqrt[3]{8 + x}$
12. $(4 + x)^{3/2}$
13. Obtenga una representación en serie de potencias para $\operatorname{senh}^{-1} x$ utilizando la igualdad $\operatorname{senh}^{-1} x = \int_0^x (1/\sqrt{1 - t^2})\, dt$. ¿Cuál es el radio de convergencia?
14. Obtenga una representación en serie de potencias para $\operatorname{senh}^{-1} x$ usando la igualdad $\operatorname{senh}^{-1} x = \int_0^x (1/\sqrt{1 + t^2})\, dt$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

Ejercicios 15-19: Calcule aproximadamente la integral con una precisión de tres decimales.

15. $\displaystyle\int_0^{1.2} \sqrt{1 + x^3}\, dx$ (véase el Ejercicio 1)
16. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^2}}\, dx$ (véase el Ejercicio 2)
17. $\displaystyle\int_0^{0.2} (1 - x^2)^{3/5}\, dx$ (véase el Ejercicio 5)
18. $\displaystyle\int_0^{0.4} (1 - x^3)^{2/3}\, dx$ (véase el Ejercicio 6)
19. $\displaystyle\int_0^{0.3} \frac{1}{(1 + x^3)^2}\, dx$ (véase el Ejercicio 7)
20. Consulte el Ejercicio 42 de la Sección 10.4. La fórmula del periodo T de un péndulo de longitud L con un desplazamiento inicial en un ángulo θ_0 (en radianes) a partir de su posición de equilibrio, está dada por la integral impropia

$$T = 2\sqrt{2L/g} \int_0^{\theta_0} (\cos\theta - \cos\theta_0)^{-1/2}\, d\theta.$$

La sustitución $u = (\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta)/(\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta_0)$ permite escribir la integral como

$$T = 2\sqrt{2L/g} \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u)^{-1/2}\, du$$

con $k = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta_0$.

(a) Use la Serie del Binomio para $(1 - x)^{-1/2}$ a fin de demostrar que

$$T \approx 2\pi\sqrt{L/g}(1 + \tfrac{1}{4}k^2).$$

(b) Calcule aproximadamente T suponiendo que $\theta_0 = \pi/6$.

11.10 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Sucesión infinita.
2. Límite de una sucesión infinita.
3. Sucesión infinita convergente.
4. Sucesión infinita divergente.
5. Teoremas sobre los límites de las sucesiones.
6. Sucesiones monótonas.
7. Sucesión de las sumas parciales de una serie infinita.
8. Serie infinita convergente.
9. *Serie infinita divergente.*
10. Serie armónica.
11. Serie geométrica.
12. Criterio de la Integral.
13. Serie p o hiperarmónica.
14. Criterios de comparación.
15. Criterio de la Razón.
16. Criterio de la Raíz.
17. Criterio para las Series Alternantes.
18. Convergencia absoluta.
19. Convergencia condicional.
20. Series de potencias.
21. Radio de convergencia.
22. Intervalo de convergencia.
23. Representación de funciones por series de potencias.
24. Derivación e integración de las series de potencias.
25. Series de Taylor.
26. Series de Maclaurin.
27. Aproximaciones por series.
28. Serie del Binomio.

EJERCICIOS 11.10

Ejercicios 1-6: Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, calcule el límite.

1. $\left\{\dfrac{\ln(n^2+1)}{n}\right\}$
2. $\{100(0.99)^n\}$
3. $\{10^n/n^{10}\}$
4. $\left\{\dfrac{1}{n}+(-2)^n\right\}$
5. $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{n}+4}-\dfrac{n}{\sqrt{n}+9}\right\}$
6. $\left\{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2n}\right\}$

Ejercicios 7-32: (a) Si la serie es de términos positivos, determine si converge o diverge. (b) Si la serie contiene términos positivos y negativos, determine si es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o bien divergente.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$
8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+3)^2}{(n+1)^3}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2/3)^{n-1}$
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2+(1/2)^n}$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{n5^{n-1}}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\ln(n+1)}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}$
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+9)(-2)^{1-n}$
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\cos n}{n^3+1}$
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^e}$
18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(0.9)^n}{\ln n}$
21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n5\pi/3)}{n^{5\pi/3}}$
22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n-1}}{n^2-1}$
23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{n!}$
25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n^2}$

26. $\frac{2}{1!} - \frac{2 \cdot 4}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{n!} + \cdots$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n^2 + 9}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{(2n-1)!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{5}{\sqrt{n}} \right)$

31. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{\sqrt{1 + n^2}}$

Ejercicios 33-38: Use el Criterio de la Integral (11.22) para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)^3}$

34. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} e^{1/n}$

36. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^3}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n+8}}$

38. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n}$

Ejercicios 39-40: Calcule aproximadamente la suma de la serie con una precisión de tres decimales.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+1)!}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2(n^2+1)}$

Ejercicios 41-44: Encuentre el intervalo de convergencia de la serie.

41. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(-3)^n} x^n$

42. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n}}{\sqrt{n+1}} x^n$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} (x+10)^n$

44. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2} (x-1)^n$

Ejercicios 45-46: Determine el radio de convergencia de la serie.

45. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$

46. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)!} (x+5)^n$

Ejercicios 47-52: Encuentre la serie de Maclaurin para la expresión dada y determine el radio de convergencia.

47. $\begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

48. xe^{-2x}

49. $\operatorname{sen} x \cos x$

50. $\ln (2 + x)$

51. $(1 + x)^{2/3}$

52. $1/\sqrt{1 - x^2}$

53. Encuentre una representación para e^{-x} en serie de potencias de $x + 2$.

54. Obtenga una representación para $\cos x$ en serie de potencias de $x - (\pi/2)$.

55. Encuentre una representación para $\sqrt{x}$ en serie de potencias de $x - 4$.

Ejercicios 56-60: Use una serie infinita para estimar el número dado con una precisión de tres decimales.

56. $1/\sqrt[3]{3e}$

57. $\int_0^1 x^2 e^{-x^2} \, dx$

58. $\int_0^1 f(x) \, dx$ con $f(x) = (\operatorname{sen} x)/\sqrt{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

59. $\sqrt[3]{1.01}$

60. $e^{-0.25}$

CAPÍTULO **12**

TEMAS SELECTOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

La geometría plana incluye el estudio de figuras tales como rectas, círculos y triángulos, que se encuentran en un plano. Los teoremas se demuestran con razonamientos deductivos a partir de ciertos postulados. En la geometría ***analítica****, las figuras planas se estudian introduciendo primero un sistema coordenado y usando después varios tipos de ecuaciones y fórmulas. Si fuese necesario resumir el estudio de la geometría analítica por medio de una sola frase, quizás la siguiente sería apropiada: "Dada una ecuación, encontrar su gráfica y, recíprocamente, dada una gráfica, encontrar su ecuación." En este capítulo aplicaremos los métodos de las coordenadas a algunas de las figuras planas básicas.*

12.1 SECCIONES CÓNICAS

Cada una de las figuras geométricas discutidas en este capítulo puede obtenerse como la intersección de un cono circular recto de dos mantos con un plano, como se ilustra en la Figura 12.1. Por esta razón se llaman **secciones cónicas**, o simplemente **cónicas**. Variando la posición del plano como se ilustra en la figura, se obtiene una **elipse**, una **parábola** o una **hipérbola**, respectivamente.

Con algunas posiciones del plano se obtienen **cónicas degradadas** (o **degeneradas**). Por ejemplo, si el plano corta al cono solamente en el vértice, entonces la cónica consta de un solo punto. Si el plano contiene al eje del cono, se obtiene un par de rectas que se intersecan. Finalmente, comenzando con el caso de la parábola en la Figura 12.1 y moviendo el plano paralelamente a la posición inicial puede llegarse a una posición en la cual el cono tiene solamente una recta en común con el plano.

Los antiguos griegos estudiaron extensivamente las secciones cónicas y descubrieron propiedades que permiten definir tales curvas en términos de puntos y rectas. Es notorio el hecho de que, aunque las secciones cónicas fueron estudiadas hace miles de años, están lejos de ser obsoletas. Son un medio importante para las investigaciones actuales en el espacio exterior y para el estudio del comportamiento de las partículas atómicas. De la física sabemos que si una partícula se mueve bajo la influencia de un *campo de fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia*, entonces su trayectoria puede describirse por medio de una cónica. En los campos gravitacional y electrostático se presenta este caso. Las órbitas de los planetas son elípticas. Si la elipse es muy "aplastada" la curva corresponde a la trayectoria de un cometa. Los espejos parabólicos se utilizan a veces para captar energía solar. La hipérbola sirve para describir la trayectoria de una partícula alfa en el campo eléctrico de un núcleo atómico.

FIGURA 12.1

Elipse



Parábola



Hipérbola



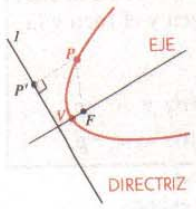
12.2 PARÁBOLAS

En esta sección se define la *parábola* y se deducen las ecuaciones de las curvas parabólicas que tienen eje vertical u horizontal

DEFINICIÓN (12.1)

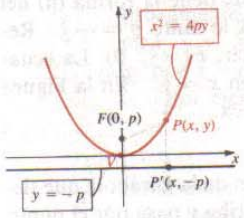
Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo F (llamado **foco**) y de una recta fija l (llamada **directriz**), ambos contenidos en el plano.

FIGURA 12.2



Supondremos que F no se encuentra sobre l, porque cuando esto sucede se obtiene una recta en vez de una parábola. Si P es un punto en el plano y P' es el punto sobre l determinado por la recta perpendicular a l y que pasa por P (véase la Figura 12.2), entonces, según la Definición 12.1, P está en la parábola si y sólo si $d(P, F) = d(P, P')$. El punto P puede estar en cualquier lugar sobre la curva en la Figura 12.2. La recta que pasa por F y es perpendicular a la directriz se llama **eje** de la parábola. El punto V sobre el eje y que está a la misma distancia de F y de l, se llama **vértice** de la parábola.

FIGURA 12.3



Puede obtenerse una ecuación sencilla para la parábola colocando el eje y sobre el eje de la parábola y el origen en el vértice V, como se ilustra en la Figura 12.3. En este caso, el foco F tiene coordenadas $(0, p)$ para algún número real $p \neq 0$, y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Según la Fórmula de la Distancia, un punto $P(x, y)$ está en la parábola si y sólo si

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 - (y+p)^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos lados obtenemos

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2,$$

o bien

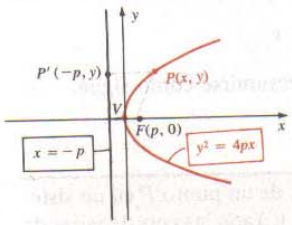
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2.$$

Simplificando se obtiene

$$x^2 = 4py.$$

Hemos demostrado que las coordenadas de cualquier punto (x, y) sobre la parábola satisfacen la ecuación $x^2 = 4py$. Recíprocamente, si (x, y) es una solución de esta ecuación en x y y, entonces, para encontrar una ecuación en x' y y' que tenga la misma encuentra sobre la parábola. Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba como en la Figura 12.3, mientras que si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. Nótese que la gráfica es simétrica con respecto al eje y, ya que las soluciones de la ecuación $x^2 = 4py$ no cambian si se sustituye x por $-x$.

FIGURA 12.4



Si el eje de la parábola se coloca a lo largo del eje x ocurre algo parecido. Si el vértice es $V(0, 0)$, el foco es $F(p, 0)$ y la directriz tiene ecuación $x = -p$ (véase la Figura 12.4), entonces, usando un argumento análogo, se obtiene la ecuación $y^2 = 4px$. Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha, y si $p < 0$ abre hacia la izquierda. En este caso la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

El siguiente teorema resume la discusión anterior.

TEOREMA (12.2)

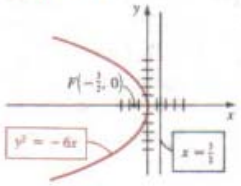
La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una parábola que tiene su vértice en el origen y el foco y la directriz indicados.

(i) $x^2 = 4py$: foco $F(0, p)$, directriz $y = -p$

(ii) $y^2 = 4px$: foco $F(p, 0)$, directriz $x = -p$

EJEMPLO 1 Encontrar el foco y la directriz de la parábola con ecuación $y^2 = -6x$ y trazar su gráfica.

FIGURA 12.5

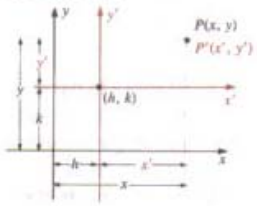


Solución La ecuación $y^2 = -6x$ tiene la forma (ii) del Teorema (12.2) con $4p = -6$, y por lo tanto $p = -\frac{3}{2}$. Resulta que el foco es $F(p, 0)$, es decir, $F(-\frac{3}{2}, 0)$. La ecuación de la directriz es $x = -p$ o bien $x = \frac{3}{2}$. En la Figura 12.5 aparece un croquis de la gráfica. •

EJEMPLO 2 Obtener una ecuación de la parábola que tiene vértice en el origen, abre hacia arriba y pasa por el punto $P(-3, 7)$.

Solución La forma general de la ecuación es $x^2 = 4py$ (véase (i) del Teorema (12.2)). Como $P(-3, 7)$ está en la parábola, entonces $(-3, 7)$ es una solución de la ecuación. Entonces se tiene $(-3)^2 = 4p(7)$, o bien $p = \frac{9}{28}$. Sustituyendo el valor de p en $x^2 = 4py$ se obtiene la ecuación $x^2 = \frac{9}{7}y$, o bien $7x^2 = 9y$. •

FIGURA 12.6



Para tratar el caso en que el vértice de la parábola no está en el origen se usa la **traslación de ejes**, como se ilustra en la Figura 12.6, en la que el eje x y el eje y se han desplazado a las posiciones denotadas por x' y y', que son paralelas a los ejes originales. Cada punto P del plano tiene dos representaciones diferentes como par ordenado: $P(x, y)$ en el sistema xy y $P(x', y')$ en el sistema $x'y'$. Si el origen del nuevo sistema $x'y'$ tiene coordenadas (h, k) en el sistema xy, como se ilustra en la Figura 12.6, resulta que

$$x = x' + h \quad \text{y} \quad y = y' + k.$$

Puede demostrarse que estas fórmulas son válidas para todos los valores de h y k. Las fórmulas

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k.$$

son equivalentes a las anteriores. Esta discusión puede resumirse como sigue.

FÓRMULAS PARA TRASLACIÓN DE EJES (12.3)

Si (x, y) son las coordenadas de un punto P en un sistema de coordenadas xy y (x', y') son las coordenadas de

P en un sistema de coordenadas $x'y'$ cuyo origen está en el punto (h, k) del sistema xy, entonces

(i) $x = x' + h, \quad y = y' + k$

(ii) $x' = x - h, \quad y' = y - k$

Las Fórmulas para Traslación de Ejes permiten cambiar de un sistema de coordenadas a otro. Se usan principalmente para cambiar de forma las ecuaciones de las gráficas. Concretamente, si un cierto conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una ecuación en x y y, entonces, para encontrar una ecuación en x' y y' que tenga la misma gráfica en el plano $x'y'$, se sustituye x por $x' + h$ y y por $y' + k$ en la ecuación. Recíprocamente, si un conjunto de puntos en el plano $x'y'$ es la gráfica de una ecuación en x' y y', entonces, para encontrar la ecuación correspondiente en x y y se sustituye x' por $x - h$ y y' por $y - k$.

Por ejemplo, la ecuación

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

tiene como gráfica en el plano $x'y'$ a la circunferencia de radio r con centro en el origen. Usando las Fórmulas para Traslación de Ejes, se obtiene como una ecuación de esta curva en el plano xy

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

que es la ecuación de una circunferencia en el plano xy de radio r con centro en $C(h, k)$ (véase (1.12)).

Como otro ejemplo, se sabe que

$$(x')^2 = 4py'$$

es una ecuación para la parábola con vértice en el origen del plano $x'y'$. Usando las Fórmulas para Traslación de Ejes, puede verse que

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

es una ecuación para la misma parábola en el plano xy, la cual tiene vértice $V(h, k)$, foco $F(h, k + p)$ y la ecuación de su directriz es $y = k - p$. Análogamente, comenzando con $(y')^2 = 4px'$ se obtiene $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. El siguiente teorema resume esta discusión.

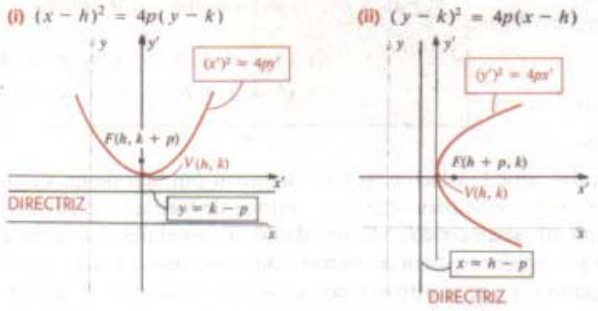
TEOREMA (12.4)

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una parábola con vértice $V(h, k)$ que tiene el foco y la directriz indicados.

(i) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$: foco $F(h, k + p)$, directriz $y = k - p$

(ii) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$: foco $F(h + p, k)$, directriz $x = h - p$

FIGURA 12.7



En cada caso el eje de la parábola es paralelo a uno de los ejes coordenados. La parábola con ecuación (12.4) (i) abre hacia arriba o hacia abajo y la parábola con ecuación (12.4) (ii) abre a la derecha o a la izquierda. En la Figura 12.7 aparecen croquis típicos de estas gráficas.

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación en el Teorema (12.4) (i) y simplificando, se obtiene una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

para ciertos números reales a, b y c. Recíprocamente, dada una ecuación como ésta, puede completarse el cuadrado en x para obtener la forma (12.4) (i). Este método se ilustrará en el Ejemplo 3. Por lo tanto, si $a \neq 0$, entonces *la gráfica de* $y = ax^2 + bx + c$ *es una parábola con eje vertical.*

EJEMPLO 3 Describir y trazar la gráfica de $y = 2x^2 - 6x + 4$.

Solución La gráfica es una parábola con eje vertical. Para obtener la forma apropiada se expresa la ecuación como

$$y - 4 = 2x^2 - 6x = 2(x^2 - 3x).$$

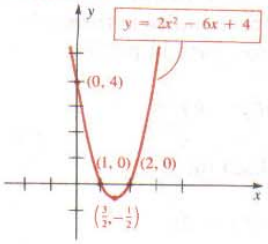
Ahora se completa el cuadrado para la expresión $x^2 - 3x$. Recordemos que para completar el cuadrado de *cualquier* expresión de la forma $x^2 + qx$ y, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $(q/2)^2$. Entonces, para $x^2 - 3x$ hay que agregar $(-\frac{3}{2})^2$ o sea $\frac{9}{4}$. Sin embargo, agregar $\frac{9}{4}$ a $x^2 - 3x$ en la ecuación $y - 4 = 2(x^2 - 3x)$, debido al factor 2 fuera del paréntesis, equivale a agregar $\frac{9}{2}$ al lado derecho de la ecuación. Por lo tanto debemos compensar esto sumando $\frac{9}{2}$ (y no $\frac{9}{4}$) al lado izquierdo. Esto da

$$y - 4 + \tfrac{9}{2} = 2(x^2 - 3x + \tfrac{9}{4})$$
$$y + \tfrac{1}{2} = 2(x - \tfrac{3}{2})^2$$

o, equivalentemente,

$$(x - \tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{1}{2}(y + \tfrac{1}{2}).$$

FIGURA 12.8



La última ecuación está en la forma (12.4) (i) con $h = \frac{3}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$, y $4p = \frac{1}{2}$, o $p = \frac{1}{8}$. Por tanto, el vértice de la parábola es $V(h, k)$ o bien $V(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. El foco está dado por $F(h, k + p)$ o sea $F(\frac{3}{2}, -\frac{3}{8})$ y la directriz es

$$y = k - p = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} \quad \text{o bien} \quad y = -\tfrac{5}{8}.$$

Como ayuda para trazar la gráfica notamos que la ordenada de la intersección con el eje y es 4. Para encontrar la abscisa de la intersección con el eje x resolvemos la ecuación $2x^2 - 6x + 4 = 0$ o, equivalentemente, $(2x - 2)(x - 2) = 0$, obteniendo $x = 1$ y $x = 2$. La gráfica está en la Figura 12.8. •

La ecuación en (12.4) (ii) puede escribirse como

$$x = ay^2 + by + c$$

para algunos números reales a, b y c. Recíprocamente, completando el cuadrado en y, esta ecuación puede expresarse en la forma (12.4) (ii), como se ilustra en el siguiente ejemplo. Por lo tanto, si $a \neq 0$, la gráfica de $x = ay^2 + by + c$ es una *parábola con eje horizontal*.

EJEMPLO 4 Describir y trazar la gráfica de la ecuación $2x = y^2 + 8y + 22$.

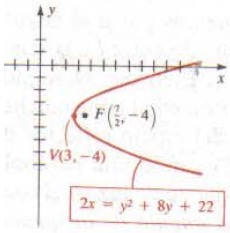
Solución La gráfica es una parábola con eje horizontal Escribiendo

$$y^2 + 8y = 2x - 22$$

sumando 16 a ambos lados, puede completarse el cuadrado del lado izquierdo. Esto da

$$y^2 + 8y + 16 = 2x - 6.$$

FIGURA 12.9



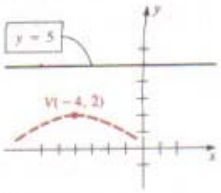
La ecuación puede escribirse como

$$(y + 4)^2 = 2(x - 3),$$

que está en la forma (12.4) (ii) con $h = 3$, $k = -4$, y $4p = 2$ o sea $p = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, el vértice es $V(3, -4)$. Como $p = \frac{1}{2} > 0$, resulta que la parábola abre hacia la derecha y tiene foco en $F(h + p, k)$; es decir, $F(\frac{7}{2}, -4)$. La ecuación de la directriz es $x = h - p$, o sea $x = \frac{5}{2}$. La parábola está en la Figura 12.9. •

EJEMPLO 5 Encontrar una ecuación de la parábola con vértice $V(-4, 2)$ y directriz $y = 5$.

FIGURA 12.10



Solución En la Figura 12.10 se muestran el vértice y la directriz. La línea de trazo punteado indica la forma de la *parábola. Resulta que una ecuación para la parábola* es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

con $h = -4$, $k = 2$ y $p = -3$. Esto da

$$(x + 4)^2 = -12(y - 2).$$

Tal ecuación puede expresarse en la forma $y = ax^2 + bx + c$ como sigue:

$$x^2 + 8x + 16 = -12y + 24$$
$$12y = -x^2 - 8x + 8$$
$$y = -\tfrac{1}{12}x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3} \quad \bullet$$

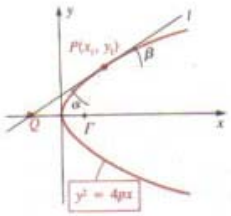
FIGURA 12.11
Trayectoria de una pelota de béisbol



Si un jugador de béisbol lanza una pelota en una dirección no vertical, como se muestra en la Figura 12.11, y la gravedad es la única fuerza que actúa sobre la pelota (es decir, la resistencia del aire y otros factores externos son despreciables), entonces la trayectoria de la bola (y de cualquier otro objeto lanzado) es parabólica. Este hecho (que será demostrado en el Capítulo 15) sirve para determinar dónde caerá la pelota (o el objeto), para encontrar su altura máxima, etcétera (véase el Ejercicio 39).

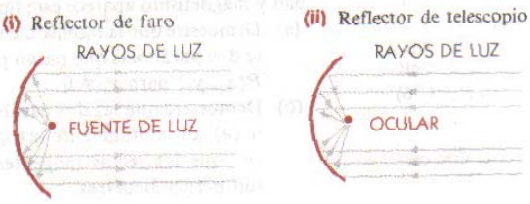
La forma de los cables de cierto tipo de puentes colgantes es parabólica. Sin embargo, como señalamos en la Sección 8.7, la forma de un cable que cuelga *libremente* es una catenaria y no una parábola.

FIGURA 12.12



Las rectas tangentes a las parábolas tienen una propiedad importante. Supongamos que l es la recta tangente a la gráfica de $y^2 = 4px$ en el punto $P(x_1, y_1)$, y sea F el foco. Como se ve en la Figura 12.12, denotemos por α al ángulo entre l y el segmento FP, y por β al ángulo entre l y la semirecta horizontal con extremo P. En el Ejercicio 34 se pide al lector demostrar que $\alpha = \beta$. Esta propiedad tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, la forma del espejo reflector de una linterna o de un faro se obtiene girando una parábola alrededor de su eje. Si se coloca una fuente de luz en el foco entonces, por las leyes de la física (*el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión*), los rayos de luz se reflejan a lo largo de una recta paralela al eje (véase la Figura 12.13(i)). El mismo principio se emplea en la construcción de espejos para telescopios y hornos solares. En ellos los rayos de luz llegan al espejo parabólico a lo largo de rectas paralelas al eje y se reflejan hacia el foco (véase la Figura 12.13(ii)). Las antenas de sistemas de radar, radiotelescopios y micrófonos de campo usados en diversos deportes también tienen esta propiedad.

FIGURA 12.13



EJERCICIOS 12.2

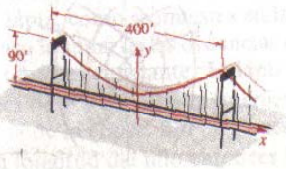
Ejercicios 1-16: Encuentre el vértice, el foco y la directriz de cada parábola y trace su gráfica.

1. $x^2 = -12y$
2. $y^2 = \frac{1}{2}x$
3. $2y^2 = -3x$
4. $x^2 = -3y$
5. $8x^2 = y$
6. $y^2 = -100x$
7. $y^2 - 12 = 12x$
8. $y = 40x - 97 - 4x^2$
9. $y = x^2 - 4x + 2$
10. $y = 8x^2 + 16x + 10$
11. $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$
12. $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$
13. $4x^2 + 40x + y + 106 = 0$
14. $y^2 - 20y + 100 = 6x$
15. $x^2 + 20y = 10$
16. $4x^2 + 4x + 4y + 1 = 0$
17. Describa un método para localizar el vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ usando la derivada. Use este procedimiento para encontrar los vértices en los Ejercicios 8-10. Describa un método análogo para $x = ay^2 + by + c$.
18. Describa cómo puede usarse la segunda derivada para determinar si la parábola $y = ax^2 + bx + c$ abre hacia arriba o hacia abajo. Ilustre este método con los Ejercicios 8-10.

Ejercicios 19-24: Encuentre una ecuación para la parábola que satisface las ecuaciones dadas.

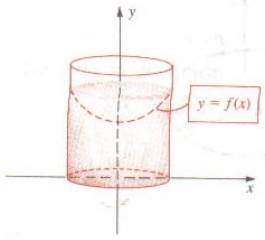
19. Foco (2, 0), directriz $x = -2$.
20. Foco (0, −4), directriz $y = 4$.
21. Foco (6, 4), directriz $y = -2$.
22. Foco (−3, −2), directriz $y = 1$.
23. Vértice en el origen, simétrica con respecto al eje y y pasa por el punto $A(2, -3)$.
24. Vértice $V(-3, 5)$, eje paralelo al eje x y pasa por el punto $A(5, 9)$.
25. El reflector de un faro está diseñado de manera que una sección transversal a través de su eje es una parábola y la fuente de luz está colocada en el foco. Encuentre el foco suponiendo que el reflector mide 3 pie de diámetro y 1 pie de profundidad.
26. Una sección de un puente colgante tiene su peso uniformemente distribuido entre dos torres gemelas que distan 400 pie una de otra y se elevan 90 pie sobre una carretera horizontal (véase la figura). Un cable suspendido entre los extremos superiores de las torres tiene forma parabólica y su punto medio se encuentra 10 pie por arriba de la carretera. Considere los ejes coordenados que se muestran en la figura.
 (a) Encuentre la ecuación de la parábola respectiva.
 (b) Establezca una integral que dé la longitud del cable.
 (c) Suponiendo que se usan nueve cables verticales paralelos igualmente espaciados para

EJERCICIO 26



610

EJERCICIO 37



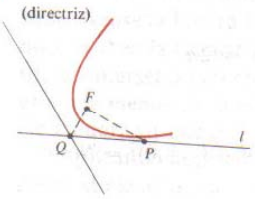
del líquido es una solución de la ecuación diferencial $y' = (\omega^2/g)x$ con $g = 32$ pie/s^2.

(a) Demuestre que $y = \frac{1}{64}\omega^2 x^2 + f(0)$.

(b) Determine la velocidad angular ω que produce una distancia focal de 2 pie.

38. Suponga que la recta tangente l a una parábola en un punto P corta a la directriz en un punto Q (véase la figura). Sea F el foco. Demuestre que el ángulo PFQ es recto.

EJERCICIO 38

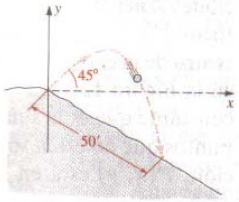


39. Un niño tira una pelota de béisbol en lo alto de una colina (véase la figura). La pelota, lanzada a un ángulo de 45° sobre la horizontal, cae a 50 pie de distancia en la loma, que está definida por la recta $4y + 3x = 0$.

(a) Despreciando la altura del niño, encuentre la ecuación de la trayectoria parabólica de la pelota.

(b) ¿Cual es la altura máxima de la bola sobre el suelo?

EJERCICIO 39



40. Una *cuerda focal* es un segmento de recta que pasa por el foco de una parábola y tiene sus extremos en la curva. Sea AB una cuerda focal. Demuestre que las rectas tangentes en A y B (a) son perpendiculares; (b) se cortan en la directriz.

12.3 ELIPSES

Una elipse puede definirse como sigue.

DEFINICIÓN (12.5)

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano (los **focos**) es constante.

Hay una forma fácil de trazar una elipse sobre papel. Se comienza por clavar dos tachuelas en dos puntos denotados por F y F' y atar los extremos de un hilo a las tachuelas. Después se estira el hilo con la punta de un lápiz, como se muestra en la Figura 12.14, y al mover dicha punta manteniendo el hilo tenso la suma de las distancias $d(F, P)$ y $d(F', P)$ es igual a la longitud del hilo y por lo tanto es constante. El lápiz trazará una elipse con focos F y F'. Variando las posiciones de F y F' pero manteniendo fija la longitud del hilo puede cambiarse mucho la forma de la elipse. Si F y F' están muy separados de manera que $d(F, F')$ es casi igual a la longitud del hilo entonces la elipse

FIGURA 12.14

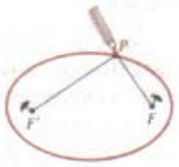
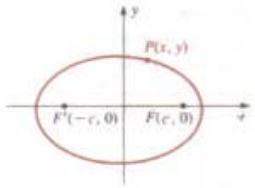


FIGURA 12.15



es muy alargada. Si $d(F, F')$ es pequeña entonces la elipse es casi una circunferencia. Si $F = F'$ se obtiene exactamente una circunferencia con centro F.

Introduciendo sistemas de coordenadas adecuados pueden deducirse algunas ecuaciones sencillas para las elipses. Escojamos el eje x como la recta que pasa por los dos focos F y F', con el origen en el punto medio del segmento $F'F$. Este punto se llama **centro** de la elipse. Si F tiene coordenadas $(c, 0)$, donde $c > 0$, entonces, como se muestra en la Figura 12.15, F' tiene coordenadas $(-c, 0)$ y la distancia entre F y F' es $2c$. La constante que es la suma de las distancias de P a F y F' se denota por $2a$. Para obtener puntos que no estén sobre el eje x es necesario que $2a > 2c$; es decir, $a > c$. Por definición, $P(x, y)$ está en la elipse si y sólo si

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

o, usando la Fórmula de la Distancia,

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a.$$

Escribiendo esta ecuación como

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

y elevando ambos miembros al cuadrado,

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

lo cual se reduce a

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Elevando ambos miembros al cuadrado se obtiene

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

que puede escribirse como

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Dividiendo ambos miembros entre $a^2(a^2 - c^2)$ se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Recordando que $a > c$ y por tanto $a^2 - c^2 > 0$, se define

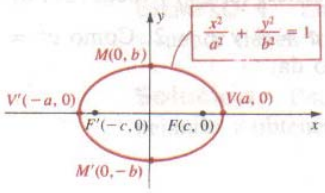
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{o bien} \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

Esto da la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como $c > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$, resulta que $a^2 > b^2$ y por tanto $a > b$.

FIGURA 12.16



Queda demostrado que las coordenadas de cualquier punto (x, y) de la elipse en la Figura 12.16, satisfacen la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Recíprocamente, si (x, y) es una solución de esta ecuación, invirtiendo el orden del razonamiento anterior puede verse que el punto (x, y) está en la elipse.

Las intersecciones con el eje x pueden encontrarse tomando $y = 0$. Haciendo esto se obtiene $x^2/a^2 = 1$ y $x^2 = a^2$, y por lo tanto las intersecciones con el eje x son a y $-a$. Los puntos correspondientes de la gráfica $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ son los **vértices** de la elipse (véase la Figura 12.16). El segmento $V'V$ es el **eje mayor**. Análogamente, tomando $x = 0$ en la ecuación de la elipse, se obtiene $y^2/b^2 = 1$, o bien $y^2 = b^2$. Por lo tanto, las intersecciones con el eje y son b y $-b$. El segmento entre $M'(0, -b)$ y $M(0, b)$ es el **eje menor** de la elipse. Nótese que el eje mayor es obviamente más largo que el eje menor, ya que $a > b$.

Aplicando la prueba de la simetría (1.11), se ve que la elipse es simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.

La discusión anterior puede resumirse como sigue.

TEOREMA (12.6)

La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a^2 > b^2$, es una elipse con vértices $(\pm a, 0)$. Los extremos del eje menor son $(0, \pm b)$. Los focos son por lo tanto $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

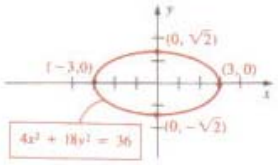
EJEMPLO 1 Estudiar y trazar la gráfica de la ecuación

$$4x^2 + 18y^2 = 36.$$

Solución Para obtener la forma en el Teorema (12.6) dividimos ambos lados de la ecuación entre 36 y simplificamos. Esto lleva a

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

FIGURA 12.17



que es la forma buscada con $a^2 = 9$ y $b^2 = 2$. Así $a = 3$, $b = \sqrt{2}$, y por tanto los extremos del eje mayor son $(\pm 3, 0)$ y los del eje menor son $(0, \pm\sqrt{2})$. Como

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 2 = 7 \qquad \text{o sea} \qquad c = \sqrt{7},$$

los focos son $(\pm\sqrt{7}, 0)$. En la Figura 12.7 aparece la gráfica.

EJEMPLO 2 Encontrar una ecuación de la elipse con vértices $(\pm 4, 0)$ y focos $(\pm 2, 0)$.

Solución Usando la notación del Teorema (12.6), $a = 4$ y $c = 2$. Como $c^2 = a^2 - b^2$, vemos que $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$. Esto da

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \quad \bullet$$

A veces es conveniente colocar el eje mayor de la elipse a lo largo del eje y. Si los focos son $(0, \pm c)$, entonces, con el mismo tipo de razonamientos usados anteriormente, se obtiene lo que sigue.

TEOREMA (12.7)

La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde $a^2 > b^2$, es una elipse con vértices $(0, \pm a)$. Los extremos del eje menor son $(\pm b, 0)$. Asimismo, los focos son $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

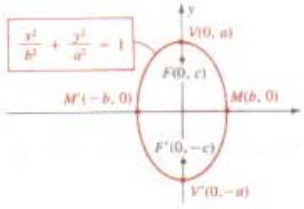
En la Figura 12.18 aparece el croquis de una elipse con el eje mayor sobre el eje y.

El razonamiento anterior muestra que una ecuación para una elipse con centro en el origen y focos sobre uno de los ejes coordenados puede escribirse siempre en la forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad qx^2 + py^2 = pq$$

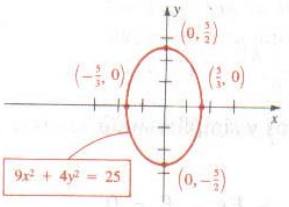
donde p y q son positivos y $p \neq q$. Si $p > q$ el eje mayor está sobre el eje x y si $q > p$ el eje mayor está sobre el eje y. No es necesario recordar estos datos ya que en cualquier problema puede determinarse el eje mayor analizando las intersecciones con los ejes.

FIGURA 12.18



EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de la ecuación $9x^2 + 4y^2 = 25$.

FIGURA 12.19



Solución La gráfica es una elipse con centro en el origen y focos sobre uno de los ejes coordenados. Para encontrar las intersecciones con el eje x, tomamos $y = 0$ y obtenemos $9x^2 = 25$ o sea $x = \pm\frac{5}{3}$. Análogamente, para encontrar las intersecciones con el eje y, tomamos $x = 0$ y obtenemos $4y^2 = 25$, o sea $y = \pm\frac{5}{2}$. Esto permite dibujar la elipse (véase la Figura 12.19). Como $\frac{5}{3} < \frac{5}{2}$, el eje mayor está sobre el eje y. •

EJEMPLO 4 Encontrar el área de la región acotada por una elipse cuyos ejes mayor y menor tienen longitudes $2a$ y $2b$, respectivamente.

Solución Por (12.6), $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ es una ecuación para la elipse. Despejando y obtenemos

$$y = (\pm b/a)\sqrt{a^2 - x^2}.$$

La gráfica de la elipse tiene la forma que se muestra en la Figura 12.16. Entonces, por simetría, basta encontrar el área de la región en el primer cuadrante y multiplicar el resultado por 4. Usando (5.11),

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Haciendo la sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen}\theta$,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta \quad \text{y} \quad dx = a\cos\theta\, d\theta.$$

Más aún, los valores de θ correspondientes a $x = 0$ y $x = a$ son $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, respectivamente. En consecuencia,

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2\theta\, d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

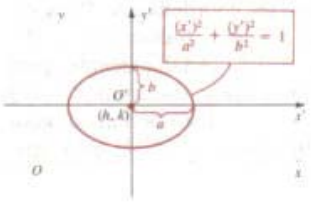
$$= 2ab\left[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab[\pi/2] = \pi ab.$$

Como un caso especial, cuando $b = a$, la región acotada por la elipse es un círculo y $A = \pi a^2$. •

Usando las Fórmulas para Traslación de Ejes (12.3) pueden generalizarse los resultados anteriores al caso de una elipse con centro en cualquier punto $C(h, k)$ en el plano xy. Por ejemplo, como la gráfica de

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

FIGURA 12.20



es una elipse con centro en el origen O' del plano $x'y'$ (véase la Figura 12.20), su ecuación con respecto al sistema coordenado xy es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando se obtiene una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde los coeficientes son números reales y A y C son positivos. Recíprocamente, comenzando con una ecuación de este tipo y completando cuadrados puede obtenerse una expresión que exhibe explícitamente el centro de la elipse y las longitudes de sus semiejes. Este método se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Estudiar y trazar la gráfica de la ecuación

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0.$$

Solución Comenzamos por escribir la ecuación en la forma

$$16(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 2y) = 71.$$

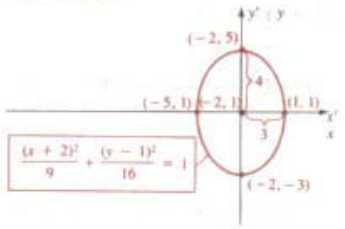
Luego se completan los cuadrados para las expresiones entre paréntesis obteniendo así

$$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 71 + 64 + 9.$$

Nótese que al sumar 4 a la expresión dentro del primer paréntesis hemos sumado 64 al lado izquierdo de la ecuación, y debemos compensar esto sumando 64 al lado derecho. Análogamente, al sumar 1 a la expresión dentro del segundo paréntesis, se suma 9 al lado izquierdo y por tanto, hay que sumar 9 al lado derecho. La ecuación anterior puede escribirse

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 144.$$

FIGURA 12.21



Dividiendo entre 144 obtenemos

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1,$$

que es de la forma

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{16} = 1$$

con $x' = x + 2$ y $y' = y - 1$. Esto corresponde a tomar $h = -2$ y $k = 1$ en las fórmulas para traslación de ejes (12.3). Como la gráfica de la ecuación $(x')^2/9 + (y')^2/16 = 1$ es una elipse con centro en el origen del plano $x'y'$, resulta que la gráfica de la ecuación dada es una elipse con centro $C(-2, 1)$ en el plano xy y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados. La Figura 12.21 muestra la gráfica. •

Las elipses pueden ser muy alargadas o casi redondas. Para obtener información sobre la "redondez" de una elipse se usa a veces la *excentricidad* e (que no debe confundirse con la base de los logaritmos naturales). La excentricidad se define como sigue, suponiendo que a, b y c tienen el mismo significado que en los Teoremas (12.6) y (12.7).

DEFINICIÓN (12.8)

La **excentricidad** e de una elipse es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Supongamos que en la Definición (12.8) se considera la longitud del eje mayor $2a$ como fija y la del eje menor $2b$ como variable. Como $\sqrt{a^2 - b^2} < a$, vemos que $0 < e < 1$. Si $e \approx 1$, entonces $\sqrt{a^2 - b^2} \approx a$ y por tanto $b \approx 0$. En este caso la elipse es muy alargada. Si $e \approx 0$, entonces $\sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$ y $a \approx b$. En este caso la elipse es casi redonda o circular.

En el Capítulo 15 se demostrarán las tres leyes de Kepler. La primera afirma que la órbita de cada planeta en el sistema solar es una elipse con el Sol en uno de los focos. La mayoría de las órbitas son casi circulares (o muy redondas) y por tanto, sus excentricidades son casi 0. Por ejemplo, para la Tierra $e \approx 0.017$; para Marte $e \approx 0.093$ y para Urano $e \approx 0.046$. Las órbitas de Mercurio y Plutón son menos redondas, con excentricidades de 0.206 y 0.249, respectivamente.

Muchos cometas tienen órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. En esos casos la excentricidad es casi 1 y la elipse es muy alargada. En el ejemplo siguiente se usará la **unidad astronómica** (1 UA = 150 000 000 km o 92 000 000 mi) para medir grandes distancias.

FIGURA 12.22
COMETA DE HALLEY



EJEMPLO 6 El cometa de Halley tiene un periodo de 76.2 años y una órbita elíptica con excentricidad $e = 0.967$. La distancia mínima al Sol que alcanza el cometa es 0.587 UA. Estimar la distancia máxima del cometa al Sol con una precisión de 0.1 UA.

Solución La Figura 12.22, donde como de costumbre c es la distancia del centro de la elipse al foco (el Sol) y $2a$ es la longitud del eje mayor, ilustra la órbita del cometa.

Como $a - c$ es la distancia mínima entre el Sol y el cometa, tenemos (en UA),

$$a - c = 0.587 \quad \text{o bien} \quad a = c + 0.587.$$

Como $e = c/a = 0.967$,

$$c = 0.967a = 0.967(c + 0.587) \approx 0.967c + 0.568.$$

Por lo tanto,

$$0.033c \approx 0.568 \quad \text{y} \quad c \approx \frac{0.568}{0.033} \approx 17.2.$$

En consecuencia,

$$a = c + 0.587 \approx 17.2 + 0.6 = 17.8$$

y la distancia máxima es

$$a + c \approx 17.8 + 17.2 = 35.0\,\text{UA}. \quad \bullet$$

EJERCICIOS 12.3

Ejercicios 1-14: Trace la gráfica de la elipse y encuentre las coordenadas de los vértices y los focos.

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
3. $4x^2 + y^2 = 16$
4. $y^2 + 9x^2 = 9$
5. $5x^2 + 2y^2 = 10$
6. $\frac{1}{2}x^2 + 2y^2 = 8$
7. $4x^2 + 25y^2 = 1$
8. $10y^2 + x^2 = 5$
9. $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$
10. $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$
11. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$
12. $4x^2 + 9y^2 + 24x + 18y + 9 = 0$
13. $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$
14. $4x^2 + y^2 = 2y$

Ejercicios 15-22: Encuentre la ecuación de la elipse que satisface las condiciones dadas.

15. Vértices $V(\pm 8, 0)$, focos $F(\pm 5, 0)$.
16. Vértices $V(0, \pm 7)$, focos $F(0, \pm 2)$.
17. Vértices $V(0, \pm 5)$, longitud del eje menor 3.
18. Focos $F(\pm 3, 0)$, longitud del eje menor 2
19. Vértices $V(0, \pm 6)$, y pasa por $(3, 2)$.
20. Centro en el origen, simétrica con respecto a ambos ejes y pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(6, 1)$.
21. Excentricidad $\frac{3}{4}$, vértices $V(0, \pm 4)$.
22. Excentricidad $\frac{1}{2}$, centro en el origen, vértices en el eje x y pasa por el punto $(1, 3)$.
23. Un arco de un puente tiene forma semielíptica con el eje mayor horizontal. La base del arco mide 30 pie y la parte más alta está 10 pie por encima de la carretera horizontal que pasa por abajo del puente (véase la figura). Calcule la altura del arco sobre el punto del suelo que esta a 5 pie del centro

EJERCICIO 23



24. Demuestre que

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

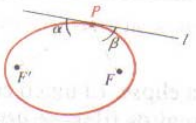
es una ecuación de la recta tangente a la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ en el punto $P(x_1, y_1)$.

25. Encuentre una ecuación para la recta tangente a la elipse $5x^2 + 4y^2 = 56$ en el punto $P(-2, 3)$.
26. Encuentre los puntos de tangencia a la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$, de dos rectas que cortan el eje y en el punto $(0, 6)$.
27. Calcule el volumen del sólido que se obtiene al girar la región acotada por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ alrededor de (a) el eje x; (b) el eje y.
28. La base de un cuerpo o sólido es la región acotada por una elipse con eje mayor 16 y eje menor 9. Calcule el volumen de la figura suponiendo que las secciones transversales correspondientes a los planos perpendiculares al eje mayor son (a) cuadrados; (b) triángulos equiláteros.
29. Calcule las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una elipse con semiejes a y b, y que tiene dos lados paralelos al eje mayor.
30. Un tanque cilíndrico cuyas secciones transversales son elipses con ejes de longitud 6 y 4 pie, res-

pectivamente, está acostado y lleno de agua hasta la mitad. Calcule la fuerza ejercida por el agua en uno de sus extremos.

31. Sea l la recta tangente en el punto P a una elipse con focos F' y F (véase la figura). Sea α el ángulo entre $F'P$ y l, y sea β el ángulo entre FP y l. Demuestre que $\alpha = \beta$. (Ésta es la propiedad de reflexión análoga a la de la parábola ilustrada en la Figura 12.12, y que se aprecia en los "cuartos de los secretos", donde una persona que hable en voz muy baja en uno de los focos puede ser escuchada por otra situada en el otro foco.)

EJERCICIO 31



32. La base de un cono elíptico recto de altura h, tiene ejes mayor y menor de longitudes $2a$ y $2b$, respectivamente. Calcule el volumen del cono.

33. Suponga que el eje mayor de la órbita de la Tierra mide 186 000 000 mi y que la excentricidad de la misma es 0.017. Calcule las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol con una precisión de 1000 mi.

34. (a) Demuestre que el perímetro C de una elipse con excentricidad e está dado por

$$C = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta.$$

(*Sugerencia:* Utilice la sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen} \theta$ en la fórmula (6.9) para calcular *la longitud de arco. Ésta es una integral elíptica* que no es posible evaluar con funciones elementales.)

(b) El planeta Mercurio recorre una órbita elíptica con $e = 0.206$ y $a = 0.387$ UA. Usando la parte (a) y la Regla de Simpson con $n = 10$, estime la longitud de su órbita.

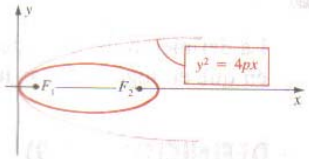
35. Consulte la Figura 8.19 de la Sección 8.3. En un sistema de cuerpo y resorte, la energía total E (la suma de las energías cinética y potencial) está dada por $E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$, donde x es el desplazamiento del cuerpo con respecto a la posición de equilibrio, v es la velocidad del mismo y k es una constante.

(a) Para una velocidad y desplazamiento dados la energía total es constante. Demuestre que en el espacio de coordenadas xv (espacio de fase) el movimiento del sistema describe una elipse.

(b) Encuentre la relación entre el área A de la elipse de la parte (a), la energía total E y la frecuencia f de las oscilaciones.

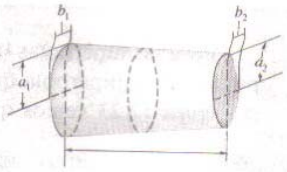
36. Una elipse tiene un vértice en el origen y focos $F_1(p, 0)$ y $F_2(p + 2c, 0)$ (véase la figura). Verifique que F_1 suponiendo que el foco $\lim_{c\to\infty} y^2 = 4px$ está fijo. Concluya que una parábola puede considerarse como una elipse que tiene "un foco en el infinito".

EJERCICIO 36



37. Una de las figuras geométricas frecuentemente utilizada para modelar las extremidades del cuerpo humano es el *cono elíptico truncado*, en el que todas las secciones transversales son elípticas y tienen la misma excentricidad. La excentricidad de brazos y piernas varía entre 0.6 y 1. Sea $k = a_1/b_1 = a_2/b_2$ y sea L la longitud de una extremidad. Demuestre que el volumen V está dado por la fórmula $V = (\frac{1}{3}\pi L/k)(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)$.

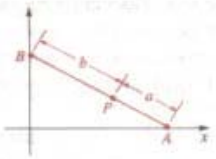
EJERCICIO 37



38. Demuestre que si la normal a una elipse en un punto $P(x_1, y_1)$ que no es extremo de ninguno de los ejes, contiene al centro de la elipse, entonces esta curva es una circunferencia.

39. *Un segmento de longitud $a + b$ se mueve* manteniendo sus extremos A y B sobre los ejes coordenados, como se ilustra en la figura. Demuestre

EJERCICIO 39



que si $a \neq b$, entonces el punto P describe una elipse.

40. Un segmento PQ es perpendicular al diámetro AB de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y M es su punto medio (véase la figura). Encuentre una ecuación para el conjunto de todos los puntos medios M y trace la gráfica.

EJERCICIO 40



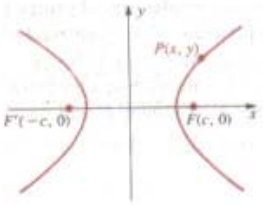
12.4 HIPÉRBOLAS

La definición de una hipérbola es parecida a la de una elipse. El único cambio consiste en que en lugar de usar la *suma* de distancias a dos puntos fijos, se usa la *diferencia*.

DEFINICIÓN (12.9)

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos de un plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano (los **focos**) es una constante positiva.

FIGURA 12.23



Con el objeto de encontrar una ecuación sencilla para una hipérbola se elige un sistema de coordenadas de manera que los focos queden en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y se denota la diferencia de las distancias (constante) por $2a$. En la Figura 12.23 puede verse que un punto $P(x, y)$ está en la hipérbola si y sólo si se cumple una de las dos igualdades siguientes :

$$d(P, F') - d(P, F) = 2a$$
$$d(P, F) - d(P, F') = 2a.$$

Para las hipérbolas (al contrario que en las elipses) se requiere $a < c$ para obtener puntos de la hipérbola que no estén en el eje x, pues si P es un punto tal, entonces en la Figura 12.23 vemos que

$$d(P, F) < d(F', F) + d(P, F'),$$

porque la longitud de un lado de un triángulo siempre es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Análogamente

$$d(P, F') < d(F', F) + d(P, F).$$

Las dos desigualdades anteriores son equivalentes a

$$d(P, F) - d(P, F') < d(F', F)$$
$$d(P, F') - d(P, F) < d(F', F).$$

Como las diferencias a la izquierda son ambas iguales a $2a$ y $d(F', F) = 2c$, las dos desigualdades implican que $2a < 2c$, o bien $a < c$.

Las ecuaciones $d(P, F') - d(P, F) = 2a$ y $d(P, F) - d(P, F') = 2a$ pueden reemplazarse con una sola ecuación

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Usando la Fórmula de la Distancia se infiere que

$$|\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}| = 2a$$

es una ecuación de la hipérbola. Simplificando como se hizo al deducir una ecuación de la elipse, se llega a la ecuación equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Por conveniencia se define

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{donde } b > 0.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Quedó demostrado que las coordenadas de cada punto (x, y) de la hipérbola en la Figura 12.23 satisfacen la ecuación anterior. Recíprocamente, si (x, y) es una solución de dicha ecuación, entonces invirtiendo los pasos del razonamiento anterior puede verse que el punto (x, y) está en la hipérbola.

La prueba de la Simetría (1.11) muestra que la hipérbola es simétrica respecto a ambos ejes y al origen. Las intercepciones x son $\pm a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ son los **vértices** y el segmento $V'V$ es el **eje transverso** de la hipérbola. El origen es el **centro** de la hipérbola. En consecuencia, no hay intercepciones y pues la ecuación $-y^2/b^2 = 1$ no tiene soluciones.

Los resultados de la discusión anterior pueden resumirse como sigue.

TEOREMA (12.10)

La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es una hipérbola con vértices $(\pm a, 0)$. Los focos son $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Despejando y de la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ se obtiene

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

No hay puntos (x, y) de la gráfica con $x^2 - a^2 < 0$; es decir, si $-a < x < a$. Sin embargo, *sí hay* puntos $P(x, y)$ de la gráfica con $x \geq a$ o bien $x \leq -a$.

La recta $y = (b/a)x$ es una asíntota de la hipérbola porque la distancia $p(x)$ entre el punto $P(x, y)$ de la hipérbola y el punto correspondiente $P'(x, y_1)$ en la recta tiende a cero cuando x tiende a infinito. Para demostrar esto se observa que si $x > 0$ entonces

$$p(x) = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Racionalizando el numerador se prueba que

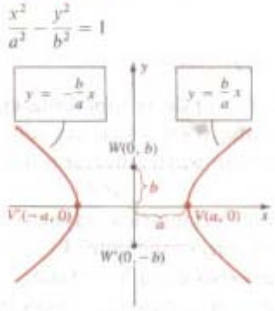
$$\frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{1} = \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{b}{a} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

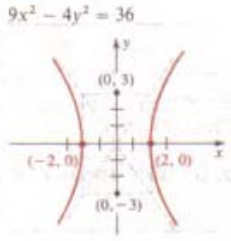
Análogamente, $\lim_{x \to -\infty} p(x) = 0$. Puede demostrarse también que la recta $y = (-b/a)x$ es una asíntota de la hipérbola del Teorema 12.10.

FIGURA 12.24



Las asíntotas son una guía excelente para trazar la gráfica. Una manera conveniente de dibujar las asíntotas es marcar primero los vértices $V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$ y los puntos $W(0, b)$, $W'(0, -b)$ (véase la Figura 12.24). El segmento $W'W$ de longitud $2b$ se llama **eje conjugado** de la hipérbola. Si se trazan rectas verticales y horizontales que pasen por los extremos de los ejes conjugado y transverso respectivamente, entonces las diagonales del rectángulo resultante tienen pendiente b/a y $-b/a$. Prolongando estas diagonales se obtienen rectas con ecuaciones $y = (\pm b/a)x$. Luego se traza la hipérbola como en la Figura 12.24, usando las asíntotas como guías. Las dos curvas que constituyen la hipérbola son sus **ramas**.

FIGURA 12.25



EJEMPLO 1 Estudiar y trazar la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

Solución Dividiendo ambos lados entre 36 se tiene

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

que es de la forma que aparece en el Teorema (12.10) con $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$. Por lo tanto $a = 2$ y $b = 3$. Los vértices $(\pm 2, 0)$ y los extremos $(0, \pm 3)$ del eje conjugado determinan un rectángulo cuyas diagonales (prolongadas) son las asíntotas. En la Figura 12.25 se tiene la gráfica de esta ecuación. Las ecuaciones de las asíntotas $y = \pm\frac{3}{2}x$, pueden encontrarse a partir de la gráfica o de las ecuaciones $y = \pm(b/a)x$. Como $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 19 = 13$, los focos son $(\pm\sqrt{13}, 0)$. •

El ejemplo anterior muestra que en las hipérbolas no siempre es cierto que $a < b$, como sucede con las elipses. Puede tenerse $a < b$, $a > b$ o $a = b$.

EJEMPLO 2 Encontrar una ecuación, los focos y las asíntotas de la hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ y que pasa por el punto $P(5, 2)$.

Solución Sustituyendo $a = 3$ en $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, obtenemos

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como $(5, 2)$ es una solución de esta ecuación, se tiene

$$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1.$$

Esto da $b^2 = \frac{9}{4}$ y por lo tanto, la ecuación buscada es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 1,$$

o equivalentemente, $x^2 - 4y^2 = 9$.

Como $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}$, resulta que $c = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$. Por lo tanto los focos son $(\pm\frac{3}{2}\sqrt{5}, 0)$. Sustituyendo b y a en $y = \pm(b/a)x$ y simplificando, obtenemos las ecuaciones $y = \pm\frac{1}{2}x$ para las asíntotas. •

Si los focos de una hipérbola son los puntos $(0, \pm c)$ sobre el eje y, usando razonamientos semejantes a los anteriores se llega al siguiente teorema.

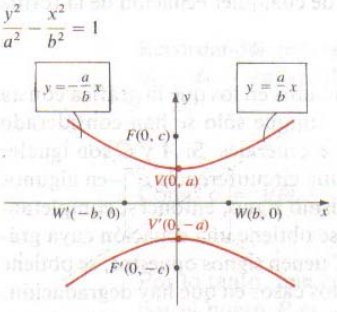
TEOREMA (12.11)

La gráfica de la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

es una hipérbola con vértices $(0, \pm a)$. Los focos son $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

FIGURA 12.26



En este caso los extremos del eje conjugado son $W(b, 0)$ y $W'(-b, 0)$. Las asíntotas se encuentran como antes, usando las diagonales del rectángulo determinado por los puntos W y W', los vértices y las rectas paralelas a los ejes coordenados. En la Figura 12.26 aparece la gráfica correspondiente. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm(a/b)x$. Nótese la diferencia entre estas ecuaciones y las ecuaciones $y = \pm(b/a)x$ para las asíntotas de la hipérbola considerada en el Teorema (12.10).

EJEMPLO 3 Estudiar la gráfica de la ecuación

$$4y^2 - 2x^2 = 1.$$

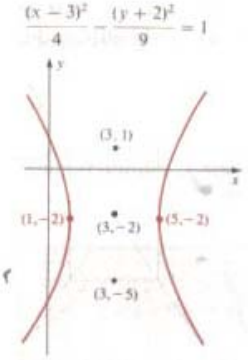
Solución Podemos obtener la forma que aparece en el Teorema (12.11) escribiendo la ecuación como

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Entonces $a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{1}{2}$, y $c^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Por lo tanto $a = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{2}/2$ y $c = \sqrt{3}/2$. Los vértices son $(0, \pm\frac{1}{2})$ y los focos son $(0, \pm\sqrt{3}/2)$. La gráfica tiene la apariencia de la curva que aparece en la Figura 12.26. •

Como en el caso de las elipses, puede usarse la traslación de ejes para generalizar estos resultados. El siguiente ejemplo ilustra el método.

FIGURA 12.27



EJEMPLO 4 Estudiar y trazar la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0.$$

Solución Transformamos la ecuación como sigue:

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 + 4y) = -29$$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 81 - 16$$

$$9(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 = 36$$

$$\frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1,$$

que es de la forma

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{9} = 1$$

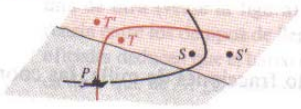
con $x' = x - 3$ y $y' = y + 2$. Trasladando los ejes x y y al nuevo origen $C(3, -2)$ obtenemos el croquis que aparece en la Figura 12.27. •

Los resultados anteriores muestran que la gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

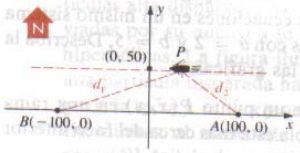
es una sección cónica excepto por algunos casos degradados en los que la gráfica consta sólo de puntos o rectas, o bien no existe la gráfica. Aunque sólo se han considerado ejemplos especiales, estos métodos son completamente generales. Si A y C son iguales pero no nulos, entonces la gráfica, cuando existe, es una circunferencia o —en algunos casos— un punto. Si A y C son diferentes pero del mismo signo, entonces, completando cuadrados y trasladando los ejes adecuadamente, se obtiene una ecuación cuya gráfica, cuando existe, es una elipse (o un punto). Si A y C tienen signos opuestos, se obtiene la ecuación de una hipérbola o posiblemente, en algunos casos en que hay degradación, dos rectas que se cortan. Finalmente, si uno de los dos (A o C) es cero, pero el otro no, la gráfica es una parábola o —en algunos casos— un par de rectas paralelas, o bien una sola recta.

FIGURA 12.28



La definición de hipérbola (12.9) está basada en la diferencia de las distancias a dos puntos fijos (los focos). Esta propiedad se usa en un sistema de navegación llamado *loran* (acrónimo del inglés *long range navigation*, que significa "navegación de largo alcance"). Este sistema utiliza dos pares de radiotransmisores, como los indicados en T, T' y S, S' en la Figura 12.28. Las señales emitidas desde T y T' por los transmisores llegan a un receptor de radio en un barco que se encuentra en algún punto P. La diferencia del tiempo de llegada de las señales puede usarse para determinar la diferencia de las distancias de P a T y T'. Entonces, P se encuentra en una de las ramas de una hipérbola con focos en T y T'. Repitiendo el proceso para los otros dos transmisores se deduce que P está en una rama de otra hipérbola con focos en S y S'. Entonces, la intersección de estas dos ramas determina la posición del barco.

FIGURA 12.29



EJEMPLO 5 Una estación A de loran se encuentra 200 mi al este de otra estación B. Un barco navega 50 mi al norte sobre una línea recta paralela a la que pasa por las estaciones A y B. Las citadas estaciones A y B emiten señales a razón de 980 pie/μs. La señal emitida por B llega al barco 400 μs (microsegundos) más tarde que la emitida por A. Localizar la posición del barco.

Solución *Introducimos* un sistema de coordenadas como se muestra en la Figura 12.29, de manera que las estaciones se encuentran en los puntos A y B sobre el eje x y el barco P navega sobre la recta $y = 50$. Como la señal emitida por B tarda 400 μs más en llegar al barco que la emitida por A, la diferencia $d_1 - d_2$ de las distancias indicadas en la figura es

$$d_1 - d_2 = (980)(400) = 392\,000 \text{ pie}.$$

Dividiendo entre 5280 (pies por milla),

$$d_1 - d_2 = \frac{392{,}000}{5280} = 74.2424\ldots \text{ mi}.$$

Recordando que en la deducción de la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, se tomó $d_1 - d_2 = 2a$, resulta que en este caso,

$$a = \frac{74.2424\ldots}{2} = 37.1212\ldots \quad \text{y} \quad a^2 \approx 1378.$$

Como $c = 100$,

$$b^2 = c^2 - a^2 \approx 10{,}000 - 1378 \approx 8622.$$

Por lo tanto, una ecuación (aproximada) de la hipérbola con focos en A y B que pasa por el punto P es

$$\frac{x^2}{1378} - \frac{y^2}{8622} = 1.$$

Tomando $y = 50$ (la coordenada y de P) obtenemos

$$\frac{x^2}{1378} - \frac{2500}{8622} = 1.$$

Despejando x concluimos que $x \approx 42.16$. Despreciando fracciones de milla, las coordenadas de P son aproximadamente (42, 50). •

EJERCICIOS 12.4

Ejercicios 1-18: Trace la gráfica de la hipérbola, calcule las coordenadas de los vértices y los focos y encuentre las ecuaciones de las asíntotas.

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
2. $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{16} = 1$
3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$
4. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$
5. $y^2 - 4x^2 = 16$
6. $x^2 - 2y^2 = 8$
7. $x^2 - y^2 = 1$
8. $y^2 - 16x^2 = 1$
9. $x^2 - 5y^2 = 25$
10. $4y^2 - 4x^2 = 1$
11. $3x^2 - y^2 = -3$
12. $16x^2 - 36y^2 = 1$
13. $25x^2 - 16y^2 + 250x + 32y + 109 = 0$
14. $y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$
15. $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$
16. $25x^2 - 9y^2 - 100x - 54y + 10 = 0$
17. $9y^2 - x^2 - 36y + 12x - 36 = 0$
18. $4x^2 - y^2 + 32x - 8y + 49 = 0$

Ejercicios 19-26: Encuentre una ecuación para la hipérbola que satisface las condiciones indicadas.

19. Focos $F(0, \pm 4)$, vértices $V(0, \pm 1)$.
20. Focos $F(\pm 8, 0)$, vértices $V(\pm 5, 0)$.
21. Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $V(\pm 3, 0)$.
22. Focos $F(0, \pm 3)$, vértices $V(0, \pm 2)$.
23. Focos $F(0, \pm 5)$, longitud del eje conjugado 4.
24. Vértices $V(\pm 4, 0)$, pasa por $P(8, 2)$.
25. Vértices $V(\pm 3, 0)$, ecuaciones de las asíntotas $y = \pm 2x$.
26. Focos $F(0, \pm 10)$, ecuaciones de las asíntotas $y = \pm \frac{1}{3}x$.
27. Las gráficas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se llaman *hipérbolas conjugadas*. Trace las gráficas de ambas ecuaciones en un mismo sistema de coordenadas con $a = 2$ y $b = 5$. Describa la relación entre las gráficas.

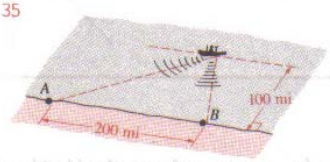
28. Demuestre que un punto $P(x, y)$ en una rama de una hipérbola está más cerca del foco interior cuando coincide con el vértice V.
29. Encuentre una ecuación para la recta tangente a la hipérbola $2x^2 - 5y^2 = 3$ en el punto $P(-2, 1)$.
30. Demuestre que una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ en el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

31. Encuentre los puntos de tangencia de dos rectas tangentes a la hipérbola $9x^2 - y^2 = 36$ y que se cortan en el eje y en el punto (0, 6).
32. Encuentre la ecuación de una recta que pasa por $P(2, -1)$ y es tangente a la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 16$.
33. Sea R la región acotada por la hipérbola con ecuación $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ y una recta vertical que pasa por el foco. Calcule el volumen del sólido que se obtiene al girar R alrededor de (a) el eje x; (b) el eje y.
34. Calcule el área de la región acotada por la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ y la recta que pasa por un foco y es perpendicular al eje transverso.
35. Un barco navega a 100 mi de la costa a lo largo de una línea recta paralela a ella. El barco envía

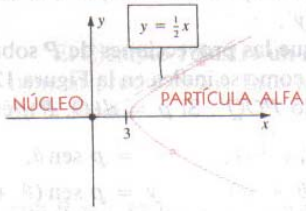
una señal de auxilio que se recibe en dos estaciones A y B de la guardia costera separadas 200 mi una de otra (véase la figura). Midiendo la diferencia entre los tiempos de llegada de la señal, los oficiales deducen que el barco está 160 mi más cerca de B que de A. ¿Dónde se encuentra el barco?

EJERCICIO 35



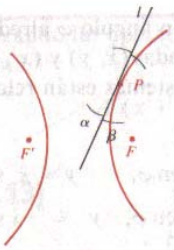
36. El físico Ernest Rutherford descubrió que las partículas alfa disparadas hacia un átomo son desviadas por su núcleo a lo largo de trayectorias hiperbólicas. La figura ilustra la trayectoria de una partícula disparada hacia el origen a lo largo de la recta $y = \frac{1}{2}x$ y que alcanza una distancia mínima al núcleo de 3 unidades. Halle la ecuación de la trayectoria.

EJERCICIO 36



37. Sea l la recta tangente en el punto P a una hipérbola con focos F y F' (véase la figura). Sea α el ángulo entre $F'P$ y l, y sea β el ángulo entre FP y l. Demuestre que $\alpha = \beta$. Ésta es la propiedad de reflexión análoga a la de la elipse (véase el Ejercicio 31 de la Sección 12.3). Un rayo de luz emitido por uno de los focos se reflejará en P a lo largo de una recta que pasa por el otro foco. Esta propiedad se aprovecha en el diseño de los telescopios de tipo Cassegrain (véase el Ejercicio 38).

EJERCICIO 37



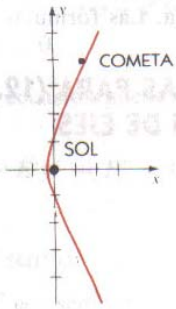
38. El diseño del telescopio Cassegrain (que data de 1672) aprovecha las propiedades de reflexión de la parábola y de la hipérbola (véase el ejercicio anterior y el 34 de la Sección 12.2). En la figura se muestra un espejo parabólico (partido) con focos en F_1 y eje sobre la recta l, y un segundo espejo hiperbólico con uno de sus focos también en F_1 y eje transverso a lo largo del eje de la parábola. Determine dónde se captarán finalmente los rayos de luz que llegan paralelos al eje común de los espejos.

EJERCICIO 38



39. Algunos cometas recorren trayectorias hiperbólicas con el Sol en uno de los focos. En la figura se muestra la gráfica de una de esas trayectorias. Se ha elegido el sistema de coordenadas de manera que el Sol esté en el origen y el eje transverso quede a lo largo del eje x. A partir de varias observaciones de la posición del cometa, los astrónomos han determinado que $12x^2 + 24x - 4y^2 + 9 = 0$ es una ecuación para la trayecto-

EJERCICIO 39



ria del cometa. Calcule qué tan cerca (en UA) llega a estar el cometa del Sol. (*Sugerencia:* Véase el Ejercicio 28.)

40. Sea l la recta tangente a una hipérbola en el punto P (véase la figura). Sean Q y R los puntos de intersección de l con las asíntotas. Demuestre que P es el punto medio del segmento QR.

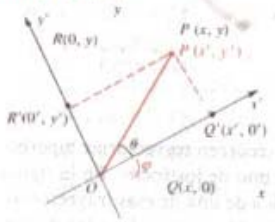
EJERCICIO 40



12.5 ROTACIÓN DE EJES

Puede pensarse que el sistema de coordenadas $x'y'$ usado en la traslación de ejes (12.3) se obtuvo moviendo el origen O del sistema xy a un nuevo punto (h, k) sin cambiar las direcciones positivas de los ejes ni el tamaño de la unidad. En esta sección se introduce un nuevo sistema de coordenadas manteniendo fijo el origen O y girando los ejes x y y alrededor de O hasta otra posición denotada por x' y y'. Una transformación de este tipo es una **rotación de ejes**.

FIGURA 12.30



Con referencia a la rotación de ejes en la Figura 12.30, sea φ el ángulo que debe girarse el eje x positivo para que coincida con el eje x' positivo. Si (x, y) son las coordenadas de un punto P con respecto al plano xy, entonces (x', y') serán las coordenadas del punto con respecto al nuevo sistema de coordenadas $x'y'$.

Supongamos que las proyecciones de P sobre los diversos ejes se denotan como se indica en la Figura 12.30 y denótese por θ al ángulo POQ'. Si $p = d(O, P)$, entonces

$$x' = p\cos\theta, \qquad y' = p\,\text{sen}\,\theta,$$
$$x = p\cos(\theta + \varphi), \qquad y = p\,\text{sen}(\theta + \varphi).$$

Aplicando las fórmulas para el seno y el coseno de una suma, se ve que

$$x = p\cos\theta\cos\varphi - p\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$$
$$y = p\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi + p\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi.$$

Usando el hecho de que $x' = p\cos\theta$ y $y' = p\,\text{sen}\,\theta$ se obtiene (i) del siguiente teorema. Las fórmulas en (ii) pueden obtenerse de (i) despejando x' y y'.

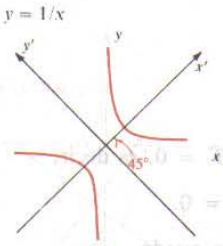
FÓRMULAS PARA ROTACIÓN DE EJES (12.12)

Si los ejes x y y giran un ángulo φ alrededor del origen O, entonces las coordenadas (x, y) y (x', y') de un punto P ubicado en los dos sistemas están relacionadas como sigue:

(i) $x = x'\cos\varphi - y'\,\text{sen}\,\varphi, \qquad y = x'\,\text{sen}\,\varphi + y'\cos\varphi$

(ii) $x' = x\cos\varphi + y\,\text{sen}\,\varphi, \qquad y' = -x\,\text{sen}\,\varphi + y\cos\varphi$

FIGURA 12.31



EJEMPLO 1 La gráfica de la ecuación $xy = 1$ o equivalentemente $y = 1/x$, está en la Figura 12.31. Los ejes coordenados giran un ángulo de 45°. Encontrar la gráfica de la ecuación con respecto al nuevo sistema de coordenadas $x'y'$.

Solución Sustituyendo $\varphi = 45°$ en (i) de las Fórmulas para Rotación de Ejes (12.12),

$$x = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' - y')$$

$$y = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' + y').$$

Reemplazando x y y en la ecuación $xy = 1$ se obtiene

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' - y')\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' + y') = 1.$$

Esto se reduce a

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1,$$

que es una ecuación de la hipérbola con vértices $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sobre el eje x'. Nótese que las asíntotas de la hipérbola tienen ecuaciones $y' = \pm x'$ en el nuevo sistema, que corresponden a los ejes x y y originales. •

El Ejemplo 1 ilustra un método para eliminar de una ecuación el término que contiene al producto xy. Este método puede servir para transformar cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

con $B \neq 0$, en una ecuación en x' y y' que no contiene término en $x'y'$. A continuación se muestra que esto siempre puede hacerse. Si se giran los ejes un ángulo φ, entonces sustituyendo x y y por sus expresiones en (12.12) (i) se obtiene

$$\begin{aligned} A(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi)^2 &\\ + B(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi)(x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi) &\\ + C(x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi)^2 + D(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi) &\\ + E(x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi) + F = 0. & \end{aligned}$$

Realizando las operaciones y ordenando términos, esta ecuación puede escribirse en la forma

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

con

(12.13)

$$A' = A\cos^2\varphi + B\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + C\operatorname{sen}^2\varphi$$

$$B' = 2(C - A)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$C' = A \operatorname{sen}^2 \varphi - B \operatorname{sen}\varphi \cos \varphi + C \cos^2 \varphi$$

$$D' = D \cos \varphi + E \operatorname{sen}\varphi$$

$$E' = -D \operatorname{sen}\varphi + E \cos \varphi$$

$$F' = F$$

Para eliminar el término $x'y'$ debe elegirse φ de manera que $B' = 0$, es decir,

$$2(C - A) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) = 0.$$

Usando las fórmulas para el doble de un ángulo, esta ecuación queda

$$(C - A) \operatorname{sen} 2\varphi + B \cos 2\varphi = 0,$$

que es equivalente a

$$\cot 2\varphi = \frac{A - C}{B}.$$

Lo anterior demuestra el siguiente resultado.

TEOREMA (12.14)

Para eliminar el término xy de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $B \neq 0$, elíjase un ángulo φ tal que

$$\cot 2\varphi = \frac{A - C}{B}$$

y aplíquense las Fórmulas para Rotación de Ejes (12.12).

Se concluye que la gráfica de cualquier ecuación en x y y y del tipo que se exhibe en el teorema anterior, es una sección cónica, excepto por algunos casos degenerativos.

EJEMPLO 2 Estudiar y trazar la gráfica de la ecuación

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 25 = 0.$$

Solución Usando la notación del teorema anterior,

$$A = 41, \qquad B = -24, \qquad C = 34,$$

y

$$\cot 2\varphi = \frac{41 - 34}{-24} = -\frac{7}{24}.$$

Como $\cot 2\varphi$ es negativo, podemos elegir 2φ de manera que $90° < 2\varphi < 180°$, y por lo tanto $\cos 2\varphi = -\frac{7}{25}$. (¿Por qué?) Ahora se utilizan las fórmulas para la mitad de un ángulo y resulta así

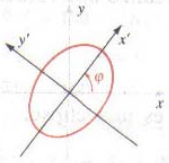
$$\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{7}{25})}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{7}{25})}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Por lo tanto, las fórmulas de rotación buscadas son

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y', \qquad y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'.$$

FIGURA 12.32



Sustituyendo x y y en la ecuación dada y simplificando obtenemos

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 1.$$

La gráfica es una elipse con vértices en $(\pm 1, 0)$ sobre el eje x'. Como $\tan\varphi = (\operatorname{sen}\varphi)/(\cos\varphi) = (\frac{4}{5})/(\frac{3}{5}) = \frac{4}{3}$, resulta que $\varphi = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$. Despreciando los segundos se obtiene $\varphi \approx 53°8'$. La gráfica está en la Figura 12.32. •

El siguiente teorema enseña cómo obtener información de la gráfica de la ecuación del Teorema (12.14) *antes* de girar los ejes.

TEOREMA (12.15)

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una sección cónica o una cónica degenerativa. Si la gráfica es una cónica entonces se trata de una

(i) parábola cuando $B^2 - 4AC = 0$.
(ii) elipse cuando $B^2 - 4AC < 0$.
(iii) hipérbola cuando $B^2 - 4AC > 0$.

Demostración Si los ejes x y y giran un ángulo φ entonces, aplicando las Fórmulas de Rotación de Ejes (12.12) se obtiene

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$

Con las relaciones en (12.13) puede demostrarse que

$$B^2 - 4AC = (B')^2 - 4A'C'.$$

Con una rotación de ejes adecuada, resulta $B' = 0$ y

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$

Exceptuando los casos degradados o degenerativos la gráfica de esta ecuación es una elipse cuando $A'C' > 0$ (es decir A' y C' tienen el mismo signo), una hipérbola cuando $A'C' < 0$ (A' y C' tienen signos opuestos), o una parábola si $A'C' = 0$ (es decir $A' = 0$ o bien $C' = 0$). Sin embargo, como $B' = 0$ entonces $B^2 - 4AC = -4A'C'$, y por lo tanto la gráfica es una elipse, hipérbola o parábola según que $B^2 - 4AC < 0$, $B^2 - 4AC > 0$, o bien $B^2 - 4AC = 0$, respectivamente. • •

La expresión $B^2 - 4AC$ se llama **discriminante** de la ecuación del Teorema (12.15). Se demostró que el discriminante es **invariante** ante la rotación de ejes ya que su valor no cambia con un giro.

EJEMPLO 3 Usar el Teorema (12.15) para determinar si la gráfica de la ecuación

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 25 = 0$$

es una parábola, una elipse o una hipérbola.

Solución Estudiamos esta ecuación en el Ejemplo 2, donde se realizó una rotación de ejes. Como $A = 41$, $B = -24$ y $C = 34$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = 576 - 4(41)(34) = -5000 < 0.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema (12.15)(ii), la gráfica es una elipse. •

En algunos casos al eliminar el término xy, la ecuación resultante contiene un término en x' o y'. En tal caso es conveniente trasladar los ejes del sistema de coordenadas $x'y'$ a fin de obtener la gráfica. Los siguientes ejercicios incluyen algunos problemas de éstos.

EJERCICIOS 12.5

Ejercicios 1-14: (a) Aplique el Teorema (12.15) para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola. (b) Realice una rotación de ejes adecuada a cada caso y trace la gráfica de la ecuación.

1. $32x^2 - 72xy + 53y^2 = 80$
2. $7x^2 - 48xy - 7y^2 = 225$
3. $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 4$
4. $x^2 - xy + y^2 = 3$
5. $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9$
6. $11x^2 - 10\sqrt{3}xy + y^2 = 20$
7. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$
8. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0$
9. $5x^2 + 6\sqrt{3}xy - y^2 + 8x - 8\sqrt{3}y - 12 = 0$
10. $18x^2 - 48xy + 82y^2 + 6\sqrt{10}x + 2\sqrt{10}y - 80 = 0$
11. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y + 45 = 0$
12. $15x^2 + 20xy - 4\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y - 100 = 0$
13. $40x^2 - 36xy + 25y^2 - 8\sqrt{13}x - 12\sqrt{13}y = 0$
14. $64x^2 - 240xy + 225y^2 + 1020x - 544y = 0$

12.6 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Secciones cónicas.
2. Parábola.
3. Foco, directriz, vértice y eje de una parábola.
4. Traslación de ejes.
5. Elipse.
6. Eje mayor y eje menor de una elipse.
7. Focos y vértices de una elipse.
8. Excentricidad de una elipse.
9. Hipérbola.
10. Eje transverso y eje conjugado de una hipérbola.
11. Focos y vértices de una hipérbola.
12. Asíntotas de una hipérbola.
13. Propiedades de reflexión de las cónicas.
14. Rotación de ejes.

633

EJERCICIO 33



34. Sea R la región delimitada por la parábola $9y = 5x^2 - 39x + 90$ y una de las asíntotas de la hipérbola $9y^2 - 4x^2 = 36$.
 (a) Calcule el área de R.
 (b) Calcule el volumen del sólido que resulta al girar R alrededor del eje y.

35. Una elipse con ejes de longitudes 8 y 4 gira alrededor de su eje mayor. Calcule el volumen del sólido resultante.

36. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = r^2$. Las secciones transversales del sólido, correspondientes a planos perpendiculares al eje x, son medias elipses que tienen siempre un eje de longitud constante c. Calcule el volumen del sólido.

37. Determine el centro de gravedad de la región del plano xy acotada por la hipérbola $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2x^2$ y la recta $y = c$ que pasa por un foco de aquélla.

38. Utilice el discriminante para identificar la gráfica de cada ecuación. (No es necesario trazar la gráfica).
 (a) $2x^2 - 3xy + 4y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$
 (b) $3x^2 + 2xy - y^2 - 2x + y + 4 = 0$
 (c) $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 3y + 5 = 0$

Ejercicios 39-40: Realice una rotación de ejes adecuada a cada caso, describa la gráfica de la ecuación y trace dicha gráfica.)

39. $x^2 - 8xy + 16y^2 - 12\sqrt{17}x - 3\sqrt{17}y = 0$

40. $8x^2 + 12xy + 17y^2 - 16\sqrt{5}x - 12\sqrt{5}y = 0$

CAPÍTULO 13

CURVAS PLANAS Y COORDENADAS POLARES

En este capítulo se estudian las ecuaciones paramétricas y polares de las curvas. Las aplicaciones incluyen rectas tangentes, áreas, longitud de arco y superficies de revolución.

13.1 CURVAS PLANAS

A veces se dice que la gráfica de una ecuación $y = f(x)$, donde f es una función, es una *curva plana*. Sin embargo, hay muchas curvas planas útiles que no son de este tipo. La siguiente definición es satisfactoria para la mayoría de las aplicaciones.

DEFINICIÓN (13.1)

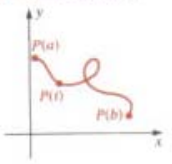
Una **curva plana** es un conjunto C de pares ordenados de la forma $(f(t), g(t))$, donde f y g son funciones continuas en un intervalo I.

Por sencillez, frecuentemente se llama **curva** a una curva plana. La curva C en la Definición (13.1) consta de todos los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares de la forma $P(t) = (f(t), g(t))$, para t en I. Cada $P(t)$ es un *punto* de la curva. A veces es conveniente imaginar que el punto $P(t)$ traza la curva C cuando t varía en el intervalo I. Esto es especialmente cierto en las aplicaciones en las que t representa el tiempo y $P(t)$ la posición al tiempo t de una partícula en movimiento.

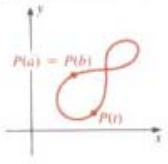
En la Figura 13.1 aparecen las representaciones de algunas curvas, para las que I es un intervalo cerrado $[a, b]$. Si $P(a) \neq P(b)$, como en (i) de la figura, entonces $P(a)$ y $P(b)$ son los **extremos** de C. La curva ilustrada en (i) se corta a sí misma, es decir, hay dos valores diferentes de t que dan el mismo punto. Si $P(a) = P(b)$ como se ilustra en la Figura 13.1(ii), entonces C es una **curva cerrada**. Si $P(a) = P(b)$ y C no se corta a sí misma en ningún otro punto, como se ilustra en (iii), entonces C es una **curva cerrada simple**.

FIGURA 13.1

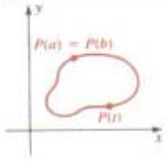
(i) Curva (plana)



(ii) Curva cerrada



(iii) Curva cerrada simple



En la siguiente definición se da una manera conveniente de representar curvas.

DEFINICIÓN (13.2)

Sea C una curva que consiste en todos los pares ordenados $(f(t), g(t))$, donde f y g son continuas en un intervalo I. Las ecuaciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

para t en I, son **ecuaciones paramétricas** de C con **parámetro** t.

La curva C en la Definición (13.2) se llama **curva parametrizada** y las ecuaciones paramétricas son una **parametrización** de C. A veces se usa la notación

$$x = f(t), \quad y = g(t); \quad t \text{ en } I$$

para indicar el dominio I de f y g. La continuidad de f y g implica que un cambio pequeño en t produce un cambio pequeño en la posición del punto $(f(t), g(t))$ en C. Por lo tanto, puede obtenerse la curva trazando muchos puntos y uniéndolos en el orden en que aparecen cuando t crece, como se ilustra en el Ejemplo 1. El ejemplo muestra también que a veces es posible eliminar el parámetro y obtener una ecuación para C en términos de las variables x y y únicamente.

EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de la curva C con parametrización

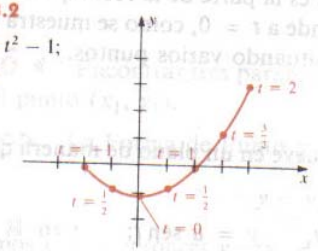
$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \qquad -1 \le t \le 2.$$

Solución La ecuaciones paramétricas sirven para formar una tabla con las coordenadas de puntos $P(x, y)$ en C como la siguiente.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	1	0	1	2	3	4
y	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

Situando puntos y utilizando la continuidad de f y g, obtenemos el croquis de la Figura 13.2.

FIGURA 13.2
$x = 2t$, $y = t^2 - 1$;
$-1 \le t \le 2$



Se puede obtener una descripción más clara de la gráfica eliminando el parámetro. Despejando t de la primera ecuación paramétrica, obtenemos $t = x/2$. Sustituyendo t en la segunda ecuación,

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 \qquad \text{o bien} \qquad y + 1 = \tfrac{1}{4}x^2.$$

La gráfica de esta ecuación es una parábola con eje vertical y vértice en el punto $(0, -1)$. Nótese sin embargo que, como $x = 2t$ y $-1 \le t \le 2$, tenemos que $-2 \le x \le 4$. Por lo tanto, la curva C es la parte de la parábola que se encuentra entre los puntos $(-2, 0)$ y $(4, 3)$ y se muestra en la Figura 13.2.

Una curva tiene muchas parametrizaciones diferentes. La curva C del Ejemplo 1 tiene entre otras, las siguientes parametrizaciones:

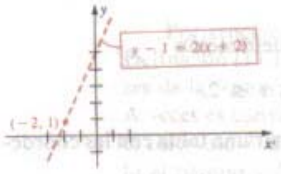
$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \qquad -1 \le t \le 2$$

$$x = t, \quad y = \tfrac{1}{4}t^2 - 1; \qquad -2 \le t \le 4$$

$$x = t^3, \quad y = \tfrac{1}{4}t^6 - 1; \qquad \sqrt[3]{-2} \le t \le \sqrt[3]{4}$$

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que con frecuencia es útil eliminar el parámetro *antes* de ubicar puntos.

FIGURA 13.3



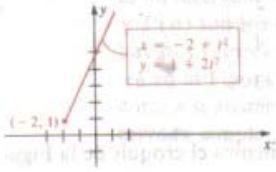
EJEMPLO 2 Trazar la representación de la curva C que tiene la parametrización

$$x = -2 + t^2, \quad y = 1 + 2t^2; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Solución Para eliminar el parámetro, de la primera ecuación obtenemos $t^2 = x + 2$. Sustituyendo t^2 en la segunda ecuación queda

$$y = 1 + 2(x + 2) \quad \text{o bien} \quad y - 1 = 2(x + 2).$$

FIGURA 13.4



Ésta es la ecuación de una recta con pendiente 2 que pasa por el punto $(-2, 1)$, como se indica con línea punteada en la Figura 13.3. Sin embargo, como $t^2 \ge 0$,

$$x = -2 + t^2 \ge -2 \quad \text{y} \quad y = 1 + 2t^2 \ge 1.$$

Resulta que la representación de C es la parte de la recta que se encuentra a la derecha del punto $(-2, 1)$, el cual corresponde a $t = 0$, como se muestra en la Figura 13.4. Este hecho puede verificarse también situando varios puntos. •

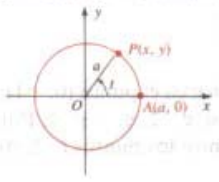
EJEMPLO 3 Una partícula se mueve en un plano de manera que su posición $P(x, y)$ al tiempo t está dada por

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$$

donde a es una constante positiva. Describir la trayectoria de la partícula.

FIGURA 13.5

$x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$; t en $\mathbb{R}$



Solución Si escribimos las ecuaciones paramétricas como

$$\frac{x}{a} = \cos t, \qquad \frac{y}{a} = \operatorname{sen} t$$

y usamos la identidad $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, obtenemos

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1 \quad \text{o bien} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Entonces la partícula se mueve sobre una circunferencia de radio a con centro en el origen (véase la Figura 13.5). En particular, la partícula está en el punto $A(a, 0)$ cuando $t = 0$; en $(0, a)$ cuando $t = \pi/2$; en $(-a, 0)$ cuando $t = 3\pi/2$, etcétera. En general, cuando t aumenta, la partícula se mueve sobre la circunferencia en el sentido contrario al del reloj, dando una vuelta cada 2π unidades de tiempo.

Observemos que en este ejemplo el parámetro t se puede interpretar geométricamente como la medida en radianes del ángulo AOP. •

Si una curva C se describe mediante una ecuación $y = f(x)$, donde f es una función continua, entonces pueden obtenerse fácilmente ecuaciones paramétricas de C definiendo

$$x = t, \quad y = f(t)$$

para t en el dominio de f. Por ejemplo, para $y = x^3$, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = t^3; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Se pueden usar diferentes sustituciones para x, con la condición de que cuando t varíe en algún intervalo, x tome todos los valores en el dominio de f. Así, la gráfica de $y = x^3$ también está dada por

$$x = t^{1/3}, \quad y = t; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Sin embargo, las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$$

sólo dan la parte de la gráfica de $y = x^3$ que se encuentra entre los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

EJEMPLO 4 Encontrar tres parametrizaciones para la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1).

Solución La Forma de Punto y Pendiente de la recta da

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Si tomamos $x = t$, entonces $y - y_1 = m(t - x_1)$ y resultan las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = y_1 + m(t - x_1); \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Obtenemos otro par de ecuaciones paramétricas de la recta tomando $x - x_1 = t$. En este caso $y - y_1 = mt$ y así

$$x = x_1 + t, \quad y = y_1 + mt; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Para obtener una tercera parametrización, tomamos $x - x_1 = \tan t$ y entonces,

$$x = x_1 + \tan t, \quad y = y_1 + m \tan t; \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Hay muchas parametrizaciones más de la recta. •

Las ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = a \operatorname{sen} \omega_1 t, \qquad y = b \cos \omega_2 t,$$

donde a, b, ω_1 y ω_2 son constantes y $t \geq 0$, aparecen en el estudio de la electricidad. Las variables x y y suelen representar voltajes o corrientes al tiempo t. La curva resultante es a menudo difícil de trazar ubicando puntos o eliminando el parámetro. Sin embargo, usando un osciloscopio y poniendo voltajes (o corrientes) en las entradas vertical y horizontal, se puede visualizar la gráfica como una figura en la pantalla del osciloscopio. Una imagen de este tipo se llama **figura de Lissajous**. Estas complicadas gráficas también pueden obtenerse por computadora.

EJEMPLO 5

(a) Trazar la figura de Lissajous correspondiente a

$$x = \operatorname{sen} 2t, \qquad y = \cos t; \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

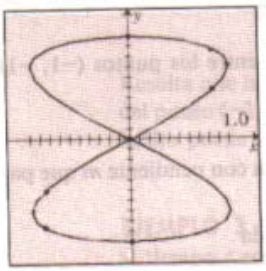
(b) Encontrar una ecuación de la curva en x y y.

Solución

(a) La gráfica de la Figura 13.6 se generó con una computadora. Para trazar la gráfica situando puntos, podemos hacer una tabla como en el Ejemplo 1. La siguiente tabla da algunos valores de x y y para $0 \leq t \leq \pi$. (También podríamos usar una calculadora para obtener valores aproximados de x y y.)

FIGURA 13.6

$x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$; $0 \leq t \leq 2\pi$



t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Los puntos $P(x, y)$ con los valores indicados de t se indican en la Figura 13.6. Cuando t aumenta de 0 a $\pi/2$, el punto $P(x, y)$ traza la parte de la curva que está en el Cuadrante I (en dirección negativa); cuando t aumenta de $\pi/2$ a π, $P(x, y)$ traza la parte que está en el Cuadrante III (en dirección positiva); para $\pi \leq t \leq 3\pi/2$, obtenemos la parte en el Cuadrante IV, y para $3\pi/2 \leq t \leq 2\pi$, la parte en el Cuadrante II.

(b) Para encontrar una ecuación de la curva en x y y, utilizamos las identidades trigonométricas y hacemos manipulaciones algebraicas. Escribiendo $x = 2 \operatorname{sen} t \cos t$ y elevando al cuadrado, obtenemos

$$x^2 = 4 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t \quad \text{o bien} \quad x^2 = 4(1 - \cos^2 t)\cos^2 t.$$

Como $y = \cos t$, esto da

$$x^2 = 4(1 - y^2)y^2,$$

que es una ecuación de la curva.

Si queremos expresar y en términos de x, puede escribirse la ecuación anterior como

$$4y^4 - 4y^2 + x^2 = 0$$

y usar la Fórmula Cuadrática para evaluar y^2 como sigue:

$$y^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16x^2}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{2}$$

Tomando luego la raíz cuadrada,

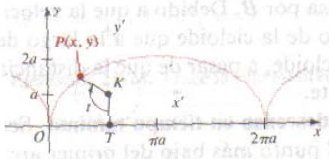
$$y = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{2}}.$$

Esta ecuación complicada muestra la ventaja de expresar la curva en forma paramétrica. •

Una curva C es **regular (o alisada)** si tiene una parametrización $x = f(t), y = g(t)$, en un intervalo I tal que las derivadas f' y g' son continuas en I y no se anulan simultáneamente excepto tal vez en los extremos de I. Una curva C es **regular parte por parte** si se puede partir el intervalo I en subintervalos cerrados de manera que C sea regular en cada subintervalo. La representación de una curva regular no tiene picos. Las curvas dadas en los Ejemplos 1-5 son regulares; la que se describe en el siguiente ejemplo es regular parte por parte.

EJEMPLO 6 La curva trazada en un plano por un punto fijo P en una circunferencia que rueda sobre una recta, se llama **cicloide**. Encontrar ecuaciones paramétricas para una cicloide.

FIGURA 13.7
Cicloide

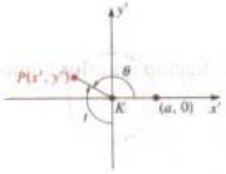


Solución Supóngase que la circunferencia tiene radio a y que gira a lo largo (por arriba) del eje x en el sentido positivo. Supongamos que en algún momento P está en el origen. La Figura 13.7 muestra parte de la curva con una posición típica de la circunferencia.

Sea K el centro de la circunferencia y T su punto de tangencia con el eje x. Definimos el parámetro t como la medida en radianes del ángulo TKP. La distancia que la circunferencia ha rodado es $d(O, T) = at$. Por lo tanto, las coordenadas de K son (at, a). Si consideramos un sistema coordenado $x'y'$ con origen en $K(at, a)$ y si $P(x', y')$ denota el punto P en este sistema, entonces, por las Fórmulas para Traslación de Ejes (12.3) con $h = at$ y $k = a$,

$$x = at + x', \quad y = a + y'.$$

FIGURA 13.8



Si, como en la Figura 13.8, θ denota el ángulo formado por el eje $x'y'$ y el segmento KP, entonces $\theta = (3\pi/2) - t$. Por lo tanto,

$$x' = a\cos\theta = a\cos[(3\pi/2) - t] = -a\,\text{sen}\,t$$
$$y' = a\,\text{sen}\,\theta = a\,\text{sen}[(3\pi/2) - t] = -a\cos t,$$

y sustituyendo esto en $x = at + x'$, $y = a + y'$, obtenemos unas ecuaciones paramétricas de la cicloide:

$$x = a(t - \text{sen}\,t), \qquad y = a(1 - \cos t); \qquad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Derivando las ecuaciones paramétricas de la cicloide,

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a\,\text{sen}\,t.$$

Estas derivadas son continuas para todo t pero se anulan simultáneamente en $t = 2\pi n$ para todo entero n. Nótese que los puntos correspondientes a $t = 2\pi n$ dan las abscisas en el origen y que la cicloide en esos puntos tiene picos (véase la Figura 13.7). Por lo tanto, la cicloide no es enteramente regular. La gráfica es regular parte por parte en todo intervalo de t $[2\pi n, 2\pi(n + 1)]$, para un entero n.

FIGURA 13.9



Si $a < 0$, entonces la gráfica de $x = a(t - \text{sen}\,t)$, $y = a(1 - \cos t)$, es la cicloide invertida que se obtiene si la circunferencia del Ejemplo 6 rueda *por abajo* del eje x. Esta curva tiene varias propiedades físicas importantes. En particular, supongamos que un alambre delgado pasa por dos puntos fijos A y B como se ilustra en la Figura 13.9 y que la forma del alambre se puede cambiar arbitrariamente doblándolo. Supongamos además que se ensarta una cuenta en el alambre y se deja que resbale a lo largo de él de manera que la única fuerza que actúe sobre la cuenta sea la gravedad. Ahora se pregunta cuál de todas las posibles trayectorias hará que la cuenta resbale de A a B en el menor tiempo posible. Es natural creer que la trayectoria buscada es el segmento de recta que va de A a B, pero ésta no es la respuesta correcta. La trayectoria que requiere el tiempo mínimo coincide con la gráfica de la cicloide invertida con A en el origen y que pasa por B. Debido a que la velocidad de la cuenta aumenta más rápidamente a lo largo de la cicloide que a lo largo de la recta, la cuenta llega más rápidamente a B por la cicloide, a pesar de que la distancia es mayor. La demostración de este resultado se omite.

Hay otra propiedad interesante de esta **curva de descenso en tiempo mínimo**. Sea A el origen y B el punto con abscisa $\pi|a|$; es decir, el punto más bajo del primer arco de la cicloide a la derecha de A. Si la cuenta se suelta en *algún* punto entre A y B, el tiempo que requiere para llegar a B es siempre el mismo; es decir, es independiente del punto donde se suelta.

En las aplicaciones aparecen variedades de la cicloide. Por ejemplo, la curva que traza un punto fijo en uno de los rayos de una rueda de una motocicleta que va por una carretera recta, es del tipo de la cicloide. En este caso, la curva no tiene picos ni

toca a la carretera (el eje x) como lo hace la gráfica de una cicloide. La curva trazada por un punto fijo en la ceja de una rueda de vagón de tren (que rebasa hacia abajo el perfil de la vía) muestra lazos a intervalos regulares (véase el Ejercicio 44). En los Ejercicios 37 y 38 se definen otras cicloides.

EJERCICIOS 13.1

Ejercicios 1-20: (a) Trace la representación de la curva C y (b) encuentre una ecuación rectangular cuya gráfica contenga a los puntos de C.

1. $x = t - 2,\ y = 2t + 3;\quad 0 \le t \le 5$
2. $x = 1 - 2t,\ y = 1 + t;\quad -1 \le t \le 4$
3. $x = t^2 + 1,\ y = t^2 - 1;\quad -2 \le t \le 2$
4. $x = t^3 + 1,\ y = t^3 - 1;\quad -2 \le t \le 2$
5. $x = 4t^2 - 5,\ y = 2t + 3;\quad t$ en $\mathbb{R}$
6. $x = t^3,\ y = t^2;\quad t$ en $\mathbb{R}$
7. $x = e^t,\ y = e^{-2t};\quad t$ en $\mathbb{R}$
8. $x = \sqrt{t},\ y = 3t + 4;\quad t \ge 0$
9. $x = 2\operatorname{sen} t,\ y = 3\cos t;\quad 0 \le t \le 2\pi$
10. $x = \cos t - 2,\ y = \operatorname{sen} t + 3;\quad 0 \le t \le 2\pi$
11. $x = \sec t,\ y = \tan t;\quad -\pi/2 < t < \pi/2$
12. $x = \cos 2t,\ y = \operatorname{sen} t;\quad -\pi \le t \le \pi$
13. $x = t^2,\ y = 2\ln t;\quad t > 0$
14. $x = \cos^3 t,\ y = \operatorname{sen}^3 t;\quad 0 \le t \le 2\pi$
15. $x = \operatorname{sen} t,\ y = \csc t;\quad 0 < t \le \pi/2$
16. $x = e^t,\ y = e^{-t};\quad t$ en $\mathbb{R}$
17. $x = \cosh t,\ y = \operatorname{senh} t;\quad t$ en $\mathbb{R}$
18. $x = 3\cosh t,\ y = 2\operatorname{senh} t;\quad t$ en $\mathbb{R}$
19. $x = t,\ y = \sqrt{t^2 - 1};\quad |t| \ge 1$
20. $x = -2\sqrt{1 - t^2},\ y = t;\quad |t| \le 1$

Ejercicios 21-24: Trace la representación de la curva C.

21. $x = t,\ y = \sqrt{t^2 - 2t + 1};\quad 0 \le t \le 4$
22. $x = 2t,\ y = 8t^3;\quad -1 \le t \le 1$
23. $x = (t + 1)^3,\ y = (t + 2)^2;\quad 0 \le t \le 2$
24. $x = \tan t,\ y = 1;\quad -\pi/2 < t < \pi/2$

Ejercicios 25-26: Las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 están dadas paramétricamente para t en $\mathbb{R}$. Trace sus gráficas y discuta las similaridades y las diferencias.

25. C_1: $x = t^2,\ y = t$ $\quad C_2$: $x = t^4,\ y = t^2$
C_3: $x = \operatorname{sen}^2 t,\ y = \operatorname{sen} t$ $\quad C_4$: $x = e^{2t},\ y = -e^t$
26. C_1: $x = t,\ y = 1 - t$
C_2: $x = 1 - t^2,\ y = t^2$
C_3: $x = \cos^2 t,\ y = \operatorname{sen}^2 t$
C_4: $x = -t + \ln t,\ y = 1 + t - \ln t$

Ejercicios 27-28: Las ecuaciones paramétricas dan la posición de un punto $P(x, y)$ al tiempo t. Describa el movimiento del punto durante el intervalo de tiempo indicado.

27. (a) $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t;\quad 0 \le t \le \pi$
(b) $x = \operatorname{sen} t,\ y = \cos t;\quad 0 \le t \le \pi$
(c) $x = t,\ y = \sqrt{1 - t^2};\quad -1 \le t \le 1$
28. (a) $x = t^2,\ y = 1 - t^2;\quad 0 \le t \le 1$
(b) $x = 1 - \ln t,\ y = \ln t;\quad 1 \le t \le e$
(c) $x = \cos^2 t,\ y = \operatorname{sen}^2 t;\quad 0 \le t \le 2\pi$

29. Demuestre que si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos distintos, entonces

$$x = (x_2 - x_1)t + x_1,$$
$$y = (y_2 - y_1)t + y_1; \qquad t \text{ en } \mathbb{R}$$

son ecuaciones paramétricas de la recta l que pasa por P_1 y P_2. Encuentre otros tres pares de ecuaciones paramétricas para la recta l. Demuestre que l tiene un número infinito de parametrizaciones.

30. Describa las diferencias entre la gráfica de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ y la gráfica de

$$x = a\cosh t, \qquad y = b\operatorname{senh} t; \qquad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

31. Demuestre que

$$x = a\cos t + h, \qquad y = b\operatorname{sen} t + k;$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

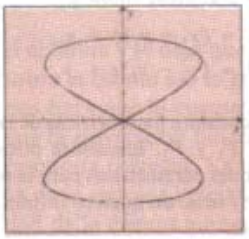
es una parametrización de la elipse con centro en el punto (h, k) y semiejes de longitudes a y b.

32. Encuentre ecuaciones paramétricas para la parábola que tiene
(a) vértice $V(0, 0)$, foco $F(0, p)$.
(b) vértice $V(h, k)$, foco $F(h, k + p)$.

33. Las figuras de Lissajous se usan frecuentemente en la teoría de la electricidad para exhibir la relación entre dos voltajes o corrientes (véase el Ejemplo 5).
(a) Lleve a cabo la descripción de las figuras de Lissajous que resultan cuando $f(t) = a \operatorname{sen} \omega t$ y $g(t) = b \cos \omega t$, para $t \geq 0$.
(b) Suponga que $f(t) = a \operatorname{sen} \omega_1 t$ y $g(t) = b \operatorname{sen} \omega_2 t$, donde ω_1 y ω_2 son números racionales positivos. El cociente ω_2/ω_1 puede escribirse como m/n para dos enteros positivos m y n. Demuestre que $f(t + p) = f(t)$ y $g(t + p) = g(t)$ para el número real $p = 2\pi n/\omega_1$. Observe que esto significa que la curva pasa sobre sí misma cada p unidades de tiempo.

34. En la figura se muestra una gráfica generada por computadora de la figura de Lissajous dada paramétricamente por $x = 2 \operatorname{sen} 3t$, $y = 3 \operatorname{sen} 1.5t$; $t \geq 0$.
(a) Encuentre el periodo de la figura, es decir, la magnitud del menor intervalo de tiempo en el que se traza la curva.
(b) Encuentre la distancia máxima desde origen de un punto de la curva.

EJERCICIO 34



Ejercicios 35-36: Trace la figura de Lissajous.

35. $x = \operatorname{sen} 3t$, $y = \cos t$; $t \geq 0$

36. $x = 4 \operatorname{sen} 2t$, $y = 2 \cos 3t$; $t \geq 0$

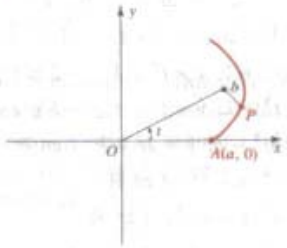
37. Una circunferencia C de radio b rueda por afuera de una segunda circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, donde $b < a$. Sea P un punto fijo en C cuya posición inicial es $A(a, 0)$ (véase la figura). Demuestre que si el parámetro t es el ángulo entre la parte positiva del eje x y el segmento de recta que va de O al centro de C, entonces las ecuaciones paramétricas de la curva trazada por P (llamada *epicicloide*) son

$$x = (a + b)\cos t - b\cos\left(\frac{a + b}{b}t\right)$$

$$y = (a + b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\left(\frac{a + b}{b}t\right)$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$.

EJERCICIO 37



38. Si la circunferencia C del Ejercicio 37 rueda por el interior de una segunda circunferencia (véase la figura), entonces la curva trazada por P es una *hipocicloide*. Demuestre que las ecuaciones paramétricas de esta curva son

$$x = (a - b)\cos t + b\cos\left(\frac{a - b}{b}t\right)$$

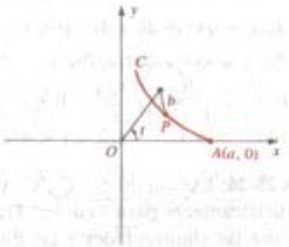
$$y = (a - b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\left(\frac{a - b}{b}t\right)$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$. Demuestre que si $b = \frac{1}{4}a$, entonces

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\operatorname{sen}^3 t$$

y trace la curva.

EJERCICIO 38



645

13.2 RECTAS TANGENTES Y LONGITUD DE ARCO

La curva C con ecuaciones paramétricas

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \qquad -1 \le t \le 2$$

se puede representar también por una ecuación de la forma $y = k(x)$ para alguna función k definida en un intervalo adecuado. En el Ejemplo 1 de la sección se eliminó el parámetro t y se llegó a

$$y = k(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - 1 \qquad \text{para} \qquad -2 \le x \le 4.$$

De esto resulta que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto $P(x, y)$ de C es

$$k'(x) = \tfrac{1}{2}x \quad \text{o bien} \quad k'(x) = \tfrac{1}{2}(2t) = t.$$

A continuación se deducirá una fórmula que puede usarse para encontrar la pendiente directamente a partir de las ecuaciones paramétricas.

Sean $x = f(t)$, $y = g(t)$ ecuaciones paramétricas de una curva C que también puede representarse por una ecuación de la forma $y = k(x)$ para alguna función k. Supongamos que f, g y k son derivables en sus dominios. Si $P(f(t), g(t))$ es un punto en C, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación $y = k(x)$, es decir,

$$g(t) = k(f(t)).$$

Aplicando la Regla de la Cadena,

$$g'(t) = k'(f(t))f'(t) = k'(x)f'(t).$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en P es

$$k'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{siempre que } f'(t) \neq 0.$$

Para encontrar los puntos en los que la recta tangente es horizontal, se resuelve la ecuación $g'(t) = 0$. Si $f'(t) = 0$ y $g'(t) \neq 0$ para algún t, entonces C tiene una recta tangente vertical en el punto correspondiente a t. Si $f'(t)$ y $g'(t)$ se anulan simultáneamente, se requiere entonces mayor información.

Las condiciones impuestas en la discusión anterior se satisfacen si C es regular y $f'(t) \neq 0$ para todo t en el intervalo cerrado $[a, b]$. En este caso, $f'(t) > 0$ o bien $f'(t) < 0$ en todo $[a, b]$ y, del Teorema (7.27) o del Teorema (7.28), se deduce que f tiene una función inversa f^{-1}. Como $x = f(t)$, se puede escribir $t = f^{-1}(x)$ para x en el intervalo $[f(a), f(b)]$. Por lo tanto,

$$y = g(t) = g(f^{-1}(x)) = k(x)$$

donde k es la función compuesta $g \circ f^{-1}$.

Una manera fácil de recordar la fórmula para $k'(x)$ es escribirla en la notación diferencial como se hace en el siguiente teorema.

TEOREMA (13.3)

Si una curva regular C está dada paramétricamente por $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces la pendiente dy/dx de la recta tangente a C en $P(x, y)$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad \text{siempre que} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

EJEMPLO 1 Encontrar las pendientes de las rectas tangente y normal en el punto $P(x, y)$ a la curva con parametrización $x = 2t$, $y = t^2 - 1$; $-1 \leq t \leq 2$.

Solución La curva es la misma que se consideró en el Ejemplo 1 de la sección anterior (véase la Figura 13.2). Usando el Teorema (13.3) con $x = 2t$ y $y = t^2 - 1$, obtenemos que la pendiente de la recta tangente en $P(x, y)$ es

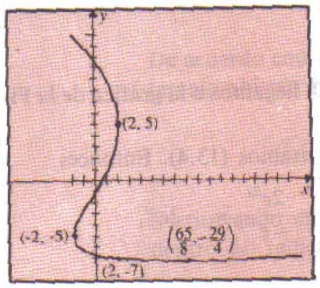
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t}{2} = t.$$

Esto concuerda con la discusión al principio de la sección, donde usamos la forma $y = k(x)$ para demostrar que $m = \frac{1}{2}x = t$.

La pendiente de la recta normal es recíproco negativo $-1/t$, siempre y cuando $t \neq 0$. •

FIGURA 13.10

$x = t^3 - 3t$, $y = t^2 - 5t - 1$; t en $\mathbb{R}$



EJEMPLO 2 Sea C una curva con ecuaciones paramétricas $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 - 5t - 1$; t en $\mathbb{R}$. Encontrar la ecuación de una recta tangente a C en el punto correspondiente a $t = 2$. ¿Para qué valores de t la recta tangente es horizontal o vertical?

Solución La Figura 13.10 muestra una gráfica generada por computadora. Como suele suceder con estas gráficas, es difícil, si no imposible, encontrar la pendiente exacta de la recta tangente en cualquier punto $P(x, y)$ de la curva. Sin embargo, aplicando el Teorema (13.3),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t - 5}{3t^2 - 3}.$$

Usando las ecuaciones paramétricas para C, vemos que el punto correspondiente para $t = 2$ es $(2, -7)$ (véase la Figura 13.10). De la fórmula para dy/dx con $t = 2$, resulta que la pendiente m de la recta tangente en este punto es

$$m = \frac{2(2) - 5}{3(2^2) - 3} = -\frac{1}{9}.$$

Aplicando la Forma de Punto y Pendiente, obtenemos la siguiente ecuación para esta recta tangente:

$$y + 7 = -\tfrac{1}{9}(x - 2) \quad \text{o bien} \quad x + 9y + 61 = 0.$$

La recta tangente es horizontal si $dy/dt = 0$; es decir, si $2t - 5 = 0$ o bien $t = \frac{5}{2}$. El punto correspondiente en C es $(\frac{65}{8}, -\frac{29}{4})$, como se muestra en la Figura 13.10.

La recta tangente es vertical si $3t^2 - 3 = 0$. Entonces hay rectas tangentes verticales en los puntos correspondientes a $t = 1$ y $t = -1$; es decir, en (2, 5) y (−2,5). •

Si C está dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y si y' es una función derivable de t, se puede encontrar d^2y/dx^2 aplicando el Teorema (13.3) a y' como sigue:

(13.4)
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

Nótese que $d^2y/dx^2 \neq g''(t)/f''(t)$.

EJEMPLO 3 Sea C una curva con ecuaciones paramétricas

$$x = e^{-t}, \quad y = e^{2t}; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

(a) Trazar la representación de C.

(b) Evaluar d^2y/dx^2 directamente de las ecuaciones paramétricas.

(c) Definir una función k que tenga la misma gráfica que C y verificar la respuesta a la parte (b).

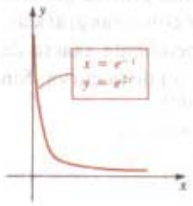
(d) Analizar la concavidad de C.

Solución

(a) Como $x = e^{-t} = 1/e^t$, tenemos que $e^t = 1/x$. Sustituyendo en $y = e^{2t} = (e^t)^2$, obtenemos la ecuación

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

FIGURA 13.11



Recordando que $x = e^{-t} > 0$, llegamos a la gráfica de la Figura 13.11.

(b) Para encontrar d^2y/dx^2 usamos (13.4). Entonces

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t},$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{-6e^{3t}}{-e^{-t}} = 6e^{4t}.$$

(c) De la parte (a), se tiene que una función k que tiene la misma gráfica que C es

$$k(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \qquad \text{para } x > 0.$$

Puesto que $k'(x) = -2x^{-3}$,

$$k''(x) = 6x^{-4} = 6(e^{-t})^{-4} = 6e^{4t}$$

que concuerda con la parte (b).

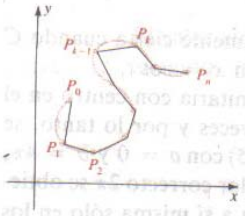
(d) Como $d^2y/dx^2 = 6e^{4t} > 0$ para todo t, la curva C tiene concavidad hacia arriba en todos los puntos. •

Si una curva es la gráfica de una ecuación $y = f(x)$ y f es regular en un intervalo $[a, b]$, entonces su **longitud de arco** puede calcularse evaluando la integral $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ (véase la Definición (6.9)). A continuación se efectuará la obtención de una fórmula para calcular la longitud de curvas parametrizadas.

Sea C una curva regular que está dada paramétricamente por

$$x = f(t), \quad y = g(t); \qquad a \le t \le b.$$

FIGURA 13.12



Supóngase además que C no se corta a sí misma; es decir, que diferentes valores de t entre a y b determinan distintos puntos de C. Sea P una partición de $[a, b]$ dada por $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$. Sea $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ y sea $P_k = (f(t_k), g(t_k))$ el punto de C que corresponde a t_k. Si $d(P_{k-1}, P_k)$ es la longitud del segmento $P_{k-1}P_k$ entonces la longitud L_P de la línea quebrada que aparece en negro en la Figura 13.12, es

$$L_P = \sum_{k=1}^{n} d(P_{k-1}, P_k).$$

Como en la Sección 6.5, se escribe

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} L_P$$

y L se llama **longitud de C** de P_0 a P_n si para $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|L_P - L| < \varepsilon$ para toda partición P tal que $\|P\| < \delta$.

Por la Fórmula de la Distancia,

$$d(P_{k-1}, P_k) = \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}.$$

De acuerdo con el Teorema del Valor Medio (4.12), existen números w_k y z_k en el intervalo abierto (t_{k-1}, t_k), tales que

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(w_k)\,\Delta t_k,$$
$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(z_k)\,\Delta t_k.$$

Sustituyendo en la fórmula para $d(P_{k-1}, P_k)$ y eliminando el factor común $(\Delta t_k)^2$ dentro del radical, se obtiene

$$d(P_{k-1}, P_k) = \sqrt{[f'(w_k)]^2 + [g'(z_k)]^2}\,\Delta t_k.$$

Por lo tanto,

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} L_P = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(w_k)]^2 + [g'(z_k)]^2}\,\Delta t_k,$$

siempre y cuando el límite exista. Si $w_k = z_k$ para todo k, entonces las sumas son sumas de Riemann de la función definida por $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$. El límite de estas sumas es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

El límite existe aun si $w_k \neq z_k$, pero la demostración requiere métodos más avanzados y se omite. El siguiente teorema resume esta discusión.

TEOREMA (13.5)

Si una curva regular (o alisada) C está dada paramétricamente por $x = f(t)$ y $y = g(t)$; $a \le t \le b$ y si C no se corta a sí misma excepto posiblemente en los extremos de $[a, b]$, entonces la longitud L de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

La fórmula de integral del Teorema (13.5) no es necesariamente cierta cuando C se corta a sí misma. Por ejemplo, si C tiene la parametrización $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; $0 \le t \le 4\pi$, entonces su representación es la circunferencia unitaria con centro en el origen. Si t varía de 0 a 4π, la circunferencia se recorre dos veces y por lo tanto, se corta a sí misma una infinidad de veces. Si se usa el Teorema (13.5) con $a = 0$ y $b = 4\pi$, se obtiene un valor incorrecto de 4π para la longitud de C. El valor correcto 2π se obtiene usando el intervalo $t\,[0, 2\pi]$. En este caso, la curva se corta a sí misma sólo en los extremos 0 y 2π del intervalo, lo cual está permitido por el teorema.

Si una curva C se describe en coordenadas rectangulares por una ecuación de la forma $y = k(x)$, donde k' es continua en $[a, b]$, entonces una parametrización de C está dada por

$$x = t, \quad y = k(t); \quad a \le t \le b.$$

En este caso

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = k'(t) = k'(x), \qquad dt = dx$$

y, por el Teorema (13.5),

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [k'(x)]^2}\, dx.$$

Esto concuerda con la fórmula para la longitud de arco dada en la Definición (6.9).

EJEMPLO 4 Encontrar la longitud de una arcada de la cicloide que tiene ecuaciones paramétricas $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.

Solución La gráfica tiene la forma que se muestra en la Figura 13.7. El radio a de la circunferencia es 1. Se obtiene una arcada cuando t varía de 0 a 2π. Aplicando el Teorema (13.5),

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

Como $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, el integrando se reduce a

$$\sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}.$$

Por lo tanto,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\, dt.$$

Por una de las fórmulas para la mitad de un ángulo, $\text{sen}^2 \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}(1 - \cos t)$, o equivalentemente,

$$1 - \cos t = 2\text{sen}^2 \tfrac{1}{2}t.$$

Entonces,

$$\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2\text{sen}^2 \tfrac{1}{2}t} = \sqrt{2}|\text{sen}\, \tfrac{1}{2}t|.$$

El valor absoluto se puede omitir porque si $0 \le t \le 2\pi$, entonces $0 \le \frac{1}{2}t \le \pi$, y por lo tanto, $\text{sen}\, \frac{1}{2}t \ge 0$. En consecuencia,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{2}\,\text{sen}\, \tfrac{1}{2}t\, dt = 2\int_0^{2\pi} \text{sen}\, \tfrac{1}{2}t\, dt$$

$$= -4\cos \tfrac{1}{2}t\Big]_0^{2\pi} = (-4)(-1) - (-4)(1) = 8 \quad \blacksquare$$

Para recordar el Teorema (13.5), conviene observar que si ds es la diferencial de longitud de arco, entonces por el Teorema (6.12),

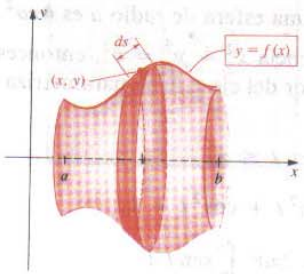
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

Suponiendo que ds y dt son positivos, se tiene lo siguiente.

DIFERENCIAL DE LONGITUD DE ARCO (13.6)

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

FIGURA 13.13



La fórmula para la longitud de arco en el Teorema (13.5) puede escribirse entonces como $L = \int_{t=a}^{t=b} ds$. Los límites de integración indican que la variable independiente es t y no s.

Si f es una función regular y no negativa para $a \le x \le b$, entonces por la Definición (6.14), el área S de la superficie que genera la gráfica de $y = f(x)$ al girar alrededor del eje y (véase la Figura 13.13), está dada por

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y\, ds$$

donde $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$. Se puede considerar a $2\pi y\, ds$ como el área de la superficie de un cono truncado con longitud de generatriz ds y radio medio y (véase (6.13)).

Si una curva C está dada paramétricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$; $a \le t \le b$ y si $g(t) \ge 0$ en todo $[a, b]$, se puede plantear un argumento semejante al de la Sección 6.5 para calcular el área de la superficie generada al girar C alrededor del eje y. Haciéndolo se obtiene la fórmula $S = \int_{t=a}^{t=b} 2\pi y\, ds$, donde ds es la diferencial *paramétrica* de la longitud de arco (13.6). Este resultado se enuncia a continuación como referencia.

TEOREMA (13.7)

Sea C una curva regular dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$; $a \le t \le b$, y que no se corta a sí misma excepto posiblemente en los extremos de $[a, b]$. Si $g(t) \ge 0$ en todo el $[a, b]$, entonces el área S de la superficie de revolución que se obtiene al girar C alrededor del eje x es

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_a^b 2\pi g(t) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

La fórmula para S en el Teorema (13.7) se puede generalizar al caso en que $y = g(t)$ es negativa para algunos valores de t en $[a, b]$, simplemente sustituyendo por $|y|$ la variable y que precede a ds.

Si la curva C del Teorema (13.7) gira alrededor del eje y y si $x = f(t) \ge 0$ para $a \le t \le b$ (véase la Figura 13.14), entonces

$$S = \int_{t=a}^{t=b} 2\pi x\, ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

En este caso puede considerarse a $2\pi x\, ds$ como el área de la superficie de un cono truncado con longitud de generatriz ds y radio medio x.

FIGURA 13.14



EJEMPLO 5 Verificar que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.

Solución Si C es la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, entonces la superficie esférica puede obtenerse girando C alrededor del eje x. Una parametrización de C es

$$x = a\cos t, \qquad y = a\operatorname{sen} t; \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Aplicando el Teorema (13.7) y usando la identidad $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$,

$$S = \int_0^\pi 2\pi a \operatorname{sen} t \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt = 2\pi a^2 \int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt$$

$$= -2\pi a^2 \Big[\cos t\Big]_0^\pi = -2\pi a^2[-1 - 1] = 4\pi a^2 \quad \bullet$$

EJERCICIOS 13.2

Ejercicios 1-8: Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente a $t = 1$ (véanse los Ejercicios 3-10 de la Sección 13.1).

1. $x = t^2 + 1$, $y = t^2 - 1$; $-2 \le t \le 2$
2. $x = t^3 + 1$, $y = t^3 - 1$; $-2 \le t \le 2$

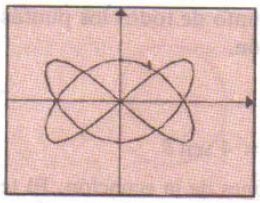
3. $x = 4t^2 - 5,\ y = 2t + 3;\ t$ en $\mathbb{R}$
4. $x = t^3,\ y = t^2;\ t$ en $\mathbb{R}$
5. $x = e^t,\ y = e^{-2t};\ t$ en $\mathbb{R}$
6. $x = \sqrt{t},\ y = 3t + 4;\ t \geq 0$
7. $x = 2 \operatorname{sen} t,\ y = 3 \cos t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$
8. $x = \cos t - 2,\ y = \operatorname{sen} t + 3;\ 0 \leq t \leq 2\pi$

Ejercicios 9-14: (a) Encuentre los puntos de la curva en los que la recta tangente es horizontal o vertical. (b) Halle d^2y/dx^2.

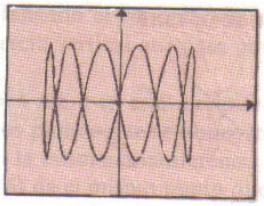
9. $x = 4t^2,\ y = t^3 - 12t;\ t$ en $\mathbb{R}$
10. $x = t^3 + 1,\ y = t^2 - 2t;\ t$ en $\mathbb{R}$
11. $x = 3t^2 - 6t,\ y = \sqrt{t};\ t \geq 0$
12. $x = \sqrt[3]{t},\ y = \sqrt[3]{t} - t;\ t$ en $\mathbb{R}$
13. $x = \cos^3 t,\ y = \operatorname{sen}^3 t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$
14. $x = \cosh t,\ y = \operatorname{senh} t;\ t$ en $\mathbb{R}$

Ejercicios 15-16: Se muestran figuras de Lissajous generadas por computadora (véase el Ejemplo 5 de la Sección 13.1). (a) Determine los lugares donde la recta tangente es horizontal o vertical y (b) encuentre el periodo de la curva.

15. $x = 4 \operatorname{sen} 2t$
$y = 2 \cos 3t$



16. $x = 5 \operatorname{sen} \frac{1}{3}t$
$y = 4 \operatorname{sen} 2t$



Ejercicios 17-22: Calcule la longitud de la curva.

17. $x = 5t^2,\ y = 2t^3;\ 0 \leq t \leq 1$
18. $x = 3t,\ y = 2t^{3/2};\ 0 \leq t \leq 4$
19. $x = e^t \cos t,\ y = e^t \operatorname{sen} t;\ 0 \leq t \leq \pi/2$
20. $x = \cos 2t,\ y = \operatorname{sen}^2 t;\ 0 \leq t \leq \pi$
21. $x = t \cos t - \operatorname{sen} t,\ y = t \operatorname{sen} t + \cos t;$
$0 \leq t \leq \pi/2$
22. $x = \cos^3 t,\ y = \operatorname{sen}^3 t;\ 0 \leq t \leq \pi/2$

Ejercicios 23-28: Calcule el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje x.

23. $x = t^2,\ y = 2t;\ 0 \leq t \leq 4$
24. $x = 4t,\ y = t^3;\ 1 \leq t \leq 2$
25. $x = t^2,\ y = t - \frac{1}{3}t^3;\ 0 \leq t \leq 1$
26. $x = 4t^2 + 1,\ y = 3 - 2t;\ -2 \leq t \leq 0$
27. $x = a(t - \operatorname{sen} t),\ y = a(1 - \cos t);\ 0 \leq t \leq 2\pi$
28. $x = t,\ y = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^{-1};\ 1 \leq t \leq 2$

Ejercicios 29-32: Determine el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje y.

29. $x = 4t^{1/2},\ y = \frac{1}{2}t^2 + t^{-1};\ 1 \leq t \leq 4$
30. $x = 3t,\ y = t + 1;\ 0 \leq t \leq 5$
31. $x = e^t \operatorname{sen} t,\ y = e^t \cos t;\ 0 \leq t \leq \pi/2$
32. $x = 3t^2,\ y = 2t^3;\ 0 \leq t \leq 1$

13.3 COORDENADAS POLARES

En un sistema de coordenadas rectangulares el par ordenado (a, b) denota el punto con abscisa a y ordenada b. Las *coordenadas polares* son otra forma de representar puntos. Se comienza con un punto fijo O (el **origen** o **polo**) y una semirrecta dirigida (el **eje polar**) cuyo extremo es O. Luego se considera cualquier punto P del plano diferente de O. Si, como se ilustra en la Figura 13.5, $r = d(O, P)$ y θ denota la medida

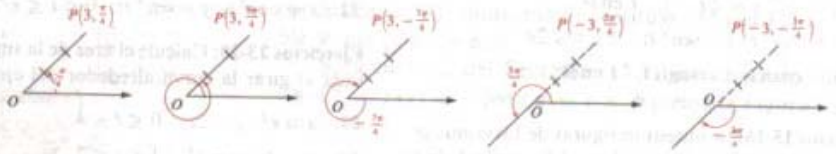
FIGURA 13.15



del ángulo determinado por el eje polar y OP, entonces r y θ son las **coordenadas polares** de P y se usan los símbolos (r, θ) o $P(r, \theta)$ para denotar a P. Como de costumbre, θ se considera positivo si el ángulo se genera por la rotación de una recta coincidente con el eje polar, en el sentido opuesto al del reloj, y negativo si la rotación es en el sentido del reloj. El ángulo θ se mide en radianes.

Las coordenadas polares de un punto no son únicas. Por ejemplo, $(3, \pi/4)$, $(3, 9\pi/4)$ y $(3, -7\pi/4)$ representan el mismo punto (véase la Figura 13.16). También se permite que r sea negativo. En tal caso, en lugar de medir $|r|$ unidades sobre el lado final del ángulo θ, se miden a lo largo de la semirrecta con extremo O y dirección *opuesta* a la del lado final. En la Figura 13.16 se localizan también los puntos correspondientes a los pares $(-3, 5\pi/4)$ y $(-3, -3\pi/4)$.

FIGURA 13.16



Finalmente, se adopta la convención de que el polo O tiene coordenadas polares $(0, \theta)$ para *cualquier* θ. Una asignación de pares ordenados de la forma (r, θ) a los puntos de un plano se llama un **sistema de coordenadas polares** y se dice que el plano es el **plano** $r\theta$.

Una **ecuación polar** es una ecuación en r y θ. Una **solución** de una ecuación polar es un par ordenado (a, b) que lleva a una igualdad si se sustituye en la ecuación r por a y θ por b. La **gráfica** de una ecuación polar es el conjunto de todos los puntos (en el plano $r\theta$) que corresponden a soluciones de la ecuación.

EJEMPLO 1 Trazar la gráfica de la ecuación polar $r = 4 \operatorname{sen} \theta$.

Solución La siguiente tabla muestra algunas soluciones de la ecuación. El tercer renglón da aproximaciones de r con una precisión de una cifra decimal.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0
r (aprox.)	0	2	2.8	3.4	4	3.4	2.8	2	0

En coordenadas rectangulares, la gráfica de la ecuación consta de una onda senoidal de amplitud 4 y periodo 2π. Sin embargo, si se usan coordenadas polares, entonces los puntos correspondientes a los pares en la tabla parecen estar en una circunferencia de radio 2 y se traza la gráfica de acuerdo con esto (véase la Figura 13.17). Como ayuda

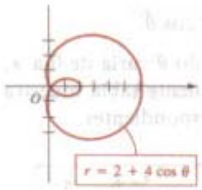
655

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de $r = 2 + 4\cos\theta$.

Solución En la siguiente tabla aparecen algunos puntos correspondientes a $0 \le \theta \le \pi$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	6	$2+2\sqrt{3}$	$2+2\sqrt{2}$	4	2	0	$2-2\sqrt{2}$	$2-2\sqrt{3}$	-2
r (aprox.)	6	5.4	4.8	4	2	0	-0.8	-1.4	-2

FIGURA 13.19

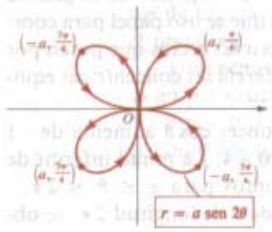


Notemos que $r = 0$ en $\theta = 2\pi/3$. Los valores de r son negativos para $2\pi/3 < \theta \le \pi$, lo cual da la mitad inferior del rizo pequeño en la Figura 13.19. (Verifíquese este hecho.) Cuando θ varía de π a 2π, se obtienen la mitad superior del rizo pequeño y la mitad inferior del rizo grande. •

EJEMPLO 4 Dibujar la gráfica de la ecuación $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ para $a > 0$.

Solución En lugar de formar una tabla con las soluciones, razonamos como sigue: Si θ aumenta de 0 a $\pi/4$, entonces 2θ va de 0 a $\pi/2$ y, por lo tanto, sen 2θ aumenta de 0 a 1. Resulta que r aumenta de 0 a a cuando θ recorre el intervalo $[0, \pi/4]$. Si ahora θ aumenta de $\pi/4$ a $\pi/2$, entonces 2θ aumenta de $\pi/2$ a π y, por lo tanto, sen 2θ disminuye de 1 a 0. Entonces, r disminuye de a a 0 cuando θ recorre el intervalo de $\theta\,[\pi/4, \pi/2]$. Los puntos correspondientes de la gráfica forman el lazo o rizo en el primer cuadrante, como se ilustra en la Figura 13.20. Nótese que el punto $P(r, \theta)$ describe el lazo en el *sentido positivo* (señalado por las flechas) cuando θ aumenta de 0 a $\pi/2$.

FIGURA 13.20



Si $\pi/2 \le \theta \le \pi$, entonces $\pi \le 2\theta \le 2\pi$ y por lo tanto, $r = a \operatorname{sen} 2\theta \le 0$. Por consiguiente, si $\pi/2 < \theta < \pi$, entonces r es negativo y *los puntos $P(r, \theta)$ están en el cuarto cuadrante*. Si θ aumenta de $\pi/2$ a π, entonces localizando puntos, podemos mostrar que P recorre el rizo en el *cuarto* cuadrante (en el sentido positivo).

Análogamente, para $\pi \le \theta \le 3\pi/2$ obtenemos el rizo del tercer cuadrante, y para $3\pi/2 \le \theta \le 2\pi$ el del segundo cuadrante. Ambos lazos se trazan en el sentido positivo cuando θ aumenta. El lector debe verificar estos hechos localizando algunos puntos, por ejemplo con $a = 1$. En la Figura 13.20 sólo se situaron los puntos de la gráfica que corresponden a los valores máximos de r. •

La gráfica del Ejemplo 4 es una **rosa de cuatro pétalos**. En general, una ecuación de la forma

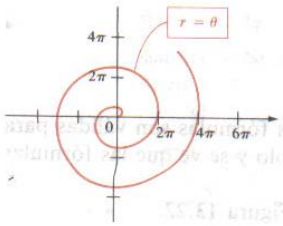
$$r = a \operatorname{sen} n\theta \quad \text{o bien} \quad r = a\cos n\theta,$$

para cualquier entero positivo n mayor que 1 y cualquier número real a, tiene una gráfi-

ca que consta de rizos que se unen en el origen. Si n es par, entonces hay $2n$ rizos y *si n es impar, entonces hay n lazos (véanse, por ejemplo, los Ejercicios 9, 10 y 22).*

La gráfica de la ecuación polar $r = a\theta$, para cualquier número real a, es una **espiral de Arquímedes**. En el siguiente ejemplo se considera el caso $a = 1$.

FIGURA 13.21

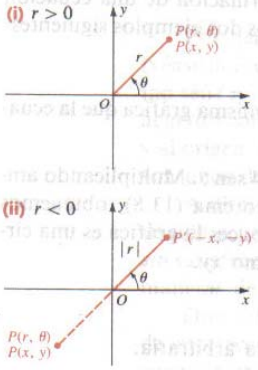


EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de $r = \theta$ para $\theta \geq 0$.

Solución La gráfica consta de todos los puntos que tienen coordenadas polares de la forma (c, c) para cualquier número real $c \geq 0$. Entonces, la gráfica contiene los puntos $(0, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, (π, π), etcétera. Cuando θ aumenta, r aumenta con la misma rapidez y la espiral gira alrededor del origen en el sentido positivo cortando al eje polar en $0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, como se ilustra en la Figura 13.21.

Si se permite que θ sea negativo, cuando θ disminuye tomando valores negativos, entonces la espiral resultante da vueltas alrededor del origen y es la imagen simétrica con respecto al eje vertical de la curva que se muestra en la Figura 13.21. •

FIGURA 13.22



Las ecuaciones polares producen muchas otras gráficas interesantes. Algunas de ellas se incluyen en los ejercicios del final de esta sección. Las coordenadas polares son útiles para las aplicaciones en las que aparecen circunferencias con centro en el origen o rectas que pasan por el origen, pues las ecuaciones que tienen estas gráficas pueden escribirse en las formas simples $r = k$ o bien $\theta = k$, donde k es una constante. (Verifíquese este hecho.)

Sobreponemos ahora un plano xy a un plano $r\theta$ de manera que la parte positiva del eje x coincida con el eje polar. A cualquier punto P del plano se le pueden asignar coordenadas rectangulares (x, y) o bien coordenadas polares (r, θ). Si $r > 0$, se tiene una situación como la que se ilustra en la Figura 13.22(i). Si $r < 0$, se tiene la situación que se muestra en (ii) de la figura, donde también se ubicó el punto P' con coordenadas polares $(|r|, \theta)$ y coordenadas rectangulares $(-x, -y)$ para referencia posterior.

El siguiente teorema muestra las relaciones entre (x, y) y (r, θ). En el enunciado del teorema se supone que la parte positiva del eje x coincide con el eje polar.

TEOREMA (13.8)

Las coordenadas rectangulares (x, y) y las polares (r, θ) de un punto P están relacionadas como sigue:

(i) $x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta$

(ii) $\tan \theta = \dfrac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2$

Demostración Aunque en la Figura 13.22 se representó θ como un ángulo agudo, el análisis que se da a continuación es válido para todos los ángulos. Si $r > 0$, como en la Figura 13.22(i), entonces $\cos\theta = x/r$, $\operatorname{sen}\theta = y/r$, y, por lo tanto,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Si $r < 0$, entonces $|r| = -r$ y se ve de la Figura 13.22(ii) que

$$\cos\theta = \frac{-x}{|r|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{|r|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}.$$

Multiplicando por r se obtiene (i) del teorema y así, estas fórmulas son válidas para r positivo o negativo. Si $r = 0$, entonces el punto es el polo y se ve que las fórmulas en (i) también se satisfacen.

Las fórmulas en (ii) se deducen directamente de la Figura 13.22. • •

El Teorema (13.8) puede utilizarse para cambiar de un sistema de coordenadas al otro. Una aplicación más importante de (13.8) es la transformación de una ecuación polar a una ecuación en x y y, y viceversa. Esto se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 6 Encontrar una ecuación en x y y, que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r = 4\operatorname{sen}\theta$.

Solución En el Ejemplo 1 se consideró la ecuación $r = 4\operatorname{sen}\theta$. Multiplicando ambos lados por r llegamos a $r^2 = 4r\operatorname{sen}\theta$. Aplicando el Teorema (13.8), obtenemos $x^2 + y^2 = 4y$ que es equivalente a $x^2 + (y-2)^2 = 4$. Entonces la gráfica es una circunferencia de radio 2 con centro en el punto (0,2) del plano xy. •

EJEMPLO 7 Encontrar una ecuación polar para una recta arbitraria.

Solución Sabemos que toda recta en un sistema de coordenadas xy es la gráfica de una ecuación lineal $ax + by + c = 0$. Las fórmulas $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ dan la ecuación polar

$$ar\cos\theta + br\operatorname{sen}\theta + c = 0$$

o bien

$$r(a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta) + c = 0. \quad \bullet$$

Cuando se sobrepone un plano xy a un plano $r\theta$, la gráfica de una ecuación polar puede resultar simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen. La Figura 13.23 ilustra algunas simetrías típicas. Esto conduce al siguiente teorema.

CRITERIOS DE SIMETRÍA (13.9)

(i) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto al eje x si al sustituir θ por $-\theta$ se obtiene una ecuación equivalente.

659

TEOREMA (13.10)

La pendiente m de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el punto $P(r, \theta)$ es

$$m = \frac{\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}.$$

Demostración Si (x, y) son las coordenadas rectangulares de $P(r, \theta)$, entonces por el Teorema (13.8),

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Éstas se pueden considerar como ecuaciones paramétricas de la gráfica, donde θ es el parámetro. Aplicando el Teorema (13.3), la pendiente de la recta tangente en (x, y) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta}.$$

Esta fórmula es equivalente a la del enunciado del teorema. • •

Cuando el numerador en la fórmula para m es cero y el denominador no es cero, la recta tangente es horizontal. Cuando el denominador es cero pero el numerador no es cero, la recta tangente es vertical. El caso $0/0$ requiere atención especial.

Para calcular las pendientes de las rectas tangentes en el polo, hay que determinar los valores de θ para los que $r = 0$. Para tales valores (y tomando $r = 0$) la fórmula del Teorema (13.10) se reduce a $m = \tan\theta$. Estos comentarios se ilustran en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 Para la cardiode $r = 2 + 2\cos\theta$, calcular

(a) la pendiente de la recta tangente en $\theta = \pi/6$,

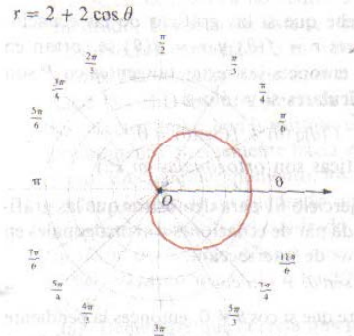
(b) los puntos en los que la recta tangente es horizontal,

(c) los puntos en los que la recta tangente es vertical.

Solución En el Ejemplo 2 se consideró la gráfica de $r = 2 + 2\cos\theta$. En la Figura 13.25 aparece dibujada de nuevo. Aplicando el Teorema (13.10), la pendiente m de la recta tangente es

$$m = \frac{(-2\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + (2 + 2\cos\theta)\cos\theta}{(-2\operatorname{sen}\theta)\cos\theta - (2 + 2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta}$$
$$= \frac{2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2\cos\theta}{-2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) - 2\operatorname{sen}\theta}$$
$$= -\frac{\cos 2\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

FIGURA 13.25



(a) En $\theta = \pi/6$, es decir, en el punto $(2 + \sqrt{3}, \pi/6)$,

$$m = \frac{\cos(\pi/3) + \cos(\pi/6)}{\operatorname{sen}(\pi/3) + \operatorname{sen}(\pi/6)} = \frac{(1/2) + (\sqrt{3}/2)}{(\sqrt{3}/2) + (1/2)} = -1$$

(b) Para encontrar las tangentes horizontales, hacemos

$$\cos 2\theta + \cos\theta = 0.$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$2\cos^2\theta - 1 + \cos\theta = 0,$$

o bien

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0.$$

De $\cos\theta = \frac{1}{2}$, obtenemos $\theta = \pi/3$ y $\theta = 5\pi/3$. Los dos puntos correspondientes son $(3, \pi/3)$ y $(3, 5\pi/3)$. Usando $\cos\theta = -1$, obtenemos $\theta = \pi$. Como el denominador en la fórmula para m es cero en $\theta = \pi$, se requiere investigar más. En (b) vimos que hay una recta tangente horizontal en el punto $(0, \pi)$ (el polo).

(c) Para encontrar las tangentes verticales hacemos

$$\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Las siguientes ecuaciones son equivalentes a ésta.

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$$

y

$$\operatorname{sen}\theta\,(2\cos\theta + 1) = 0.$$

Tomando $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, llegamos a los siguientes valores de θ: 0, π, $2\pi/3$ y $4\pi/3$. En la parte (b), encontramos que π da una tangente horizontal. Los otros valores dan los puntos $(4, 0)$, $(1, 2\pi/3)$ y $(1, 4\pi/3)$ en los que la gráfica tiene rectas tangentes verticales.

EJERCICIOS 13.3

Ejercicios 1-24: Trace la gráfica de la ecuación polar.

1. $r = 5$
2. $\theta = \pi/4$
3. $\theta = -\pi/6$
4. $r = -2$
5. $r = 2\cos\theta$
6. $r = -2\operatorname{sen}\theta$
7. $r = 4(1 - \operatorname{sen}\theta)$
8. $r = 1 + 2\cos\theta$
9. $r = 8\cos 3\theta$
10. $r = 2\operatorname{sen} 4\theta$
11. $r^2 = 4\cos 2\theta$ (lemniscata)
12. $r = 6\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\theta)$
13. $r = 4\csc\theta$
14. $r = -3\sec\theta$
15. $r = 2 - \cos\theta$
16. $r = 2 + 2\sec\theta$ (concoide)
17. $r = 2^\theta$, $\theta \geq 0$ (espiral)
18. $r\theta = 1$, $\theta > 0$ (espiral)
19. $r = -6(1 + \cos\theta)$
20. $r = e^{2\theta}$ (espiral logarítmica)
21. $r = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$
22. $r = 8\cos 5\theta$
23. $r^2 = -16\operatorname{sen} 2\theta$
24. $4r = \theta$

Ejercicios 25-32: Encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación en x y y.

25. $x = -3$
26. $y = 2$
27. $x^2 + y^2 = 16$
28. $x^2 = 8y$
29. $x^2 - y^2 = 16$
30. $9x^2 + 4y^2 = 36$

31. $(x^2 + y^2)\tan^{-1}(y/x) = ay, \quad a > 0$
(cocleoide o *curva del tablero de la Ouija*).

32. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (folio de Descartes)

Ejercicios 33-48: Encuentre una ecuación en x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación en coordenadas polares y úsela como ayuda para trazar la gráfica en un sistema de coordenadas polares.

33. $r\cos\theta = 5$
34. $r\operatorname{sen}\theta = -2$
35. $r - 6\operatorname{sen}\theta = 0$
36. $r = 6\cot\theta$
37. $r = 2$
38. $\theta = \pi/4$
39. $r = \tan\theta$
40. $r = 4\sec\theta$
41. $r^2(4\operatorname{sen}^2\theta - 9\cos^2\theta) = 36$
42. $r^2(\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta) = 16$
43. $r^2\cos 2\theta = 1$
44. $r^2\operatorname{sen} 2\theta = 4$
45. $r(\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta) = 6$
46. $r(\operatorname{sen}\theta + r\cos^2\theta) = 1$
47. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$
48. $r = \dfrac{4}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

49. Sean $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ dos puntos en un plano $r\theta$. Use la Ley de los Cosenos para demostrar que

$$[d(P_1, P_2)]^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1).$$

50. Demuestre que la gráfica de cada ecuación polar (a)-(c) es una circunferencia. Encuentre su centro y su radio.

(a) $r = a\operatorname{sen}\theta, \quad a \neq 0$ (b) $r = b\cos\theta, \quad b \neq 0$
(c) $r = a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta, \quad ab \neq 0$

Ejercicios 51-60: Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el valor de θ dado. (Consulte las gráficas de los Ejercicios 5-12 y 17-18.)

51. $r = 2\cos\theta, \quad \theta = \pi/3$
52. $r = -2\operatorname{sen}\theta, \quad \theta = \pi/6$
53. $r = 4(1 - \operatorname{sen}\theta), \quad \theta = 0$
54. $r = 1 + 2\cos\theta, \quad \theta = \pi/2$
55. $r = 8\cos 3\theta, \quad \theta = \pi/4$
56. $r = 2\operatorname{sen} 4\theta, \quad \theta = \pi/4$
57. $r^2 = 4\cos 2\theta, \quad \theta = \pi/6$
58. $r = 6\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta, \quad \theta = 2\pi/3$
59. $r = 2^\theta, \quad \theta = \pi$
60. $r\theta = 1, \quad \theta = 2\pi$

61. Compruebe que si las gráficas de las ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ se cortan en $P(r, \theta)$, entonces las rectas tangentes en P son perpendiculares si y sólo si

$$f'(\theta)g'(\theta) + f(\theta)g(\theta) = 0.$$

(Las gráficas son *ortogonales* en P.)

62. Use el Ejercicio 61 para demostrar que las gráficas de cada par de ecuaciones son ortogonales en sus puntos de intersección.

(a) $r = a\operatorname{sen}\theta, \quad r = a\cos\theta$ (b) $r = a\theta, \quad r\theta = a$

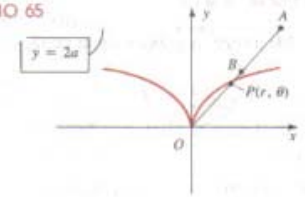
63. Demuestre que si $\cos\theta \neq 0$, entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ es

$$m = \frac{(dr/d\theta)\tan\theta + r}{(dr/d\theta) - r\tan\theta}.$$

64. Sea $a > 0$ y sea C el conjunto de los puntos del plano coordenado tales que el producto de sus distancias a $P(a, 0)$ y a $Q(-a, 0)$ es igual a a^2. Demuestre que $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ es una ecuación polar de C. (*Sugerencia:* Use el Ejercicio 49.)

65. El geómetra griego Diocles (alrededor de 180 A.C.) inventó una curva especial llamada *cisoide* que utilizó para duplicar el cubo, es decir, para construir un cubo con el doble del volumen de un cubo dado. Usando la circunferencia $x^2 + (y - a)^2 = a^2$, se elige un punto A en la recta tangente $y = 2a$ y luego se elige $P(r, \theta)$ en OA de manera que $OP = BA$, donde B es el punto de intersección de OA con la circunferencia (véase la figura). Demuestre que la cisoide de Diocles tiene como ecuación polar $r = 2a\cos^2\theta\csc\theta$.

EJERCICIO 65



66. Demuestre que la cisoide del Ejercicio 65 tiene como ecuación rectangular $x^2(2a - y) = y^3$ y trace la gráfica.

67. Una espiral logarítmica tiene una ecuación polar de la forma $r = ae^{b\theta}$, donde a y b son constantes diferentes de cero (véase el Ejercicio 20).

El famoso problema de los "cuatro insectos" ejemplifica esta curva. Cuatro insectos A, B, C y D se encuentran en las cuatro esquinas de un cuadrado. El centro de éste se tiene en el polo. Los insectos comienzan a moverse simultáneamente. El A camina hacia B, el B hacia C, el C hacia D y el D hacia A (véase la figura). Todos los insectos andan con la misma velocidad en todo momento directamente hacia el siguiente insecto. En cualquier momento, los insectos están en los vértices de un cuadrado que se encoge y gira hacia el centro del cuadrado original. Si la posición del insecto A tiene coordenadas polares (r, θ), entonces la de B tendrá coordenadas $(r, \theta + \frac{1}{2}\pi)$.

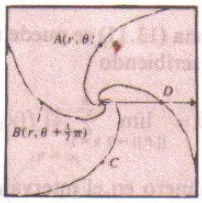
(a) Demuestre que la recta que pasa por A y B tiene por pendiente

$$\frac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}.$$

(b) La recta que pasa por A y B es tangente a la trayectoria del insecto A. Sírvase de la fórmula del Ejercicio 63 para deducir que $dr/d\theta = -r$.

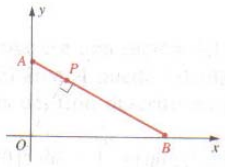
(c) Demuestre que la trayectoria del insecto A es una espiral logarítmica.

EJERCICIO 67



68. Un segmento recto AB de longitud fija a tiene su extremo A sobre el eje y y su extremo B sobre el eje x. Se traza una perpendicular del origen O a AB que corta a AB en el punto P, como se muestra en la figura. Los puntos A y B se deslizan libremente a lo largo de sus ejes respectivos. Realice la demostración de que la curva trazada por P es la rosa de cuatro pétalos con ecuación polar $r = \frac{1}{2}a \operatorname{sen} 2\theta$.

EJERCICIO 68



13.4 INTEGRALES EN COORDENADAS POLARES

FIGURA 13.26

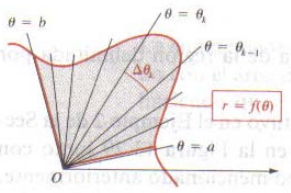
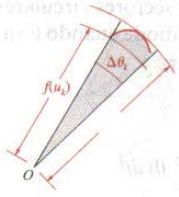


FIGURA 13.27



El área de una región acotada por gráficas de ecuaciones polares se puede calcular usando límites de sumas de áreas de sectores circulares. Sea R una región en el plano $r\theta$ acotada por las rectas que pasan por O con ecuaciones $\theta = a$ y $\theta = b$, donde $0 \le a < b \le 2\pi$, y por la gráfica de $r = f(\theta)$, donde f es continua y $f(\theta) \ge 0$ en $[a, b]$. La Figura 13.26 muestra una región de este tipo.

Sea P una partición de $[a, b]$ determinada por

$$a = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = b$$

y sea $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Las rectas radiales con ecuaciones $\theta = \theta_k$ dividen R en subregiones en forma de cuña. Si $f(u_k)$ es el valor mínimo y $f(v_k)$ el máximo de f en $[\theta_{k-1}, \theta_k]$, entonces, como se ilustra en la Figura 13.27, el área ΔA_k de la k-ésima subregión tiene un valor intermedio entre las de los sectores circulares inscrito y circunscrito, con ángulo central $\Delta\theta_k$ y radios $f(u_k)$ y $f(v_k)$, respectivamente. Entonces, por el Teorema (8.17),

$$\tfrac{1}{2}[f(u_k)]^2\,\Delta\theta_k \le \Delta A_k \le \tfrac{1}{2}[f(v_k)]^2\,\Delta\theta_k.$$

Sumando desde $k = 1$ hasta $k = n$ y usando el hecho de que la suma de las ΔA_k es el área A de R, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(u_k)]^2\,\Delta\theta_k \le A \le \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(v_k)]^2\,\Delta\theta_k.$$

Cuando la norma $\|P\|$ de la subdivisión tiende a cero, los límites de las sumas tienden a la integral $\int_a^b \frac{1}{2}\,[f(\theta)]^2\,d\theta$. Esto da el siguiente resultado.

TEOREMA (13.11)

Si f es continua y $f(\theta) \ge 0$ en $[a, b]$, donde $0 \le a < b \le 2\pi$, entonces el área A de la región acotada por las gráficas de $r = f(\theta)$, $\theta = a$ y $\theta = b$ es

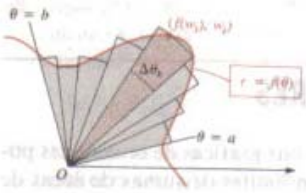
$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}\,[f(\theta)]^2\,d\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}\,r^2\,d\theta.$$

La integral del Teorema (13.11) se puede interpretar como un límite de sumas escribiendo

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(w_k)]^2\,\Delta\theta_k$$

donde w_k es *cualquier* número en el intervalo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ de $[a, b]$. La Figura 13.28 ilustra geométricamente una suma de Riemann típica. Es conveniente pensar que se empieza con el área de un sector circular y se describe la región R haciendo que θ varíe de a a b, al mismo tiempo que cada $\Delta\theta_k$ tiende a cero.

FIGURA 13.28



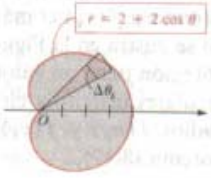
EJEMPLO 1 Calcular el área de la región delimitada por la cardiode $r = 2 + 2\cos\theta$.

Solución La gráfica se obtuvo en el Ejemplo 2 de la Sección 13.3. Aparece de nuevo en la Figura 13.29 junto con un sector circular típico del tipo mencionado anteriormente. Aprovechando la simetría, calcularemos el área de la mitad superior de la región y se duplicará luego el resultado. La función f del Teorema (13.11) está dada por $f(\theta) = 2 + 2\cos\theta$. Para encontrar a y b observamos que los sectores circulares deben describir la mitad superior de la cardiode cuando θ varía de 0 a π. Por lo tanto, $a = 0$, $b = \pi$, y

$$A = 2\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(2 + 2\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta)\,d\theta.$$

FIGURA 13.29



Usando el hecho de que $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$,

$$A = \int_0^{\pi} (6 + 8\cos\theta + 2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \left[6\theta + 8\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi} = 6\pi.$$

También podríamos haber calculado el área usando (13.11) con $a = 0$ y $b = 2\pi$.

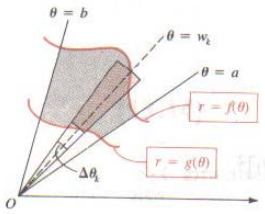
El siguiente resultado generaliza el Teorema (13.11).

TEOREMA (13.12)

Sean f y g funciones continuas tales que $f(\theta) \geq g(\theta) \geq 0$ para todo θ en $[a, b]$, donde $0 \leq a < b \leq 2\pi$. Sea R la región acotada por las gráficas de $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = a$ y $\theta = b$. El área A de R es

$$A = \tfrac{1}{2}\int_a^b \{[f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\}\, d\theta.$$

FIGURA 13.30



En la Figura 13.30 aparece una región del tipo descrito en el Teorema (13.12). El área A puede calcularse restando las áreas de dos regiones del tipo descrito en (13.11). Así,

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta - \int_a^b \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2\, d\theta.$$

Escribiendo esto como una integral se obtiene el Teorema (13.12).

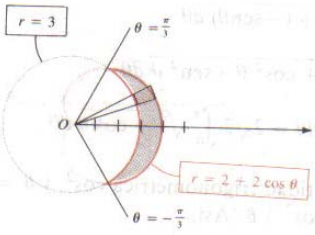
La integral en (13.12) puede expresarse como un límite de sumas como sigue:

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k \tfrac{1}{2}\{[f(w_k)]^2 - [g(w_k)]^2\}\,\Delta\theta_k$$

La suma puede considerarse como el procedimiento de describir la región R comenzando con el área de una región del tipo ilustrado por la cuña truncada de la Figura 13.30, haciendo que θ varíe de a a b.

EJEMPLO 2 Calcular el área A de la región que se encuentra dentro de la cardiode $r = 2 + 2\cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 3$.

FIGURA 13.31



Solución La región, junto con un elemento de área típico, está en la Figura 13.31. Como las dos gráficas se cruzan en los puntos $(3, -\pi/3)$ y $(3, \pi/3)$, la región es descrita cuando θ varía de $-\pi/3$ a $\pi/3$. Usando el Teorema (13.12),

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} [(2 + 2\cos\theta)^2 - 3^2]\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (8\cos\theta + 4\cos^2\theta - 5)\, d\theta.$$

Como en el Ejemplo 1, la integral puede evaluarse mediante la sustitución $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$. Podemos demostrar que $A = (9\sqrt{3}/2) - \pi \approx 4.65$. •

El siguiente teorema da una fórmula para la longitud de arco en coordenadas polares.

TEOREMA (13.13)

Si una curva C es la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ y si f' es continua en $[a, b]$, entonces la longitud L de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Demostración Como en la demostración del Teorema (13.10), la curva C tiene la parametrización.

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta; \qquad a \le \theta \le b.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dx}{d\theta} = -f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta$$

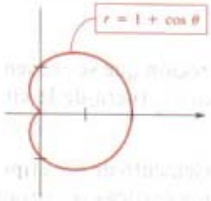
$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

No es difícil demostrar que

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2.$$

Sustituyendo en el Teorema (13.5) con $\theta = t$, se obtiene la fórmula deseada. • •

FIGURA 13.32



EJEMPLO 3 Calcular la longitud de la cardiode $r = 1 + \cos\theta$.

Solución Esa curva se tiene en la Figura 13.32. Aprovechando la simetría, calcularemos la longitud de la mitad superior y se duplicará luego el resultado. Aplicando el Teorema (13.13),

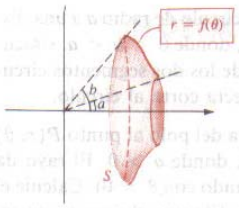
$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\theta)}\, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta. \end{aligned}$$

La última integral se puede evaluar utilizando la identidad trigonométrica $\cos^2\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ o, equivalentemente, $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$. Así,

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta}\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{\pi}\cos\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta$$
$$= (4\cdot 2)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{\pi} = 8$$

En la solución del Ejemplo 3 se pudo reemplazar $\sqrt{\cos^2\frac{1}{2}\theta}$ por $\cos\frac{1}{2}\theta$, porque si $0 \le \theta \le \pi$, entonces $0 \le \frac{1}{2}\theta \le \pi/2$ y, por lo tanto, $\cos\frac{1}{2}\theta$ es *positivo* en $[0, \pi]$. Si *no* se hubiese usado la simetría y se hubiera escrito L como $\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$, la simplificación no habría sido válida. En general, cuando se calculan áreas o longitudes de arco en coordenadas polares, conviene aprovechar las simetrías existentes.

FIGURA 13.33



Sea C la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ para $a \le \theta \le b$. Se desea obtener una fórmula para el área S de la superficie generada al girar C alrededor del eje polar, como se ilustra en la Figura 13.33. Como C tiene la parametrización

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta; \qquad a \le \theta \le b,$$

puede calcularse S utilizando el Teorema (13.7) con $\theta = t$. Esto da como resultado la siguiente fórmula en la que se usa la diferencial de longitud de arco en coordenadas polares $ds = \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$ que se obtuvo en la demostración del Teorema (13.13):

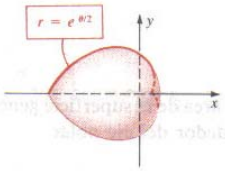
(13.14) $$S = \int_{\theta=a}^{\theta=b} 2\pi y\,ds = \int_a^b 2\pi f(\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$$ (alrededor del eje polar)

Si C gira alrededor de la recta vertical $\theta = \pi/2$ (el eje y), entonces, como en la página 652,

(13.15) $$S = \int_{\theta=a}^{\theta=b} 2\pi x\,ds = \int_a^b 2\pi f(\theta)\cos\theta\sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$$ (alrededor de $\theta = \pi/2$)

Si se utilizan (13.14) o (13.15) *a y b se deben elegir de manera que la superficie no se trace dos veces en alguna parte cuando C gira*, como sucede cuando hay rotación de la gráfica de $r = \cos\theta$, con $0 \le \theta \le \pi$ alrededor del eje polar.

FIGURA 13.34



EJEMPLO 4 La parte de la espiral $r = e^{\theta/2}$ entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ gira alrededor del eje polar. Calcular el área de la superficie resultante.

Solución La Figura 13.34 ilustra la superficie. A partir de (13.14) con $f(\theta) = e^{\theta/2}$,

$$S = \int_0^{\pi} 2\pi e^{\theta/2}\operatorname{sen}\theta\sqrt{(e^{\theta/2})^2 + (\tfrac{1}{2}e^{\theta/2})^2}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} 2\pi e^{\theta/2}\operatorname{sen}\theta\sqrt{\tfrac{5}{4}e^{\theta}}\,d\theta = \sqrt{5}\pi\int_0^{\pi} e^{\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta.$$

Integrando por partes o usando la Fórmula 98 de la Tabla de Integrales (véase el Apéndice IV),

$$S = \frac{\sqrt{5}\pi}{2} e^{\theta}(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\Big]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{5}\pi}{2}(e^{\pi} + 1) \approx 84.8 \quad \bullet$$

EJERCICIOS 13.4

Ejercicios 1-8: Calcule el área de la región acotada por la gráfica.

1. $r = 2\cos\theta$
2. $r = 5\operatorname{sen}\theta$
3. $r = 1 - \cos\theta$
4. $r = 6 - 6\operatorname{sen}\theta$
5. $r = \operatorname{sen} 2\theta$
6. $r^2 = 9\cos 2\theta$
7. $r = 4 + \operatorname{sen}\theta$
8. $r = 3 + 2\cos\theta$

Ejercicios 9-10: Calcule el área de la región R.

9. $R = \{(r, \theta):\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le e^{\theta}\}$.
10. $R = \{(r, \theta):\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 2\theta\}$.

Ejercicios 11-14: Calcule el área de la región acotada por un rizo de la gráfica de la ecuación.

11. $r^2 = 4\cos 2\theta$
12. $r = 2\cos 3\theta$
13. $r = 3\cos 5\theta$
14. $r = \operatorname{sen} 6\theta$

Ejercicios 15-18: Calcule el área de la región que se encuentra fuera de la gráfica de la primera ecuación y dentro de la gráfica de la segunda.

15. $r = 2 + 2\cos\theta,\quad r = 3$
16. $r = 2,\quad r = 4\cos\theta$
17. $r = 2,\quad r^2 = 8\operatorname{sen} 2\theta$
18. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta,\quad r = 3\operatorname{sen}\theta$

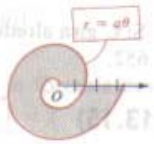
Ejercicios 19-22: Calcule el área de la región que se encuentra dentro de las gráficas de *las dos* ecuaciones.

19. $r = \operatorname{sen}\theta,\quad r = \sqrt{3}\cos\theta$
20. $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta),\quad r = 1$
21. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta,\quad r = 5\operatorname{sen}\theta$
22. $r^2 = 4\cos 2\theta,\quad r = 1$

Ejercicios 23-26: Calcule el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

23. $r = 2\sec\theta,\quad \theta = \pi/6,\quad \theta = \pi/3$
24. $r = \csc\theta\cot\theta,\quad \theta = \pi/6,\quad \theta = \pi/4$
25. $r = 4/(1 - \cos\theta),\quad \theta = \pi/4$
26. $r(1 + \operatorname{sen}\theta) = 2,\quad \theta = \pi/3$
27. Una recta corta a un círculo de radio a a una distancia b de su centro, donde $0 < b < a$. Calcule el área del menor de los dos segmentos circulares en los que la recta corta al círculo.
28. Sea OP el rayo que va del polo al punto $P(r, \theta)$ de la espiral $r = a\theta$, donde $a > 0$. El rayo da dos vueltas (comenzando con $\theta = 0$). Calcule el área de la región descrita por el rayo en su segunda vuelta y que no fue descrita en la primera (véase la figura).

EJERCICIO 28



Ejercicios 29-34: Calcule la longitud de la curva.

29. $r = e^{-\theta}$ de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$
30. $r = \theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = 4\pi$
31. $r = \cos^2 \frac{1}{2}\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$
32. $r = 2^{\theta}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$
33. $r = \operatorname{sen}^3 \frac{1}{3}\theta$
34. $r = 2 - 2\cos\theta$

Ejercicios 35-38: Calcule el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje polar.

35. $r = 2 + 2\cos\theta$
36. $r^2 = 4\cos 2\theta$
37. $r = 2a\operatorname{sen}\theta$
38. $r = 2a\cos\theta$

39. Un *toro* es la superficie generada al girar una circunferencia alrededor de una recta que está en el mismo plano y que no la corta. Utilice las coordenadas polares para calcular el área de la superficie del toro generado al girar la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ alrededor de la recta $x = b$, donde $0 < a < b$.

40. La parte de la espiral $r = e^{-\theta}$ entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ gira alrededor de la recta $\theta = \pi/2$. Calcule el área de la superficie resultante.

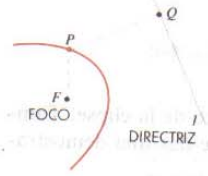
13.5 ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS

El siguiente teorema combina las definiciones de parábola, elipse e hipérbola en una descripción unificada de las secciones cónicas.

TEOREMA (13.16)

Sean F un punto fijo y l una recta fija en un plano. El conjunto de todos los puntos P del plano tales que la razón $d(P, F)/d(P, Q)$ es una constante positiva e, donde $d(P, Q)$ es la distancia de P a l, es una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$, y una hipérbola si $e > 1$.

FIGURA 13.35



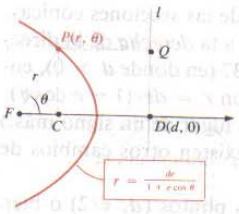
Como en la Definición (12.8), la constante e es la **excentricidad** de la cónica. Se verá que F es un foco de la cónica. La recta l es la **directriz**. La Figura 13.35 muestra una situación típica con una posición posible de P sobre la curva.

Se demostrará el teorema para $e \leq 1$, y el caso $e > 1$ se deja como ejercicio.

Si $e = 1$ en el Teorema (13.16), entonces $d(P, F) = d(P, Q)$ y de acuerdo con la Definición (12.1), la cónica resultante es una parábola con foco F y directriz l.

Supongamos ahora que $0 < e < 1$. Es conveniente un sistema de coordenadas polares en el plano, con F en el polo y l perpendicular al eje polar pasando por el punto $D(d, 0)$, donde $d > 0$. Si $P(r, \theta)$ es un punto del plano tal que $d(P, F)/d(P, Q) = e < 1$, entonces de la Figura 13.36 se ve que P se encuentra a la izquierda de l. Sea C la proyección de P sobre el eje polar. Como

FIGURA 13.36



$$d(P, F) = r \quad \text{y} \quad d(P, Q) = \overline{FD} - \overline{FC} = d - r\cos\theta,$$

resulta que P satisface la condición en (13.16) si y sólo si

$$\frac{r}{d - r\cos\theta} = e$$

o bien

$$r = de - er\cos\theta.$$

Despejando r se obtiene

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}$$

que es una ecuación polar de la gráfica. De hecho, se obtiene la misma ecuación si $e = 1$; sin embargo, no hay ningún punto (r, θ) en la gráfica cuando $1 + \cos\theta = 0$.

La ecuación $r = de - er\cos\theta$ corresponde a la ecuación en x y y

$$\sqrt{x^2 + y^2} = de - ex.$$

Elevando al cuadrado ambos lados y ordenando los términos se obtiene

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = d^2e^2.$$

Completando el cuadrado y simplificando,

$$\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Finalmente, dividiendo ambos lados entre $d^2e^2/(1 - e^2)^2$, se llega a una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $h = -de^2/(1 - e^2)$. Por lo tanto, la gráfica es una elipse con centro en el punto $(-de^2/(1 - e^2), 0)$ sobre el eje x y para la cual

$$a^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}, \qquad b^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2}.$$

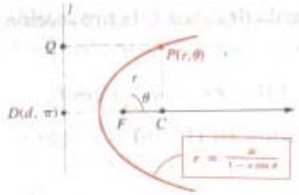
Por el Teorema (12.6),

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2}$$

y por lo tanto, $c = de^2/(1 - e^2)$. Esto demuestra que F es un foco de la elipse. También se deduce que $e = c/a$ (véase la Definición (12.8)). Se puede dar una demostración parecida para el caso $e > 1$.

Puede demostrarse que, inversamente, toda cónica no degenerativa se puede describir mediante el enunciado del Teorema (13.16). Esto da una formulación de las secciones cónicas que es equivalente al enfoque usado en el Capítulo 12. Como (13.16) incluye a los tres tipos de cónicas, se le considera a veces como una definición de las secciones cónicas.

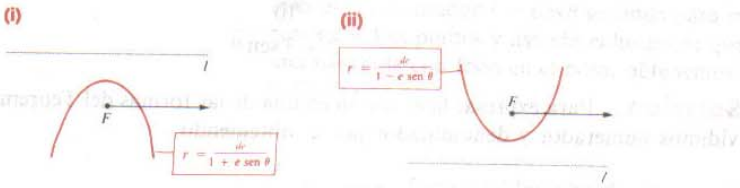
FIGURA 13.37



Si se hubiese escogido el foco F a la *derecha* de la directriz, como se ilustra en la Figura 13.37 (en donde $d > 0$), entonces se habría obtenido la ecuación $r = de/(1 - e\cos\theta)$. (Nótese que hay un signo menos en lugar de un signo más.) Si se permite que d sea negativo, existen otros cambios de signos.

Si l se toma *paralela* al eje polar pasando por uno de los puntos $(d, \pi/2)$ o bien $(d, 3\pi/2)$, como se ilustra en la Figura 13.38, entonces en las ecuaciones correspon-

FIGURA 13.38



dientes aparece sen θ en vez de cos θ. Las demostraciones de estos hechos se dejan como ejercicios.

El siguiente teorema resume esta discusión.

TEOREMA (13.17)

Una ecuación polar que tiene una de las formas

$$r = \frac{de}{1 \pm e\cos\theta} \quad \text{o bien} \quad r = \frac{de}{1 \pm e\,\operatorname{sen}\theta}$$

es una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 Describir y trazar la gráfica de la ecuación

$$r = \frac{10}{3 + 2\cos\theta}.$$

Solución Dividiendo el numerador y el denominador entre 3, obtenemos

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 + \frac{2}{3}\cos\theta}$$

que tiene una de las formas en el Teorema (13.17) con $e = \frac{2}{3}$. Entonces, la gráfica es una elipse con foco F en el polo y eje mayor a lo largo del eje polar. Los extremos del eje mayor se encuentran tomando $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Esto da $V(2, 0)$ y $V'(10, \pi)$. Por lo tanto,

$$2a = d(V', V) = 12 \quad \text{o bien} \quad a = 6.$$

El centro de la elipse es el punto medio $(4, \pi)$ del segmento $V'V$. Usando el hecho de que $e = c/a$, obtenemos

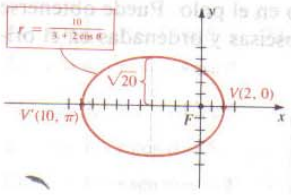
$$c = ae = 6(\tfrac{2}{3}) = 4.$$

Por lo tanto,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20.$$

De manera que el semieje menor tiene longitud $b = \sqrt{20}$. La gráfica aparece en la Figura 13.39, en la que se ha sobrepuesto al sistema polar, como marco de referencia, un sistema de coordenadas rectangulares. •

FIGURA 13.39



EJEMPLO 2 Describir y trazar la gráfica de la ecuación

$$r = \frac{10}{2 + 3\operatorname{sen}\theta}.$$

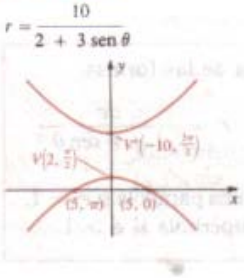
Solución Para expresar la ecuación en una de las formas del Teorema (13.17), dividimos numerador y denominador por 2, obteniendo

$$r = \frac{5}{1 + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta}.$$

Entonces, $e = \frac{3}{2}$ y la gráfica es una hipérbola con un foco en el polo. La expresión $\operatorname{sen}\theta$ dice que el eje transversal de la hipérbola es perpendicular al eje polar. Para encontrar los vértices sustituimos $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$ en la ecuación dada. Esto da los puntos $V(2, \pi/2)$, $V'(-10, 3\pi/2)$ y, por lo tanto,

$$2a = d(V, V') = 8 \quad \text{o bien} \quad a = 4.$$

FIGURA 13.40



Se pueden usar los puntos $(5, 0)$ y $(5, \pi)$ sobre la gráfica para trazar la rama inferior de la hipérbola. La rama superior se obtiene por simetría, como se ilustra en la Figura 13.40. Si se desea mayor precisión o información adicional, puede calcularse

$$c = ae = 4(\tfrac{3}{2}) = 6$$

y

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20.$$

A partir de esto es posible construir las asíntotas de la manera acostumbrada. ▪

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de la ecuación

$$r = \frac{15}{4 - 4\cos\theta}.$$

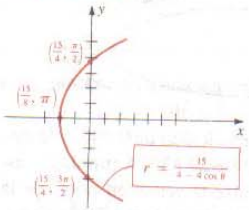
Solución Para obtener una de las formas en (13.17), dividimos el numerador y el denominador entre 4, obteniendo

$$r = \frac{\frac{15}{4}}{1 - \cos\theta}.$$

Por lo tanto, $e = 1$ y la gráfica es una parábola con foco en el polo. Puede obtenerse un croquis ubicando los puntos correspondientes a las abscisas y ordenadas en el origen, que se tienen en la tabla siguiente.

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	—	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{4}$

FIGURA 13.41



No hay ningún punto de la gráfica que corresponda a $\theta = 0$ pues el denominador $1 - \cos\theta$ se anula para ese valor. Trazando los tres puntos y usando el hecho de que la gráfica es una parábola con foco en el polo, obtenemos el croquis de la Figura 13.41. •

Si sólo se desea un dibujo burdo de una cónica, se recomienda emplear el método usado en el Ejemplo 3. Para usar este procedimiento, se ubican (si es posible hacerlo) los puntos correspondientes a $\theta = 0$, $\pi/2$, π y $3\pi/2$. Estos tres puntos junto con el tipo de cónica (que se obtiene del valor de e) llevan inmediatamente al croquis.

EJERCICIOS 13.5

Ejercicios 1-10: Describa la gráfica de la ecuación polar.

1. $r = \dfrac{12}{6 + 2\operatorname{sen}\theta}$
2. $r = \dfrac{12}{6 - 2\operatorname{sen}\theta}$
3. $r = \dfrac{12}{2 - 6\cos\theta}$
4. $r = \dfrac{12}{2 + 6\cos\theta}$
5. $r = \dfrac{3}{2 + 2\cos\theta}$
6. $r = \dfrac{3}{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$
7. $r = \dfrac{4}{\cos\theta - 2}$
8. $r = \dfrac{4\sec\theta}{2\sec\theta - 1}$
9. $r = \dfrac{6\csc\theta}{2\csc\theta + 3}$
10. $r = \csc\theta\,(\csc\theta - \cot\theta)$

11-20. Encuentre ecuaciones en x y y para las gráficas de los Ejercicios 1-10.

Ejercicios 21-26: Use el Teorema (13.16) para encontrar una ecuación polar de la cónica con foco en el polo, y con excentricidad y ecuación de la directriz dadas.

21. $e = \frac{1}{3}$, $r = 2\sec\theta$
22. $e = \frac{2}{5}$, $r = 4\csc\theta$
23. $e = 4$, $r = -3\csc\theta$
24. $e = 3$, $r = -4\sec\theta$
25. $e = 1$, $r\cos\theta = 5$
26. $e = 1$, $r\operatorname{sen}\theta = -2$
27. Encuentre la ecuación polar de una parábola con foco en el polo y vértice $(4, \pi/2)$.
28. Encuentre la ecuación polar de una elipse con excentricidad $\frac{2}{3}$, un vértice en $(1, 3\pi/2)$ y un foco en el polo.
29. Demuestre el Teorema (13.16) para el caso $e > 1$.
30. (a) Use la Figura 13.37 para deducir la fórmula
$$r = de/(1 - e\cos\theta).$$
(b) Deduzca las fórmulas
$$r = de/(1 \pm e\operatorname{sen}\theta)$$
del Teorema (13.17) usando la Figura 13.38.

Ejercicios 31-36: Exprese la ecuación en una de las formas del Teorema (13.17). A partir de ahí calcule la excentricidad y encuentre una ecuación de la directriz.

31. $y^2 = 4 - 4x$
32. $x^2 = 1 - 2y$
33. $3y^2 - 16y - x^2 + 16 = 0$
34. $5x^2 + 9y^2 = 32x + 64$
35. $8x^2 + 9y^2 + 4x = 4$
36. $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0$

Ejercicios 37-40: Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto correspondiente al valor dado de θ. (Consulte las gráficas de los Ejercicios 1-4.)

37. $r = \dfrac{12}{6 + 2\operatorname{sen}\theta}$, $\theta = \pi/6$

38. $r = \dfrac{12}{6 - 2\operatorname{sen}\theta}, \quad \theta = 0$

39. $r = \dfrac{12}{2 - 6\cos\theta}, \quad \theta = \pi/2$

40. $r = \dfrac{12}{2 + 6\cos\theta}, \quad \theta = \pi/3$

41. La primera ley de Kepler (véase la Sección 15.6) afirma que los planetas viajan en órbitas elípticas que tienen al Sol en uno de los focos. Para encontrar la ecuación de una órbita, se coloca el polo O en el centro del Sol y el eje polar a lo largo del eje mayor de la elipse (véase la figura).

(a) Demuestre que la ecuación de la órbita es

$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 - e\cos\theta}$$

donde e es la excentricidad, y $2a$, la longitud del eje mayor.

(b) La *distancia del perihelio* r_p y la *distancia del afelio* r_a se definen como la distancia máxima y mínima, respectivamente, de un planeta al Sol. Realice la demostración de que $r_p = a(1 + e)$ y $r_a = a(1 - e)$.

42. Consulte el Ejercicio 41. La órbita del planeta Plutón tiene una excentricidad de 0.249, y la distancia de su afelio es de 29.62 UA (unidades astronómicas). Encuentre la ecuación polar de la órbita de Plutón y calcule la distancia de su perihelio.

EJERCICIO 41



43. (a) Utilice la sustitución $z = \tan(\theta/2)$ para demostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - e\cos\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

(*Sugerencia:* Véase el Teorema (9.6).)

(b) Use el resultado de la parte (a) para demostrar que la distancia media de un planeta al Sol es $a\sqrt{1 - e^2}$.

44. Consulte los Ejercicios 41 y 43. Eros es el más pequeño de los asteroides del sistema solar. Su distancia media al Sol es de 1.46 UA y la excentricidad de su órbita es 0.223. Encuentre la ecuación polar de su órbita y calcule qué tanto se acerca al Sol el asteroide.

13.6 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Curva plana.
2. Curva cerrada.
3. Curva cerrada simple.
4. Ecuaciones paramétricas.
5. Curva parametrizada.
6. Forma paramétrica para dy/dx.
7. Forma paramétrica para d^2y/dx^2.
8. Forma paramétrica para la longitud de arco.
9. Forma paramétrica para el área de una superficie.
10. Coordenadas polares.
11. Gráficas de ecuaciones polares.
12. Relaciones entre las coordenadas rectangulares y las polares.
13. Integrales en coordenadas polares.
14. Ecuaciones polares de las cónicas.

EJERCICIOS 13.6

EJERCICIOS 13.6

Ejercicios 1-3: Trace la gráfica de la curva, encuentre una ecuación en x y y de una gráfica que contenga los puntos de la curva y calcule la pendiente de la recta tangente en el punto correspondiente a $t = 1$.

1. $x = (1/t) + 1,\ y = (2/t) - t;\quad 0 < t \le 4$
2. $x = \cos^2 t - 2,\ y = \operatorname{sen} t + 1;\quad 0 \le t \le 2\pi$
3. $x = \sqrt{t},\ y = e^{-t};\quad t \ge 0$
4. *Sea C la curva con ecuaciones paramétricas $x = t^2,\ y = 2t^3 + 4t - 1$; t en $\mathbb{R}$.*
 (a) Encuentre las abscisas de los puntos de C tales que la recta tangente en ellos pasa por el origen.
 (b) Halle los valores de t que corresponden a rectas tangentes horizontales o verticales.
 (c) Encuentre una forma paramétrica para la expresión d^2y/dx^2.
5. Compare las gráficas de las siguientes curvas para t en $\mathbb{R}$.
 (a) $x = t^2,\quad y = t^3$ (b) $x = t^4,\quad y = t^6$
 (c) $x = e^{2t},\quad y = e^{3t}$
 (d) $x = 1 - \operatorname{sen}^2 t,\quad y = \cos^3 t$

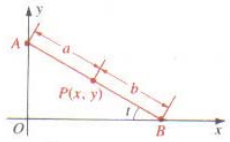
Ejercicios 6-18: Trace la gráfica de la ecuación y encuentre una ecuación en x y y que tenga la misma gráfica.

6. $r = 3 + 2\cos\theta$
7. $r = 6\cos 2\theta$
8. $r = 4 - 4\cos\theta$
9. $r^2 = -4\operatorname{sen} 2\theta$
10. $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$
11. $r(3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta) = 6$
12. $r = e^{-\theta},\quad \theta \ge 0$
13. $r^2 = \sec 2\theta$
14. $r = 8\sec\theta$
15. $r = 4\cos^2 \frac{1}{2}\theta$
16. $r = 6 - r\cos\theta$
17. $r = 8/(3 + \cos\theta)$
18. $r = 8/(1 - 3\operatorname{sen}\theta)$
19. Halle la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = 3/(2 + 2\cos\theta)$ en el punto correspondiente a $\theta = \pi/2$.

Ejercicios 20-21: Obtenga una ecuación polar de la gráfica de la ecuación.

20. $x^2 + y^2 = 2xy$
21. $y^2 = x^2 - 2x$
22. Encuentre una ecuación polar de la hipérbola que tiene un foco en el polo, excentricidad 2 y ecuación de la directriz $r = 6\sec\theta$.
23. Calcule el área de la región acotada por un rizo de la gráfica de $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$.
24. Calcule el área de la región que se encuentra dentro de la gráfica de $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$ y fuera de la gráfica de $r = 4$.
25. La posición (x, y) de una partícula al tiempo t está dada por $x = 2\operatorname{sen} t,\ y = \operatorname{sen}^2 t$. Calcule la distancia que la partícula recorre de $t = 0$ a $t = \pi/2$.
26. Calcule la longitud de la espiral $r = 1/\theta$ entre $(1, 1)$ y $(\frac{1}{2}, 2)$.
27. La curva $x = 2t^2 + 1,\ y = 4t - 3;\ 0 \le t \le 1$, gira alrededor del eje y. Calcule el área de la superficie resultante.
28. El arco de la espiral $r = e^\theta$ entre $(1, 0)$ y $(e, 1)$ gira alrededor de la recta $\theta = \pi/2$. Calcule el área de la superficie resultante.
29. Calcule el área de la superficie generada al girar la lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\theta$ alrededor del eje polar.
30. Un segmento de longitud fija tiene un extremo A en el eje y y el otro B en el eje x; P es un punto fijo en AB elegido de manera que $d(A, P) = a$ y $d(B, P) = b$ (véase la figura). Así mismo, P traza una curva C cuando A y B se deslizan libremente sobre sus ejes respectivos. Obtenga unas ecuaciones paramétricas para C con parámetro t igual a la medida en radianes del ángulo ABO. ¿Qué tipo de curva se forma?

EJERCICIO 30



CAPÍTULO **14**

VECTORES Y SUPERFICIES

Los vectores tienen dos naturalezas diferentes, una geométrica y la otra algebraica. Para estudiar las aplicaciones de los vectores se necesita un entendimiento de ambos aspectos. Por sencillez, se comenzará con vectores en el plano. La generalización a tres dimensiones se logra fácilmente tomando en cuenta una tercera componente. También se discutirán algunos temas básicos de la geometría analítica en tres dimensiones incluyendo rectas, planos, cilindros y superficies cuádricas.

miento del punto. Como se ve en la Figura 14.4, un desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ seguido de un desplazamiento $\overrightarrow{BC}$ lleva al mismo punto que el desplazamiento $\overrightarrow{AC}$ solo. Por definición, el vector $\overrightarrow{AC}$ es la **suma** de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, y se escribe

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Como los vectores pueden ser trasladados de un lugar a otro, *cualquier* par de vectores se puede sumar colocando el punto inicial de uno en el punto final del otro y procediendo como en la Figura 14.4.

Otra manera de encontrar la suma es considerar vectores iguales a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y que tienen el mismo punto inicial, como se ilustra por $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ en la Figura 14.5. Si se construye el paralelogramo $RPQS$, entonces, como $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$, resulta que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$. Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son dos fuerzas que actúan en P, entonces $\overrightarrow{PS}$ es la **fuerza resultante**, es decir, una fuerza que sola produce el mismo efecto que las otras dos actuando simultáneamente.

Si c es un número real y $\mathbf{v}$ es un vector, entonces $c\mathbf{v}$ se define como el vector cuya magnitud es $|c|$ veces la magnitud $\|\mathbf{v}\|$ de $\mathbf{v}$ y cuya dirección es la misma que la de $\mathbf{v}$ si $c > 0$, o bien la opuesta a la de $\mathbf{v}$ si $c < 0$. En la Figura 14.6 se ilustra todo esto. El vector $c\mathbf{v}$ se llama **múltiplo escalar** de $\mathbf{v}$.

FIGURA 14.4

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

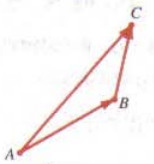


FIGURA 14.5

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$

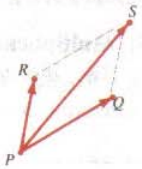
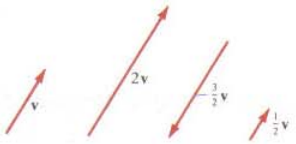


FIGURA 14.6



Supongamos ahora que todos los vectores están en un plano coordenado. Si PQ es un vector, entonces, como se indica en la Figura 14.7, hay muchos vectores equivalentes a $\overrightarrow{PQ}$; pero hay *uno* y sólo un vector equivalente $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ con el origen como punto inicial. El vector $\overrightarrow{OA}$ se llama **vector de posición** de $\overrightarrow{PQ}$. Así, *cada vector determina un único par ordenado de números reales*, las coordenadas (a_1, a_2) del punto final de su vector de posición.

FIGURA 14.7

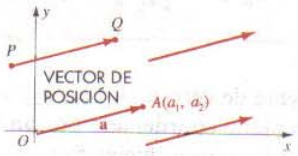
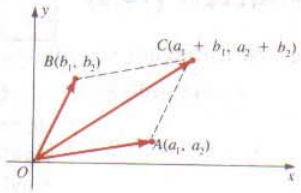


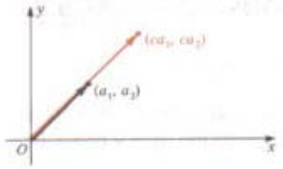
FIGURA 14.8



Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ dos vectores de posición con puntos finales $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, respectivamente, y sea $\overrightarrow{OC}$ con punto final $C(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, como se ilustra en la Figura 14.8. Usando las pendientes puede demostrarse que O, A, C y B son los vértices de un paralelogramo; es decir,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$

FIGURA 14.9



Entonces, *el par ordenado determinado por* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ *es* $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. También se puede demostrar que si c es un escalar, entonces el *par ordenado determinado por* $c\overrightarrow{OA}$ *es* (ca_1, ca_2), como se ilustra en la Figura 14.9 para $c > 0$.

Las observaciones anteriores permiten invertir el desarrollo y comenzar *definiendo* los vectores como pares ordenados y obteniendo luego los segmentos rectos como una interpretación alternativa. Para evitar confusión con la notación para intervalos abiertos o puntos, se usarán símbolos como $\langle a_1, a_2 \rangle$ o bien $\langle b_1, b_2 \rangle$ para los vectores y se denotarán por **a** o **b**, respectivamente. Como antes, los números reales son escalares.

DEFINICIÓN (14.1)

El **espacio vectorial V_2 de dimensión 2** (o **bidimensional**) es el conjunto de todos los pares ordenados $\langle x, y \rangle$ de números reales, llamados **vectores**, sujetos a los siguientes axiomas.

(i) **Adición de vectores.** Si se tiene $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

(ii) **Multiplicación de vectores por escalares.** Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y c es un escalar, entonces

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle.$$

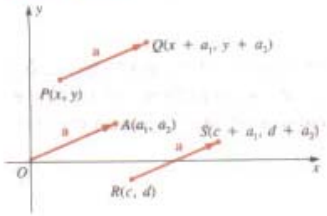
Los números a_1 y a_2 en $\langle a_1, a_2 \rangle$ son las **componentes** del vector. Entonces, para sumar dos vectores, se suman las componentes correspondientes. Para multiplicar un vector por un escalar, se multiplica cada componente del vector por el escalar.

El **vector cero 0** y el **negativo** $-\mathbf{a}$ de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ se definen como sigue.

DEFINICIÓN (14.2)

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle; \qquad -\mathbf{a} = -\langle a_1, a_2 \rangle = \langle -a_1, -a_2 \rangle.$$

FIGURA 14.10



Un vector diferente de cero $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ en V_2 se puede representar en un plano coordenado por un segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ con cualquier punto inicial $P(x, y)$ y con punto final $Q(x + a_1, y + a_2)$. A veces se dice que $\overrightarrow{PQ}$ *corresponde a* **a** o que **a** *corresponde a* $\overrightarrow{PQ}$. En la Figura 14.10, el símbolo **a** se colocó junto a varios segmentos dirigidos correspondientes a $\langle a_1, a_2 \rangle$. Si A es el punto con coordenadas (a_1, a_2), el vector de posición $\overrightarrow{OA}$ de $\overrightarrow{PQ}$ se llama también *vector de posición de* $\langle a_1, a_2 \rangle$ o *vector de posición del punto* A.

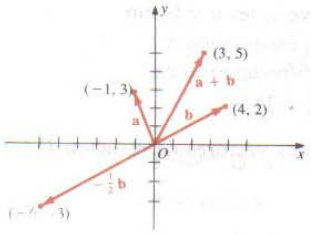
Rigurosamente hablando, el segmento $\overrightarrow{PQ}$ en la Figura 14.10 representa al vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$; sin embargo, por conveniencia, a veces se designa a $\overrightarrow{PQ}$ como el *vector* **a**. Debe quedar claro por el contexto si el término *vector* se refiere a un par ordenado o a un segmento dirigido. El vector cero $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ queda representado por cualquier punto del plano.

EJEMPLO 1 Sean $\mathbf{a} = \langle -1, 3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 4, 2 \rangle$.

(a) Encontrar $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $-\frac{3}{2}\mathbf{b}$, y $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

(b) Trazar los vectores de posición de **a**, **b**, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $-\frac{3}{2}\mathbf{b}$.

FIGURA 14.11



Solución

(a) Aplicando la Definición (14.1),

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle -1, 3 \rangle + \langle 4, 2 \rangle = \langle -1 + 4, 3 + 2 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$$

$$-\tfrac{3}{2}\mathbf{b} = -\tfrac{3}{2}\langle 4, 2 \rangle = \langle -6, -3 \rangle$$

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2\langle -1, 3 \rangle + 3\langle 4, 2 \rangle = \langle -2, 6 \rangle + \langle 12, 6 \rangle = \langle 10, 12 \rangle$$

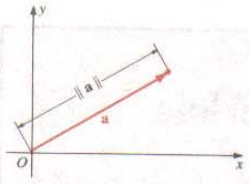
(b) Los vectores de posición de **a**, **b**, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $-\frac{3}{2}\mathbf{b}$ se muestran en la Figura 14.11. •

La magnitud $\|PQ\|$ de un vector $\overrightarrow{PQ}$ es la longitud del segmento PQ. A continuación se define el análogo de este concepto para vectores en V_2.

DEFINICIÓN (14.3)

La **magnitud** $\|\mathbf{a}\|$ de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

FIGURA 14.12



Si $\overrightarrow{OA}$ es el vector de posición de $\langle a_1, a_2 \rangle$, entonces $\|\mathbf{a}\|$ es la longitud de $\overrightarrow{OA}$ (véase la Figura 14.12). Nótese que $\|\mathbf{a}\| \geq 0$ y $\|\mathbf{a}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 2 Calcular la magnitud de $\langle 3, -2 \rangle$.

Solución De la Definición (14.3),

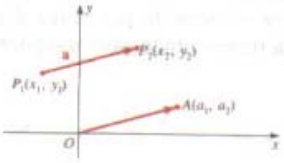
$$\|\mathbf{a}\| = \|\langle 3, -2 \rangle\| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \quad \bullet$$

TEOREMA (14.4)

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos, entonces el vector **a** en V_2 que corresponde a $\overrightarrow{P_1P_2}$ es

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

FIGURA 14.13



Demostración El vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ y el vector de posición de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ se ilustran en la Figura 14.13. Como $\overrightarrow{P_1P_2}$ corresponde a $\mathbf{a}$, necesariamente

$$x_2 = x_1 + a_1 \quad \text{y} \quad y_2 = y_1 + a_2.$$

Despejando a_1 y a_2, obtenemos $\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$. • •

EJEMPLO 3 Dados los puntos $P(-2, 3)$ y $Q(4, 5)$, encontrar vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en V_2 que correspondan a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$, respectivamente. Trazar $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QP}$, y los vectores de posición $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

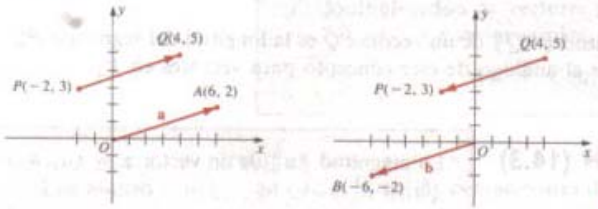
Solución De acuerdo con el Teorema (14.4), los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son

$$\mathbf{a} = \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle = \langle 6, 2 \rangle,$$

$$\mathbf{b} = \langle -2 - 4, 3 - 5 \rangle = \langle -6, -2 \rangle.$$

En la Figura 14.14 se muestran $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$, junto con los vectores de posición $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente. Nótese que $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$.

FIGURA 14.14



En el siguiente teorema se enuncian cuatro propiedades importantes para tres vectores cualesquiera $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ en V_2.

TEOREMA (14.5)

(i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
(ii) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
(iii) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
(iv) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

Demostración Para la parte (i), sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$. Puesto que $a_1 + b_1 = b_1 + a_1$ y $a_2 + b_2 = b_2 + a_2$,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle = \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

El resto de la demostración se deja como ejercicio. • •

La **sustracción** de vectores, que se denota por $-$, se define como sigue.

DEFINICIÓN (14.6)

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$. La **diferencia** $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ es

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Usando las Definiciones (14.6), (14.2) y (14.1), se ve que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) &= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle -b_1, -b_2 \rangle \\ &= \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle.\end{aligned}$$

Entonces, para encontrar $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, basta restar las componentes de $\mathbf{b}$ de las componentes correspondientes de $\mathbf{a}$.

EJEMPLO 4 Sean $\mathbf{a} = \langle 5, -4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$. Encontrar $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

Solución

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 5, -4 \rangle - \langle -3, 2 \rangle = \langle 5 - (-3), -4 - 2 \rangle = \langle 8, -6 \rangle$$

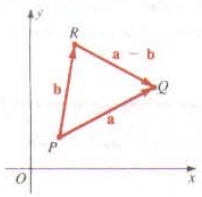
$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\langle 5, -4 \rangle - 3\langle -3, 2 \rangle = \langle 10, -8 \rangle - \langle -9, 6 \rangle = \langle 19, -14 \rangle \quad \bullet$$

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores arbitrarios, entonces

$$\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a},$$

es decir, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ es el vector que sumado a $\mathbf{b}$ da $\mathbf{a}$. Si se representan $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ *con el mismo punto inicial*, como en la Figura 14.15, entonces $\overrightarrow{RQ}$ representa a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

FIGURA 14.15



Al principio de esta sección se usó el símbolo $c\overrightarrow{AB}$ para denotar un vector que tiene la misma dirección que $\overrightarrow{AB}$ si $c > 0$, o la opuesta si $c < 0$. A continuación se define el análogo de este concepto para vectores en V_2.

DEFINICIÓN (14.7)

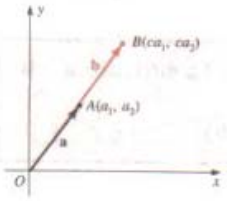
Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero en V_2 tienen

(i) la **misma dirección** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algún escalar $c > 0$.

(ii) la **dirección opuesta** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algún escalar $c < 0$.

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$. Si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$, entonces $b_1 = ca_1$ y $b_2 = ca_2$, y los vectores de posición $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están contenidos en una misma recta que pasa por el origen, como se ilustra en la Figura 14.16. Más aún, si $c > 0$, entonces los

FIGURA 14.16



puntos A y B están en el mismo cuadrante (o sobre el mismo eje coordenado positivo o negativo). Si $c < 0$, y A no está en un eje coordenado, entonces A y B se encuentran en cuadrantes diagonalmente opuestos.

Por convención, se dirá que el vector $\mathbf{0}$ tiene *todas* las direcciones.

Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son **paralelos** si y sólo si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algún escalar c. Entonces, dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero son paralelos si tienen la misma dirección o direcciones opuestas. El siguiente teorema muestra la relación entre las magnitudes de $\mathbf{a}$ y de $c\mathbf{a}$.

TEOREMA (14.8)

Si $\mathbf{a}$ es un vector y c es un escalar, entonces $\|c\mathbf{a}\| = |c|\,\|\mathbf{a}\|$.

Demostración Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces $c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$. Usando la Definición (14.3) y las propiedades de los números reales,

$$\begin{aligned} \|c\mathbf{a}\| &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} = \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2)} \\ &= \sqrt{c^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |c|\,\|\mathbf{a}\| \end{aligned}$$

• •

El Teorema (14.8) implica que la longitud de un segmento dirigido que representa a $c\mathbf{a}$ es $|c|$ veces la longitud del segmento dirigido que representa a $\mathbf{a}$. Esto concuerda con la interpretación geométrica dada al principio de la sección e ilustrada en la Figura 14.6.

En el siguiente teorema se enuncian algunas propiedades de la multiplicación de vectores en V_2 por escalares. En él, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son dos vectores arbitrarios y c y d dos escalares cualesquiera.

TEOREMA (14.9)

(i) $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$
(ii) $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$
(iii) $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a}) = d(c\mathbf{a})$
(iv) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
(v) $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = c\mathbf{0}$

Demostración Se demostrará (i) y se dejan las demás demostraciones como ejercicios. Tomando $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$,

$$\begin{aligned} c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= c\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\ &= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2 \rangle \\ &= \langle ca_1, ca_2 \rangle + \langle cb_1, cb_2 \rangle \\ &= c\mathbf{a} + c\mathbf{b} \end{aligned}$$

• •

No es difícil recordar las propiedades enunciadas en el Teorema (14.9) porque se parecen a algunas propiedades conocidas de los números reales.

Los vectores **i** y **j** se usarán más adelante.

DEFINICIÓN (14.10)

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Los dos vectores **i** y **j** tienen magnitud 1 ya que, según la Definición (14.3),

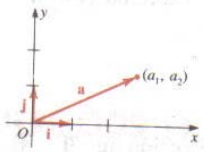
$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{j}\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

Se pueden usar **i** y **j** para denotar de otra forma los vectores en V_2, como se muestra en el siguiente teorema.

TEOREMA (14.11)

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es un vector en V_2, entonces $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$.

FIGURA 14.17



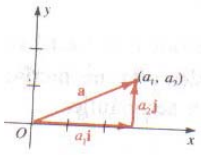
Demostración Usando la Definición (14.1),

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1\langle 1, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1 \rangle$$
$$= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \quad \bullet\bullet$$

La fórmula $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ para el vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ tiene una interpretación geométrica interesante. En la Figura 14.17 se muestran los vectores de posición de **i**, **j** y **a**. Como **i** y **j** tienen magnitud 1, del Teorema (14.8), se ve que

$$\|a_1\mathbf{i}\| = |a_1|\|\mathbf{i}\| = |a_1| \quad \text{y} \quad \|a_2\mathbf{j}\| = |a_2|\|\mathbf{j}\| = |a_2|.$$

FIGURA 14.18



Entonces, $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$ pueden representarse por un vector horizontal de magnitud $|a_1|$ y uno vertical de magnitud $|a_2|$, respectivamente, como se ve en la Figura 14.18. El vector de posición de **a** se puede considerar como la suma de estos vectores. Entonces, a_1 se conoce como **componente horizontal** y a_2 **componente vertical** del vector **a**.

Se dice que el vector suma $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es una **combinación lineal** de **i** y **j**. Nótese que si $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, y c es un escalar, entonces

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j},$$
$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) - (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j},$$

y

$$c(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = (ca_1)\mathbf{i} + (ca_2)\mathbf{j}.$$

Estas fórmulas muestran que las combinaciones lineales de **i** y **j** se pueden tratar como sumas algebraicas ordinarias.

EJEMPLO 5 Sean $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$. Expresar $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ como una combinación lineal de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

Solución

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 3(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2(4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) \\ &= (15\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (8\mathbf{i} - 14\mathbf{j}) \\ &= 7\mathbf{i} + 17\mathbf{j} \end{aligned}$$

•

Un **vector unitario** es un vector de magnitud 1. Los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son vectores unitarios.

TEOREMA (14.12)

Si $\mathbf{a}$ es un vector diferente de cero, entonces puede definirse un vector unitario $\mathbf{u}$ con la misma dirección que $\mathbf{a}$ por medio de

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\,\mathbf{a}$$

Demostración Tomando $c = 1/\|\mathbf{a}\|$, se tiene que $c > 0$ y, según la Definición (14.7), el vector $\mathbf{u} = c\mathbf{a}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{a}$. Además, por el Teorema (14.8),

$$\|\mathbf{u}\| = \|c\mathbf{a}\| = |c|\,\|\mathbf{a}\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\,\|\mathbf{a}\| = 1$$ • •

EJEMPLO 6 Encontrar un vector unitario $\mathbf{u}$ que tenga la misma dirección que $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Solución Debido a que $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$ (por la Definición 14.3)), del Teorema (14.12) tenemos que

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = \tfrac{3}{5}\mathbf{i} - \tfrac{4}{5}\mathbf{j}$$ •

Los vectores tienen muchas aplicaciones en el estudio de la física y la ingeniería. Para concluir esta sección se presenta un ejemplo del campo de la aeronáutica.

EJEMPLO 7 En la navegación aérea las direcciones de vuelo se especifican midiendo ángulos respecto al norte en el *sentido negativo*, es decir, en el del reloj. Un pequeño avión con una **velocidad relativa** (respecto al aire) de 200 km/h vuela en la dirección 60° mientras el viento sopla directamente del oeste a 40 km/h. Estas velocidades se pueden representar con los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de magnitudes 200 y 40, respectivamente, como se aprecia en la Figura 14.19. La dirección de la suma resultante $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ es la **velocidad verdadera** del avión (con respecto a tierra) y la magnitud $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ es la **rapidez** respecto a tierra del avión. Calcular dicha rapidez respecto a tierra con una precisión de un kilómetro por hora y la **dirección verdadera** con una precisión de un grado.

FIGURA 14.19

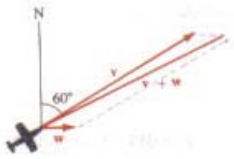
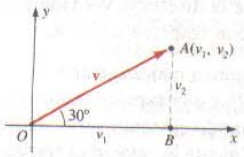


FIGURA 14.20



Solución Introducimos un sistema rectangular con el avión en el origen, el eje y sobre la recta norte-sur y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, como se ilustra en la Figura 14.20. En virtud de que $d(O, A) = \|\mathbf{v}\| = 200$, resulta que

$$v_1 = 200 \cos 30° = 100\sqrt{3} \quad \text{y} \quad v_2 = 200 \operatorname{sen} 30° = 100.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v} = \langle 100\sqrt{3}, 100 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \langle 40, 0 \rangle.$$

La suma resultante es

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 100\sqrt{3} + 40, 100 \rangle$$

y la rapidez respecto a tierra es

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{(100\sqrt{3} + 40)^2 + (100)^2} \approx 235 \text{ mi/hr}.$$

Si θ es el ángulo entre $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ y la parte positiva del eje x, entonces

$$\tan \theta = \frac{100}{100\sqrt{3} + 40} \approx 0.469 \quad \text{y así} \quad \theta = \tan^{-1}(0.469) \approx 25°.$$

Por lo tanto, la dirección verdadera del avión es aproximadamente $90° - 25° = 65°$. •

EJERCICIOS 14.1

1. Complete la demostración del Teorema (14.5).
2. Complete la demostración del Teorema (14.9).

Ejercicios 3-10: Dados $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, y un escalar c, demuestre la propiedad.

3. $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$
4. $(-c)\mathbf{a} = -c\mathbf{a}$
5. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$
6. $c(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = c\mathbf{a} - c\mathbf{b}$
7. Si $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$.
8. Si $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
9. Si $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $c \neq 0$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
10. Si $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces $c = 0$.

Ejercicios 11-20: Encuentre $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $4\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ y $4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.

11. $\mathbf{a} = \langle 2, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 4 \rangle$
12. $\mathbf{a} = \langle -2, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3 \rangle$
13. $\mathbf{a} = -\langle 7, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = 4\langle -2, 1 \rangle$
14. $\mathbf{a} = 2\langle 5, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = -\langle 6, 0 \rangle$
15. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
16. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
17. $\mathbf{a} = -(4\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{b} = 2(\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$
18. $\mathbf{a} = 8\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = (-3)(-2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
19. $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i}$
20. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

Ejercicios 21-26: Encuentre el vector $\mathbf{a}$ en V_2 que corresponde a $\overrightarrow{PQ}$. Trace $\overrightarrow{PQ}$ y el vector de posición de $\mathbf{a}$.

21. $P(1, -4)$, $Q(5, 3)$
22. $P(7, -3)$, $Q(-2, 4)$
23. $P(2, 5)$, $Q(-4, 5)$
24. $P(-4, 6)$, $Q(-4, -2)$
25. $P(-3, -1)$, $Q(6, -4)$
26. $P(2, 3)$, $Q(-6, 0)$

Ejercicios 27-30: Trace los vectores de posición de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$ y $-3\mathbf{b}$.

27. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

28. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

29. $\mathbf{a} = \langle -4, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 3 \rangle$

30. $\mathbf{a} = \langle 2, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 0 \rangle$

Ejercicios 31-38: Calcule la magnitud del vector.

31. $\langle 3, -3 \rangle$

32. $\langle -2, -2\sqrt{3} \rangle$

33. $\langle -5, 0 \rangle$

34. $\langle 0, 10 \rangle$

35. $-4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

36. $10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

37. $-18\mathbf{j}$

38. $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$

Ejercicios 39-42: Encuentre un vector unitario que tenga (a) la dirección de $\mathbf{a}$; (b) dirección opuesta a $\mathbf{a}$.

39. $\mathbf{a} = -8\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$

40. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

41. $\mathbf{a} = \langle 2, -5 \rangle$

42. $\mathbf{a} = \langle 0, 6 \rangle$

43. Encuentre un vector que tenga la misma dirección que $\langle -6, 3 \rangle$ y (a) el doble de la magnitud; (b) la mitad de la magnitud.

44. Encuentre un vector que tenga dirección opuesta a $8\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y (a) el triple de la magnitud; (b) un tercio de la magnitud.

45. Encuentre un vector de magnitud 6 que tenga la misma dirección que $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

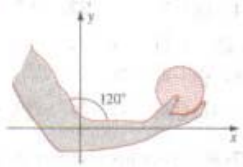
46. Encuentre un vector de magnitud 4 que tenga dirección opuesta a la de $\mathbf{a} = \langle 2, -5 \rangle$.

Ejercicios 47-48: Encuentre las componentes horizontal y vertical del vector descrito.

47. Una niña tira de un trineo sobre la nieve ejerciendo una fuerza de 20 lbf (unos 10 kgf) a un ángulo de 45° con la horizontal.

48. El bíceps ejerce una fuerza de 100 kg para sostener el antebrazo y un peso en la mano. Como se muestra en la figura, el músculo forma un ángulo de 120° con el antebrazo.

EJERCICIO 48



49. Un avión vuela en la dirección 150° con una velocidad relativa (respecto al aire) de 300 km/h y el viento sopla a 30 km/h en la dirección 60°. Calcule aproximadamente la dirección verdadera y la *rapidez del avión con respecto a tierra*.

50. El piloto de un avión desea mantener una dirección verdadera de 240° y una rapidez respecto a tierra de 600 km/h cuando el viento sopla desde el norte a 75 km/h. Calcule la velocidad respecto al aire que se requiere y la dirección en la brújula, o sea, el **rumbo**.

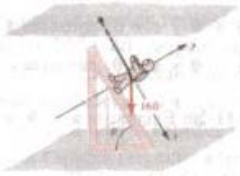
51. Dos remolcadores llevan un barco grande a un puerto, como se muestra en la figura. El remolcador mayor ejerce una fuerza de 4000 lbf sobre su cable y el menor ejerce una fuerza de 3200 lbf. Calcule el ángulo θ que debe formar la dirección del remolcador grande con respecto al segmento AB para que el barco navegue a lo largo de la recta que va de A a B.

EJERCICIO 51



52. La figura muestra un aparato que se usa para simular las condiciones de gravedad en otros planetas. Se ata una cuerda a un astronauta que realiza maniobras sobre un plano inclinado a un ángulo de θ grados con la horizontal.
 (a) El astronauta pesa 160 lb. Calcule las componentes x y y de la fuerza hacia abajo (véanse los ejes en la figura).
 (b) La componente y en la parte (a) es el peso del astronauta con respecto al plano inclinado. El astronauta pesaría 27 lbf en la Luna y 60 lbf en Marte. Calcule los ángulos θ (con una precisión de un centésimo de grado) para que el aparato del plano inclinadc simule la gravedad en esos lugares.

EJERCICIO 52



53. ¿En qué condiciones $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$?

54. (a) Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ cualquier vector diferente de cero y sea $\overrightarrow{OA}$ el vector de posición de $\mathbf{a}$. Demuestre que si θ es el menor ángulo no negativo de la parte positiva del eje x a $\overrightarrow{OA}$, entonces $\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$.

(b) Realice la demostración de que cualquier vector unitario en V_2 se puede expresar en la forma $\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ para un ángulo θ determinado.

55. Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ dos vectores no paralelos cualesquiera diferentes de cero, y sea $\mathbf{c}$ cualquier otro vector. Demuestre que existen escalares p y q tales que $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$. Interprete este hecho geométricamente.

56. Sea $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Encuentre todos los números reales c tales que

(a) $\|c\mathbf{a}\| = 3$; (b) $\|c\mathbf{a}\| = -3$; (c) $\|c\mathbf{a}\| = 0$.

57. Sean $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$, y $c > 0$. Describa el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = c$.

58. Sean los vectores $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$, y $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \neq \mathbf{0}$. Describa el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{a}$.

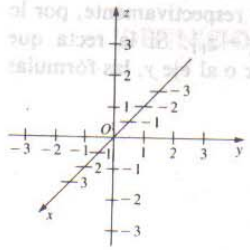
59. Realice la demostración de que si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son puntos arbitrarios en un plano coordenado, entonces $\sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{P_k P_{k+1}} + \overrightarrow{P_n P_1}$ es el vector cero. Ilustre gráficamente este hecho para $n = 5$.

60. Demuestre que si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son los vértices de un polígono regular y O es el centro del polígono, entonces $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OP_k}$ es el vector cero.

14.2 VECTORES EN TRES DIMENSIONES

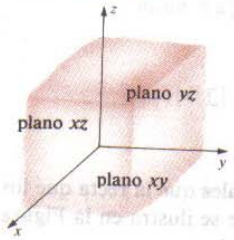
Para estudiar los vectores en el espacio se usan *ternas ordenadas* y un *sistema de coordenadas en tres dimensiones*. Una **terna ordenada** (a, b, c) es un conjunto $\{a, b, c\}$ de tres números de los cuales a se considera el primero, b el segundo y c el tercero. La colección de todas las ternas ordenadas se denota por $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Se dice que dos ternas ordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) son **iguales**, y se escribe $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$, si y sólo si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$.

FIGURA 14.21



Para establecer un sistema de coordenadas en tres dimensiones, se escoge un punto fijo O (el **origen**) y tres rectas coordenadas perpendiculares entre sí (los ejes x, y, z) con un origen común O, como se ilustra en la Figura 14.21. Para visualizar esta construcción, puede considerarse que los ejes y y z se encuentran en el plano del papel y que el eje x apunta hacia afuera de la hoja. Las tres rectas coordenadas determinan tres planos coordenados que se indican en la Figura 14.22: el **plano xy**, el **plano yz** y el **plano xz**.

FIGURA 14.22
Planos coordenados



Los tres ejes de la Figura 14.22 determinan un sistema coordenado **derecho**. Si se intercambian los ejes x y y, se obtiene un sistema coordenado **izquierdo**. El calificativo *derecho* se debe a que si los dedos de la mano derecha se curvan en el sentido de un giro de 90° de los ejes en el plano xy (de manera que la parte positiva del eje x coincida con la parte positiva del eje y), entonces el pulgar extendido apunta en la dirección positiva del eje z, como se muestra en la Figura 14.23. Por lo general se usan sistemas coordenados derechos.

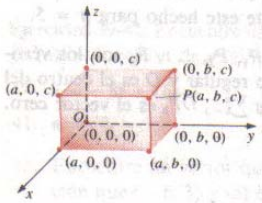
Si P es un punto en el espacio y su proyección (perpendi-

FIGURA 14.23



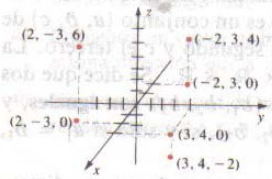
cular) sobre el eje x tiene coordenada a, entonces a se llama **coordenada** x (o *abscisa*) de P. Análogamente, las coordenadas b y c de las proyecciones de P sobre los ejes y y z, respectivamente, se denominan **coordenada** y (u *ordenada*) y **coordenada** z (o *elevación*) de P. El símbolo $P(a, b, c)$, o bien (a, b, c), denota el punto P con coordenadas a, b y c. Si P no se encuentra en un plano coordenado, entonces los tres planos que pasan por P y que son paralelos a los planos coordenados forman, junto con estos últimos, un prisma rectangular como el que se ilustra en la Figura 14.24.

FIGURA 14.24



El concepto de ubicar puntos es análogo al de dos dimensiones. En la Figura 14.25 aparecen localizados varios puntos. Para ubicar (3, 4, −2), se localiza primero (3, 4, 0) en el plano xy y luego se mueve ese punto 2 unidades *hacia abajo*. Para situar (−2, 3, 4), primero se localiza (−2, 3, 0) en el plano xy y luego se mueve el punto 4 unidades *hacia arriba*, etcétera.

FIGURA 14.25



La correspondencia biunívoca entre puntos en el espacio y ternas ordenadas de números reales es un **sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones**. Los tres planos coordenados dividen el espacio en ocho partes llamadas **octantes**. La parte que consta de todos los puntos $P(a, b, c)$ que tienen las tres coordenadas a, b y c positivas es el **primer octante**. No suelen numerarse los otros octantes.

Se puede efectuar la deducción de una fórmula para la distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos P_1 y P_2 en el espacio. Si P_1 y P_2 se encuentran en una recta paralela al eje z, como se ilustra en la Figura 14.26, y sus proyecciones sobre el eje z son $A_1(0, 0, z_1)$ y $A_2(0, 0, z_2)$, respectivamente, por lo cual $d(P_1, P_2) = d(A_1, A_2) = |z_2 - z_1|$. Si la recta que pasa por P_1 y P_2 es paralela al eje x o al eje y, las fórmulas son análogas.

FIGURA 14.26

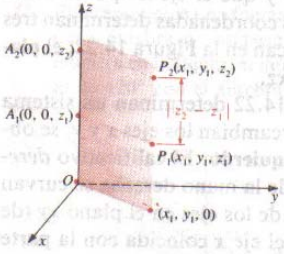
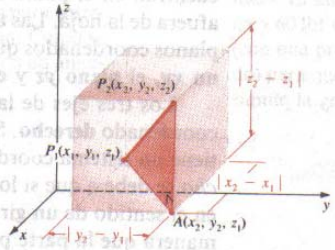


FIGURA 14.27



Si se desea calcular la distancia entre dos puntos P_1 y P_2 tales que la recta que los une no es paralela a un eje, se tiene una situación como la que se ilustra en la Figura

14.27. El triángulo P_1AP_2 es uno rectángulo y entonces, de acuerdo con el Teorema de Pitágoras,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{[d(P_1, A)]^2 + [d(A, P_2)]^2}.$$

Como P_1 y A se encuentran en un plano paralelo al plano xy, la Fórmula de la Distancia (1.9) dice que $[d(P_1, A)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Según los comentarios anteriores, $[d(A, P_2)]^2 = (z_2 - z_1)^2$. Sustituyendo en la fórmula anterior para $d(P_1, P_2)$, se obtiene lo siguiente.

FÓRMULA DE LA DISTANCIA (14.13)

La distancia entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Obsérvese que si P_1 y P_2 están en el plano xy de manera que $z_1 = z_2 = 0$, entonces (14.13) se reduce a la Fórmula de la Distancia (1.9) en dos dimensiones.

EJEMPLO 1 Calcular la distancia entre $A(-1, -3, 1)$ y $B(3, 4, -2)$.

Solución Usando la Fórmula de la Distancia (14.13),

$$d(A, B) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (4 + 3)^2 + (-2 - 1)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 49 + 9} = \sqrt{74}$$

La siguiente definición generaliza el concepto de vectores en V_2 a tres dimensiones.

DEFINICIÓN (14.14)

El **espacio vectorial V_3 de tres dimensiones** es el conjunto de todas las ternas ordenadas $\langle x, y, z \rangle$ de números reales, llamadas **vectores**, tales que si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y c es un escalar, entonces

(i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

(ii) $c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$

Los números a_1, a_2 y a_3 son las **componentes** del vector $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Siguiendo el mismo procedimiento que en V_2, se define el **vector cero 0**, el **negativo** $-\mathbf{a}$ de $\mathbf{a}$, la **magnitud** $\|\mathbf{a}\|$ de $\mathbf{a}$ y la **diferencia** $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ como sigue.

DEFINICIÓN (14.15)

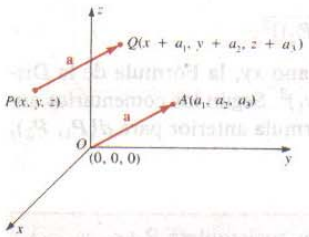
(i) $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

(ii) $-\mathbf{a} = -\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle -a_1, -a_2, -a_3 \rangle$

(iii) $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(iv) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

FIGURA 14.28



Las propiedades de los vectores en dos dimensiones se pueden generalizar sin ninguna dificultad a V_3. Sólo hay que tomar en cuenta la tercera componente. En particular, es fácil demostrar las propiedades enunciadas en los Teoremas (14.5) y (14.9).

Un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ en V_3 se puede representar por un segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ con punto inicial arbitrario $P(x, y, z)$ y punto final $Q(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$, como se ilustra en la Figura 14.28. La magnitud de $\mathbf{a}$ es $d(P, Q)$. Además, $\|\mathbf{a}\| \geq 0$, y $\|\mathbf{a}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Como en el caso de dos dimensiones, puede demostrarse que $\|c\mathbf{a}\| = |c|\,\|\mathbf{a}\|$.

El vector $\overrightarrow{OA}$ en la Figura 14.28 es el *vector de posición* para $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y el del punto $A(a_1, a_2, a_3)$. La interpretación geométrica de la suma de vectores es exactamente la misma que en dos dimensiones.

EJEMPLO 2 Sean $\mathbf{a} = \langle 2, 5, -3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -4, 1, 7 \rangle$. Encontrar $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ y $\|\mathbf{a}\|$.

Solución

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 2, 5, -3 \rangle + \langle -4, 1, 7 \rangle = \langle -2, 6, 4 \rangle$$

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\langle 2, 5, -3 \rangle - 3\langle -4, 1, 7 \rangle = \langle 4, 10, -6 \rangle - \langle -12, 3, 21 \rangle$$
$$= \langle 16, 7, -27 \rangle$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}$$

•

Como en el caso de dos dimensiones, se dice que dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero en V_3 tienen la **misma dirección** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para un escalar $c > 0$, o que tienen **direcciones opuestas** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para $c < 0$. Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son **paralelos** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para un escalar c.

EJEMPLO 3 Sean

$$\mathbf{a} = \langle 15, -6, 24 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 5, -2, 8 \rangle, \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \langle -\tfrac{15}{2}, 3, -12 \rangle.$$

Demostrar que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen la misma dirección y que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$ tienen direcciones opuestas.

Solución Por inspección vemos que

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{b} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{b} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}.$$

Como el escalar 3 (o bien $\frac{1}{3}$) es positivo, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen la misma dirección.

También por inspección,

$$\mathbf{a} = -2\mathbf{c} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{c} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

Como el escalar -2 (o bien $-\frac{1}{2}$) es negativo, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$ tienen direcciones opuestas. •

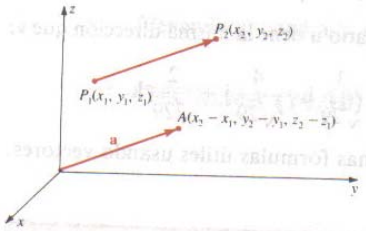
El siguiente teorema y su demostración son análogos al Teorema (14.4).

TEOREMA (14.16)

Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos cualesquiera, entonces el vector $\mathbf{a}$ en V_3 que corresponde a $\overrightarrow{P_1P_2}$ es

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle.$$

FIGURA 14.29



El Teorema (14.16) se ilustra en la Figura 14.29, en la que $\overrightarrow{OA}$ es el vector de posición de $\mathbf{a}$.

EJEMPLO 4 Si se tienen dados los puntos $P_1(5, 6, -2)$ y $P_2(-3, 8, 7)$, encontrar el vector $\mathbf{a}$ en V_3 correspondiente a $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Solución Por (14.16),

$$\mathbf{a} = \langle -3 - 5, 8 - 6, 7 + 2 \rangle = \langle -8, 2, 9 \rangle \quad \bullet$$

Se dice que dos vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma dirección (o direcciones opuestas) si sus vectores correspondientes en V_3 tienen la misma dirección (o direcciones opuestas). Si la magnitud $\|\overrightarrow{PQ}\|$ se define como la distancia entre P y Q, entonces $PQ = \overrightarrow{RS}$ significa que ambos vectores tienen la misma magnitud y la misma dirección. Si $\mathbf{a}$ es el vector en V_3 correspondiente a PQ, y c es un escalar, entonces el vector $c\mathbf{a}$ tiene la representación geométrica $c\overrightarrow{PQ}$. Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma dirección si $\overrightarrow{PQ} = c\overrightarrow{RS}$ para $c > 0$ o bien direcciones opuestas si $\overrightarrow{PQ} = c\overrightarrow{RS}$ para $c < 0$. En cualquiera de estos casos se dice que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son *paralelos*.

Un vector $\mathbf{a}$ es un **vector unitario** si $\|\mathbf{a}\| = 1$. Los vectores unitarios especiales

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

son importantes porque cualquier vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. Concretamente,

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

FIGURA 14.30

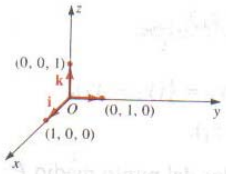
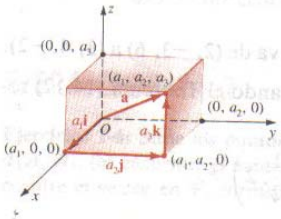


FIGURA 14.31



En la Figura 14.30 aparecen los vectores de posición de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. La Figura 14.31 muestra cómo puede considerarse al vector de posición para $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ como la suma de los tres vectores correspondientes a $a_1\mathbf{i}$, $a_2\mathbf{j}$ y $a_3\mathbf{k}$.

Las reglas para la adición, sustracción y multiplicación por escalares pueden traducirse fácilmente a la notación con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, como se hizo en la Sección 14.1 para el caso de dos dimensiones. A menudo resulta conveniente considerar a V_2 como un subconjunto de V_3, identificando el vector $\langle a_1, a_2 \rangle$

con $\langle a_1, a_2, 0\rangle$. En este sentido, los vectores $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ son esencialmente los mismos que $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$.

EJEMPLO 5 Expresar $\mathbf{a} = \langle 3, -4, 2\rangle$ en términos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ y encontrar un vector unitario $\mathbf{u}$ que tenga la misma dirección que $\mathbf{a}$.

Solución Puede escribirse

$$\mathbf{a} = \langle 3, -4, 2\rangle = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

La magnitud de $\mathbf{a}$ es

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{29}.$$

Como en el Teorema (14.12), el siguiente vector unitario $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{29}}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{k} \quad \bullet$$

Para terminar esta sección, se deducirán algunas fórmulas útiles usando vectores. La primera se enuncia como sigue.

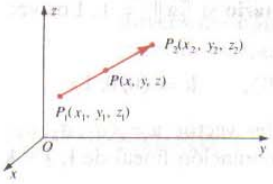
FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO (14.17)

El punto medio del segmento que va de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Demostración Sea $P(x, y, z)$ el punto medio del segmento P_1P_2 (véase la Figura 14.32). El hecho de que P esté a media distancia entre P_1 y P_2 se puede expresar en términos de vectores como sigue:

FIGURA 14.32



$$\overrightarrow{P_1P} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \text{ o bien } \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle = \tfrac{1}{2}\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

Igualando las componentes,

$$x - x_1 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = \tfrac{1}{2}(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1).$$

Despejando de estas ecuaciones x, y, z se obtienen las coordenadas del punto medio P:

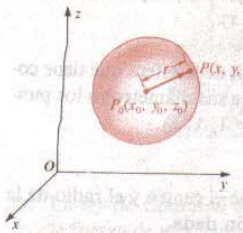
$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad \bullet\bullet$$

EJEMPLO 6 Encontrar el punto medio del segmento que va de $(2, -3, 6)$ a $(3, 4, -2)$.

Solución Los puntos se tienen en la Figura 14.25. Usando el Teorema (14.17) resultan las coordenadas del punto medio:

$$\left(\frac{2+3}{2}, \frac{-3+4}{2}, \frac{6+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \quad \bullet$$

FIGURA 14.33



La **gráfica de una ecuación** en tres variables x, y, z es el conjunto de todos los puntos $P(a, b, c)$ en un sistema de coordenadas rectangulares, tales que la terna ordenada (a, b, c) es solución de la ecuación; es decir, que al sustituir x, y, z en la ecuación por a, b y c, respectivamente, se obtiene una igualdad. *La gráfica de una ecuación tal es una* ***superficie***. Es fácil obtener una ecuación que tenga como gráfica a la esfera de radio r con centro en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Como se ilustra en la Figura 14.33, un punto $P(x, y, z)$ está en la esfera si y sólo si $\|\overrightarrow{P_0P}\| = r$. Equivalentemente,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r.$$

Elevando al cuadrado ambos lados de esta ecuación se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA (14.18)

La esfera de radio r y centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene por ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Desarrollando los cuadrados en la expresión (14.18) y simplificando, se ve que esta ecuación de la esfera puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

donde a, b, c y d son números reales. Inversamente, si se empieza con una ecuación de esta forma y la gráfica existe, completando cuadrados puede llegarse a la forma (14.18) y, por lo tanto, la gráfica es una esfera o un punto.

EJEMPLO 7 Describir la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 4z + 4 = 0.$$

Solución Completamos cuadrados como sigue:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) + (z^2 + 4z) = -4$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) + (z^2 + 4z + 4) = -4 + 9 + 16 + 4$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = 25$$

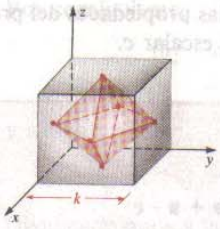
Comparando la última ecuación con (14.18), vemos que la gráfica es una esfera de radio 5 con centro $(3, -4, -2)$. •

EJERCICIOS 14.2

Ejercicios 1-6: Sitúe los puntos A y B, y (a) calcule $d(A, B)$; (b) encuentre el punto medio de AB; (c) encuentre el vector en V_3 correspondiente a $\overrightarrow{AB}$.

1. $A(2, 4, -5)$, $B(4, -2, 3)$
2. $A(1, -2, 7)$, $B(2, 4, -1)$

EJERCICIO 38

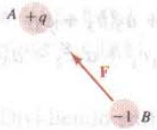


39. La *ley de Coulomb* afirma que la magnitud de la fuerza de atracción entre dos cargas eléctricas de signos opuestos, es proporcional al producto de las magnitudes q_1 y q_2 de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d que las separa. Demuestre que si una partícula con carga $+q$ se encuentra en un punto A y otra partícula con carga -1 se coloca en B (véase la figura), entonces la fuerza de atracción $\mathbf{F}$ sobre ésta última está dada por

$$\mathbf{F} = \frac{kq}{\|\overrightarrow{BA}\|^3}\overrightarrow{BA},$$

donde k es una constante positiva.

EJERCICIO 39



40. Consulte el Ejercicio 39. Se fijan partículas de carga eléctrica $+q$ en los tres puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) y se coloca otra carga -1 en $P(x, y, z)$.

(a) Sea $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$. Demuestre que la fuerza total $\mathbf{F}$ sobre la partícula con carga negativa está dada por

$$\mathbf{F} = kq\left[\frac{\mathbf{v}-\mathbf{i}}{\|\mathbf{v}-\mathbf{i}\|^3} + \frac{\mathbf{v}-\mathbf{j}}{\|\mathbf{v}-\mathbf{j}\|^3} + \frac{\mathbf{v}-\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}-\mathbf{k}\|^3}\right]$$

(b) Se desea colocar la partícula con carga negativa en un punto $P(x, y, z)$ que equidiste de las tres cargas positivas de manera que la fuerza total que actúe sobre la partícula sea $\mathbf{0}$. Encuentre las coordenadas de P.

14.3 PRODUCTO ESCALAR

Dos de los conceptos importantes relacionados con dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son el *producto escalar*, que es desde luego escalar, y el *producto vectorial*, que es un vector. En esta sección se define el producto escalar y se aplica a varios problemas importantes de la física y las matemáticas. El producto vectorial se discute en la siguiente sección.

DEFINICIÓN (14.19)

El **producto escalar** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ es $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

El símbolo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se lee "**a** punto **b**". El producto escalar se llama asimismo **producto punto** (o **de punto**), o bien **producto interior**. Es importante tener presente que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es un escalar y no un vector.

EJEMPLO 1 Calcular $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ para

(a) $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 5, 2\rangle$.

(b) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Solución

(a) $\langle 2, 4, -3\rangle \cdot \langle -1, 5, 2\rangle = (2)(-1) + (4)(5) + (-3)(2) = 12$

(b) $(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = (3)(4) + (-2)(5) + (1)(-2) = 0$ •

En el siguiente teorema se enuncian algunas de las propiedades del producto escalar para cualesquiera vectores **a**, **b** y **c**, y cualquier escalar c.

TEOREMA (14.20)

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$
(ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
(iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
(iv) $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
(v) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$.

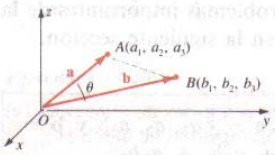
Demostración Se demostrará (iii) y se dejan al lector las demostraciones de las otras propiedades. Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

El producto escalar y el ángulo entre dos vectores están estrechamente relacionados.

DEFINICIÓN DEL ÁNGULO ENTRE a Y b (14.21)

FIGURA 14.34



Sean **a** y **b** dos vectores diferentes de cero.

(i) Si **b** no es un múltiplo escalar de **a** y si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son los vectores de posición de **a** y **b**, respectivamente, entonces **el ángulo θ entre a y b** (o entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$) es el ángulo AOB del triángulo determinado por los puntos A, O y B (véase la Figura 14.34).

(ii) Si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para un escalar c (es decir, si **a** y **b** son paralelos), entonces $\theta = 0$ si $c > 0$ y $\theta = \pi$ si $c < 0$.

Se dice que dos vectores **a** y **b** son **ortogonales** (o **perpendiculares**), si $\theta = \pi/2$. Por convención, se dice que el vector cero **0** es paralelo y también perpendicular a todo vector **a**.

TEOREMA (14.22)

Si θ es el ángulo entre dos vectores **a** y **b** diferentes de cero, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

Demostración Si $\mathbf{b} \neq c\mathbf{a}$, se tiene una situación como la que se ilustra en la Figura 14.34. Aplicando la Ley de los Cosenos al triángulo AOB,

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

Por consiguiente,

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

y simplificando,

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación anterior entre -2 se obtiene lo que se quería demostrar.

Si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$, entonces por las propiedades (iv) y (i) del Teorema (14.20),

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{a}) = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = c\|\mathbf{a}\|^2.$$

También

$$\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta = \|\mathbf{a}\|\|c\mathbf{a}\| \cos\theta = |c|\|\mathbf{a}\|^2 \cos\theta.$$

Si $c > 0$, entonces $|c| = c$, $\theta = 0$ y $|c|\|\mathbf{a}\|^2 \cos\theta$ se reduce a $c\|\mathbf{a}\|^2$. Por lo tanto, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta$. Si $c < 0$, entonces $|c| = -c$, $\theta = \pi$ y $|c|\|\mathbf{a}\|^2 \cos\theta$ otra vez se reduce a $c\|\mathbf{a}\|^2$. Esto completa la demostración del teorema. • •

Dividiendo entre $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$ ambos lados de la fórmula en el Teorema (14.22) se obtiene lo siguiente.

COROLARIO (14.23) Si θ es el ángulo entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}.$$

EJEMPLO 2 Calcular el ángulo entre $\mathbf{a} = \langle 4, -3, 1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, -2, 2\rangle$.

Solución Aplicando el Corolario (14.23),

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{(4)(-1) + (-3)(-2) + (1)(2)}{\sqrt{16 + 9 + 1}\sqrt{1 + 4 + 4}}$$
$$= \frac{4}{3\sqrt{26}} = \frac{4\sqrt{26}}{78} = \frac{2\sqrt{26}}{39}$$

o bien $$\theta = \arccos(2\sqrt{26}/39) \approx \arccos(0.2615).$$

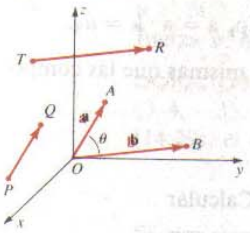
Usando una calculadora o consultando las tablas, se obtiene la aproximación

$$\theta \approx 74.84° \approx 1.31 \text{ radianes.} \quad •$$

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del Teorema (14.22).

TEOREMA (14.24) Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

FIGURA 14.36



El ángulo entre vectores de V_3 se definió en (14.21). El ángulo entre dos vectores (segmentos dirigidos) $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{TR}$ se define como el ángulo θ entre sus vectores correspondientes **a** y **b** en V_3. En la Figura 14.36 se ilustra un ángulo típico entre dos vectores. En ella, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son los vectores de posición de **a** y **b**, respectivamente. Si $\theta = \pi/2$, entonces $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{TR}$ son **ortogonales**.

El **producto escalar** de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{TR}$ en la Figura 14.36 se define por

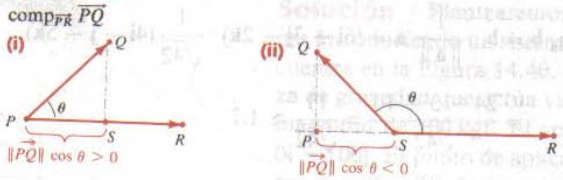
$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{TR} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

Como $\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\mathbf{a}\|$ y $\|\overrightarrow{TR}\| = \|\mathbf{b}\|$,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{TR} = \|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{TR}\| \cos\theta.$$

Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ tienen el mismo punto inicial y si S es la proyección de Q sobre la recta que pasa por P y R (véase la Figura 14.37), entonces el escalar $\|\overrightarrow{PQ}\| \cos\theta$ se llama **componente de $\overrightarrow{PQ}$ a lo largo de $\overrightarrow{PR}$**, y se abrevia **$\text{comp}_{\overrightarrow{PR}}\, \overrightarrow{PQ}$**.

FIGURA 14.37



Obsérvese que $\|\overrightarrow{PQ}\| \cos\theta$ es positivo si $0 \le \theta < \pi/2$, o negativo si $\pi/2 < \theta \le \pi$. Cuando $\theta = \pi/2$, la componente es 0. Se puede ver que

$$\text{comp}_{\overrightarrow{PR}}\, \overrightarrow{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| \cos\theta = \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{1}{\|\overrightarrow{PR}\|} \overrightarrow{PR}.$$

El siguiente enunciado ayuda a recordar este hecho.

TEOREMA (14.27)

La componente de $\overrightarrow{PQ}$ a lo largo de $\overrightarrow{PR}$ es igual al producto escalar de $\overrightarrow{PQ}$ y un vector unitario que tiene la misma dirección que $\overrightarrow{PR}$.

El concepto de componente puede aplicarse a vectores **a** y **b** en V_3 representándolos geométricamente por $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, respectivamente. Esto da la siguiente definición.

DEFINICIÓN (14.28)

Sean **a** y **b** dos vectores en V_3 con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. La **componente de a a lo largo de b** se denota por $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$ y se define por

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{b}\|} \mathbf{b}.$$

Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, entonces por la Definición (14.28),

$$\text{comp}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = a_1, \quad \text{comp}_{\mathbf{j}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j} = a_2, \quad \text{y} \quad \text{comp}_{\mathbf{k}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k} = a_3.$$

Por lo tanto, las componentes de $\mathbf{a}$ a lo largo de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son las mismas que las componentes a_1, a_2 y a_3 de $\mathbf{a}$.

EJEMPLO 4 Sean $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Calcular

(a) $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ **(b)** $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$

Solución

(a) Usando la Definición (14.28),

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b} = (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k})\cdot\frac{1}{7}(6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$= \frac{24 - 3 - 10}{7} = \frac{11}{7} \approx 1.6$$

(b) Intercambiando los papeles de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en (14.28),

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{42}}(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$

$$= \frac{24 - 3 - 10}{\sqrt{42}} = \frac{11}{\sqrt{42}} \approx 1.7$$

Para concluir esta sección, se presentará una interpretación física importante del producto escalar. De acuerdo con la Definición (6.15), el trabajo realizado cuando se aplica una fuerza constante F y se desplaza una distancia d, es $W = Fd$. Esta fórmula es muy restrictiva, pues sólo puede usarse cuando la fuerza se aplica en la dirección del movimiento. En general, sea $\overrightarrow{PQ}$ un vector que representa una fuerza cuyo punto de aplicación se desplaza a lo largo de un vector $\overrightarrow{PR}$. Esto se ilustra en la Figura 14.38, en la que una fuerza $\overrightarrow{PQ}$ se utiliza para tirar de un objeto a lo largo de una trayectoria horizontal de P a R. El vector $\overrightarrow{PQ}$ es la suma de los vectores $\overrightarrow{PS}$ y $\overrightarrow{SQ}$. Como $\overrightarrow{SQ}$ no contribuye al movimiento horizontal, puede suponerse que el movimiento de P a R es causado sólo por $\overrightarrow{PS}$. Aplicando (6.15) se encuentra que el trabajo W es el producto de la componente de $\overrightarrow{PQ}$ en la dirección de $\overrightarrow{PR}$ por la distancia $\|\overrightarrow{PR}\|$, es decir,

FIGURA 14.38



$$W = (\|\overrightarrow{PQ}\|\cos\theta)\|\overrightarrow{PR}\| = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}.$$

Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN (14.29) El **trabajo realizado por una fuerza constante** $\overrightarrow{PQ}$ cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector $\overrightarrow{PR}$ es $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$.

EJEMPLO 5 La magnitud y la dirección de una fuerza constante están dadas por $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Calcular el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de la fuerza se mueve de $P(1, -1, 2)$ a $R(4, 3, -1)$.

Solución Por el Teorema (14.16), el vector en V_3 correspondiente a $\overrightarrow{PR}$ es $\mathbf{b} = \langle 3, 4, -3 \rangle$. Si $\overrightarrow{PQ}$ es una representación geométrica de $\mathbf{a}$, entonces, según la Definición (14.29), el trabajo realizado es

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 15 + 8 - 18 = 5.$$

Si, por ejemplo, la distancia está en metros y la magnitud de la fuerza en newtons, entonces el trabajo realizado es 5 J (joules). Si la distancia está en pies y la fuerza está en libras fuerza (lbf), entonces el trabajo realizado es 5 lbf · pie (pielibras). •

FIGURA 14.39

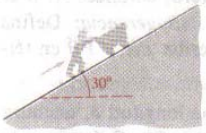
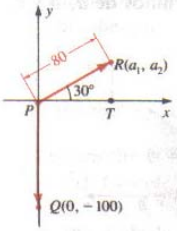


FIGURA 14.40



EJEMPLO 6 Una vagoneta que pesa 100 kgf (kilogramos fuerza) se empuja hacia arriba por una pendiente que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se muestra en la Figura 14.39. Calcular el trabajo realizado contra la gravedad cuando la vagoneta se desplaza una distancia de 80 m.

Solución Plantearemos este problema en dos dimensiones introduciendo un sistema de coordenadas xy como se encuentra en la Figura 14.40. El vector $\overrightarrow{PQ}$ representa la fuerza de gravedad que actúa verticalmente hacia abajo con una magnitud de 100 kgf. El vector correspondiente $\mathbf{F}$ en V_2 es $0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}$. El punto de aplicación de la fuerza se desplaza sobre el vector $\overrightarrow{PR}$ de magnitud 80. Si $\overrightarrow{PR}$ corresponde a $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, entonces en el triángulo PTR vemos que

$$a_1 = 80 \cos 30° = 40\sqrt{3}, \qquad a_2 = 80 \operatorname{sen} 30° = 40$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{a} = 40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}.$$

El trabajo realizado *por* la gravedad es $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ o bien $\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}$. Aplicando la Definición (14.19),

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = (0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) \cdot (40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}) = 0 - 400 = -400 \text{ kgf} \cdot \text{m (kilográmetros)}.$$

El trabajo realizado *contra* la gravedad es

$$-\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = 400 \text{ kgf} \cdot \text{m}. \quad •$$

EJERCICIOS 14.3

Ejercicios 1-10: Dados los vectores $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = 7, 4, 5$ y $\mathbf{c} = \langle 1, -5, 2 \rangle$, calcule el número indicado.

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
2. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
4. $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$
5. $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot 3\mathbf{c}$
6. $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
7. $\text{comp}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{b}$
8. $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{c}$
9. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, (\mathbf{a} + \mathbf{c})$
10. $\text{comp}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{c}$

Ejercicios 11-14: Calcule el coseno del ángulo entre **a** y **b**.

11. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
12. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{k}$
13. $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$
14. $\mathbf{a} = \langle 3, -5, -1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, -3\rangle$

Ejercicios 15-20: Dados los puntos $P(3, -2, -1)$, $Q(1, 5, 4)$, $R(2, 0, -6)$ y $S(-4, 1, 5)$, obtenga la cantidad indicada.

15. $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS}$ **16.** $\overrightarrow{QS} \cdot \overrightarrow{RP}$
17. El valor del ángulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$
18. El valor del ángulo entre $\overrightarrow{QS}$ y $\overrightarrow{RP}$
19. La componente de $\overrightarrow{PS}$ a lo largo de $\overrightarrow{QR}$
20. La componente de $\overrightarrow{QR}$ a lo largo de $\overrightarrow{PS}$

Ejercicios 21-22: La magnitud y la dirección de una fuerza están dadas por el vector **a**. Calcule el trabajo realizado cuando el punto de aplicación se mueve de P a Q.

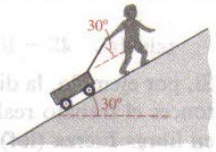
21. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $P(4, 0, -7)$, $Q(2, 4, 0)$
22. $\mathbf{a} = \langle 8, 0, -4\rangle$; $P(-1, 2, 5)$, $Q(4, 1, 0)$
23. Una fuerza constante de 4 lbf de magnitud tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcule el trabajo realizado si el punto de aplicación se mueve a lo largo del eje y de $(0, 2, 0)$ a $(0, -1, 0)$; las unidades de distancia son pies.
24. Una fuerza constante de 5 N (newtons) de magnitud tiene la dirección de la parte positiva del eje z. Calcule el trabajo realizado cuando el punto de aplicación se mueve a lo largo de la recta que va del origen al punto $P(1, 2, 3)$, donde las unidades de distancia son metros.
25. Una persona tira de una vagoneta sobre un terreno horizontal ejerciendo una fuerza de 20 kgf aplicada a un ángulo de 30° con respecto a la horizontal (véase la figura). Calcular el trabajo realizado cuando la vagoneta recorre 100 m.

EJERCICIO 25



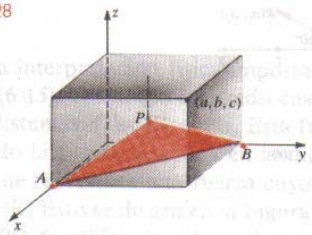
26. Consulte el Ejercicio 25. Calcule el trabajo realizado si se tira de la vagoneta con la misma fuerza y se recorren 100 m hacia arriba por un declive que forma un ángulo de 30° con la horizontal (véase la figura).

EJERCICIO 26



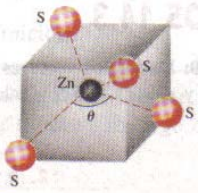
27. Use vectores para demostrar que si AB es el diámetro de una esfera con centro O y radio r, y si P es otro punto de la esfera, entonces APB es un triángulo rectángulo. (*Sugerencia:* Defina $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP}$, y escriba $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ en términos de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.)
28. Una caja rectangular tiene longitud a, anchura b y altura c (véase la figura). Sea P el centro de la caja. Use vectores para encontrar una expresión del ángulo APB en términos de a, b y c.

EJERCICIO 28



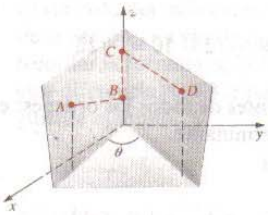
29. Consulte el Ejercicio 28. La esfalerita es un mineral en el que cada átomo de zinc está rodeado por cuatro átomos de azufre, los cuales forman un tetraedro, estando el átomo de zinc en el centro (véase la figura). El *ángulo de enlace* θ es el formado por la combinación S-Zn-S. Use vectores para demostrar que el *ángulo tetraédrico* θ es de aproximadamente 109.5°.

EJERCICIO 29



30. Dada un sucesión *A-B-C-D* de cuatro átomos enlazados, el ángulo entre el plano formado por *A*, *B* y *C*, y el formado por *B*, *C* y *D*, se llama *ángulo de torsión* θ del enlace. Este ángulo de torsión se usa para explicar la estabilidad de estructuras moleculares. Si el segmento *BC* se coloca a lo largo del eje z (véase la figura), ¿cómo puede calcularse θ en términos de las componentes de los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$?

EJERCICIO 30



31. Los *ángulos directores* pertenecientes a un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ diferente de cero, se definen como los ángulos α, β y γ entre el vector $\mathbf{a}$ y los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, respectivamente. Los *cosenos directores* de $\mathbf{a}$ son $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$. Compruebe que

(a) $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}$.

(b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

32. Consulte el Ejercicio 31.

(a) Calcule los cosenos directores de $\mathbf{a} = \langle -2, 1, 5 \rangle$.

(b) Calcule los ángulos y los cosenos directores de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

(c) Encuentre dos vectores unitarios que satisfagan la condición

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma.$$

33. Tres números l, m y n, diferentes de cero, son *números directores* de un vector $\mathbf{a}$ distinto de cero si son proporcionales a los cosenos directores; es decir, si existe un número positivo k tal que

$$l = k\cos\alpha, \qquad m = k\cos\beta, \qquad n = k\cos\gamma.$$

Demuestre que si l, m y n son números directores de $\mathbf{a}$ y $d = (l^2 + m^2 + n^2)^{1/2}$, por lo tanto $\cos\alpha = l/d$, $\cos\beta = m/d$, $\cos\gamma = n/d$.

34. Consulte el Ejercicio 33. Sean l_1, m_1, n_1 y l_2, m_2, n_2 números directores de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente. Demuestre lo siguiente:

(a) $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales si y sólo si

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

(b) $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos si y sólo si existe un número k tal que $l_1 = kl_2$, $m_1 = km_2$ y $n_1 = kn_2$.

Ejercicios 35-40: Resuelva los ejercicios *sin usar componentes* de los vectores.

35. ¿En qué condiciones se satisfacen las siguientes igualdades?

(a) $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$ (b) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$

36. Demuestre que $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|$ (*Sugerencia:* Use $\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\mathbf{a}-\mathbf{b})$ y la Desigualdad del Triángulo.)

37. Demuestre que $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$.

38. Demuestre que $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2$.

39. Pruebe que $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$.

40. Pruebe que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{4}(\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2)$.

14.4 PRODUCTO VECTORIAL

En esta sección se analiza el *producto vectorial* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en V_3. A diferencia del producto escalar, esta nueva operación produce un vector. Se puede definir $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ geométricamente y obtener luego una forma algebraica con ayuda de un sistema de coordenadas rectangulares. Sin embargo, la presentación se hará a la inversa, comenzando con una definición algebraica. Este planteamiento encubre la naturaleza geométrica de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, pero lleva a demostraciones más sencillas de las propiedades.

Al trabajar con productos vectoriales es conveniente usar *determinantes*. Un **determinante de orden 2** se define por

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

en donde todas las letras representan números reales. Los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (-3)(4) = 10 + 12 = 22$$

y

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (4)(-3) - (5)(2) = -12 - 10 = -22$$

exhiben una propiedad que tienen los determinantes de todos los órdenes: el intercambio de dos renglones modifica el signo del determinante.

Un **determinante de orden 3** se expresa por

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3.$$

Esto se llama a veces *desarrollo del determinante con respecto a la primera fila* (*o renglón*). El valor se puede obtener evaluando los determinantes de orden 2 en el lado derecho de la ecuación.

EJEMPLO 1 Calcular el valor de $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

Solución Por definición,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}(2) - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}(-1) + \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}(3)$$

$$= (-20 - 2)(2) - (8 - 1)(-1) + (-4 - 5)(3)$$

$$= -44 + 7 - 27 = -64$$

DEFINICIÓN (14.30)

El **producto vectorial** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ es

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

El símbolo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se lee "**a** cruz **b**". Obsérvese que la fórmula para $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se obtiene reemplazando c_1, c_2, c_3 en la definición del determinante de orden 3 por los vecto-

res unitarios **i**, **j**, **k**. Esto sugiere la siguiente notación para la fórmula en la Definición (14.30).

NOTACIÓN PARA EL PRODUCTO VECTORIAL (14.31)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

El símbolo del lado derecho en (14.31) *no* es un determinante porque el primer renglón tiene vectores en vez de escalares. Sin embargo, la notación de determinante es útil para recordar la fórmula en la Definición (14.30) que es algo complicada. Tomando en cuenta esta diferencia, (14.31) puede usarse para evaluar productos vectoriales, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Encontrar $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ para $\mathbf{a} = \langle 2, -1, 6 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -3, 5, 1 \rangle$.

Solución Escribiendo

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= (-1 - 30)\mathbf{i} - (2 + 18)\mathbf{j} + (10 - 3)\mathbf{k} \\ &= -31\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

Si **a** es cualquier vector en V_3, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{a}$$

pues si uno de los vectores en la Definición (14.30) es **0**, entonces todos los determinantes tienen un renglón de ceros y por lo tanto son 0 (verifíquese este hecho). También es fácil demostrar que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para todo **a**.

El siguiente teorema enuncia una propiedad importante del producto vectorial.

TEOREMA (14.32) El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a **a** y a **b**.

Demostración Según el Teorema (14.24), basta demostrar que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{y} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Tomando el producto escalar de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en la forma (14.30) con $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$,

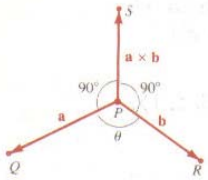
$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 \\ &= a_2b_3a_1 - a_3b_2a_1 - a_1b_3a_2 + a_3b_1a_2 + a_1b_2a_3 - a_2b_1a_3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$. La demostración de que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ es análoga. • •

En términos geométricos el Teorema (14.32) implica que si dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero corresponden a vectores no paralelos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ con el mismo punto inicial P, entonces $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ corresponde a un vector $\overrightarrow{PS}$ que es perpendicular al plano determinado por P, Q y R, como se ilustra en la Figura 14.41. Se escribe entonces

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}.$$

FIGURA 14.41



La dirección de $\overrightarrow{PS}$ puede encontrarse usando la regla de la mano derecha que se ilustra en la Figura 14.42. Concretamente, si θ denota el ángulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, y los dedos de la mano derecha se curvan apuntando en el sentido de la rotación de un ángulo θ que lleve a $\overrightarrow{PQ}$ a tener la misma dirección que $\overrightarrow{PR}$, entonces el pulgar extendido apunta en la dirección de $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$.

FIGURA 14.42



El siguiente resultado da información acerca de la magnitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

TEOREMA (14.33)

Si θ es el ángulo entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero, entonces

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta.$$

Demostración Usando el Teorema (14.20) (i) y la Definición (14.30),

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 \\ &\quad + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.\end{aligned}$$

La última igualdad se puede verificar multiplicando las expresiones implicadas. La forma vectorial de esta identidad es

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|)^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

o bien, como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|)^2 - (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|)^2 \cos^2 \theta \\ &= (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|)^2 (1 - \cos^2 \theta) = (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|)^2 \operatorname{sen} \theta.\end{aligned}$$

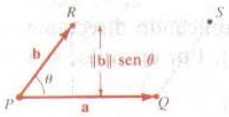
Finalmente, tomando raíz cuadrada y observando que $\operatorname{sen} \theta \geq 0$, resulta que

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta \quad \bullet \bullet$$

COROLARIO (14.34) Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Demostración Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores diferentes de cero y sea θ el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Los vectores son paralelos si y sólo si $\theta = 0$ o bien $\theta = \pi$, o equivalentemente, si $\operatorname{sen} \theta = 0$. Por el Teorema (14.33), esto equivale a $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{a}$ o $\mathbf{b}$ es el vector cero, la demostración es trivial. $\bullet \bullet$

FIGURA 14.43



Para interpretar $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ geométricamente, conviene representar $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ por vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ con el mismo punto inicial P. Sea S el punto tal que los segmentos PQ y PR son lados adyacentes de un paralelogramo con vértices P, Q, R y S, como se ilustra en la Figura 14.43. Una de las alturas del paralelogramo es $\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta$ y por lo tanto, el área es $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta$. Comparando esto con el Teorema (14.33) se ve que la *magnitud del producto vectorial* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *es igual al área del paralelogramo determinado por* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$.

EJEMPLO 3 Calcular el área del triángulo determinado por $P(4, -3, 1)$, $Q(6, -4, 7)$ y $R(1, 2, 2)$.

Solución Aplicando el Teorema (14.16), vemos que los vectores en V_3 que corresponden a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son $\mathbf{a} = \langle 2, -1, 6 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -3, 5, 1 \rangle$, respectivamente. Del Ejemplo 2, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -31\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$. Por lo tanto, el área del paralelogramo con lados adyacentes PQ y PR es

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{961 + 400 + 49} = \sqrt{1410}.$$

Entonces el área del triángulo es $\frac{1}{2}\sqrt{1410} \approx 18.8$. $\bullet$

Es importante conocer los productos vectoriales de los vectores unitarios especiales $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. Por ejemplo, aplicando la Definición (14.30) con $\mathbf{a} = \mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ y $\mathbf{b} = \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \mathbf{k}.$$

Se pueden demostrar las siguientes igualdades:

(14.35)
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k} \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} \qquad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

El hecho de que $\mathbf{i}\times\mathbf{j}\neq\mathbf{j}\times\mathbf{i}$ demuestra que el producto vectorial no es conmutativo. La ley asociativa tampoco se cumple pues, por ejemplo,

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

y

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}.$$

El siguiente teorema enuncia algunas propiedades importantes del producto vectorial para cualesquiera tres vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, y cualquier escalar m.

TEOREMA (14.36)

(i) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$
(ii) $(m\mathbf{a})\times\mathbf{b}=m(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(m\mathbf{b})$
(iii) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$
(iv) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$
(v) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$
(vi) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$

Demostración Todas las propiedades se pueden demostrar aplicando directamente la Definición (14.30) (aunque a veces el procedimiento es largo). Por ejemplo, si $\mathbf{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ y $\mathbf{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$, entonces

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Puesto que si se cambian dos renglones de un determinante cambia su signo, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\times\mathbf{a}&=-\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{j}-\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}\\ &=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Esto demuestra la propiedad (i).

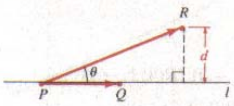
Si $\mathbf{c}=\langle c_1,c_2,c_2\rangle$, entonces la componente según $\mathbf{i}$ de $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ es

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix}&=a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2)\\ &=(a_2b_3-a_3b_2)+(a_2c_3-a_3c_2)\\ &=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

que es igual a la componente según **i** de $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$. Cálculos semejantes demuestran que las componentes según **j** y **k** de $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ son las mismas que las de $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$. Esto demuestra (iii). Las demostraciones de las otras propiedades se dejan como ejercicios. • •

La fórmula (vi) del Teorema (14.36) se llama **triple producto vectorial** de **a**, **b** y **c**.

FIGURA 14.44



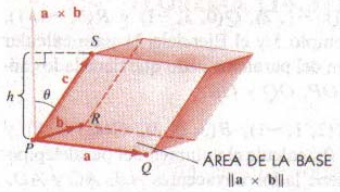
EJEMPLO 4 Encontrar una fórmula para la distancia d de un punto R a una recta l.

Solución Sean P y Q dos puntos de l, y sea θ el ángulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, como se muestra en la Figura 14.44. Utilizando el hecho de que $d = \|\overrightarrow{PR}\| \operatorname{sen}\theta$ y $\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|\|\overrightarrow{PR}\| \operatorname{sen}\theta$, obtenemos

$$d = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \quad \bullet$$

EJEMPLO 5 Supóngase que $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, y $\overrightarrow{PS}$ representan lados adyacentes del paralelepípedo oblicuángulo que se muestra en la Figura 14.45. Demostrar que si **a**, **b** y **c** son los vectores correspondientes en V_3, entonces $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ es el volumen del paralelepípedo.

FIGURA 14.45

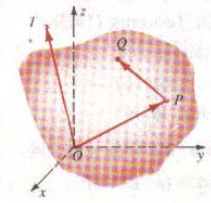


Solución El área de la base es $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Sea θ el ángulo entre **c** y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Como el vector correspondiente a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular a la base, la altura h del paralelepípedo está dada por $h = \|\mathbf{c}\||\cos\theta|$. Debe usarse el valor absoluto $|\cos\theta|$, pues θ podría ser un ángulo obtuso. Entonces, el volumen V del paralelepípedo es

$$\begin{aligned} V &= (\text{área de la base})(\text{altura}) \\ &= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\cos\theta| \\ &= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \end{aligned} \quad \bullet$$

El número $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ que se consideró en el Ejemplo 5 se llama **triple producto escalar** de **a**, **b** y **c**. Este número puede expresarse como un determinante de tercer orden formado por las componentes de los tres vectores (véase el Ejercicio 21).

FIGURA 14.46



El producto vectorial se utiliza para estudiar los efectos de rotación producidos por las fuerzas. Supongamos que una fuerza $\overrightarrow{PQ}$ se aplica en un punto P de un objeto, como se ilustra en la Figura 14.46, en la que se ha sobrepuesto un sistema de coordenadas en tres dimensiones. La fuerza tiende a hacer girar el objeto alrededor de una recta que pasa por O y es perpendicular al plano determinado por $\overrightarrow{PQ}$ y el vector de posición $\overrightarrow{OP}$. El vector $\overrightarrow{OT}$ definido por

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{PQ}.$$

se llama **momento de la fuerza $\overrightarrow{PQ}$ con respecto a O** (o bien simplemente **vector momento**, o **torque**). En física, o más específicamente en mecánica, $\overrightarrow{OT}$ indica tanto la magnitud como la dirección del efecto de rotación (momento) producido por la fuerza $\overrightarrow{PQ}$.

En el Capítulo 15 se presentarán otras interpretaciones físicas del producto vectorial.

EJERCICIOS 14.4

Ejercicios 1-10: Encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \langle 1, -2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, -4 \rangle$
2. $\mathbf{a} = \langle -5, 1, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 6, -2 \rangle$
3. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$
4. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
5. $\mathbf{a} = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2, 0 \rangle$
6. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
7. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{j}$
8. $\mathbf{a} = \langle 0, 0, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -7, 1, 0 \rangle$
9. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
10. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{k}$

11. Sean $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 1, 0 \rangle$, y $\mathbf{c} = \langle 1, -2, 4 \rangle$. Haga la determinación $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ y $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

12. Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ los vectores del Ejercicio 11. Encuentre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ y $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$.

13. Demuestre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todos los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

14. Demuestre las propiedades en (14.35).

15. Complete la demostración del Teorema (14.36).

16. (a) Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, ¿entonces necesariamente $\mathbf{b} = \mathbf{c}$? Explique.
 (b) Sea $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Ponga de manifiesto que si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Ejercicios 17-20: (a) Encuentre un vector perpendicular al plano determinado por los puntos P, Q y R; (b) calcule el área del triángulo determinado por P, Q y R.

17. $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 3, -1)$, $R(3, -4, 1)$
18. $P(-3, 0, 5)$, $Q(2, -1, -3)$, $R(4, 1, -1)$
19. $P(4, 0, 0)$, $Q(0, 5, 0)$, $R(0, 0, 2)$
20. $P(-1, 2, 0)$, $Q(0, 2, -3)$, $R(5, 0, 1)$

21. Haga la demostración de que si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

22. Demuestre que si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ se representan mediante vectores con un mismo punto inicial, entonces $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ si y sólo si los vectores son coplanares.

23. Dados $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 3, -1)$ y $R(3, -4, 1)$, use el Ejemplo 5 y el Ejercicio 21 para calcular el volumen del paralelepípedo que tiene lados adyacentes OP, OQ y OR.

24. Dados $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(4, -2, 1)$ y $D(5, -3, 0)$, calcule el volumen del paralelepípedo que tiene lados adyacentes AB, AC y AD.

Ejercicios 25-30: Verifique la identidad *sin usar las componentes*, considerando que $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son vectores arbitrarios.

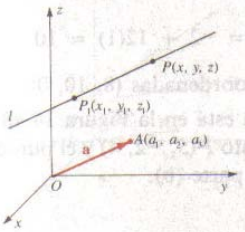
25. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
26. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ (*Sugerencia:* Use (vi) del Teorema (14.36).)
27. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$
28. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$
29. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}$
30. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})^2$

14.5 RECTAS Y PLANOS

En esta sección se describen las rectas y los planos mediante los conceptos vectoriales de *paralelismo* y *ortogonalidad*, respectivamente. Se hace la suposición de que las rectas y los planos están en un sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones.

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ un vector diferente de cero en V_3, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto arbitrario y $\overrightarrow{OA}$ el vector de posición de $\mathbf{a}$. Como se ilustra en la Figura 14.47, **la recta l que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es paralela a $\mathbf{a}$** se define como el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que $\overrightarrow{P_1P}$ es paralelo a $\overrightarrow{OA}$, es decir,

FIGURA 14.47



$$\overrightarrow{P_1P} = t\,\overrightarrow{OA} \quad \text{para un escalar } t.$$

En términos de vectores en V_3,

$$\langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = t\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1 t, a_2 t, a_3 t \rangle.$$

Igualando las componentes y despejando x, y y z se obtiene

$$x = x_1 + a_1 t, \quad y = y_1 + a_2 t, \quad z = z_1 + a_3 t$$

para cualquier número real t. Éstas son ecuaciones paramétricas para la recta l, con t como parámetro. Los puntos $P(x, y, z)$ en l se obtienen variando t sobre todos los números reales. Quedó demostrado lo siguiente.

TEOREMA (14.37)

La recta que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es paralela a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ tiene ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + a_1 t, \; y = y_1 + a_2 t, \; z = z_1 + a_3 t; \; t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Con cualquier otro vector $\mathbf{b}$ diferente de cero y paralelo al vector $\mathbf{a}$ del Teorema (14.37) se obtiene la misma recta, pues $\mathbf{b} = c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$, y la recta tiene ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + (ca_1)v, \quad y = y_1 + (ca_2)v, \quad z = z_1 + (ca_3)v; \qquad v \text{ en } \mathbb{R}$$

Estas ecuaciones determinan la misma recta, ya que el punto dado por t se obtiene con $v = t/c$.

EJEMPLO 1

(a) Encontrar ecuaciones paramétricas para la recta l que pasa por $P(5, -2, 4)$ y es paralela a $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 2, -\frac{2}{3} \rangle$.

(b) ¿En qué punto l corta al plano xy?

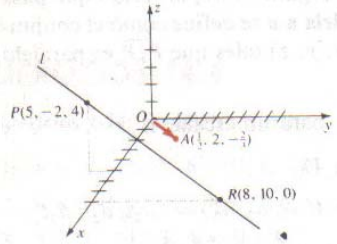
(c) Trazar el vector de posición de $\mathbf{a}$ y la recta l.

Solución

(a) Para evitar las fracciones, utilizamos el vector $\mathbf{b} = 6\mathbf{a} = \langle 3, 12, -4\rangle$ en vez de $\mathbf{a}$. De acuerdo con el Teorema (14.37), la recta l tiene ecuaciones paramétricas

$$x = 5 + 3t, \quad y = -2 + 12t, \quad z = 4 - 4t; \qquad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

FIGURA 14.48



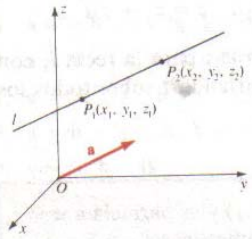
(b) La recta corta al plano xy en el punto $R(x, y, z)$ si $z = 4 - 4t = 0$; es decir, si $t = 1$. Usando las ecuaciones paramétricas de la parte (a) se obtienen las coordenadas x y y de R:

$$x = 5 + 3(1) = 8 \quad \text{y} \quad y = -2 + 12(1) = 10.$$

Por lo tanto, R es el punto con coordenadas (8, 10, 0).

(c) El vector de posición $\overrightarrow{OA}$ de $\mathbf{a}$ está en la Figura 14.48. Para trazar la recta l se sitúa el punto $P(5, -2, 4)$ y el punto $R(8, 10, 0)$ que se encontró en la parte (b). •

FIGURA 14.49



Para hallar ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por dos puntos arbitrarios $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, como se ilustra en la Figura 14.49, se usa el vector $\mathbf{a}$ correspondiente a $\overrightarrow{P_1P_2}$, o sea

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle.$$

Sustituyendo en el Teorema (14.37) se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t,$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Obsérvese que $t = 0$ da el punto P_1, $t = \frac{1}{2}$ da el punto medio de P_1P_2 y $t = 1$ da el punto P_2.

EJEMPLO 2 Hallar ecuaciones paramétricas para la recta l que pasa por $P_1(3, 1, -2)$ y $P_2(-2, 7, -4)$.

Solución El vector $\mathbf{a}$ en V_3 correspondiente a P_1P_2 es

$$\mathbf{a} = \langle -2 - 3, 7 - 1, -4 + 2\rangle = \langle -5, 6, -2\rangle.$$

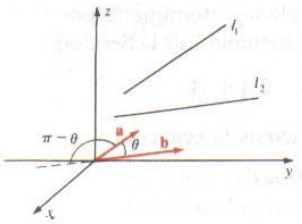
Según el Teorema (14.37), la recta l tiene ecuaciones paramétricas

$$x = 3 - 5t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = -2 - 2t; \qquad t \text{ en } \mathbb{R} \quad •$$

Si l_1 y l_2 son rectas paralelas a los vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, respectivamente, entonces se dice que los ángulos entre l_1 y l_2 son θ y $\pi - \theta$, donde θ

es el ángulo entre **a** y **b** (véase la Figura 14.50). Las rectas son **ortogonales** cuando $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ o, equivalentemente, cuando $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. Las rectas son **paralelas** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algún escalar c; es decir, si $b_1 = ca_1$, $b_2 = ca_2$, $b_3 = ca_3$.

FIGURA 14.50



Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ es un punto sobre una recta l, entonces **el plano que pasa por P_1 y tiene la recta normal l** se define como el conjunto de los puntos que se encuentran en todas las rectas l' que son perpendiculares a l en P_1, como se ilustra en la Figura 14.51. Para una definición equivalente usando vectores, se escoge otro punto P_2 de l y se considera el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$. Como en la Figura 14.52, **el plano que pasa por P_1 y tiene el vector normal $\overrightarrow{P_1P_2}$** se define como el conjunto de todos los puntos P tales que $\overrightarrow{P_1P}$ es ortogonal a $\overrightarrow{P_1P_2}$. Por el Teorema (14.24), P está en el plano si y sólo si $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0$. Cuando $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ corresponde a $\overrightarrow{P_1P_2}$, esto equivale entonces a

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = 0.$$

FIGURA 14.51

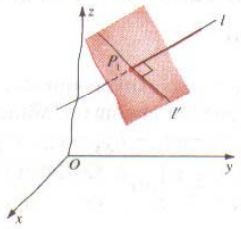
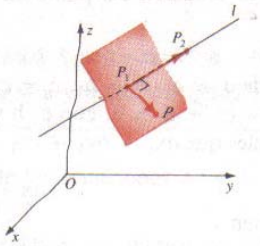


FIGURA 14.52



El siguiente resultado se obtiene aplicando la definición del producto escalar (14.19).

TEOREMA (14.38)

El plano que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene el vector normal $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, tiene como ecuación

$$a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) = 0.$$

EJEMPLO 3 Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(5, -2, 4)$ y tiene el vector normal $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$.

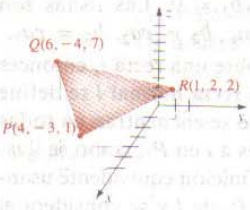
Solución Aplicando el Teorema (14.38) obtenemos

$$1(x - 5) + 2(y + 2) + 3(z - 4) = 0$$

lo cual se simplifica a

$$x + 2y + 3z - 13 = 0. \quad \bullet$$

FIGURA 14.53



EJEMPLO 4 Encontrar una ecuación del plano determinado por los puntos $P(4, -3, 1)$, $Q(6, -4, 7)$ y $R(1, 2, 2)$.

Solución Los puntos P, Q y R determinan un plano que contiene al triángulo mostrado en la Figura 14.53. Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ correspondientes a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son

$$\mathbf{a} = \langle 2, -1, 6 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \langle -3, 5, 1 \rangle.$$

El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es normal al plano determinado por P, Q y R (véase la Figura 14.41). Del Ejemplo 2 de la Sección 14.4,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -31\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Usando el Teorema (14.38) con $P_1 = P(4, -3, 1)$ obtenemos la ecuación

$$-31(x - 4) - 20(y + 3) + 7(z - 1) = 0$$

o bien

$$-31x - 20y + 7z + 57 = 0 \qquad \bullet$$

La ecuación del plano en el Teorema (14.38) se puede escribir en la forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$ y $d = -a_1x_1 - a_2y_1 - a_3z_1$. Inversamente, dada $ax + by + cz + d = 0$, con a, b y c no todos cero, se pueden encontrar números x_1, y_1 y z_1 tales que $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Entonces $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$, y por lo tanto,

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

o bien

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

De acuerdo con el Teorema (14.38), la gráfica de la última ecuación es un plano que pasa por $P(x_1, y_1, z_1)$ y tiene vector normal $\langle a, b, c \rangle$. Una ecuación de la forma $ax + by + cz + d = 0$ con a, b y c no todos cero, se llama **ecuación lineal en las tres variables** x, y, z. Quedó demostrado el siguiente teorema.

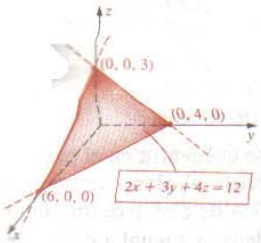
TEOREMA (14.39) La gráfica de toda ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$ es un plano con vector normal $\langle a, b, c \rangle$.

A menudo, para abreviar, se dice *el plano* $ax + by + cz + d = 0$ en vez de *el plano con ecuación* $ax + by + cz + d = 0$, que es más preciso.

Para trazar más fácilmente la gráfica de una ecuación lineal es conveniente encontrar la **traza** de la gráfica en cada plano coordenado, es decir, la recta de intersección del plano de la gráfica con el plano coordenado. Para encontrar la traza en el plano xy se sustituye z por 0, pues esto genera los puntos de la gráfica que están en el plano xy. Análogamente, para encontrar la traza en el plano yz o en el plano xz, se toma $x = 0$ o bien $y = 0$, respectivamente, en la ecuación $ax + by + cz + d = 0$.

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de la ecuación $2x + 3y + 4z = 12$.

FIGURA 14.54



Solución Hay tres puntos del plano que podemos ubicar fácilmente: los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados. Sustituyendo y y z por 0 en la ecuación obtenemos $2x = 12$, o sea $x = 6$. Entonces, el punto $(6, 0, 0)$ está en la gráfica. El número 6 es la coordenada x de intersección de la gráfica con el eje x. Análogamente, sustituyendo x y z por 0 obtenemos que la coordenada y de la intersección de la gráfica con el eje y es 4, y por lo tanto, el punto $(0, 4, 0)$ está en la gráfica. Reemplazando x y y por 0 se obtiene el punto $(0, 0, 3)$. La traza en el plano xy se encuentra sustituyendo z por 0 en la ecuación dada. Al hacerlo obtenemos $2x + 3y = 12$, que tiene como gráfica en el plano xy a una recta con abscisa en el origen 6 y ordenada en el origen 4. Ésta y las otras trazas de la gráfica en los planos xz y yz se indican en la Figura 14.54. •

DEFINICIÓN (14.40)

Dos planos con vectores normales **a** y **b**, respectivamente, son

(i) **paralelos** si **a** y **b** son paralelos,

(ii) ***ortogonales*** *si* **a** *y* **b** *son ortogonales.*

EJEMPLO 6 Demostrar que las gráficas de las ecuaciones $2x - 3y - z - 5 = 0$ y $-6x + 9y + 3z + 2 = 0$ son planos paralelos.

Solución Según el Teorema (14.39), las gráficas son planos con vectores normales $\mathbf{a} = \langle 2, -3, -1 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -6, 9, 3 \rangle$. Como $\mathbf{b} = -3\mathbf{a}$, los vectores **a** y **b** son paralelos y entonces, según la Definición (14.40), también los planos son paralelos. •

EJEMPLO 7 Encontrar una ecuación del plano que pasa por $P(5, -2, 4)$ y es paralelo al plano $3x + y - 6z + 8 = 0$.

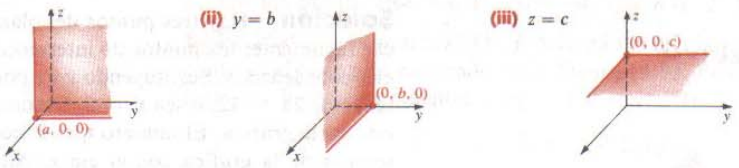
Solución Según el Teorema (14.39), el plano $3x + y - 6z + 8 = 0$ tiene un vector normal $\mathbf{a} = \langle 3, 1, -6 \rangle$. Por lo tanto un plano paralelo a éste tendrá una ecuación de la forma

$$3x + y - 6z + d = 0$$

para algún número real d. Si $P(5, -2, 4)$ está en este plano, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación; es decir, $3(5) + (-2) - 6(4) + d = 0$ o bien $d = 11$. Esto nos da $3x + y - 6z + 11 = 0$. •

El vector $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ es un vector normal al plano yz. Un plano que tiene una ecuación de la forma $x - x_1 = 0$ (o sea $x = x_1$) también tiene un vector normal **i** y, por lo tanto, es paralelo al plano yz (y ortogonal a los planos xy y xz). En la Figura

FIGURA 14.55



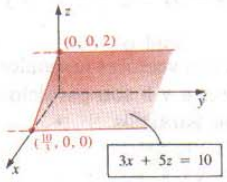
14.55(i) aparece parte de la gráfica de la ecuación $x = a$ que se encuentra en el primer octante. Análogamente, la gráfica de $y = b$ es un plano paralelo al plano xz tal que la coordenada y de su intersección con el eje y es b, y la gráfica de $z = c$ es un plano paralelo al plano xy, cuya intersección con el eje z tiene coordenada z igual a c [véanse (ii) y (iii) de la Figura 14.55].

Un plano cuya ecuación es de la forma $by + cz + d = 0$ tiene un vector normal $\mathbf{a} = \langle 0, b, c \rangle$ y es ortogonal al plano yz pues $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = 0$. Análogamente, las gráficas de $ax + by + d = 0$ y $ax + cz + d = 0$ son planos ortogonales al plano xy y al plano xz, respectivamente.

EJEMPLO 8 Trazar la gráfica de la ecuación $3x + 5z = 10$.

Solución La gráfica es un plano ortogonal al plano xz cuya intersección con el eje x tiene abscisa (o coordenada x) igual a $\frac{10}{3}$, y su intersección con el eje z tiene elevación (o coordenada z) igual a 2. Nótese que la traza en el plano yz tiene la ecuación $5z = 10$ y por lo tanto, es una recta paralela al eje y cuya intersección con el eje z tiene coordenada z igual a 2. Análogamer e, la traza en el plano xy tiene ecuación $3x = 10$ y es una recta paralela al eje y cuya intersección con el eje x tiene abscisa igual a $\frac{10}{3}$. La Figura 14.56 muestra una parte de la gráfica y las trazas en los tres planos coordenados. •

FIGURA 14.56



Las rectas pueden describirse como intersecciones de planos. Si una recta l está dada paramétricamente como en el Teorema (14.37) y si a_1, a_2, a_3 son diferentes de cero, puede despejarse t de cada ecuación y obtener

$$t = \frac{x - x_1}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_1}{a_2}, \quad t = \frac{z - z_1}{a_3}.$$

Resulta entonces que un punto $P(x, y, z)$ está en l si y sólo si se satisfacen las siguientes ecuaciones, llamadas *forma simétrica* de la ecuación de l.

FORMA SIMÉTRICA DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA (14.41)

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$$

La forma simétrica no es única para una recta dada, pues en (14.41) se pueden usar otros tres números b_1, b_2, b_3 en vez de a_1, a_2, a_3, con tal de que sean proporcionales a aquéllos, y también es posible usar otro punto de l en lugar de (x_1, y_1, z_1).

Si en (14.41) se toman las expresiones indicadas en pares,

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} \quad \text{y} \quad \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{z - z_1}{a_3},$$

se obtiene una descripción de l como la intersección de dos planos, el primero de los cuales es ortogonal al plano xy, y el segundo, al plano xz. Si uno de los números a_1, a_2 o a_3 es cero, no se puede despejar t de las ecuaciones en (13.47). Por ejemplo, si $a_3 = 0$ y $a_1 a_2 \neq 0$, entonces la tercera ecuación se reduce a $z = z_1$ y se obtiene la forma simétrica

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2}, \quad z = z_1,$$

que expresa de nuevo a l como la intersección de dos planos. Algo parecido sucede cuando $a_1 = 0$ o bien $a_2 = 0$.

EJEMPLO 9 Encontrar la forma simétrica de la ecuación de la recta que pasa por $P_1(3, 1, -2)$ y $P_2(-2, 7, -4)$.

Solución Como en el Ejemplo 2, el vector $\mathbf{a}$ correspondiente a $\overrightarrow{P_1P_2}$ es

$$\mathbf{a} = \langle -2 - 3, 7 - 1, -4 + 2 \rangle = \langle -5, 6, -2 \rangle.$$

Por el Teorema (14.37), la recta tiene la representación paramétrica

$$x = 3 - 5t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = -2 - 2t; \qquad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

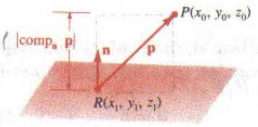
Despejando t de cada ecuación e igualando los resultados obtenemos la forma simétrica

$$\frac{x - 3}{-5} = \frac{y - 1}{6} = \frac{z + 2}{-2}. \quad \bullet$$

En el ejemplo siguiente se utilizan métodos vectoriales para calcular la distancia de un punto a un plano.

EJEMPLO 10 Encontrar una fórmula para la distancia h de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ al plano $ax + by + cz + d = 0$.

FIGURA 14.57



Solución Sea $R(x_1, y_1, z_1)$ un punto cualquiera del plano y sea $\mathbf{n}$ un vector normal al plano. El vector $\mathbf{p} = \langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1 \rangle$ tiene una representación geométrica $\overrightarrow{RP}$. Como se ilustra en la Figura 14.57, la distancia h es

$$h = |\text{comp}_{\mathbf{n}} \mathbf{p}| = \left| \mathbf{p} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} \mathbf{n} \right|.$$

Como $\langle a, b, c\rangle$ es un vector normal al plano, podemos definir

$$\frac{1}{\|\mathbf{n}\|}\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\langle a, b, c\rangle.$$

Por lo tanto,

$$h = \left|\mathbf{p}\cdot\frac{1}{\|\mathbf{n}\|}\mathbf{n}\right| = \frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$= \frac{|(ax_0+by_0+cz_0)+(-ax_1-by_1-cz_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Como R está en el plano, $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ y, por lo tanto, $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$. De modo que la fórmula anterior se puede escribir

$$h = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

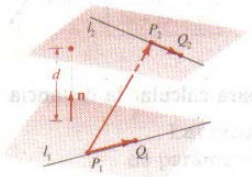
EJEMPLO 11 Calcular la distancia del punto $P(-6, 2, 3)$ al plano $4x - 5y + 8z - 7 = 0$.

Solución Usando la fórmula que se obtuvo en el Ejemplo 10,

$$h = \frac{|4(-6)-5(2)+8(3)-7|}{\sqrt{16+25+64}} = \frac{17}{\sqrt{105}} \approx 1.66.$$

EJEMPLO 12 Encontrar una fórmula para la distancia mínima d entre dos rectas l_1 y l_2 que se cruzan.

FIGURA 14.58



Solución Dos rectas *se cruzan* cuando no son paralelas y no se cortan. Escogemos P_1, Q_1 en l_1 y P_2Q_2, en l_2, como se ilustra en la Figura 14.58. Mediante el Teorema (14.32), $\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}$ es ortogonal a $\overrightarrow{P_1Q_1}$ y a $\overrightarrow{P_2Q_2}$, y por lo tanto, el vector *unitario* $\mathbf{n}$ definido por

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}\|}(\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2})$$

es ortogonal a $\overrightarrow{P_1Q_1}$ y $\overrightarrow{P_2Q_2}$.

Consideremos los dos planos con vector normal $\mathbf{n}$ que pasan por P_1 y P_2, respectivamente. Estos planos son paralelos y contienen a l_1 y l_2, respectivamente. La distancia d entre los planos se mide a lo largo de una recta paralela a la normal común $\mathbf{n}$, como se ilustra en la figura. De esto se deduce que d es la distancia mínima entre l_1 y l_2. Además,

$$d = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_1P_2}| = |\mathbf{n}\cdot P_1P_2|$$
$$= \frac{1}{\|\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}\|}|(\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|.$$

EJERCICIOS 14.5

Ejercicios 1-2: Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por P_1 y P_2. Determine (si es posible hacerlo) los puntos en los que la recta corta a cada plano coordenado.

1. $P_1(5, -2, 4)$, $P_2(2, 6, 1)$
2. $P_1(-3, 1, -1)$, $P_2(7,11, -8)$

Ejercicios 3-6: Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por P y es paralela a $\mathbf{a}$.

3. $P(4, 2, -3)$, $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2} \rangle$
4. $P(5, 0, -2)$, $\mathbf{a} = \langle -1, -4, 1 \rangle$
5. $P(0, 0, 0)$, $\mathbf{a} = \mathbf{j}$
6. $P(1, 2, 3)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
7. Sea l la recta con ecuaciones paramétricas $x = 5 - 3t$, $y = -2 + t$, $z = 1 + 9t$. Obtenga ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $P(-6, 4, -3)$ y es paralela a l.
8. Establezca ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $P(4, -1, 0)$ y es paralela a la que pasa por $P_1(-3, 9, -2)$ y $P_2(5, 7, -3)$.

Ejercicios 9-12: Determine si las dos rectas se cortan y, si lo hacen, encuentre el punto de intersección.

9. $x = 1 + 2t$, $y = 1 - 4t$, $z = 5 - t$; $x = 4 - v$, $y = -1 + 6v$, $z = 4 + v$
10. $x = 1 - 6t$, $y = 3 + 2t$, $z = 1 - 2t$; $x = 2 + 2v$, $y = 6 + v$, $z = 2 + v$
11. $x = 3 + t$, $y = 2 - 4t$, $z = t$; $x = 4 - v$, $y = 3 + v$, $z = -2 + 3v$
12. $x = 2 - 5t$, $y = 6 + 2t$, $z = -3 - 2t$; $x = 4 - 3v$, $y = 7 + 5v$, $z = 1 + 4v$
13. Use el producto escalar para evaluar la distancia d del punto $A(2, -6, 1)$ a la recta l que pasa por $B(3, 4, -2)$ y $C(7, -1, 5)$.
14. Calcule la distancia del punto $C(2, 1, -2)$ a la recta con ecuaciones paramétricas $x = 3 - 2t$, $y = -4 + 3t$, $z = 1 + 2t$.

Ejercicios 15-20: Trace la gráfica de la ecuación en un sistema tridimensional de coordenadas.

15. $2x + y - 6 = 0$
16. $3x - 2z - 24 = 0$
17. $2y - 3z - 9 = 0$
18. $5x + y - 4z + 20 = 0$
19. $2x - y + 5z + 10 = 0$
20. $x + y + z = 0$

Ejercicios 21-28: Encuentre la ecuación del plano que satisface las condiciones enunciadas.

21. Pasa por $P(6, -7, 4)$, es paralelo (a) al plano xy; (b) al plano yz; (c) al plano xz.
22. Pasa por $P(-2, 5, -8)$ y tiene por vector normal (a) $\mathbf{i}$; (b) $\mathbf{j}$; (c) $\mathbf{k}$.
23. Pasa por $P(-11, 4, -2)$ y tiene por vector normal $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
24. Pasa por $P(4, 2, -9)$ y tiene por vector normal $\overrightarrow{OP}$.
25. Pasa por $P(2, 5, -6)$ y es paralelo al plano $3x - y + 2z = 10$.
26. Pasa por el origen y es paralelo al plano $x - 6y + 4z = 7$.
27. Pasa por el origen y por los puntos $P(0, 2, 5)$ y $Q(1, 4, 0)$.
28. Pasa por los puntos $P(3, 2, 1)$, $Q(-1, 1, -2)$ y $R(3, -4, 1)$.

Ejercicios 29-32: Encuentre una forma simétrica para la recta que pasa por P_1 y P_2.

29. $P_1(5, -2, 4)$, $P_2(2, 6, 1)$
30. $P_1(-3, 1, -1)$, $P_2(7, 11, -8)$
31. $P_1(4, 2, -3)$, $P_2(-3, 2, 5)$
32. $P_1(5, -7, 4)$, $P_2(-2, -1, 4)$

Ejercicios 33-34: Calcule la distancia del punto P al plano dado.

33. $3x - 7y + z - 5 = 0$, $P(1, -1, 2)$
34. $2x + 4y - 5z + 1 = 0$, $P(3, 1, -2)$

Ejercicios 35-36: Demuestre que los dos planos son paralelos y calcule la distancia entre ellos.

35. $4x - 2y + 6z = 3$, $-6x + 3y - 9z = 4$
36. $3x + 12y - 6z = -2$, $5x + 20y - 10z = 7$

37. La recta l tiene parametrización $x = 3t + 1, y = -2t + 4, z = t - 3$. Halle una ecuación del plano que contiene a l y al punto $P(5, 0, 2)$.

38. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos $2x + y + 4z = 8$ y $x + 3y - z = -1$.

Ejercicios 39-40: Sea l_1 la recta que pasa por A y B, y sea l_2 la recta que pasa por C y D. Calcule la distancia entre l_1 y l_2 (véase el Ejemplo 12).

39. $A(1, -2, 3)$, $B(2, 0, 5)$, $C(4, 1, -1)$, $D(-2, 3, 4)$

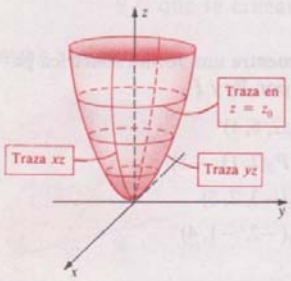
40. $A(1, 3, 0)$, $B(0, 4, 5)$, $C(-2, -1, 2)$, $D(5, 1, 0)$

14.6 SUPERFICIES

En la sección anterior se definió la *traza* de la gráfica de una ecuación lineal en un plano coordenado. En general, la **traza de una superficie en un plano** es la línea de intersección de la superficie con el plano. Para esquematizar una superficie se hace uso frecuente de las trazas. Son de especial importancia las trazas en los planos coordenados. Estas tres líneas se llaman **traza *xy***, **traza *yz*** y **traza *xz***, y sus ecuaciones pueden encontrarse a partir de la ecuación de la superficie tomando $z = 0$, $x = 0$ y $y = 0$, respectivamente.

EJEMPLO 1 Encontrar las trazas, en varios planos, de la superficie con ecuación $z = x^2 + y^2$ y esquematizar la gráfica de la ecuación.

FIGURA 14.59
$z = x^2 + y^2$



Solución Para encontrar la traza yz tomamos $x = 0$ en la ecuación $z = x^2 + y^2$ y así $z = y^2$. Por lo tanto, la traza de la superficie en el plano yz es una parábola con vértice en el origen y que abre hacia arriba, como se muestra en la Figura 14.59.

Para encontrar la traza xz tomamos $y = 0$ en $z = x^2 + y^2$, y obtenemos $z = x^2$. Por lo tanto, también la traza en el plano xz es una parábola.

Para la traza xy, se toma $z = 0$ y resulta $x^2 + y^2 = 0$. La gráfica de esta ecuación consta de un solo punto, el origen.

Ahora encontraremos las trazas en planos paralelos al plano xy; es decir, planos con ecuaciones de la forma $z = z_0$. Sustituyendo z por z_0 en la ecuación dada, obtenemos $x^2 + y^2 = z_0$. Entonces, si $z_0 > 0$, la traza en el plano $z = z_0$ es una circunferencia de radio $\sqrt{z_0}$. En la Figura 14.59 se muestran varias de estas circunferencias. Si $z_0 < 0$, entonces $x^2 + y^2 = z_0$ no tiene gráfica y por lo tanto, la superficie no tiene puntos abajo del plano xy.

Las trazas en planos paralelos al plano xz o al plano yz son parábolas. Por ejemplo, la traza en el plano $y = 1$ es la parábola $z = x^2 + 1$. No se representan estas parábolas pues las trazas circulares que se obtuvieron son suficientes para mostrar la gráfica. Se puede considerar que la superficie de este ejemplo fue generada haciendo girar la parábola $z = y^2$ en el plano yz, alrededor del eje z. Esta superficie se llama **paraboloide de revolución** (o **paraboloide circular**). •

DEFINICIÓN (14.42) Sea C una curva en un plano, y l una recta que no está en un plano paralelo. El conjunto de los puntos en todas las rectas paralelas a l que cortan a C se llama **cilindro**.

La curva C en la Definición (14.42) es una **directriz** del cilindro y cada una de las rectas paralelas a l que pasan por C es una **generatriz** del citado cilindro. El tipo más común de superficie cilíndrica es el **cilindro circular recto**, que se obtiene cuando C es una circunferencia en un plano y l es una recta perpendicular al plano, como se ve en la Figura 14.60. Aunque en la figura el cilindro aparece cortado en sus extremos, las generatrices se extienden indefinidamente. Como se ilustra en la Figura 14.61, la directriz C de una superficie cilíndrica no tiene que ser una curva cerrada.

Consideremos el caso en que la directriz C está en el plano xy y tiene por ecuación $y = f(x)$ para alguna función f. Supongamos también que las generatrices son paralelas al eje z. Entonces, como se ilustra en la Figura 14.62, un punto $P(x, y, z)$ está en el cilindro si y sólo si $Q(x, y, 0)$ está en C; es decir, si y sólo si las dos coordenadas x, y de P satisfacen la ecuación $y = f(x)$. Por lo tanto, $y = f(x)$ es una ecuación del cilindro además de ser la ecuación de la directriz en el plano xy.

FIGURA 14.60

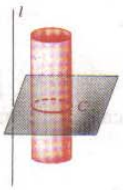


FIGURA 14.61

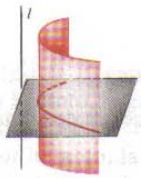


FIGURA 14.62

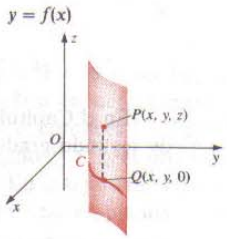
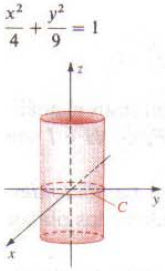


FIGURA 14.63



EJEMPLO 2 Esquematizar la gráfica de $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ en tres dimensiones.

Solución De acuerdo con los comentarios anteriores, la gráfica es un cilindro con generatrices paralelas al eje z. Comenzamos por trazar la gráfica de $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$ en el plano xy. Esta elipse es la directriz C del cilindro. Todas las trazas en planos paralelos al plano xy son elipses congruentes con esta directriz. En la Figura 14.63 se muestra una parte de la gráfica (que es un **cilindro elíptico**). •

La gráfica de una ecuación que sólo contiene las variables y y z es un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje x y cuya traza (directriz) en el plano yz es la gráfica de la ecuación dada. Análogamente, la gráfica de una ecuación que no contiene a la variable y es un cilindro con generatrices paralelas al eje y y cuya directriz es la gráfica de la ecuación dada en el plano xz.

EJEMPLO 3 Esquematizar las gráficas en tres dimensiones de las siguientes ecuaciones.

(a) $y^2 = 9 - z$ **(b)** $z = \operatorname{sen} x$

Solución

(a) La gráfica es un cilindro con generatrices paralelas al eje x y que tiene como directriz en el plano yz a la gráfica de $y^2 = 9 - z$. En la Figura 14.64 se muestra una parte de la gráfica (que es un **cilindro parabólico**).

(b) La gráfica es un cilindro con generatrices paralelas al eje y y cuya directriz en el plano xz es la gráfica de la ecuación $z = \operatorname{sen} x$. En la Figura 14.65 aparece una parte de la gráfica.

FIGURA 14.64

$y^2 = 9 - z$

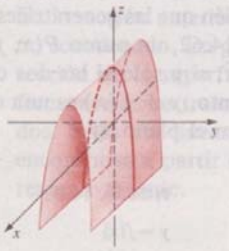
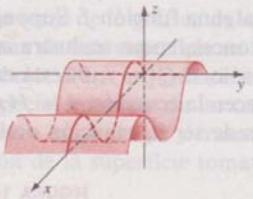


FIGURA 14.65

$z = \operatorname{sen} x$



En el Capítulo 12 se vio que, en dos dimensiones, la gráfica de cualquier ecuación de segundo grado en x, y,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

es una sección cónica (excepto en los casos degenerativos). En tres dimensiones, la gráfica de una ecuación de segundo grado en x, y, z,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

es una **superficie cuádrica** (excepto en los casos degenerativos). Restringiremos el análisis de las superficies cuádricas al caso en que los coeficientes D, E, F, G, H e I son todos cero.

Hay tres tipos de superficies cuádricas: *elipsoides*, *hiperboloides* y *paraboloides*. Los nombres provienen del hecho de que las trazas en los planos paralelos a los planos coordenados son elipses, hipérbolas y parábolas, respectivamente.

La gráfica de la siguiente ecuación, en la que a, b y c son números reales positivos, es un elipsoide.

ELIPSOIDE (14.43)

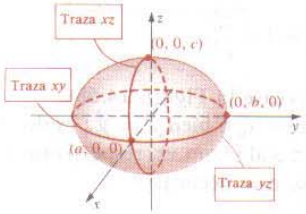
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Las trazas del elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ en los tres planos coordenados se indican en la siguiente tabla:

Traza	Ecuación de la traza	Gráfica
Traza xy	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse
Traza xz	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Elipse
Traza yz	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Elipse

FIGURA 14.66

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



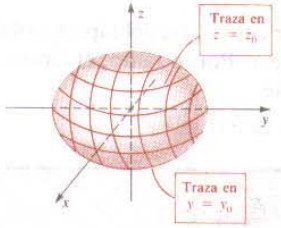
La Figura 14.66 muestra una gráfica típica de un elipsoide con sus trazas en los planos coordenados.

Para encontrar la traza en un plano arbitrario $z = z_0$ paralelo al plano xy, sustituimos z por z_0 en la ecuación del elipsoide y así

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Si $|z_0| > c$, entonces $1 - (z_0^2/c^2) < 0$ y no hay gráfica. Por lo tanto, la gráfica de (14.43) se encuentra entre los planos $z = -c$ y $z = c$. Si $|z_0| < c$, entonces $1 - (z_0^2/c^2) > 0$ y por lo tanto, la traza en el plano $z = z_0$ es una elipse, como se ilustra en la Figura 14.67. En la figura también se muestran las partes visibles de otras trazas en planos paralelos al plano xy.

FIGURA 14.67



Para un plano $y = y_0$ paralelo al plano xz, tenemos lo siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2}$$

La Figura 14.67 muestra también las partes visibles de varias de estas trazas (que son elipses) para $-b < y_0 < b$.

Finalmente, tomando $x = x_0$ con $-a < x_0 < a$, vemos que las trazas en planos paralelos al plano yz son elipses. (Estas elipses no están en la Figura 14.67.)

Si $a = b = c$, la gráfica de (14.43) es una esfera de radio a con centro en el origen.

A veces las trazas en los tres planos coordenados son suficientes para indicar la forma general de una superficie cuádrica, como en la Figura 14.66.

La gráfica de la siguiente ecuación, en la que a, b y c son números reales positivos, es un *hiperboloide de un manto*.

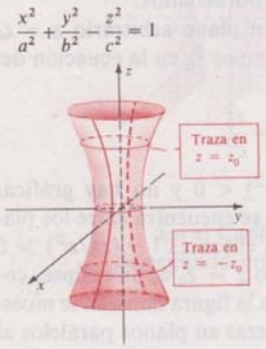
HIPERBOLOIDE DE UN MANTO (14.44)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Las trazas del hiperboloide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$ en los tres planos coordenados se indican en la siguiente tabla:

Traza	Ecuación de la traza	Gráfica
Traza xy	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse
Traza xz	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Hipérbola
Traza yz	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Hipérbola

FIGURA 14.68



La gráfica está en la Figura 14.68 junto con estas trazas. El eje z es el **eje del hiperboloide.**

La traza en un plano $z = z_0$ paralelo al plano xy tiene una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2},$$

y es por lo tanto una elipse (véase la Figura 14.68).

Las trazas en los planos $x = x_0$ o bien $y = y_0$; es decir, en planos paralelos al plano yz o al plano xz, respectivamente, son hipérbolas (verifíquese este hecho).

Las gráficas de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{y} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

también son hiperboloides de un manto, pero en el primer caso el eje del hiperboloide es el eje y, y en el segundo, el eje del hiperboloide es el eje x. Por lo tanto, el término negativo en estas ecuaciones indica el eje del hiperboloide.

El siguiente es un hiperboloide de otro tipo.

HIPERBOLOIDE DE DOS MANTOS (14.45)

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

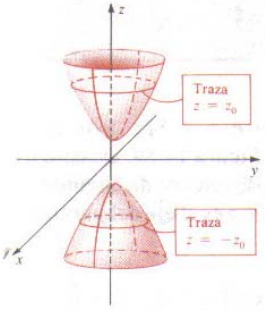
Las trazas en los planos coordenados son las siguientes:

Traza	Ecuación de la traza	Gráfica
Traza xy	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	No hay gráfica

Traza	Ecuación de la traza	Gráfica
Traza xz	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Hipérbola
Traza yz	$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Hipérbola

FIGURA 14.69

$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



Las intersecciones con el eje z tienen coordenadas z iguales a $\pm c$ y no hay intersecciones con el eje x ni con el eje y. Como no hay traza en el plano xy, se ve si hay traza en un plano $z = z_0$ *paralelo* al plano xy. Sustituyendo z por z_0 en la ecuación dada se obtiene

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1 \quad \text{o bien} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}-1.$$

Si $|z_0| > c$, entonces la traza es una elipse, como se indica en la Figura 14.69. Las trazas en los planos paralelos al plano yz o al plano xz son hipérbolas (verifíquese este hecho). El eje z es el eje del hiperboloide.

Poniendo los signos negativos en otros términos se obtienen hiperboloides de dos mantos cuyo eje es el eje x o el eje y. (¿Qué términos deben ser negativos en cada caso?)

Un *cono* (de dos mantos) puede considerarse como un hiperboloide degenerativo que se obtiene sustituyendo por 0 el número 1 en (14.44) o (14.45). Esto da la siguiente ecuación.

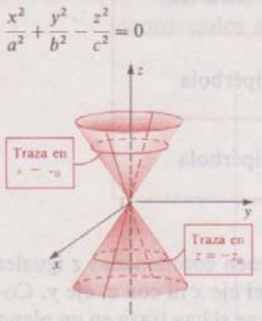
CONO (14.46)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Las trazas son las siguientes:

Traza	Ecuación de la traza	Gráfica
Traza xy	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	El origen
Traza xz	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Las rectas $z=\pm\frac{c}{a}x$
Traza yz	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Las rectas $z=\pm\frac{c}{b}y$

FIGURA 14.70



La traza en un plano $z = z_0$ paralelo al plano xy tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}$$

y por lo tanto es una elipse. Las trazas en los planos paralelos a los otros ejes coordenados son hipérbolas (verifíquese este hecho).

La gráfica está en la Figura 14.70. El eje z es el eje del cono.

La gráfica de la siguiente ecuación, en la que a, b y c son números reales y a y b son positivos, es un *paraboloide*.

PARABOLOIDE (14.47)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

El Ejemplo 1 es un caso especial de (14.47) con $a = b = c = 1$. Si $c > 0$, entonces la gráfica de (14.47) es parecida a la que se muestra en la Figura 14.59, excepto que si $a \neq b$, entonces las trazas en planos paralelos al xy son elipses en vez de circunferencias. Si $c < 0$, entonces el paraboloide *abre hacia arriba*. El eje z es el **eje del paraboloide**. Las gráficas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx$$

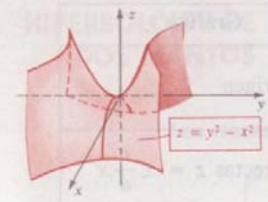
son paraboloides cuyos ejes son el eje y y el eje x, respectivamente.

Si en (14.47) se cambia el signo + por −, se obtiene un *paraboloide hiperbólico*.

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (14.48)

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=cz$$

FIGURA 14.71



La Figura 14.71 muestra un croquis típico de esta superficie, con $c > 0$, la cual tiene la forma de una silla de montar. Intercambiando x, y y z en (14.48), se obtienen variantes. El paraboloide hiperbólico es la superficie cuádrica más difícil de visualizar y se requiere mucha práctica para adquirir la habilidad de esquematizar la gráfica. Trazas como las de la Figura 14.71 pueden ser útiles. Obsérvese que la traza en el plano xy tiene como ecuación

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0 \quad \text{o bien} \quad y=\pm\frac{a}{b}x,$$

y es un par de rectas que se cortan en el origen. Esta traza no aparece en la Figura 14.71.

A continuación se presentan dos ejemplos que son casos especiales de superficies cuádricas; es decir, los coeficientes tienen valores específicos.

EJEMPLO 4 Esquematizar la gráfica de $16x^2 - 9y^2 + 36z^2 = 144$, e identificar la superficie.

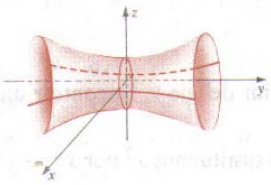
Solución Dividiendo ambos lados de la ecuación entre 144 obtenemos

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Las trazas en los planos coordenados son las siguientes:

Traza	Ecuación de la traza	Gráfica
Traza xy	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	Hipérbola
Traza xz	$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$	Elipse
Traza yz	$\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$	Hipérbola

FIGURA 14.72
$16x^2 - 9y^2 + 36z^2 = 144$



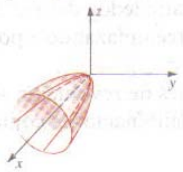
La Figura 14.72 muestra la gráfica de este hiperboloide de un manto cuyo eje es el eje y. Las trazas en planos paralelos al plano xz son elipses y las trazas en planos paralelos al plano xy o al plano yz son hipérbolas. •

EJEMPLO 5 Esquematizar la gráfica de $y^2 + 4z^2 = x$ e identificar la superficie.

Solución Las trazas son las siguientes:

Traza	Ecuación de la traza	Gráfica
Traza xy	$y^2 = x$	Parábola
Traza xz	$4z^2 = x$	Parábola
Traza yz	$y^2 + 4z^2 = 0$	El origen

FIGURA 14.73
$y^2 + 4z^2 = x$

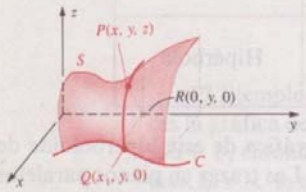


La traza en un plano $x = x_0$ paralelo al plano yz tiene la ecuación $y^2 + 4z^2 = x_0$, que es una elipse si $x_0 > 0$. Las trazas en planos paralelos al plano xz o al plano xy son parábolas. La superficie es un paraboloide cuyo eje es el eje x y su gráfica está en la Figura 14.73. •

Se llama *superficie de revolución* a una que se obtiene al girar una curva plana C alrededor de una recta (el *eje de revolución*) en el mismo plano. En la siguiente discusión se supone que C está en un plano coordenado y que el eje de revolución es uno de los ejes de coordenadas. El símbolo $f(x, y)$ se usa para representar una expresión en las variables x y y. En este caso, $f(a, b)$ denota el número que se obtiene al sustituir x por a y y por b. Esta notación se analiza más a fondo en el Capítulo 16.

La gráfica de la ecuación $f(x, y) = 0$ en el plano xy es una curva C. (Aquí sólo interesa la gráfica en el plano xy y no la gráfica en tres dimensiones, que es un cilindro.) Para simplificar, supongamos que x y y no son negativos para todos los puntos (x, y) en C y denotemos por S la superficie que se obtiene al girar C alrededor del eje y, como se ilustra en la Figura 14.74. Un punto $P(x, y, z)$ está en S si y sólo si $Q(x_1, y, 0)$ está en C, donde $x_1 = \sqrt{x^2 + z^2}$. En consecuencia, $P(x, y, z)$ está en S si y sólo si $f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$. Entonces, para encontrar una ecuación de S, se reemplaza por $\sqrt{x^2 + z^2}$ la variable x en la ecuación de C. Análogamente, si la gráfica de $f(x, y) = 0$ gira alrededor del eje x, entonces se obtiene una ecuación de la superficie resultante reemplazando y por $\sqrt{y^2 + z^2}$. Para algunas curvas que tienen puntos (x, y) con x o y negativo, hay que sustituir x por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ o y por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$, para generalizar la discusión anterior. Si x y y sólo aparecen en potencias pares, como en el ejemplo siguiente, entonces esta distinción no es necesaria ya que el radical desaparece cuando la ecuación se simplifica.

FIGURA 14.74



EJEMPLO 6 La gráfica de $9x^2 + 4y^2 = 36$ gira alrededor del eje y. Encontrar una ecuación de la superficie resultante.

Solución Para encontrar una ecuación de la superficie sustituimos x^2 por $x^2 + z^2$. Esto da

$$9(x^2 + z^2) + 4y^2 = 36.$$

La superficie es un *elipsoide de revolución*. Si dividimos ambos lados entre 36 y ordenamos los términos, resulta

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

que tiene la forma de la ecuación en (14.43). •

Se puede hacer una discusión semejante para las curvas que se encuentran en el plano yz o en el xz. Por ejemplo, si una curva C en el plano xz gira alrededor del eje z, entonces puede encontrarse una ecuación de la superficie resultante reemplazando x por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Si C gira alrededor del eje x, hay que reemplazar z por $\sqrt{y^2 + z^2}$.

Finalmente, cabe mencionar que las ecuaciones de las superficies de revolución se caracterizan por el hecho de que dos de las variables aparecen en combinaciones como $x^2 + y^2$, $y^2 + z^2$ o bien $x^2 + z^2$.

EJERCICIOS 14.6

Ejercicios 1-32: Esquematice la gráfica en tres dimensiones de la ecuación e identifique la superficie.

1. $x^2 + y^2 = 9$
2. $y^2 + z^2 = 16$
3. $4y^2 + 9z^2 = 36$
4. $x^2 + 5z^2 = 25$
5. $x^2 = 9z$
6. $x^2 - 4y = 0$
7. $y^2 - x^2 = 16$
8. $xz = 1$
9. $4x - 3y = 12$
10. $2z + y = 5$
11. $z = e^y$
12. $z = \log x$
13. $4x^2 + 9y^2 = 36z$
14. $8x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$
15. $16x^2 + 100y^2 - 25z^2 = 400$
16. $25x^2 - 225y^2 + 9z^2 = 225$
17. $3x^2 - 4y^2 - z^2 = 12$
18. $4x^2 + y^2 = 9z^2$
19. $x^2 - 16y^2 = 4z^2$
20. $4y^2 - 25z^2 = 100x$
21. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$
22. $16x^2 - 25y^2 + 100z^2 = 200$
23. $16x^2 - 4y^2 - z^2 + 1 = 0$
24. $36x = 9y^2 + z^2$
25. $y^2 - 9x^2 - z^2 - 9 = 0$
26. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
27. $4y^2 + 25z^2 + 100x = 0$
28. $16y = x^2 + 4z^2$
29. $36x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 0$
30. $4y^2 + 9z^2 = 9x^2$
31. $4y = x^2 - z^2$
32. $4x^2 + 16y = z^2$

Ejercicios 33-38: Obtenga una ecuación de la superficie generada al girar la gráfica de la ecuación alrededor del eje indicado. Esquematice la superficie.

33. $x^2 + 4y^2 = 16$, eje y
34. $y^2 = 4x$; eje x
35. $z = 4 - y^2$; eje z
36. $z = e^{-y^2}$; eje y.
37. $z^2 - x^2 = 1$; eje x
38. $xz = 1$; eje z

39. Aunque a menudo se utiliza la esfera como modelo de la forma de la Tierra, a veces se necesita una relación más precisa para estudiar su topografía. A fin de establecer los puntos de control de la red geodésica nacional de Estados Unidos, se utiliza el *elipsoide de Clarke* (1866), cuya ecuación es $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ con $a = b = 6378.2064$ km y $c = 6356.5838$ km.
 (a) Explique brevemente la diferencia entre el elipsoide de Clarke y la representación esférica que se acostumbra para la superficie terrestre.
 (b) Las curvas de igual latitud (los *paralelos*) son las trazas en planos $z = k$. Describa estas curvas.
 (c) Las curvas de igual longitud (los *meridianos*) son trazas en planos $y = mx$. Describa estas curvas.

40. Identifique la superficie $z = xy$ haciendo una rotación adecuada de los ejes en el plano xy.

14.7 COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Las coordenadas polares en el plano (véase la Sección 13.3) pueden servir para simplificar ciertas ecuaciones. Por ejemplo, para trazar la gráfica en dos dimensiones de la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 - 3\sqrt{x^2 + y^2} + 2 = 0.$$

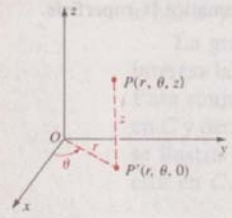
Se podría cambiar algebraicamente su forma; pero la expresión $x^2 + y^2$ sugiere usar coordenadas polares. Haciéndolo,

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \text{o bien} \quad (r - 1)(r - 2) = 0.$$

Por lo tanto, la gráfica consta de dos circunferencias concéntricas $r = 1$ y $r = 2$ con radios 1 y 2, respectivamente, y centros en el origen.

Se pueden definir sistemas de coordenadas en tres dimensiones que pueden usarse de manera parecida para las ecuaciones en x, y, z. Su principal aplicación, que es para simplificar integrales múltiples, se presenta en la Sección 17.8.

FIGURA 14.75



El sistema de coordenadas polares se puede generalizar a tres dimensiones. Basta representar un punto P por una terna ordenada (r, θ, z), donde z (la elevación) es la tercera coordenada rectangular de P y (r, θ) son las coordenadas polares de la proyección P' de P sobre el plano xy (véase la Figura 14.75). Este sistema coordenado se llama **sistema de coordenadas cilíndricas.**

Como se hizo un cambio a coordenadas polares en el plano xy, las fórmulas del Teorema (13.8) dan las relaciones entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas cilíndricas de P. A continuación se enuncian de nuevo estas fórmulas.

TEOREMA (14.49)

Las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un punto P están relacionadas como sigue:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad z = z.$$

Si r_0 es una constante positiva, entonces la gráfica de la ecuación $r = r_0$, o equivalentemente, de $x^2 + y^2 = r_0^2$, es un cilindro circular de radio r_0 con eje a lo largo del eje z. Si θ_0 y z_0 son constantes, entonces la gráfica de $\theta = \theta_0$ es un plano que contiene al eje z y la gráfica de $z = z_0$ es un plano perpendicular al eje z. En la Figura 14.76 aparecen representaciones típicas de estas superficies. En la Sección 17.8 se utilizarán estas superficies para simplificar integrales múltiples.

FIGURA 14.76

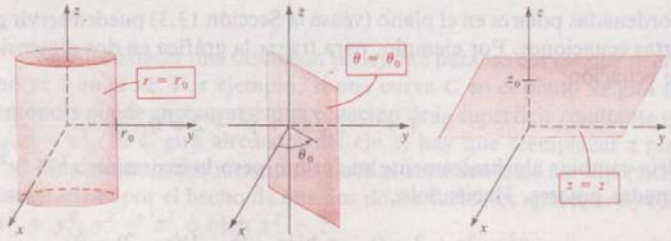
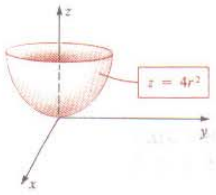


FIGURA 14.77



EJEMPLO 1 Para cada una de las ecuaciones en coordenadas cilíndricas, encontrar una ecuación en coordenadas rectangulares y esquematizar la gráfica en tres dimensiones.

(a) $z = 4r^2$ **(b)** $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

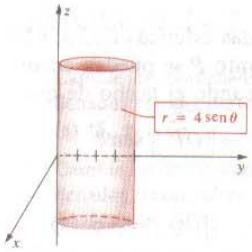
Solución

(a) De acuerdo con el Teorema (14.49), la ecuación $z = 4r^2$ es equivalente a la ecuación rectangular

$$z = 4(x^2 + y^2) \quad \text{o bien} \quad z = 4x^2 + 4y^2.$$

La gráfica es el paraboloide de revolución de la Figura 14.77.

FIGURA 14.78

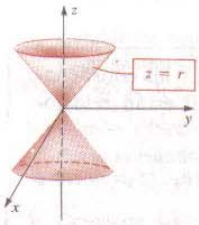


(b) Multiplicando por r ambos lados de $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ obtenemos $r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta$. Usando (14.49), resulta $x^2 + y^2 = 4y$, o equivalentemente,

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

La gráfica es un cilindro con generatrices paralelas al eje z y se representa en la Figura 14.78. El cilindro tiene como directriz una circunferencia de radio 2 en el plano xy con centro (0, 2, 0) en coordenadas rectangulares. •

FIGURA 14.79



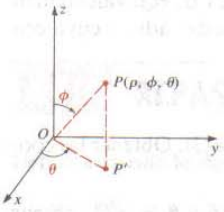
EJEMPLO 2 Encontrar una ecuación en coordenadas cilíndricas equivalente a $z^2 = x^2 + y^2$, y representar la gráfica.

Solución Usando el Teorema (14.49),

$$z^2 = r^2 \quad \text{o bien} \quad z = r.$$

La gráfica es un cono circular con eje a lo largo del eje z, como se ilustra en la Figura 14.79. •

FIGURA 14.80



También puede definirse el **sistema de coordenadas esféricas** en tres dimensiones. Para ello, un punto P distinto del origen se representa por una terna ordenada (ρ, ϕ, θ), donde $\rho = \|\overrightarrow{OP}\|$, ϕ es el ángulo entre la parte positiva del eje z y $\overrightarrow{OP}$, y θ es el ángulo polar correspondiente a la proyección P' de P sobre el plano xy (véase la Figura 14.80). El origen se representa por cualquier terna de la forma $(0, \phi, \theta)$.

La gráfica de la ecuación $\rho = \rho_0$, con $\rho_0 > 0$, es una esfera con centro en O. La gráfica de $\phi = \phi_0$ es normalmente un manto de un cono con vértice en O. Como en el caso de las coordenadas cilíndricas, la gráfica de $\theta = \theta_0$ es un plano que contiene al eje z. En la Figura 14.81 aparecen gráficas típicas de estas superficies.

FIGURA 14.81

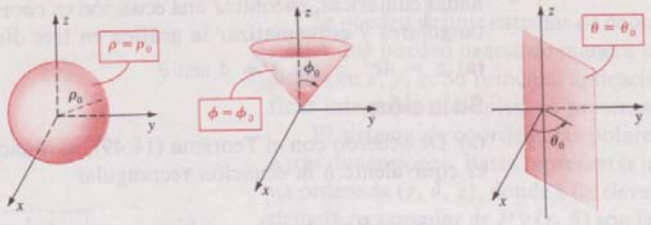
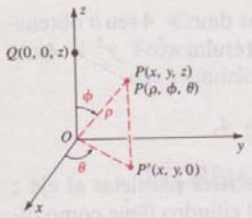


FIGURA 14.82



La relación entre las coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) y las rectangulares (x, y, z) de un punto P se pueden encontrar analizando la Figura 14.82. Usando el hecho de que

$$x = \|\overrightarrow{OP'}\| \cos\theta \quad \text{y} \quad y = \|\overrightarrow{OP'}\| \operatorname{sen}\theta$$

junto con

$$\|\overrightarrow{OP'}\| = \|\overrightarrow{QP}\| = \rho \operatorname{sen}\phi \quad \text{y} \quad \|\overrightarrow{OQ}\| = \rho \cos\phi$$

se obtiene la parte (i) del siguiente teorema. La parte (ii) es una consecuencia de la Fórmula de la Distancia (14.13).

TEOREMA (14.50)

Las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) de un punto P están relacionadas como sigue:

(i) $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho \cos\phi$

(ii) $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

EJEMPLO 3 Encontrar una ecuación en coordenadas rectangulares equivalente a $\rho = 2 \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, y describir la gráfica de esta ecuación.

Solución Multiplicando ambos lados de la ecuación dada por ρ, obtenemos $\rho^2 = 2\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$. Aplicando (14.50), obtenemos $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ o, equivalentemente, $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. Por (14.18), la gráfica es una esfera de radio 1 cuyo centro es (1, 0, 0) en coordenadas rectangulares.

EJEMPLO 4 Sea P el punto con coordenadas esféricas $(4, \pi/6, \pi/3)$. Obtener las coordenadas rectangulares y las coordenadas cilíndricas de P.

Solución Usando el Teorema (14.50) (i) con $\rho = 4$, $\phi = \pi/6$ y $\theta = \pi/3$, obtenemos las coordenadas rectangulares

$$x = 4 \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \cos\frac{\pi}{3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$y = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

Para determinar las coordenadas cilíndricas, observamos que $r^2 = x^2 + y^2 = 1 + 3 = 4$. Por lo tanto, las coordenadas cilíndricas de P son (r, θ, z) o $(2, \pi/3, 2\sqrt{3})$. •

EJERCICIOS 14.7

1. Cambie las coordenadas cilíndricas dadas a coordenadas rectangulares.
 (a) $(5, \pi/2, 3)$ (b) $(6, \pi/3, -5)$
2. Cambie las coordenadas esféricas dadas a coordenadas rectangulares.
 (a) $(4, \pi/6, \pi/2)$ (b) $(1, 3\pi/4, 2\pi/3)$
3. Cambie las coordenadas rectangulares dadas a coordenadas esféricas.
 (a) $(1, 1, \sqrt{2})$ (b) $(1, \sqrt{3}, 0)$
4. Cambie las coordenadas rectangulares dadas a coordenadas cilíndricas.
 (a) $(2\sqrt{3}, 2, -2)$ (b) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$
5. Convierta las coordenadas esféricas dadas a coordenadas cilíndricas.
 (a) $(4, \pi/3, \pi/3)$ (b) $(2, 5\pi/6, \pi/4)$
6. Convierta las coordenadas cilíndricas dadas a coordenadas esféricas.
 (a) $(\sqrt{2}, \pi/4, 1)$ (b) $(3, \pi/3, 1)$

Ejercicios 7-20: Describa la gráfica de la ecuación en tres dimensiones.

7. $r = 4$
8. $\theta = \pi/4$
9. $\phi = \pi/6$
10. $\rho = 3$
11. $r = 4 \cos \theta$
12. $r = \operatorname{sen} 2\theta$
13. $\rho = 4 \cos \phi$
14. $\rho = \sec \phi$
15. $\phi = 0$
16. $\phi = \pi/2$
17. $r^2 = \cos 2\theta$
18. $z = 1 - r^2$
19. $\rho^2 - 3\rho + 2 = 0$
20. $\phi^2 - \pi\phi + (3\pi^2/16) = 0$

Ejercicios 21-30: Encuentre una ecuación en coordenadas cilíndricas y una en coordenadas esféricas para la gráfica de la ecuación dada.

21. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
22. $x^2 + y^2 = 4z$
23. $3x + y - 4z = 12$
24. $x^2 - y^2 - z^2 = 1$
25. $y^2 + z^2 = 9$
26. $x^2 + z^2 = 9$
27. $6x = x^2 + y^2$
28. $x^2 - 4z^2 + y^2 = 0$
29. $y = xz$
30. $y = x$

14.8 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Escalar.
2. Vectores en V_2 y V_3.
3. Múltiplos escalares de vectores.
4. Adición (o suma) de vectores.
5. Componentes de un vector.
6. El vector cero.
7. Vector de posición.
8. Magnitud de un vector.

9. Sustracción (o resta) de vectores.
10. Vectores paralelos.
11. Vector unitario.
12. Sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones.
13. Fórmula de la Distancia.
14. Fórmula del Punto Medio.
15. Ecuación de una esfera.
16. El producto escalar y sus propiedades.
17. Ángulo entre dos vectores.
18. Vectores ortogonales.
19. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
20. Desigualdad del Triángulo.
21. $\text{Comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$
22. Trabajo realizado por una fuerza.
23. Determinantes de orden 2 y 3.
24. Producto vectorial y sus propiedades.
25. Ecuaciones de una recta.
26. Ecuaciones de un plano.
27. Cilindros.
28. Superficies cuádricas.
29. Coordenadas cilíndricas.
30. Coordenadas esféricas.

EJERCICIOS 14.8

Ejercicios 1-10: Sean $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Determine el vector o el escalar.

1. $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$
2. $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$
4. $3\mathbf{a} \cdot (5\mathbf{b} + \mathbf{i})$
5. $\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|$
6. $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$
7. El ángulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{i}$.
8. Un vector unitario con la misma dirección que $\mathbf{b}$.
9. Un vector unitario ortogonal a $\mathbf{a}$.
10. El coseno del ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
11. Dados los puntos $A(5, -3, 2)$ y $B(-1, -4, 3)$,
 (a) calcule $d(A, B)$.
 (b) halle las coordenadas del punto medio del segmento AB.
 (c) obtenga una ecuación de la esfera con centro B que es tangente al plano xz.
 (d) encuentre una ecuación del plano que pasa por B y es paralelo al plano xz.
 (e) halle ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por A y B.
 (f) halle la ecuación del plano que pasa por A y tiene vector normal $\overrightarrow{AB}$.
12. Encuentre una ecuación del plano que pasa por $A(0, 4, 9)$ y $B(0, -3, 7)$ y es perpendicular al plano yz.
13. Obtenga la ecuación del plano tal que su intersección con el eje x tiene por abscisa 5, su intersección con el eje y tiene por ordenada -2, y su intersección con el eje z tiene como elevación 6.
14. Encuentre la ecuación del cilindro que es perpendicular al plano xy y que tiene como directriz la circunferencia en el plano xy con centro $C(4, -3, 0)$ y radio 5.
15. Encuentre la ecuación del elipsoide con centro O, tal que su intersección con el eje x tiene abscisa 8, su intersección con el eje y tiene ordenada 3 y su intersección con el eje z tiene elevación 1.
16. Encuentre una ecuación de la superficie que se obtiene al girar la gráfica de la ecuación $z = x$ alrededor del eje z.

Ejercicios 17-27: Represente la gráfica de la ecuación.

17. $x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 6y - 8z + 10 = 0$
18. $4y - 3z - 15 = 0$
19. $3x - 5y + 2z = 10$
20. $y = z^2 + 1$
21. $9x^2 + 4z^2 = 36$
22. $x^2 + 4y + 9z^2 = 0$
23. $z^2 - 4x^2 = 9 - 4y^2$

24. $2x^2 + 4z^2 - y^2 = 0$

25. $z^2 - 4x^2 - y^2 = 4$

26. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 16$

27. $x^2 - 4y^2 = 4z$

Ejercicios 28-44: Dados $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$, determine el vector o el escalar.

28. $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

29. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})$

30. $\|\mathbf{b} + \mathbf{c}\|$

31. $\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{c}\|$

32. Un vector unitario que tenga la misma dirección que $\mathbf{a}$.

33. Los cosenos directores de $\mathbf{a}$ (véase el Ejercicio 31 de la Sección 14.3).

34. El coseno del ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$.

35. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

36. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

37. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$

38. $\text{comp}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

39. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$

40. $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$

41. $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$

42. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

43. Un vector que tenga dirección opuesta a $\mathbf{b}$ y el doble de la magnitud de $\mathbf{b}$.

44. Dos vectores unitarios perpendiculares a $\mathbf{b}$ y a $\mathbf{c}$.

45. Dados los puntos $P(2, -1, 0)$, $Q(-3, 2, 0)$ y $R(4, -5, 3)$, encuentre
 (a) el vector unitario normal respecto del plano determinado por P, Q y R.
 (b) la ecuación del plano determinado por P, Q y R.
 (c) ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y es paralela a la que pasa por Q y R.
 (d) $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$.
 (e) el ángulo entre $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QR}$.
 (f) el área del triángulo con vértices P, Q y R.

46. Calcule el ángulo entre las rectas

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-5}{8}$$

y

$$\frac{x+1}{7} = \frac{6-y}{2} = \frac{2z+7}{-4}.$$

47. Obtenga ecuaciones paramétricas para cada una de las dos rectas del Ejercicio 46.

48. Determine si las siguientes rectas se cortan, y si lo hacen, encuentre el punto de intersección:

$$x = 2 + t,\ y = 1 + t,\ z = 4 + 7t;$$

$$x = -4 + 5t,\ y = 2 - 2t,\ z = 1 - 4t.$$

49. Calcule el ángulo entre las rectas del Ejercicio 48.

50. Sea l la recta con ecuaciones paramétricas $x = 2t + 1$, $y = -t + 3$, $z = 5t$. Calcule la distancia de $A(3, 1, -1)$ a l.

51. Sea P un punto con coordenadas rectangulares $(2, -2, 1)$. Determine las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas de P.

52. Sea P un punto que posee coordenadas esféricas $(12, \pi/6, 3\pi/4)$. Encuentre las coordenadas cilíndricas y las coordenadas rectangulares de P.

Ejercicios 53-56: Obtenga una ecuación equivalente en coordenadas rectangulares y describa la gráfica de *cada ecuación en tres dimensiones.*

53. $\phi = 3\pi/4$

54. $r = \cos 2\theta$

55. $\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta = 1$

56. $\rho^2 - 3\rho = 0$

Ejercicios 57-60: Encuentre una ecuación en coordenadas cilíndricas y una en coordenadas esféricas equivalentes a la ecuación dada.

57. $x^2 + y^2 = 1$

58. $z = x^2 - y^2$

59. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$

60. $2x + y - 3z = 4$

738 en blanco

CAPÍTULO 15

FUNCIONES VECTORIALES

En este capítulo se generalizan los conceptos de límite, derivada e integral a las funciones cuyos contradominios constan de vectores en lugar de números reales. La principal aplicación que se presenta de estos conceptos es al estudio del movimiento. En capítulos posteriores se dan más aplicaciones.

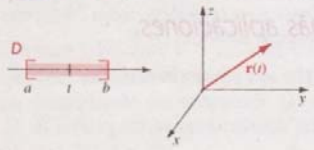
15.1 DEFINICIONES Y CURVAS EN EL ESPACIO

Una *función* es una correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto D (el dominio) un elemento único de un conjunto E (véase la Definición (1.20)). Si E es un subconjunto de $\mathbb{R}$ (los números reales), se dice que la función tiene **valores reales** o que es una **función escalar**. Si E es un subconjunto de V_3, se dice entonces que la función tiene *valores vectoriales* o que es una **función vectorial**, y se denota con símbolos como $\mathbf{r}$ o $\vec{r}$. En todo este capítulo, D será un subconjunto de $\mathbb{R}$. *Entonces se tiene lo siguiente.*

DEFINICIÓN (15.1)

Sea D un conjunto de números reales. Una **función vectorial** r con dominio D es una correspondencia que asocia a cada número t en D un vector único $\mathbf{r}(t)$ en V_3. El contradominio de $\mathbf{r}$ consta de todos los vectores $\mathbf{r}(t)$ para t en D.

FIGURA 15.1



El dominio D se puede representar geométricamente por puntos en una recta real. En la Figura 15.1, D es un intervalo cerrado, pero D podría ser un intervalo de otro tipo o cualquier otro conjunto de números reales. La Figura 15.1 muestra también el vector de posición de $\mathbf{r}(t)$ en un sistema de coordenadas en tres dimensiones. Como cada t en D determina uno y sólo uno de estos vectores, las componentes de $\mathbf{r}(t)$ están determinadas de manera única por t y son, por lo tanto, funciones escalares f, g y h de t. Entonces se puede escribir

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad \text{para } t \text{ en } D.$$

Inversamente, si f, g y h son funciones escalares, todas con el mismo dominio D, entonces la ecuación anterior define una función $\mathbf{r}$ con valores vectoriales. Esto da lo siguiente.

TEOREMA (15.2)

Si D es un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces $\mathbf{r}$ es una función vectorial con dominio D si y sólo si, para todo t en D

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

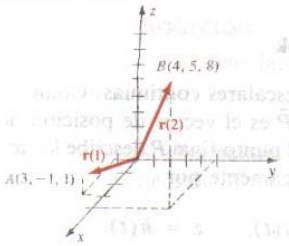
donde f, g y h son funciones escalares con dominio D.

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{r}(t) = (t + 2)\mathbf{i} + (2t^2 - 3)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ para t en $\mathbb{R}$.

(a) Calcular $\mathbf{r}(1)$ y $\mathbf{r}(2)$ y trazar sus vectores de posición.

(b) ¿Para qué valores de t el vector de posición de $r(t)$ está en uno de los planos coordenados?

FIGURA 15.2



Solución

(a) Para obtener $\mathbf{r}(1)$ y $\mathbf{r}(2)$ sustituimos t por 1 y 2, y obtenemos

$$\mathbf{r}(1) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

Entonces, los puntos finales de los vectores de posición son $A(3, -1, 1)$ y $B(4, 5, 8)$, como se muestra en la Figura 15.2.

(b) El vector de posición de $\mathbf{r}(t)$ está en el plano xy si su componente según $\mathbf{k}$, o sea t^3, es igual a 0; es decir, si $t = 0$. El vector de posición está en el plano yz si la componente según $\mathbf{i}$, que es $t + 2$, es igual a 0; es decir, si $t = -2$. Finalmente, está en el plano xz si $2t^2 - 3 = 0$; es decir, si $t = \pm\sqrt{3/2} \approx \pm 1.225$. •

Si en el Ejemplo 1 se tiene que t varía entre 1 y 2, entonces el punto final del vector de posición de $\mathbf{r}(t)$ recorre una trayectoria entre los puntos $A(3, -1, 0)$ y $B(4, 5, 8)$ señalados en la Figura 15.2. En este sentido, $\mathbf{r}$ determina una *curva en el espacio de tres dimensiones*. Se definirá el concepto de *curva en el espacio* antes de generalizar tal noción a una función vectorial arbitraria.

Como en la Definición (13.1) de una curva plana, **una curva en el espacio**, o **curva tridimensional**, es un conjunto C de ternas ordenadas de la forma $(f(t), g(t), h(t))$, donde f, g y h son funciones continuas en un intervalo I. La gráfica de C en un sistema de coordenadas rectangulares consta de todos los puntos $P(f(t), g(t), h(t))$ correspondientes a las ternas ordenadas. Las ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t); \quad t \text{ en } I$$

son **ecuaciones paramétricas** de C. Se dice que C es **curva parametrizada** y que las ecuaciones son una **parametrización** de C.

Los conceptos de **punto final**, **curva cerrada**, **curva cerrada simple** y **longitud de una curva** se definen exactamente igual que para las curvas planas o en el plano (véase la Sección 13.1). Una curva C es **regular (o alisada)** si tiene una parametrización $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ tal que f', g' y h' son continuas y no se anulan simultáneamente, excepto posiblemente en los extremos. Tales curvas tienen una parametrización alisante y, como en el caso de las curvas planas, su representación no tiene picos ni interrupciones. El concepto de **curva alisada o regular parte por parte** se define como en la Sección 13.1.

El siguiente resultado es análogo al Teorema (13.5).

TEOREMA (15.3)

Si una curva C tiene una parametrización regular $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $a \le t \le b$, y si C no se corta a sí misma, excepto posiblemente en los extremos del intervalo $[a, b]$, entonces la longitud L de C es

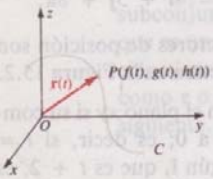
$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Sea $\mathbf{r}$ una función vectorial tal que

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

FIGURA 15.3



donde f, g y h son funciones escalares continuas. Como se ilustra en la Figura 15.3, si $\overrightarrow{OP}$ es el vector de posición de $\mathbf{r}(t)$, entonces cuando t varía, el punto final P describe la curva C que está dada paramétricamente por

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

Se dice que C es **la curva determinada por** $\mathbf{r}(t)$. En la Sección 15.3 se usará esta representación vectorial de C con t como el tiempo, para describir el movimiento de un punto P en el espacio (tridimensional).

Una **cúbica alabeada** es una curva que tiene una parametrización

$$x = at, \quad y = bt^2, \quad z = ct^3$$

donde a, b y c son constantes diferentes de cero. La curva determinada por $\mathbf{r}(t)$ en el siguiente ejemplo es el caso especial con $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$.

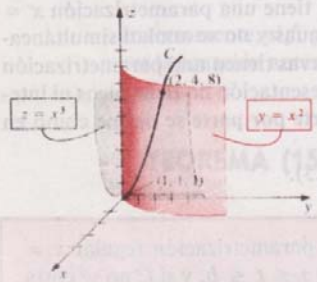
EJEMPLO 2 Sea $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ para $t \geq 0$. Trazar la gráfica de la curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$.

Solución C tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = t^2, \quad y = t^3; \quad t \geq 0.$$

Como x, y, z no son negativos, C se encuentra en el primer octante.

FIGURA 15.4



Como ayuda para visualizar la gráfica, se elimina el parámetro en las primeras dos ecuaciones, obteniendo $y = x^2$. Esto implica que todo punto $P(x, y, z)$ en C está también en el cilindro parabólico $y = x^2$.

Si eliminamos el parámetro de $x = t$ y $z = t^3$, obtenemos $z = x^3$, que es la ecuación de un cilindro con generatrices paralelas al eje y. La curva C es la intersección de los dos cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$, como se muestra en la Figura 15.4.

En $t = 0$, el punto final $P(x, y, z)$ del vector de posición $\mathbf{r}(t)$ es $(0, 0, 0)$. A medida que t aumenta, el punto final traza la curva C, pasando por los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 4, 8)$, $(3, 9, 27)$, etcétera. Obsérvese que y aumenta más rápidamente que x, y z, más rápidamente que y. Así, en $t = 10$ el punto final del vector de posición es $(10, 100, 1000)$. •

EJEMPLO 3 Sea $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$ para $t \geq 0$, donde a y b son constantes positivas.

(a) Esquematizar la gráfica de la curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$.

Podemos suponer que t es el valor en radianes de un ángulo θ y escribir

$$x = \tfrac{1}{2}\theta \cos\theta, \quad y = \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{sen}\theta; \qquad \theta \text{ en } \mathbb{R}.$$

Además, como

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}\theta \operatorname{sen}\theta}{\frac{1}{2}\theta \cos\theta} = \tan\theta,$$

del Teorema (13.8) se deduce que θ es un ángulo que se puede usar para expresar (x, y) en coordenadas polares. Luego notamos que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \tfrac{1}{4}\theta^2 \cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\theta^2 \operatorname{sen}^2\theta \\ &= \tfrac{1}{4}\theta^2 (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \tfrac{1}{4}\theta^2. \end{aligned}$$

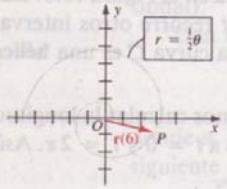
Cambiando $x^2 + y^2$ a coordenadas polares,

$$r^2 = \tfrac{1}{4}\theta^2 \qquad \text{o bien} \qquad r = \tfrac{1}{2}\theta.$$

(Nótese que $r \neq -\frac{1}{2}\theta$, porque $r = \|\mathbf{r}(t)\| \geq 0$.)

La gráfica de la ecuación polar $r = \frac{1}{2}\theta$ para $0 \leq \theta \leq 3\pi$ es la parte de la espiral de Arquímedes ilustrada en la Figura 15.6 (véase el Ejemplo 5 de la Sección 13.3).

FIGURA 15.6



(b) Sustituyendo t por 6, obtenemos

$$\mathbf{r}(6) = (3 \cos 6)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} 6)\mathbf{j} \approx 2.9\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j}$$

y se traza $\mathbf{r}(6)$ como en la Figura 15.6. •

EJERCICIOS 15.1

Ejercicios 1-14: Trace la gráfica de la curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$.

1. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + (1 - 9t^2)\mathbf{j}$; t en $\mathbb{R}$
2. $\mathbf{r}(t) = (1 - t^3)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$; $t \geq 0$
3. $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 2)\mathbf{j}$; $-2 \leq t \leq 2$
4. $\mathbf{r}(t) = (2 + \cos t)\mathbf{i} - (3 - \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$; $0 \leq t \leq 2\pi$
5. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$; $0 \leq t \leq \pi$
6. $\mathbf{r}(t) = 2 \cosh t\,\mathbf{i} + 3 \operatorname{senh} t\,\mathbf{j}$; t en $\mathbb{R}$
7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 4 \cos t\,\mathbf{j} + 9 \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$; $t \geq 0$
8. $\mathbf{r}(t) = \tan t\,\mathbf{i} + \sec t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $-\pi/2 < t < \pi/2$
9. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$; t en $\mathbb{R}$
10. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $0 \leq t \leq 4$
11. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; t en $\mathbb{R}$
12. $\mathbf{r}(t) = 6 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 25 \cos t\,\mathbf{k}$; $-2\pi \leq t \leq 2\pi$
13. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$; t en $\mathbb{R}$
14. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$; t en $\mathbb{R}$

Ejercicios 15-20: Calcule la longitud de la curva parametrizada.

15. $x = 5t$, $y = 4t^2$, $z = 3t^2$; $0 \leq t \leq 2$
16. $x = t^2$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t \cos t$; $0 \leq t \leq 1$
17. $x = e^t \cos t$, $y = e^t$, $z = e^t \operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq 2\pi$
18. $x = 2t$, $y = 4 \operatorname{sen} 3t$, $z = 4 \cos 3t$; $0 \leq t \leq 2\pi$
19. $x = 3t^2$, $y = t^3$, $z = 6t$; $0 \leq t \leq 1$
20. $x = 1 - 2t^2$, $y = 4t$, $z = 3 + 2t^2$; $0 \leq t \leq 2$
21. Una *espiral concoide* es una curva C con una parametrización $x = ae^{\mu t} \cos t$, $y = ae^{\mu t} \operatorname{sen} t$, $z = be^{\mu t}$; $t \geq 0$, donde a, b y μ son constantes.
 (a) Demuestre que C se encuentra en el cono $a^2z^2 = b^2(x^2 + y^2)$.

(b) Trace la gráfica de C para $a = b = 4$ y $\mu = -1$.

(c) Calcule la longitud de C correspondiente al intervalo t $[0, \infty)$.

22. Una curva C tiene una parametrización

$$x = a \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \alpha, \quad y = b \operatorname{sen} t \cos \alpha,$$

$$z = c \cos t; \quad t \geq 0,$$

donde a, b, c y α son constantes positivas.

(a) Demuestre que C se encuentra en el elipsoide

$$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1.$$

(b) Demuestre que C también se halla en un plano que contiene al eje z.

(c) Utilice los resultados de las partes (a) y (b) para trazar la gráfica de C.

23. (a) Demuestre que la cúbica alabeada $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$; $t \geq 0$ corta a cualquier plano a lo más en tres puntos.

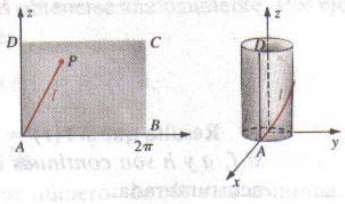
(b) Calcule la longitud de dicha cúbica alabeada $x = 6t$, $y = 3t^2$, $z = t^3$ entre los puntos correspondientes a $t = 0$ y $t = 1$.

24. Un rectángulo puede usarse para construir un cilindro uniendo dos de sus lados opuestos (paralelos). La figura muestra un rectángulo $ABCD$ de anchura 2π. El lado AD se une al lado BC, y el punto A se coloca en (1, 0, 0) para formar parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que aparece en la segunda figura.

(a) Demuestre que si l es el segmento que va de A a cualquier otro punto P del rectángulo y m es la pendiente de l, entonces la curva en la que l se convierte sobre el cilindro tiene la parametrización $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = mt$.

(b) Use la parte (a) para demostrar que la curva más corta sobre el cilindro que une al punto (1, 0, 0) con cualquier otro punto P es una hélice (véase el Ejemplo 3).

EJERCICIO 24



15.2 LÍMITES, DERIVADAS E INTEGRALES

En esta sección se aprovechan los límites, las derivadas y las integrales de las funciones escalares para definir conceptos análogos para funciones vectoriales. Comenzamos con una definición de límite.

DEFINICIÓN (15.4)

Sea $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$. El límite de $\mathbf{r}(t)$ cuando t tiende a a es

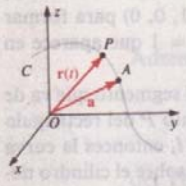
$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \to a} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to a} g(t)\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t \to a} h(t)\right]\mathbf{k}$$

siempre y cuando f, g y h tengan límite cuando t tiende a a.

Se puede dar una definición semejante para los límites unilaterales. Si

$$\lim_{t \to a} f(t) = a_1, \quad \lim_{t \to a} g(t) = a_2 \quad \text{y} \quad \lim_{t \to a} h(t) = a_3$$

FIGURA 15.7



entonces

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, entonces se tiene la situación ilustrada en la Figura 15.7: C es la curva determinada por $\mathbf{r}(t)$, y $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OA}$ son los vectores de posición de $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{a}$, respectivamente. Cuando t tiende a a, el vector $\overrightarrow{OP}$ tiende a $\overrightarrow{OA}$; es decir, P se acerca a A.

Se pueden demostrar teoremas para los límites de las funciones vectoriales parecidos a los del Capítulo 2 para funciones escalares. Los límites de las funciones vectoriales pueden definirse también usando el enfoque ε-δ como el que se usó en la Definición (2.10) (véase el Ejercicio 39).

DEFINICIÓN (15.5)

Una función vectorial $\mathbf{r}$ es **continua** en a si

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Resulta que si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{r}$ *es continua en a si y sólo si f, g y h son continuas en a*. La continuidad en un intervalo se define de la manera acostumbrada.

DEFINICIÓN (15.6)

Sea $\mathbf{r}$ una función vectorial. La **derivada** de $\mathbf{r}$ es la función vectorial $\mathbf{r}'$ definida por

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

para todo t en que el límite existe.

Escribiendo

$$\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)] = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

la Definición (15.6) toma la forma bien conocida para las derivadas de las funciones escalares que se presentó en el Capítulo 3.

El siguiente teorema dice que $\mathbf{r}'(t)$ se puede obtener derivando cada componente de $\mathbf{r}(t)$.

TEOREMA (15.7)

Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f, g y h son derivables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}.$$

Demostración De acuerdo con la Definición (15.6),

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}] - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}\mathbf{k} \right].$$

Tomando el límite de cada componente se deduce la conclusión del teorema. • •

Si $\mathbf{r}'(t)$ existe, se dice que $\mathbf{r}$ es **derivable** en t. Las derivadas también se denotan como sigue:

$$\mathbf{r}'(t) = D_t\,\mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt}\,\mathbf{r}(t).$$

Las derivadas de órdenes superiores pueden obtenerse análogamente. Por ejemplo, si f, g y h tienen segundas derivadas, entonces

$$\mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + e^{-3t}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

(a) Encontrar el dominio de $\mathbf{r}$ y determinar los números donde $\mathbf{r}$ es continua.

(b) Encontrar $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.

Solución

(a) Como $\ln t$ no está definido para $t \leq 0$, el dominio de $\mathbf{r}$ es el conjunto de los números reales positivos. Además, $\mathbf{r}$ es continua en todo este dominio porque cada componente determina una función continua.

(b) Por el Teorema (15.7),

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - 3e^{-3t}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}''(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + 9e^{-3t}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \quad \bullet$$

El siguiente teorema da fórmulas de derivación para las funciones vectoriales, que son semejantes a las de las funciones escalares.

TEOREMA (15.8)

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales derivables y c es un escalar, entonces

(i) $D_t[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

(ii) $D_t[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

(iii) $D_t[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) + \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)$

(iv) $D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t) + \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t)$

Demostración Se demostrará (iii) y las otras partes se dejan como ejercicio. Sean

$$\mathbf{u}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}(t) = g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g_3(t)\mathbf{k}$$

donde cada f_k y g_k es una función derivable en t. Por la definición del producto escalar,

$$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{k=1}^{3} f_k(t)g_k(t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_t\left[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)\right] &= D_t \sum_{k=1}^{3} f_k(t)g_k(t) = \sum_{k=1}^{3} D_t\left[f_k(t)g_k(t)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{3} \left[f_k(t)g_k'(t) + f_k'(t)g_k(t)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{3} f_k(t)g_k'(t) + \sum_{k=1}^{3} f_k'(t)g_k(t) \\ &= \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) + \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t). \end{aligned}$$

• •

Para obtener una interpretación geométrica de la derivada $\mathbf{r}'(t)$ en la Definición (15.6), sea

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

donde f, g y h son funciones derivables y sea C la curva determinada por $\mathbf{r}(t)$. Si, como se muestra en la Figura 15.8(i), $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ son los vectores de posición de $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + \Delta t)$, respectivamente, entonces

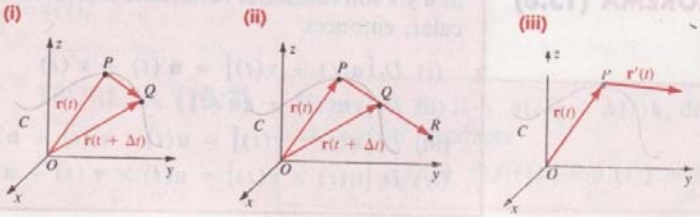
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \qquad \text{corresponde a} \qquad \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

Por lo tanto, para todo número real Δt diferente de cero,

$$\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{PQ} \qquad \text{corresponde a} \qquad \frac{1}{\Delta t}\left[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)\right].$$

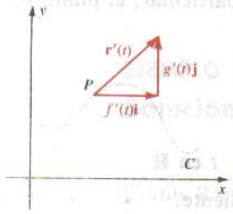
Si $\Delta t > 0$, entonces $(1/\Delta t)\overrightarrow{PQ}$ es un vector $\overrightarrow{PR}$ que tiene la misma dirección que $\overrightarrow{PQ}$. Además, si $0 < \Delta t < 1$, entonces $(1/\Delta t) > 1$ y $\|\overrightarrow{PR}\| > \|\overrightarrow{PQ}\|$, como se ilustra en la Figura 15.8(ii).

FIGURA 15.8



Si $\Delta t \to 0^+$, se tiene que Q tiende a P a lo largo de C y como $\overrightarrow{PR}$ se encuentra en la recta secante que pasa por P y Q, el vector $\overrightarrow{PR}$ debe tender a un vector que se halla sobre la recta tangente a C en P. Puede decirse algo parecido para $\Delta t < 0$. Por esta razón se expresa que $\mathbf{r}'(t)$, o cualquiera de sus representaciones geométricas, es un **vector tangente** a C en P. Siempre se representará a $\mathbf{r}'(t)$ mediante un vector con punto inicial P en la curva C, como se muestra en la Figura 15.8(iii). El vector $\mathbf{r}'(t)$ apunta en la dirección en la que se mueve el punto cuando t aumenta. Por definición, la **recta tangente** a C en P es la recta que pasa por P y es paralela a $\mathbf{r}'(t)$.

FIGURA 15.9



Para el caso $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, en dos dimensiones, el vector tangente es

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}.$$

Si $f'(t) \neq 0$, entonces la pendiente de la recta que pasa por P y es paralela a $\mathbf{r}'(t)$ es $g'(t)/f'(t)$ (véase la Figura 15.9). Esto concuerda con la fórmula en el Teorema (13.3) que se obtuvo para las rectas tangentes a las curvas planas.

EJEMPLO 2 Sea $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j}$ para $-2 \leq t \leq 2$. Calcular $\mathbf{r}'(t)$ y trazar la curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$. Ilustrar geométricamente $\mathbf{r}(1)$ y $\mathbf{r}'(1)$.

Solución Como $\mathbf{r}(t)$ está en V_2, usamos un plano xy para representar los vectores. Eliminando el parámetro en $x = 2t$, $y = 4 - t^2$, obtenemos

$$y = 4 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1}{4}x^2,$$

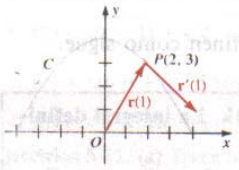
que es la ecuación de una parábola. En la tabla siguiente aparecen las coordenadas de los puntos de C que corresponden a algunos valores de t.

t	-2	-1	0	1	2
x	-4	-2	0	2	4
y	0	3	4	3	0

La curva C es la parte de la parábola que se ilustra en la Figura 15.10. Como $\mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, el vector de posición correspondiente a $\mathbf{r}(1)$ es $\overrightarrow{OP}$, donde P es el punto de coordenadas (2, 3). Derivando,

$$\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(1) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}.$$

FIGURA 15.10



De acuerdo con lo que se dijo previamente, representamos $\mathbf{r}'(1)$ mediante un vector con punto inicial P y punto final (4, 1), como se muestra en la Figura 15.10. •

EJEMPLO 3 Sea C una curva con ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \quad t \geq 0.$$

Encontrar ecuaciones paramétricas para la recta tangente a C en el punto correspondiente a $t = 2$.

Solución La curva C está determinada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \text{para } t \geq 0$$

y es la cúbica alabeada del Ejemplo 2 de la Sección 15.1 (véase la Figura 15.4). De la discusión anterior,

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

es un vector tangente a C en el punto correspondiente a t. En particular, el punto en C correspondiente a $t = 2$ es (2, 4, 8) y

$$\mathbf{r}'(2) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

es un vector tangente. Por el Teorema (14.37),

$$x = t + 2, \quad y = 4t + 4, \quad z = 12t + 8; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$$

son ecuaciones paramétricas para la recta tangente correspondiente. •

EJEMPLO 4 Demostrar que si $\mathbf{r}$ es derivable y $\|\mathbf{r}(t)\|$ es constante, entonces $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todo t.

Solución Si $\|\mathbf{r}(t)\| = c$, siendo c una constante, entonces

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = \|\mathbf{r}(t)\|^2 = c^2$$

y por lo tanto,

$$D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = D_t c^2 = 0.$$

Usando el Teorema (15.8) (iii) obtenemos

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0,$$

o bien

$$2[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)] = 0.$$

Entonces, por el Teorema (14.24), $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ son ortogonales. •

El resultado del Ejemplo 4 es geométricamente evidente porque si $\|\mathbf{r}(t)\| = c$, entonces cuando t varía, el punto final del vector de posición correspondiente a $\mathbf{r}(t)$ recorre una curva C que se encuentra en la superficie de una esfera de radio c con centro en el origen. El vector tangente a C es $\mathbf{r}'(t)$ y es siempre ortogonal al vector de posición y, por lo tanto, a $\mathbf{r}(t)$.

Las integrales definidas de las funciones vectoriales se definen como sigue.

DEFINICIÓN (15.9)

Sea $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$. La **integral definida desde a hasta b de $\mathbf{r}$** es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$

siempre y cuando f, g y h sean integrables en $[a, b]$.

Si $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$, entonces $\mathbf{R}(t)$ es una **antiderivada** de $\mathbf{r}(t)$. El siguiente resultado es análogo al Teorema Fundamental del Cálculo.

TEOREMA (15.10) Si $\mathbf{R}(t)$ es una antiderivada de $\mathbf{r}(t)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a).$$

La demostración se deja como ejercicio.

EJEMPLO 5 Calcular $\int_0^2 \mathbf{r}(t)\,dt$ para $\mathbf{r}(t) = 12t^3\mathbf{i} + 4e^{2t}\mathbf{j} + (t+1)^{-1}\mathbf{k}$.

Solución Encontrando una antiderivada para cada componente de $\mathbf{r}(t)$, obtenemos

$$\mathbf{R}(t) = 3t^4\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j} + \ln(t+1)\mathbf{k}.$$

Como $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$, del Teorema (15.10) se deduce que

$$\begin{aligned}\int_0^2 \mathbf{r}(t)\,dt &= \mathbf{R}(2) - \mathbf{R}(0)\\ &= (48\mathbf{i} + 2e^4\mathbf{j} + \ln 3\mathbf{k}) - (0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k})\\ &= 48\mathbf{i} + 2(e^4 - 1)\mathbf{j} + \ln 3\mathbf{k}\end{aligned}$$

La teoría de las integrales indefinidas de las funciones vectoriales es semejante a la de las funciones escalares desarrollada en el Capítulo 5. Las demostraciones de los teoremas requieren sólo modificaciones pequeñas y por lo tanto se omiten. Si $\mathbf{R}(t)$ es una antiderivada de $\mathbf{r}(t)$, entonces cualquier otra antiderivada tiene la forma $\mathbf{R}(t) + \mathbf{c}$ para algún vector (constante) $\mathbf{c}$, y se escribe

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{c} \quad \text{para} \quad \mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t).$$

EJERCICIOS 15.2

Ejercicios 1-4: (a) Encuentre el dominio de $\mathbf{r}$ y determine los números en los que $\mathbf{r}$ es continua. (b) Determine $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.

1. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t-1}\,\mathbf{i} + \sqrt{2-t}\,\mathbf{j}$
2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + \operatorname{sen} 3t\mathbf{j}$
3. $\mathbf{r}(t) = \tan t\mathbf{i} + (t^2 + 8t)\mathbf{j}$
4. $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\mathbf{i} + \operatorname{sen}^{-1} t\mathbf{j}$

Ejercicios 5-12: (a) Trace la curva en el plano xy determinada por $\mathbf{r}(t)$. (b) Determine $\mathbf{r}'(t)$ y trace vectores correspondientes a $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ para el valor de t indicado.

5. $\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{4}t^4\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad t = 2$
6. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{-4t}\mathbf{j}, \quad t = 0$
7. $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad t = 3\pi/4$
8. $\mathbf{r}(t) = 2\sec t\mathbf{i} + 3\tan t\mathbf{j}, \quad t = \pi/4$
9. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^{-3}\mathbf{j}, \quad t = 1$
10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad t = -1$
11. $\mathbf{r}(t) = (2t-1)\mathbf{i} + (4-t)\mathbf{j}, \quad t = 3$
12. $\mathbf{r}(t) = 5\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad t = 2$

Ejercicios 13-16: Encuentre el dominio D de $\mathbf{r}$ y determine dónde $\mathbf{r}$ es continua. (b) Calcule $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \tan t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \sqrt[3]{t}\,\mathbf{i} + \frac{1}{t}\,\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = \ln(1 - t)\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

Ejercicios 17-20: Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en P.

17. $x = 2t^3 - 1,\ y = -5t^2 + 3,\ z = 8t + 2;$ $P(1, -2, 10)$

18. $x = 4\sqrt{t},\ y = t^2 - 10,\ z = 4/t;\quad P(8, 6, 1)$

19. $x = e^t,\ y = te^t,\ z = t^2 + 4;\quad P(1, 0, 4)$

20. $x = t \operatorname{sen} t,\ y = t \cos t,\ z = t;\quad P(\pi/2, 0, \pi/2)$

Ejercicios 21-22: Determine dos vectores unitarios tangentes a la curva en P.

21. $x = e^{2t},\ y = e^{-t},\ z = t^2 + 4;\quad P(1, 1, 4)$

22. $x = 2 + \operatorname{sen} t,\ y = \cos t,\ z = t;\quad P(2, 1, 0)$

23. Consulte el Ejercicio 21 de la Sección 15.1. Demuestre que la espiral concoide tiene la propiedad especial de que su vector tangente forma un ángulo constante con la parte positiva del eje z.

24. La *hélice general* es una curva cuyo vector tangente forma un ángulo constante con un vector unitario fijo $\mathbf{u}$. Demuestre que la curva con parametrización $x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3$ es una hélice general y halle un vector $\mathbf{u}$ con la propiedad mencionada.

25. Un punto recorre una curva C de manera que el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ siempre coincide con el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$. Obtenga ecuaciones paramétricas para C y describa la curva.

26. Un punto P recorre una curva C de modo que el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ y el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ son siempre ortogonales. Demuestre que C se encuentra sobre una esfera con centro en el origen. (*Sugerencia:* Demuestre que $D_t \|\mathbf{r}(t)\|^2 = 0$.)

Ejercicios 27-30: Evalúe la integral.

27. $\int_0^2 (6t^2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\,dt$

28. $\int_{-1}^1 (-5t\mathbf{i} + 8t^3\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k})\,dt$

29. $\int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j} + \tan t\mathbf{k})\,dt$

30. $\int_0^1 [te^{t^2}\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j} + (t^2 + 1)^{-1}\mathbf{k}]\,dt$

31. Determine $\mathbf{u}(t)$ si $\mathbf{u}'(t) = t^2\mathbf{i} + (6t + 1)\mathbf{j} + 8t^3\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}(0) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

32. Determine $\mathbf{r}(t)$ si $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} - 4t^3\mathbf{j} + 6\sqrt{t}\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

33. Determine $\mathbf{u}(t)$ si $\mathbf{u}''(t) = 6t\mathbf{i} - 12t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{u}'(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}(0) = 7\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

34. Halle $\mathbf{r}(t)$ si $\mathbf{r}''(t) = 6t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{r}'(0) = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(0) = 5\mathbf{j}$.

Ejercicios 35-36: Si una curva C tiene un vector tangente $\mathbf{a}$ en un punto P, entonces el *plano normal* a C en P es el plano que pasa por P y tiene vector normal $\mathbf{a}$. Encuentre una ecuación del plano normal a la curva en P.

35. $x = e^t,\ y = te^t,\ z = t^2 + 4;\quad P(1, 0, 4)$

36. $x = t \operatorname{sen} t,\ y = t \cos t,\ z = t;\quad P(\pi/2, 0, \pi/2)$

37. Demuestre lo siguiente suponiendo que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ son funciones vectoriales que tienen límite cuando $t \to a$.

(a) $\lim_{t\to a} [\mathbf{r}(t) + \mathbf{s}(t)] = \lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) + \lim_{t\to a} \mathbf{s}(t)$

(b) $\lim_{t\to a} [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)] = \lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) \cdot \lim_{t\to a} \mathbf{s}(t)$

(c) $\lim_{t\to a} c\mathbf{r}(t) = c \lim_{t\to a} \mathbf{r}(t)$, donde c es un escalar.

38. Demuestre que si una función f y una función vectorial $\mathbf{u}$ tienen límites cuando $t \to a$, entonces

$$\lim_{t\to a} f(t)\mathbf{u}(t) = \left[\lim_{t\to a} f(t)\right]\left[\lim_{t\to a} \mathbf{u}(t)\right].$$

39. Efectúe la demostración de que $\lim_{t\to a} \mathbf{u}(t) = \mathbf{b}$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$ siempre que $0 < |t - a| < \delta$. Interprete geométricamente lo anterior.

40. Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales que tienen límites cuando $t \to a$, entonces

$$\lim_{t\to a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \left[\lim_{t\to a} \mathbf{u}(t)\right] \times \left[\lim_{t\to a} \mathbf{v}(t)\right].$$

41. Complete la demostración del Teorema (15.8).

42. Demuestre el Teorema (15.10).

43. Demuestre que si f y $\mathbf{u}$ son funciones derivables de t, entonces

$$D_t [f(t)\mathbf{u}(t)] = f(t)\mathbf{u}'(t) + f'(t)\mathbf{u}(t).$$

44. Demuestre la Regla de la Cadena para funciones vectoriales:

$$D_t\, \mathbf{u}(f(t)) = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$$

donde se supone que $\mathbf{u}$ y f son derivables y sus dominios están restringidos adecuadamente.

45. Demuestre que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son funciones derivables, entonces

$$D_t[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\times\mathbf{w}(t)] = [\mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t)\times\mathbf{w}(t)] + [\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)\times\mathbf{w}(t)] + [\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\times\mathbf{w}'(t)].$$

46. Demuestre que si $\mathbf{u}'(t)$ y $\mathbf{u}''(t)$ existen, entonces

$$D_t[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{u}'(t)] = \mathbf{u}(t)\times\mathbf{u}''(t).$$

47. Pruebe que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son integrables en $[a, b]$ y c es un escalar, entonces

(a) $\displaystyle\int_a^b [\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt + \int_a^b \mathbf{v}(t)\,dt$

(b) $\displaystyle\int_a^b c\mathbf{u}(t)\,dt = c\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt$

48. Demuestre que si $\mathbf{u}$ es integrable en $[a, b]$ y $\mathbf{c}$ es un vector arbitrario en V_3, entonces

$$\int_a^b \mathbf{c}\cdot\mathbf{u}(t)\,dt = \mathbf{c}\cdot\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt.$$

Ejercicios 49-50: Determine $D_t[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)]$ y $D_t[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)]$.

49. $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$
$\mathbf{v}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{k}$

50. $\mathbf{u}(t) = 2t\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
$\mathbf{v}(t) = e^{-t}\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

15.3 EL MOVIMIENTO

Frecuentemente, el movimiento de una partícula se limita a un plano. Por ejemplo, aunque la Tierra se mueve en el espacio, su órbita se encuentra en un plano. (Esto se demostrará en la Sección 15.6.) Para estudiar el movimiento de un punto (o una partícula) en un plano coordenado, es necesario conocer su posición (x, y) en todo momento. Como al tiempo t la partícula tiene una posición única $P(x, y)$, las coordenadas x y y determinan funciones escalares de t: $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Si

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j},$$

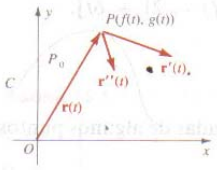
entonces cuando t varía, el punto final del vector de posición $\overrightarrow{OP}$ de $\mathbf{r}(t)$ traza la trayectoria C de la partícula. Como $\mathbf{r}(t)$ determina la posición de P, se llamará a $\mathbf{r}(t)$ el **vector de posición de P**. Como se vio en la Sección 15.2, la recta tangente a C en P es paralela a

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j},$$

como se ilustra en la Figura 15.11. La magnitud de este vector es

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}.$$

FIGURA 15.11



Sea t_0 un número cualquiera en el dominio de $\mathbf{r}$, y sea P_0 el punto en C correspondiente a t_0. Si C es regular, entonces, por el Teorema (13.5), la longitud de arco $s(t)$ de C entre P_0 y P es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt.$$

Aplicando el Teorema (5.25), obtenemos

$$s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

Por lo tanto, $\|\mathbf{r}'(t)\|$ *es la tasa de variación (o razón de cambio) de la longitud de arco con respecto al tiempo*. Por este motivo $\|\mathbf{r}'(t)\|$ se llama **rapidez** (o **celeridad**) de la partícula. El vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ se denomina, por definición, **velocidad** de la partícula al tiempo t y el vector $\mathbf{r}''(t)$ es la **aceleración** de la partícula. La velocidad y la aceleración siempre se representarán geométricamente por vectores con punto inicial P. En la mayoría de los casos, $\mathbf{r}''(t)$ apunta hacia el lado cóncavo de C, como se ilustra en la Figura 15.11.

La siguiente definición resume este análisis e introduce los símbolos **v** y **a** para la velocidad y la aceleración.

DEFINICIÓN (15.11)

Sea

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j},$$

el vector de posición de una partícula en el plano xy, donde t es el tiempo y f y g son funciones escalares con primera y segunda derivadas. La velocidad, la rapidez y la aceleración de la partícula al tiempo t se definen como:

Velocidad: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \dfrac{dx}{dt}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{dt}\mathbf{j}$

Rapidez: $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

Aceleración: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}$

EJEMPLO 1 El vector de posición de una partícula que se mueve en un plano coordenado es

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 + t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 2.$$

(a) Calcular la velocidad y la aceleración de dicha partícula al tiempo t.

(b) Trazar la trayectoria C de la partícula y representar geométricamente $\mathbf{r}'(1)$ y $\mathbf{r}''(1)$.

Solución

(a) La velocidad y la aceleración son

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (2t + 1)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}.$$

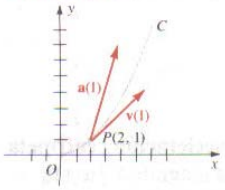
(b) La curva C tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 + t, \quad y = t^3; \quad 0 \le t \le 2.$$

(que se obtienen de $\mathbf{r}(t)$). La siguiente tabla muestra las coordenadas de algunos puntos (x, y) de la curva:

t	0	0.5	1	1.5	2
x	0	0.75	2	3.75	6
y	0	0.125	1	3.375	8

FIGURA 15.12



Situando algunos puntos y usando la continuidad de las componentes escalares de $\mathbf{r}(t)$, obtenemos el croquis de C que aparece en la Figura 15.2.

En $t = 1$ la partícula está en el punto $P(2, 1)$ y

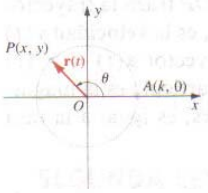
$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{r}'(1) = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(1) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$

Estos vectores están representados en la Figura 15.12. •

EJEMPLO 2 Demostrar que si un punto P se mueve sobre una circunferencia de radio k con rapidez v constante, entonces el vector aceleración tiene una magnitud constante v^2/k y está dirigido de P hacia el centro de la circunferencia.

Solución Podemos suponer que el centro de esta curva está en el origen O de un sistema de coordenadas rectangulares. Consideremos que la posición inicial de P es $A(k, 0)$ y que θ es el ángulo generado por $\overrightarrow{OP}$ al cabo de un tiempo t (véase la Figura 15.13). La afirmación de que P se mueve con rapidez constante sobre una circunferencia es equivalente a decir que la tasa de cambio del ángulo θ con respecto al tiempo; es decir, la **rapidez angular** es una constante ω. Este hecho puede expresarse mediante la ecuación diferencial $d\theta/dt = \omega$. Integrando con respecto a t, obtenemos $\theta = \omega t + c$ para algún número c. Como $\theta = 0$ cuando $t = 0$, el número c es 0; es decir, $\theta = \omega t$. Resulta que las coordenadas (x, y) de P son

FIGURA 15.13



$$x = k \cos \omega t, \qquad y = k \operatorname{sen} \omega t$$

y la trayectoria de P está dada por

$$\mathbf{r}(t) = k \cos \omega t\mathbf{i} + k \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\omega k \operatorname{sen} \omega t\mathbf{i} + \omega k \cos \omega t\mathbf{j},$$

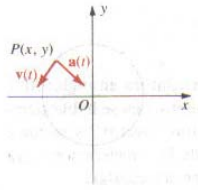
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\omega^2 k \cos \omega t\mathbf{i} - \omega^2 k \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j},$$

y entonces

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2(k \cos \omega t\mathbf{i} + k \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}) = -\omega^2\mathbf{r}(t).$$

Esto demuestra que la dirección del vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ es opuesta a la de $\mathbf{r}(t)$, y por lo tanto, está dirigido de P hacia O, como se ilustra en la Figura 15.14, donde también aparece el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$.

FIGURA 15.14



La magnitud de $\mathbf{a}(t)$ es

$$\|\mathbf{a}(t)\| = \|-\omega^2\mathbf{r}(t)\| = |-\omega^2|\,\|\mathbf{r}(t)\| = \omega^2 k,$$

que es una constante. Además,

$$v = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(\omega k)^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + (\omega k)^2 \cos^2 \omega t} = \sqrt{\omega^2 k^2} = \omega k$$

y por tanto, $\omega = v/k$. Sustituyendo esto en la fórmula $\|\mathbf{a}(t)\| = \omega^2 k$, obtenemos la magnitud constante

$$\|\mathbf{a}(t)\| = \frac{v^2}{k}.$$

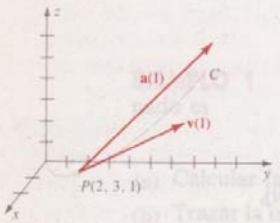
El vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ del Ejemplo 2 se denomina **vector aceleración centrípeta** y la fuerza que origina a $\mathbf{a}(t)$ es una **fuerza centrípeta**. Nótese que la magnitud $\|\mathbf{a}(t)\| = v^2/k$ aumenta si v crece o k disminuye, hecho que es evidente para cualquiera que haya atado un objeto a una cuerda y lo haya hecho girar en una trayectoria circular.

A continuación se generalizará la discusión anterior al caso de una partícula que se mueve en un sistema coordenado de tres dimensiones. Supóngase que la posición de una partícula al tiempo t es $P(t) = (f(t), g(t), h(t))$, donde f, g y h son funciones definidas en un intervalo I. Si

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

es el vector de posición de una partícula, entonces cuando t varía, $\overrightarrow{OP}$ traza la trayectoria. Como en la Definición (15.11), la derivada $\mathbf{r}'(t)$, cuando existe, es la **velocidad** $\mathbf{v}(t)$ de la partícula al tiempo t y es un vector tangente a C en $P(t)$. El vector $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ es la **aceleración** de la partícula al tiempo t. La **rapidez** $v(t)$ de la partícula es la magnitud $\|\mathbf{v}(t)\|$ de la velocidad y, como en el caso de dos dimensiones, es igual a la tasa de variación de la longitud de arco con respecto al tiempo.*

FIGURA 15.15



EJEMPLO 3 El vector de posición de una partícula es $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ para $0 \le t \le 2$. Encontrar la velocidad y la aceleración de la partícula al tiempo t. Trazar la trayectoria e ilustrar geométricamente $\mathbf{v}(1)$ y $\mathbf{a}(1)$.

Solución La velocidad y la aceleración son

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}.$$

En $t = 1$ la partícula está en el punto $P(2, 3, 1)$ y

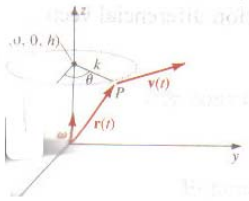
$$\mathbf{v}(1) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(1) = 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Estos vectores y la trayectoria de la partícula están en la Figura 15.15. La trayectoria es una cúbica alabeada (véanse el Ejemplo 2 y el Ejercicio 23 de la Sección 15.1).

En la Sección 14.4, al discutir el concepto de momento de fuerza (o torca), se observó que el producto vectorial se utiliza para investigar el movimiento de rotación. El siguiente ejemplo es otra muestra de este método.

* **(N. de R.)** Esta diferenciación entre *velocidad* y *rapidez* proviene de la nomenclatura en inglés, que utiliza para este fin los términos *velocity* y *speed*, respectivamente. Sin embargo, en la práctica se habla siempre de "velocidad" (lineal o angular). Cuando hay que concretar se añade el término "vector" y se tiene así el nombre "vector velocidad". Esta es la convención que se aplica en el caso de la "aceleración", ya que no existe una denominación especial para su magnitud $\|\mathbf{a}(t)\|$, que es también un escalar.

FIGURA 15.16



EJEMPLO 4 Una partícula P gira alrededor del eje z sobre una circunferencia de radio k que se encuentra en el plano $z = h$, como se ilustra en la Figura 15.16. La rapidez angular $d\theta/dt$ es una constante ω. El vector $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ que está dirigido a lo largo del eje z y tiene por magnitud a ω es la ***velocidad angular*** *de* P. *Demostrar que la velocidad* $\mathbf{v}(t)$ *de* P es el producto vectorial de $\boldsymbol{\omega}$ con el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ de P.

Solución Generalizando el Ejemplo 2 al caso de tres dimensiones, el movimiento de P está dado por

$$\mathbf{r}(t) = k\cos\omega t\,\mathbf{i} + k\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j} + h\mathbf{k}.$$

Usando la definición del producto vectorial,

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ k\cos\omega t & k\,\text{sen}\,\omega t & h \end{vmatrix}$$

$$= -\omega k\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + \omega k\cos\omega t\,\mathbf{j} = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) \quad \bullet$$

La siguiente ley se utiliza para estudiar los objetos en movimiento.

SEGUNDA LEY DE NEWTON **(15.12)**

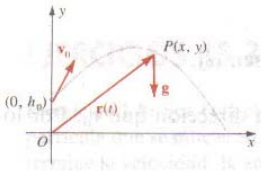
La fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un objeto de masa constante m está relacionada con la aceleración $\mathbf{a}$ del objeto como sigue:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

En el siguiente ejemplo se usará (15.12) para determinar la posición de un objeto que se mueve cerca de la superficie de la Tierra sometido únicamente a la influencia de la gravedad; es decir, se considera que la fricción del aire y otras fuerzas que podrían afectar la aceleración, son despreciables. También se supone que la superficie es horizontal y que la curvatura de la Tierra no es un factor que afecte a la trayectoria del objeto.

EJEMPLO 5 Se dispara una bala con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ con un rifle cuyo cañón tiene su boca a una altura de h_0 metros sobre el suelo. La única fuerza que actúa sobre la bala es la debida a la gravedad, que produce la aceleración $\mathbf{g}$. Determinar la posición a los t segundos.

FIGURA 15.17



Solución Introducimos un sistema de coordenadas, como se muestra en la Figura 15.17, ubicando la boca del cañón del arma en el punto $(0, h_0)$. Denotemos por $P(x, y)$ la posición de la bala a los t segundos, y sea $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición de P. Como la gravedad $\mathbf{g}$ actúa hacia abajo.

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{g}\| = g \approx 9.8 \text{ m/s}^2, \text{ o bien, } 32 \text{ pie/s}^2.$$

Por la Segunda Ley de Newton (15.12), $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es la aceleración de la bala. En este caso, $m\mathbf{a} = m\mathbf{g}$ o bien $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, que da lugar a la ecuación diferencial vectorial

$$\mathbf{r}''(t) = \mathbf{g}.$$

Tomando la integral indefinida,

$$\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{g} + \mathbf{c}$$

para algún vector constante $\mathbf{c}$. Como $\mathbf{r}'(t)$ es la velocidad al tiempo t,

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(0) = \mathbf{c}$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{g} + \mathbf{v}_0.$$

Integrando otra vez,

$$\mathbf{r}(t) = \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{d}$$

donde $\mathbf{d}$ es un vector constante. Como $\mathbf{r}(0) = h_0\mathbf{j}$ (véase la Figura 15.17), resulta que $\mathbf{d} = h_0\mathbf{j}$. De modo que,

$$\mathbf{r}(t) = \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{v}_0 + h_0\mathbf{j}.$$

Como $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$, esto se puede escribir

$$\mathbf{r}(t) = (-\tfrac{1}{2}t^2g + h_0)\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 \quad \bullet$$

EJEMPLO 6 Supongamos que la boca del cañón del rifle del Ejemplo 5 está en el origen O y que el vector velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ forma un ángulo α con la horizontal.

(a) Obtener ecuaciones paramétricas y una ecuación en coordenadas rectangulares para la trayectoria de la bala.

(b) Calcular el *alcance* del proyectil, es decir, la distancia horizontal a la que cae al suelo. ¿Cuál es el alcance máximo?

(c) Calcular la elevación (altura máxima) de la bala.

Solución

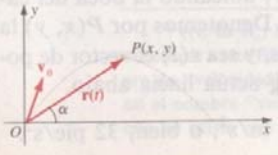
(a) Este caso especial del Ejemplo 5 se ilustra en la Figura 15.18. El vector $\mathbf{u}$ dado por

$$\mathbf{u} = \cos\alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\mathbf{j}.$$

es un vector unitario con la misma dirección que $\mathbf{v}_0$. Por lo tanto, si $\|\mathbf{v}_0\| = v_0$, se tiene que

$$\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{u} = (v_0\cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0\operatorname{sen}\alpha)\mathbf{j}.$$

FIGURA 15.18



Utilizando la fórmula para $\mathbf{r}(t)$ que se obtuvo en el Ejemplo 5 con $h_0 = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (-\tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} + t[(v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\mathbf{j}] \\ &= t(v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (-\tfrac{1}{2}gt^2 + tv_0 \operatorname{sen}\alpha)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, la trayectoria tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t.$$

Eliminando el parámetro, obtenemos la siguiente ecuación en coordenadas rectangulares:

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$$

Esto demuestra que la trayectoria de la bala es parabólica.

(b) *Para determinar el alcance de la bala debemos encontrar el punto D en la Figura 15.18 en el que toca el suelo. Como la ordenada de D es 0, tomamos $y = 0$ en la segunda ecuación paramétrica de la parte (a), y factorizamos:*

$$t(-\tfrac{1}{2}gt + v_0 \operatorname{sen}\alpha) = 0.$$

Por tanto,

$$t = 0 \quad \text{o bien} \quad -\tfrac{1}{2}gt + v_0 \operatorname{sen}\alpha = 0.$$

Se deduce entonces que la bala está en O cuando $t = 0$ y en D cuando

$$\tfrac{1}{2}gt = v_0 \operatorname{sen}\alpha \quad \text{o bien} \quad t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}.$$

Usando la segunda ecuación paramétrica de la parte (a), resulta la distancia $d(O, D)$ de O a D:

$$d(O, D) = (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}.$$

En particular, el alcance tiene un valor máximo v_0^2/g para $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$; es decir, para $\alpha = 45°$.

(c) De la parte (b) se sabe que la bala llega al suelo a $t = (2v_0 \operatorname{sen}\alpha)/g$. Por lo tanto, alcanza la altura máxima a la mitad de este valor; es decir, cuando $t = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)/g$. Sustituyendo esto en la ecuación paramétrica para y, que se encontró en la parte (a), obtenemos

$$h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right)^2 + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}. \quad \bullet$$

EJERCICIOS 15.3

Ejercicios 1-8: Sea $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición de una partícula que se mueve en un plano coordenado. Determine la velocidad, la aceleración y la rapidez de la partícula al tiempo t.

1. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (4t^2 + 1)\mathbf{j}, \quad t = 1$
2. $\mathbf{r}(t) = (4 - 9t^2)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}, \quad t = 1$
3. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{2}{t}\mathbf{i} + \dfrac{3}{t+1}\mathbf{j}, \quad t = 2$

4. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (1 + \sqrt{t})\,\mathbf{j}, \quad t = 4$

5. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 4\cos 2t\,\mathbf{j}, \quad t = \pi/6$

6. $\mathbf{r}(t) = \cos^2 t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}, \quad t = 3\pi/4$

7. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}, \quad t = 0$

8. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + e^{-t^2}\mathbf{j}, \quad t = 1$

Ejercicios 9-16: Sea $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición de una partícula que se mueve en el espacio (tridimensional). Encuentre la velocidad, la aceleración y la rapidez al tiempo t.

9. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}; \quad t = 0, \pi/4, \pi/2$

10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}; \quad t = 0, 1, 2$

11. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2\sqrt{t}\,\mathbf{j} + 4\sqrt{t^3}\,\mathbf{k}; \quad t = 1, 4, 9$

12. $\mathbf{r}(t) = 4\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 9\cos t\,\mathbf{k}; \quad t = 0, \pi/2, 3\pi/4$

13. $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad t = 0, \pi/4, \pi/2$

14. $\mathbf{r}(t) = t(\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}), \quad t = 0, \pi/4, \pi/2$

15. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + (2 + 3t)\mathbf{k}, \quad t = 0, 1, 2$

16. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k}, \quad t = 0, 1, 2$

17. Demuestre que si una partícula se mueve con rapidez constante, entonces los vectores velocidad y aceleración son ortogonales. (*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 4 de la Sección 15.2.)

18. Demuestre que si la aceleración de una partícula en movimiento es siempre 0, entonces el movimiento se realiza a lo largo de una línea recta.

Ejercicios 19-22: Resuelva usando los resultados del Ejemplo 5.

19. Se dispara una bala con rapidez inicial de 1500 pie/s y ángulo de elevación de 30°. Calcule (a) la velocidad al tiempo t, (b) la altura máxima, (c) el alcance y (d) la rapidez con la que la bala llega al suelo.

20. Resuelva el Ejercicio 19 para un ángulo de elevación de 60°.

21. Un jugador de béisbol lanza una pelota a una distancia de 250 pie. ¿Cuál es la rapidez inicial de la pelota si fue lanzada a un ángulo de 45° con respecto al suelo?

22. Se dispara una bala horizontalmente con una rapidez de 600 m/s a una altura de 300 m sobre el suelo. ¿Dónde y cuándo llega al suelo?

Ejercicios 23-24: Resuelva usando los resultados del Ejemplo 2. Tome el radio de la Tierra como 6400 km.

23. Un trasbordador espacial tiene una órbita circular 250 km arriba de la superficie de la Tierra. Calcule (a) su rapidez y (b) el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra.

24. Un satélite que tiene una órbita circular da una vuelta a la Tierra cada 88 min. Calcule su altura.

25. Se coloca a un astronauta en el extremo de un aparato centrifugador (véase la figura) para probar su capacidad de soportar aceleraciones. El aparato gira con una rapidez angular ω, y el brazo del aparato mide 30 pie. Calcule el número de revoluciones por segundo que se necesita para provocar una aceleración igual a 8 g. (Use $\|\mathbf{g}\| \approx 32$ pie/s^2.)

EJERCICIO 25



26. Las órbitas de la Tierra, Venus y Neptuno tienen forma casi circular. Dada la información de la tabla, calcule aproximadamente la rapidez media de cada uno de estos planetas con una precisión de 0.1 km/s.

	Periodo (días)	**Distancia al Sol** (10^6 km)
Tierra	365.3	149.6
Venus	224.7	108.2
Neptuno	60,188	4498

27. Un satélite tiene una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura d desde la superficie. La magnitud de la fuerza de atracción $\mathbf{F}$ entre el satélite y la Tierra es

$$\|\mathbf{F}\| = G\frac{mM}{(R + d)^2}$$

donde m es la masa del satélite, M es la masa de la Tierra, R es el radio terrestre y G es la constante de la gravitación universal. Use los resultados del Ejemplo 2 para deducir la *tercera ley de Kepler* para órbitas circulares:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}(R + d)^3,$$

donde T es el periodo de revolución del satélite. (*Indicación:* $\|\mathbf{F}\|$ también está dado por $m\|\mathbf{r}''(t)\|$.)

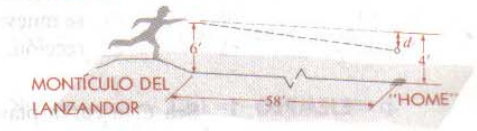
28. Consulte el Ejercicio 27. Si el periodo de un satélite se mide en días, entonces la tercera ley de Kepler para órbitas circulares se puede escribir $T^2 = 0.00346\,[1 + (d/R)]^3$.

(a) Un satélite tiene una órbita circular a 1600 km sobre la superficie de la Tierra. Suponiendo que el radio terrestre es de 6370 km, calcule el periodo del satélite con una precisión de 0.01 horas.

(b) Se dice que un satélite está en una *órbita geosíncrona* si se encuentra siempre sobre el mismo punto de la superficie de la Tierra; es decir, si el periodo del satélite es de un día. Calcule la distancia de la superficie terrestre a uno de estos satélites, con una precisión de un kilómetro. (Esta información es necesaria para los satélites de telecomunicaciones.)

29. Un lanzador (*pitcher*) de béisbol de ligas mayores suelta su bola rápida a una altura de 6 pie del suelo y a 58 pie de "home", con una velocidad de 100 mi/h. Si no hubiera gravedad, la pelota viajaría en línea recta y cruzaría el "home" a 4 pie desde el suelo (véase la figura). Calcule la caída d causada por la gravedad.

EJERCICIO 29



30. El *quarterback* de un equipo de futbol americano lanza un pase soltando el balón a un ángulo de 30° con la horizontal. Estime la velocidad a la que debe soltarse la bola para alcanzar un receptor que se encuentra a 150 pie de distancia. (Desprecie la fricción del aire.)

15.4 CURVATURA DE LÍNEAS

Cuando una partícula recorre una curva C, puede cambiar su velocidad rápida o lentamente, dependiendo de si C se dobla brusca o gradualmente. Para medir la rapidez con que C se encorva, o cambia de forma, se usa el concepto de *curvatura*. Comenzamos por introducir ciertos vectores unitarios tangentes y normales a las curvas, que son útiles para estudiar este concepto. Si $\mathbf{r}$ es una función vectorial y la curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$ es regular, entonces se sabe (por lo discutido anteriormente) que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a C. Si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, entonces el *vector unitario tangente* $\mathbf{T}(t)$ de C se define como sigue.

VECTOR UNITARIO TANGENTE (15.13)

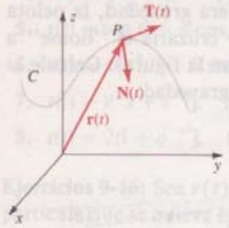
$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\,\mathbf{r}'(t)$$

Como $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$ para todo t, del Ejemplo 4 de la Sección 15.2 vemos que si $\mathbf{T}$ es derivable, entonces $\mathbf{T}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. El *vector unitario normal principal* $\mathbf{N}(t)$ de C se define como el vector *unitario* que tiene la misma dirección que $\mathbf{T}'(t)$, es decir,

VECTOR UNITARIO NORMAL PRINCIPAL (15.14)

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(t)\|}\,\mathbf{T}'(t)$$

FIGURA 15.19



Las fórmulas (15.13) y (15.14) se pueden aplicar tanto a las curvas planas como a las curvas espaciales (o en el espacio).

Cuando $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ se representan mediante segmentos dirigidos, se toma el punto inicial en el punto P de C correspondiente a t, como se ilustra en la Figura 15.19. Como el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ apunta en la dirección en que el punto se mueve cuando t aumenta, también $\mathbf{T}(t)$ apunta en esa dirección.

EJEMPLO 1 Sea C la curva plana determinada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$.

(a) Encontrar los vectores unitarios tangente y normal $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

(b) Trazar C, $\mathbf{T}(1)$ y $\mathbf{N}(1)$.

Solución

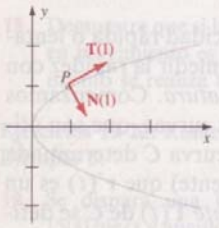
(a) Por (15.13) con $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j}$,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{(4t^2 + 1)^{1/2}}(2t\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{2t}{(4t^2 + 1)^{1/2}}\mathbf{i} + \frac{1}{(4t^2 + 1)^{1/2}}\mathbf{j}.$$

Derivando las componentes de $\mathbf{T}(t)$ obtenemos

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{2}{(4t^2 + 1)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{4t}{(4t^2 + 1)^{3/2}}\mathbf{j} = \frac{2}{(4t^2 + 1)^{3/2}}(\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}).$$

FIGURA 15.20



Es fácil verificar que $\|\mathbf{T}'(t)\| = 2/(4t^2 + 1)$. Aplicando (15.14) y simplificando, obtenemos

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{(4t^2 + 1)^{1/2}}(\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}).$$

(b) El punto P correspondiente a $t = 1$ es (1, 1). Por sustitución,

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad \text{y} \quad \mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}).$$

Estos vectores y la curva (que es una parábola) están en la Figura 15.20. •

EJEMPLO 2 Sea C la curva determinada por

$$\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k} \quad \text{para } t \geq 0.$$

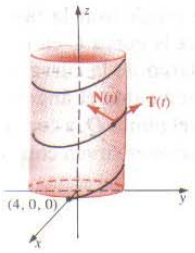
Trazar C y determinar $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

Solución La curva es la hélice circular de radio 4 que se muestra en la Figura 15.21 (véase el Ejemplo 3 de la Sección 15.1). Derivando $\mathbf{r}(t)$ y aplicando la Definición (15.13), obtenemos lo siguiente:

$$\mathbf{r}'(t) = -4\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{16\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 9} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

FIGURA 15.21



$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{r}'(t) = -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \frac{4}{5}\cos t\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{k}$$

Derivando $\mathbf{T}(t)$ y usando la Definición (15.14), obtenemos

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{4}{5}\cos t\mathbf{i} - \frac{4}{5}\operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

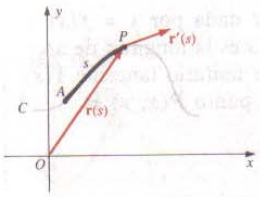
$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \sqrt{\frac{16}{25}\cos^2 t + \frac{16}{25}\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(t)\|}\mathbf{T}'(t) = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}.$$

La Figura 15.21 muestra vectores unitarios $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ típicos. Nótese que el vector unitario normal principal $\mathbf{N}(t)$ de la hélice circular es siempre paralelo al plano xy y apunta hacia el eje z. •

A continuación se define la curvatura, primero para las curvas planas y más adelante para las curvas en el espacio.

FIGURA 15.22



Una curva plana regular C tiene muchas parametrizaciones diferentes. A veces es conveniente usar como parámetro la longitud de arco medida a lo largo de C. Sea A un punto fijo de C y sea s la longitud del arco $\overset{\frown}{AP}$ que va de A a un punto arbitrario $P(x, y)$ de C, como se ilustra en la Figura 15.22. Supongamos que C tiene ecuaciones paramétricas

$$x = f(s), \quad y = g(s) \quad \text{para} \quad s = \overset{\frown}{AP}.$$

Entonces, a cada valor del parámetro s le corresponde un punto $P(f(s), g(s))$ en C que está a s unidades de A, medidas a lo largo de C. En los Ejercicios 49-52 se desarrolla un método para obtener parametrizaciones de este tipo. La dirección positiva de C se determina por los valores crecientes de s. El s se llama **parámetro longitud de arco** de la curva C. La posición del punto fijo A no importa.

Como se muestra en la Figura 15.22, el vector de posición $P(x, y)$ es

$$\mathbf{r}(s) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j}.$$

Derivando con respecto a s se obtiene un vector tangente a C:

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} = f'(s)\mathbf{i} + g'(s)\mathbf{j}$$

La magnitud de $\mathbf{r}'(s)$ es

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{ds}{ds}\right)^2} = 1,$$

para lo que se usó (13.6). Entonces, $\mathbf{r}'(s)$ *es un vector unitario tangente* a C en P. Como en (15.13), este vector unitario tangente correspondiente al parámetro s se denota por $\mathbf{T}(s)$.

Para cada valor de s, sea θ el ángulo entre $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{i}$ (véase la Figura 15.23). Nótese que *θ es una función de s* porque P y $\mathbf{T}(s)$ son funciones de s. Se puede usar la tasa de variación $d\theta/ds$ de θ con respecto a s para medir cuánto se dobla la curva C en los diversos puntos. Por ejemplo, sea P un punto que se mueve a lo largo de la curva C en la Figura 15.24. En el punto R la curva se dobla levemente y se ve que el ángulo θ entre $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{i}$ cambia lentamente, es decir, $|d\theta/ds|$ es pequeña. En el punto Q la curva se inclina o dobla abruptamente y $|d\theta/ds|$ es grande. Estas observaciones sirven como motivación para la siguiente definición.

FIGURA 15.23

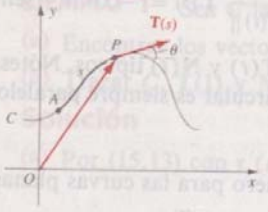
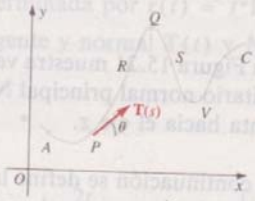


FIGURA 15.24

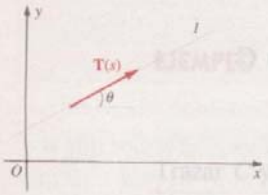


DEFINICIÓN (15.15) Sea C una curva plana regular dada por $x = f(s)$ y $y = g(s)$, donde el parámetro s es la longitud de arco y sea θ el ángulo entre el vector unitario tangente $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{i}$. La **curvatura** K de C en el punto $P(x, y)$ es

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|.$$

Para la curva de la Figura 15.24 la curvatura es relativamente pequeña en los puntos R y S, y es grande en Q y V. Los dos ejemplos siguientes ilustran la Definición (15.15).

FIGURA 15.25



EJEMPLO 3 Demostrar que la curvatura de una recta l es 0 en todos sus puntos.

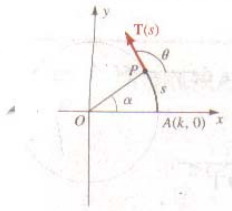
Solución Como el vector unitario tangente $\mathbf{T}(s)$ a l siempre se encuentra en l (véase la Figura 15.25), el ángulo θ es el mismo para todo s, es decir, θ es constante. Por lo tanto,

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = |0| = 0. \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Demostrar que la curvatura en todos los puntos de una circunferencia de radio k vale $1/k$.

Solución Podemos suponer que la circunferencia tiene centro en O y que el punto P está en el primer cuadrante, como se muestra en la Figura 15.26. Sea s la longitud

FIGURA 15.26



del arco AP. Si α es la medida en radianes del ángulo POA, entonces

$$s = k\alpha \quad \text{o bien} \quad \alpha = \frac{s}{k}.$$

De la Figura 15.26,

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{s}{k} + \frac{\pi}{2}.$$

Derivando,

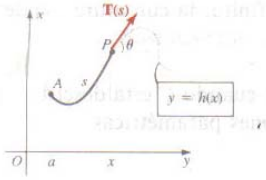
$$\frac{d\theta}{ds} = D_s\left(\frac{s}{k} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{k} + 0 = \frac{1}{k}$$

Por consiguiente,

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \frac{1}{k}.$$

Obsérvese que en el Ejemplo 4, cuando el radio k de la circunferencia aumenta, la curvatura $K = 1/k$ disminuye. Si k tiende a infinito, entonces K tiende a 0, que es la curvatura de una recta. Cuando el radio k tiende a 0, la curvatura K crece sin acotación alguna.

FIGURA 15.27



Sea C una curva que es la gráfica de una ecuación en coordenadas rectangulares $y = h(x)$, donde h' es continua en algún intervalo. Sean $\mathbf{T}(s)$ y θ como se definieron en (15.15) y como se ilustran en la Figura 15.27. Como y' es la pendiente de la recta tangente en P, se ve que

(a) $$\tan\theta = y' \quad \text{o bien} \quad \theta = \tan^{-1} y'.$$

De acuerdo con la Definición (6.11), se puede definir la función longitud de arco s por medio de

(b) $$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

donde a es la abscisa del punto fijo A en C. Si y'' existe, entonces, por la Regla de la Cadena,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dx}.$$

Por tanto,

(c) $$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \left|\frac{d\theta/dx}{ds/dx}\right|.$$

De las ecuaciones (a) y (b) se obtiene

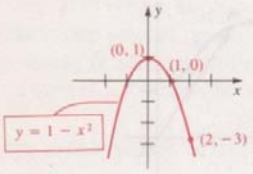
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Sustituyendo en (c) se llega al siguiente teorema.

TEOREMA (15.16) Si una curva regular C es la gráfica de $y = f(x)$, entonces la curvatura K en $P(x, y)$ es

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

FIGURA 15.28



EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de $y = 1 - x^2$ y calcular la curvatura en los puntos (x, y), $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(2, -3)$.

Solución La gráfica (una parábola) está en la Figura 15.28. Como $y' = -2x$ y $y'' = -2$, del Teorema (15.16), tenemos que

$$K = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}.$$

En particular, se ve que en el punto $(0, 1)$, $K = 2$; es decir, el ángulo θ asociado al vector $\mathbf{T}(s)$ varía a razón de 2 radianes por unidad de cambio en la longitud de arco. En el punto $(1, 0)$, $K = 2/(5)^{3/2} \approx 0.18$, lo que demuestra que la curva es menos ahusada ahí que en $(0, 1)$. Esto puede notarse también en la gráfica. Finalmente, en $(2, -3)$, $K = 2/(17)^{3/2} \approx 0.03$. Obsérvese que cuando x tiende a infinito, la curvatura tiende a 0. •

A continuación se deduce una fórmula para calcular K cuando C está descrita en términos de *un* parámetro t. Sea C una curva con ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

donde f'' y g'' existen para todos los números t que interesan. De la discusión anterior al Teorema (15.16),

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \left|\frac{d\theta/dt}{ds/dt}\right|.$$

Como la pendiente de la recta tangente está dada por $g'(t)/f'(t)$ (véase el Teorema (13.3)),

$$\tan\theta = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{o bien} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

siempre y cuando $f'(t) \neq 0$. Por tantc,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + [g'(t)/f'(t)]^2}\,\frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^2} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}.$$

Además, por (13.16),

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}.$$

Sustituyendo en la fórmula $K = |(d\theta/dt)/(ds/dt)|$ obtenemos lo siguiente.

TEOREMA (15.17) Si una curva plana C está dada paramétricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde f'' y g'' existen, entonces la curvatura K en $P(x, y)$ es

$$K = \frac{|f'(t)\,g''(t) - g'(t)\,f''(t)|}{[(f'(t))^2 + (g'(t))^2]^{3/2}}.$$

En el siguiente ejemplo se usa el Teorema (15.17) para resolver de nuevo el Ejemplo 3.

EJEMPLO 6 Demostrar que la curvatura en todos los puntos de una circunferencia de radio k es igual a $1/k$.

Solución La circunferencia de radio k con centro en el origen tiene ecuaciones paramétricas

$$x = k\cos t = f(t), \quad y = k\,\text{sen}\,t = g(t).$$

Derivando,

$$f'(t) = -k\,\text{sen}\,t, \qquad f''(t) = -k\cos t,$$

y

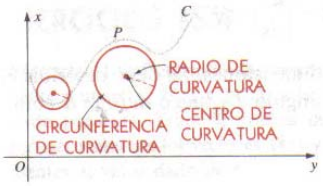
$$g'(t) = k\cos t, \qquad g''(t) = -k\,\text{sen}\,t.$$

Sustituyendo en (15.17),

$$K = \frac{|(-k\,\text{sen}\,t)(-k\,\text{sen}\,t) - (k\cos t)(-k\cos t)|}{[(-k\,\text{sen}\,t)^2 + (k\cos t)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{k^2\,\text{sen}^2\,t + k^2\cos^2 t}{(k^2\,\text{sen}^2\,t + k^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{k^2}{(k^2)^{3/2}} = \frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k}. \quad \bullet$$

FIGURA 15.29



Si la curvatura K en un punto P de la curva C no es cero, entonces la circunferencia de radio $\rho = 1/K$, cuyo centro se encuentra del lado cóncavo de C y que tiene la misma recta tangente en P que C, se llama **circunferencia de curvatura** de P. Su radio ρ y su centro son el **radio de curvatura** y el **centro de curvatura**, respectivamente, en P. Según los Ejemplos 3 y 6, la curvatura de la circunferencia de curvatura es $1/\rho$ o K, y por lo tanto, es igual a la curvatura de C. Por esta razón, se puede pensar que la circunferencia de curvatura es aquélla que mejor se adapta a C en P. La Figura 15.29 muestra dos circunferencias de curvatura.

EJEMPLO 7 Sea C la curva con ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$. Calcular la curvatura en el punto P correspondiente a $t = \frac{1}{2}$. Trazar C y la circunferencia de curvatura en P.

Solución Definiendo $f(t) = t^2$ y $g(t) = t^3$ obtenemos

$$f'(t) = 2t, \quad f''(t) = 2, \qquad g'(t) = 3t^2, \quad g''(t) = 6t.$$

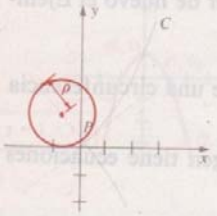
Sustituyendo en el Teorema (15.17),

$$K = \frac{|(2t)(6t) - (3t^2)(2)|}{[(2t)^2 + (3t^2)^2]^{3/2}} = \frac{6t^2}{(4t^2 + 9t^4)^{3/2}}.$$

Si $t = \frac{1}{2}$, entonces

$$K = \frac{6/4}{(25/16)^{3/2}} = \frac{96}{125} \approx 0.77.$$

FIGURA 15.30



El punto correspondiente a $t = \frac{1}{2}$ tiene coordenadas $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ y el radio de curvatura ρ en ese punto es $1/K$ o sea $\frac{125}{96} \approx 1.3$. La representación de C y la circunferencia de curvatura están en la Figura 15.30. Nótese que la curvatura en el origen no existe porque K no está definida para $t = 0$. •

La definición de curvatura $K = |d\theta/ds|$ para curvas planas no tiene un análogo inmediato en tres dimensiones porque el vector unitario tangente $\mathbf{T}(s)$ no se puede determinar con un solo ángulo θ. Por lo tanto, para las curvas en el espacio se necesita usar otro enfoque. Por supuesto, debe demostrarse que la nueva definición de curvatura coincide con la anterior (15.15) para las curvas planas.

A fin de obtener una definición adecuada, observamos primero que en dos dimensiones, el vector unitario tangente $\mathbf{T}(s)$ se puede escribir

$$\mathbf{T}(s) = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{i}$ (véase la Figura 15.24). Considerando θ como una función de s y derivando,

$$\mathbf{T}'(s) = \left(-\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\right)\mathbf{j} = \frac{d\theta}{ds}(-\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}).$$

Entonces,

$$\|\mathbf{T}'(s)\| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| \|-\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}\| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = K.$$

Se usará este hecho para definir la curvatura en tres dimensiones. Se debe describir el vector unitario tangente $\mathbf{T}(s)$ *sin* hacer referencia al ángulo θ y luego *definir* K como $\|\mathbf{T}'(s)\|$.

Sea C una curva con ecuaciones paramétricas

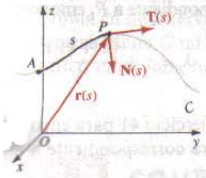
$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s)$$

donde $f''(s)$, $g''(s)$ y $h''(s)$ existen y s es la longitud de arco medida a lo largo de C desde un punto fijo A hasta el punto $P(f(s), g(s), h(s))$. Como en el caso de dos dimensiones, si $\mathbf{r}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j} + h(s)\mathbf{k}$ es el vector de posición de P, entonces $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario tangente a C en P que se denota por $\mathbf{T}(s)$. Como $\|\mathbf{T}(s)\|$

es una constante, resulta que $\mathbf{T}'(s)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(s)$ (véase el Ejemplo 4 de la Sección 15.2). Si $\mathbf{T}'(s) \neq \mathbf{0}$, se define

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(s)\|}\mathbf{T}'(s).$$

FIGURA 15.31



El vector $\mathbf{N}(s)$ es un vector unitario ortogonal a $\mathbf{T}(s)$ y se llama **vector unitario normal principal** a C en el punto P. Estos conceptos se ilustran en la Figura 15.31.

Habiendo obtenido un vector unitario tangente $\mathbf{T}(s)$ y suponiendo que $\mathbf{T}'(s)$ existe, se puede definir la curvatura en tres dimensiones como sigue.

DEFINICIÓN (15.18)

Sea C una curva regular en el espacio con parametrización

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s)$$

donde el parámetro s es la longitud de arco. Sean $\mathbf{r}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j} + h(s)\mathbf{k}$ y $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$. La **curvatura** K de C en el punto $P(x, y, z)$ es

$$K = \|\mathbf{T}'(s)\|.$$

Como se demostró anteriormente, esta definición se reduce a (15.15) cuando C es una curva plana. Nótese que

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{K}\mathbf{T}'(s) \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{T}'(s) = K\mathbf{N}(s).$$

La fórmula para K en la Definición (15.18) es a veces difícil de aplicar en los problemas específicos. En la siguiente sección se obtendrá una fórmula más práctica para calcular la curvatura.

EJERCICIOS 15.4

Ejercicios 1-6: Determine los vectores unitarios tangente y normal, $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, a la curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$. Trace la gráfica de C y represente geométricamente los vectores $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ correspondientes al valor dado de t.

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{j}; \quad t = 1$
2. $\mathbf{r}(t) = -t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}; \quad t = 1$
3. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}; \quad t = 1$
4. $\mathbf{r}(t) = (4 + \cos t)\mathbf{i} - (3 - \operatorname{sen} t)\mathbf{j}; \quad t = \pi/6$
5. $\mathbf{r}(t) = 2\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\cos t\mathbf{k}; \quad t = \pi/4$
6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}; \quad t = 1$

Ejercicios 7-18: Calcule la curvatura de la curva en P.

7. $y = 2 - x^3; \quad P(1, 1)$
8. $y = x^4; \quad P(1, 1)$
9. $y = e^{x^2}; \quad P(0, 1)$
10. $y = \ln(x - 1); \quad P(2, 0)$
11. $y = \cos 2x; \quad P(0, 1)$
12. $y = \sec x; \quad P(\pi/3, 2)$
13. $x = t - 1, \ y = \sqrt{t}; \quad P(3, 2)$

14. $x = t + 1,\ y = t^2 + 4t + 3;\quad P(1, 3)$

15. $x = t - t^2,\ y = 1 - t^3;\quad P(0, 1)$

16. $x = t - \operatorname{sen} t,\ y = 1 - \cos t;\quad P(\frac{1}{2}\pi - 1, 1)$

17. $x = 2\operatorname{sen} t,\ y = 3\cos t;\quad P(1, 3\sqrt{3}/2)$

18. $x = \cos^3 t,\ y = \operatorname{sen}^3 t;\quad P(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$

Ejercicios 19-22: Para la curva y el punto P dados, (a) calcule el radio de curvatura, (b) calcule el centro de curvatura y (c) trace la curva y la circunferencia de curvatura en P.

19. $y = \operatorname{sen} x;\quad P(\pi/2, 1)$

20. $y = \sec x;\quad P(0, 1)$

21. $y = e^x;\quad P(0, 1)$

22. $xy = 1;\quad P(1, 1)$

Ejercicios 23-28: Encuentre los puntos de la curva en donde la curvatura es máxima.

23. $y = e^{-x}$

24. $y = \cosh x$

25. $9x^2 + 4y^2 = 36$

26. $9x^2 - 4y^2 = 36$

27. $y = \ln x$

28. $y = \operatorname{sen} x$

29. Use la ecuación $y = mx + b$ para demostrar que la curvatura en todos los puntos de una recta es 0 (véase el Ejemplo 3).

30. Demuestre que la máxima curvatura en una parábola se da en el vértice.

31. Demuestre que la máxima y la mínima curvaturas en una elipse se dan en los extremos del eje mayor y del eje menor, respectivamente.

32. Demuestre que la máxima curvatura en una hipérbola ocurre en los extremos del eje transversal.

Ejercicios 33-36: Encuentre los puntos de la curva en los que la curvatura es 0.

33. $y = x^4 - 12x^2$

34. $y = \tan x$

35. $y = \operatorname{senh} x$

36. $y = e^{-x^2}$

37. Sea C una curva que es la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$. Haga patente que si $r' = dr/d\theta$ y $r'' = d^2r/d\theta^2$, la curvatura K en el punto $P(r, \theta)$ es

$$K = \frac{|2(r')^2 - rr'' + r^2|}{[(r')^2 + r^2]^{3/2}}.$$

(*Sugerencia:* Use $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ para expresar C en forma paramétrica.)

Ejercicios 38-40: Calcule la curvatura de la curva polar dada en $P(r, \theta)$ usando la fórmula del Ejercicio 37.

38. La cardioide $r = a(1 - \cos\theta)$ para $0 < \theta < 2\pi$.

39. La rosa de cuatro pétalos $r = \operatorname{sen} 2\theta$ para $0 < \theta < \pi/2$.

40. La espiral $r = e^{a\theta}$.

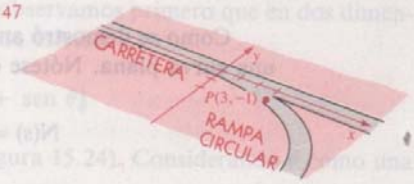
41. Sea $P(x, y)$ un punto en la gráfica de $y = f(x)$ en el que $K \neq 0$. Demuestre que si (h, k) es el centro de curvatura correspondiente a P, entonces

$$h = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''},\quad k = y + \frac{[1 + (y')^2]}{y''}.$$

42-46. Use las fórmulas del Ejercicio 41 para encontrar el centro de curvatura correspondiente a P en los Ejercicios 7-11.

47. A una carretera y una de sus rampas de salida se sobrepone un sistema coordenado rectangular de manera que la carretera coincide con el eje x. La rampa de salida comienza en el origen O y su trayectoria sigue la curva $y = -\frac{1}{27}x^3$ entre O y el punto $P(3, -1)$; luego continúa a lo largo del arco de circunferencia que se muestra en la figura. Sea $K(x)$ la curvatura de la rampa de salida en (x, y). Encuentre el centro del arco de circunferencia que hace que la curvatura sea continua en $x = 3$ (es decir, en el punto $P(3, -1)$).

EJERCICIO 47



48. Demuestre que las rectas y las circunferencias son las únicas curvas (o líneas) *planas* que tienen curvatura constante. (El Ejercicio 17 de la Sección 15.5 demuestra que este resultado no es cierto para las curvas en el espacio.)

Ejercicios 49-52: Si la curva C de la Figura 15.22 tiene una parametrización regular $x = f(t)$, $y = g(t)$, entonces, por el Teorema (13.5), la relación entre el parámetro t y la longitud de arco s está dada por

$$s = \int_a^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}\, du$$

donde a es el valor de t correspondiente al punto fijo A. Use esta relación para expresar la curva dada en términos del parámetro longitud de arco s, suponiendo que el punto fijo A corresponde a $t = 0$. (*Sugerencia:* Evalúe primero la integral para encontrar la relación entre t y s, y luego reemplace t en las ecuaciones paramétricas.)

49. $x = 4t - 3,\ y = 3t + 5;\quad t \geq 0$

50. $x = 3t^2,\ y = 2t^3;\quad t \geq 0$

51. $x = 4\cos t,\ y = 4\operatorname{sen} t;\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

52. $x = e^t \cos t,\ y = e^t \operatorname{sen} t;\quad t \geq 0$

53. Demuestre que si k es una función positiva y continua en un intervalo $[0, a]$, entonces existe una curva plana C tal que k representa la curvatura de C como una función de la longitud de arco. (*Sugerencia:* Para s en $[0, a]$, defina

$$h(s) = \int_0^s k(t)\,dt,$$

$$x = f(s) = \int_0^s \cos h(t)\,dt,$$

y

$$y = g(s) = \int_0^s \operatorname{sen} h(t)\,dt.)$$

54. Use el Ejercicio 53 para resolver de nuevo el Ejercicio 48.

15.5 COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN

En esta sección se aplicarán los conceptos de la anterior al movimiento de una partícula.

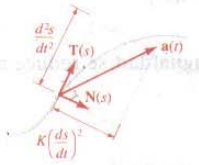
TEOREMA (15.19)

Sea P una partícula que al tiempo t tiene vector de posición $\mathbf{r}(t)$ y sea s el parámetro longitud de arco para la curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$. Si $\mathbf{T}(s)$ y $\mathbf{N}(s)$ son los vectores unitarios tangente y normal principal, y si K es la curvatura de C en el punto correspondiente a s, entonces la velocidad y la aceleración de P pueden escribirse

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(s)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(s) + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}(s)$$

FIGURA 15.32



Demostración El croquis en la Figura 15.32 es una representación geométrica de la fórmula para $\mathbf{a}(t)$.

Recordemos que el vector unitario tangente $\mathbf{T}(s)$ está dado por

$$\mathbf{T}(s) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{r}'(t)$$

y por tanto,

$$\mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\,\mathbf{T}(s).$$

Como $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t)$ y $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{v}(t)\| = ds/dt$, esto da la fórmula para la velocidad

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(s).$$

Derivando con respecto a t y aplicando las Reglas de la Cadena en los Ejercicios 43 y 44 de la Sección 15.2, se obtiene

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(s) + \frac{ds}{dt}\frac{d}{dt}\mathbf{T}(s) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(s) + \frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}\mathbf{T}'(s).$$

De acuerdo con el comentario siguiente a la Definición (15.18), $\mathbf{T}'(s) = K\mathbf{N}(s)$. Por lo tanto, la fórmula anterior se puede escribir

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(s) + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}(s)$$

Si la rapidez de movimiento $\|\mathbf{v}(t)\| = ds/dt$ se denota por v, entonces las fórmulas del Teorema (15.19) se convierten en

$$\mathbf{v}(t) = v\mathbf{T}(s) \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T}(s) + Kv^2\mathbf{N}(s).$$

La segunda de estas fórmulas expresa la aceleración $\mathbf{a}(t)$ en términos de una *componente tangencial* $a_{\mathbf{T}}$ y una *componente normal* $a_{\mathbf{N}}$, donde

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{y} \quad a_{\mathbf{N}} = Kv^2 = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Las componentes tangencial y normal de la aceleración son útiles para el estudio de las fuerzas que actúan sobre un objeto en movimiento que recorre una curva C. Obsérvese que la componente normal $a_{\mathbf{N}} = Kv^2$ depende solamente de la rapidez de P y de la curvatura de C. Si la rapidez o la curvatura son grandes, también lo es la componente normal de la aceleración (siempre y cuando la otra no sea muy pequeña). Este resultado, obtenido teóricamente, confirma el hecho conocido de que el conductor de un automóvil debe disminuir la velocidad para empezar a tomar una curva muy pronunciada.

También se pueden obtener fórmulas para las componentes tangencial y normal de la aceleración que dependen sólo de $\mathbf{r}(t)$. Aplicando el producto escalar de $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ en el Teorema (15.19),

$$\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t) = \left[\frac{ds}{dt}\mathbf{T}(s)\right]\cdot\left[\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(s) + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}(s)\right]$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)[\mathbf{T}(s)\cdot\mathbf{T}(s)] + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3[\mathbf{T}(s)\cdot\mathbf{N}(s)].$$

Como $\mathbf{T}(s)$ tiene magnitud 1 y es ortogonal a $\mathbf{N}(s)$, esta última igualdad se reduce a

$$\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$$

lo cual puede escribirse en términos de $\mathbf{r}$ como

$$\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\frac{d^2s}{dt^2} = \|\mathbf{r}'(t)\|a_{\mathbf{T}}.$$

Si $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, esto da la fórmula siguiente.

COMPONENTE TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN (15.20)

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Si en vez del producto escalar se toma el producto *vectorial* de $\mathbf{a}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$, entonces

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)[\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}(s)] + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 [\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)].$$

El producto vectorial de un vector consigo mismo es $\mathbf{0}$ y por lo tanto, $\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}(s) = \mathbf{0}$. Además, como $\mathbf{T}(s)$ y $\mathbf{N}(s)$ son vectores unitarios ortogonales, $\|\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)\| = 1$ (véase (14.33)). Entonces, la fórmula anterior da

$$\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\| = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

y por lo tanto,

$$a_N = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|}{ds/dt}.$$

Escribiendo esto en términos de $\mathbf{r}$ se obtiene lo siguiente.

COMPONENTE NORMAL DE LA ACELERACIÓN (15.21)

$$a_N = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

EJEMPLO 1 El vector de posición de una partícula al tiempo t (en segundos) es $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ para $1 \le t \le 4$.

(a) Encontrar las componentes tangencial y normal de la aceleración al tiempo t.

(b) Calcular a_N, a_T y $\|\mathbf{v}(t)\|$ en los tiempos $t = 1, 2, 3$ y 4 con una precisión de dos decimales y describir el movimiento de la partícula.

Solución

(a) Derivando obtenemos

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = (1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}.$$

Por (15.20),

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{4t + 18t^3}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}}.$$

Para encontrar a_N, primero calculamos

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Aplicando (15.21) resulta

$$a_N = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{(36t^4 + 36t^2 + 4)^{1/2}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}} = 2\left(\frac{9t^4 + 9t^2 + 1}{9t^4 + 4t^2 + 1}\right)^{1/2}$$

(b) La trayectoria de la partícula, es decir, la curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$, es la parte de la cúbica alabeada que se discutió en el Ejemplo 2 de la Sección 15.1, que se encuen-

tra entre (1, 1, 1) y (4, 16, 64) (véase la Figura 15.4). Sustituyendo en las fórmulas obtenidas en la parte (a), obtenemos la siguiente tabla de aproximaciones.

t	1	2	3	4
Posición de P	(1, 1, 1)	(2, 4, 8)	(3, 9, 27)	(4, 16, 64)
a_N	2.33	2.12	2.06	2.03
a_T	5.88	11.98	17.99	24.00
$\|\|\mathbf{v}(t)\|\|$	3.74	12.69	27.68	48.67

Por lo tanto, cuando t aumenta de 1 a 4, la partícula recorre C de (1, 1, 1) a (4, 16, 64) aumentando su rapidez. La componente normal de la aceleración a_N tiende a 2 (nótese que $\lim_{t\to\infty} a_N = 2$). La componente tangencial a_T aumenta a unas 6 unidades por segundo.

Se puede obtener una fórmula alternativa para la componente normal de la aceleración. A fin de simplificar la notación, se designa a $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ y $\mathbf{a}(t)$ del Teorema (15.19) por $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{a}$, respectivamente. Entonces,

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}.$$

Como $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ y $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= (a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}) \cdot (a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}) \\ &= a_T^2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) + 2a_Na_T(\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}) + a_N(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) \\ &= a_T^2 + a_N^2. \end{aligned}$$

Despejando a_N de esta ecuación se obtiene lo siguiente:

TEOREMA (15.22)

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 a_T^2}.$$

El anterior Teorema (15.22) debe usarse cuando es difícil encontrar la componente normal por medio de (15.21).

EJEMPLO 2 Encontrar a_N en el Ejemplo 1 usando el Teorema (15.22).

Solución Como en la solución del Ejemplo 1, obtenemos

$$a_T = \frac{4t + 18t^3}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_N &= \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} \\ &= \sqrt{(4 + 36t^2) - \frac{(4t + 18t^3)^2}{1 + 4t^2 + 9t^4}}. \end{aligned}$$

Simplificando esta expresión se obtiene la a_N del Ejemplo 1.

EJEMPLO 3 Sea P un punto que se mueve con rapidez constante v sobre una circunferencia de radio k. Encontrar las componentes tangencial y normal de la aceleración.

Solución Como $v = ds/dt$ es constante, la componente tangencial $a_T = d^2s/dt^2$ es 0.

Del Ejemplo 4 de la sección anterior sabemos que la curvatura de la circunferencia es $1/k$. Entonces, la componente normal de la aceleración (véase (15.21)) es $(1/k)v^2$. Esto demuestra que la aceleración es un vector de magnitud constante v^2/k dirigido desde P hacia el centro de la circunferencia (véase el Ejemplo 2 de la Sección 15.3). •

Se puede obtener una fórmula para la curvatura de una línea C en el espacio mediante (15.21). Si C está dada paramétricamente por

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

entonces C queda determinada por el vector de posición

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}.$$

Despejando K de la ecuación (15.21) y usando el hecho de que $ds/dt = \|\mathbf{r}'(t)\|$, se obtiene el siguiente teorema.

TEOREMA (15.23) Sea C una curva en el espacio dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ donde f'', g'' y h'' existen. La curvatura K en el punto $P(x, y, z)$ de C es

$$K = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = a_N \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|^2}.$$

Esta fórmula también puede servir para curvas planas (véase el Ejercicio 16).

EJEMPLO 4

(a) Encontrar la curvatura K de la cúbica alabeada $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en el punto (x, y, z).

(b) Calcular K en los puntos correspondientes a $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$ con una precisión de cuatro decimales.

Solución

(a) Si definimos

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3k,$$

se ve que la curva es la misma que se consideró en el Ejemplo 1. Sustituyendo $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ en el Teorema (15.23) por las expresiones que se obtuvieron en dicho ejemplo:

$$K = \frac{2(9t^4 + 9t^2 + 1)^{1/2}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^{3/2}}$$

(b) Reemplazando $t = 1, 2, 3$ y 4 en la fórmula para K que se obtuvo en la parte (a) y usando una calculadora, obtenemos las siguientes aproximaciones (compárense los resultados con los de la tabla de la página 774).

t	1	2	3	4
(x, y, z)	(1, 1, 1)	(2, 4, 8)	(3, 9, 27)	(4, 16, 64)
K	0.1664	0.0132	0.0027	0.0009

Usando los teoremas sobre límites, podemos demostrar que $\lim_{t\to\infty} K = 0$, es decir, que la curvatura de la línea dada tiende a la de una recta cuando t aumenta. •

EJERCICIOS 15.5

Ejercicios 1-8: Obtenga fórmulas generales para las componentes tangencial y normal de la aceleración y para la curvatura de la línea C determinada por $\mathbf{r}(t)$.

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (3t + 2)\mathbf{j}$
2. $\mathbf{r}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$
3. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$
5. $\mathbf{r}(t) = t(\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j})$
6. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\mathbf{j}$
7. $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 9\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = e^t(\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})$
9. Una partícula se mueve sobre la parábola $y = x^2$ de manera que la componente horizontal de su velocidad es siempre 3. Calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración en el punto $P(1, 1)$.
10. Resuelva el Ejercicio 9 suponiendo que la partícula se mueve sobre la gráfica de $y = 2x^3 - x$.
11. Demuestre que si una partícula recorre una curva C con rapidez constante, entonces la aceleración siempre es normal a C.
12. Use el Teorema (15.23) para demostrar que si una partícula se mueve en el espacio con aceleración siempre igual a $\mathbf{0}$, entonces se mueve sobre una recta.
13. Demuestre que si una partícula P recorre una curva C con rapidez constante, entonces la magnitud de la aceleración es directamente proporcional a la curvatura de c, es decir, $\|\mathbf{a}\| = cK$ para un número real c.
14. Demuestre que si en el Ejercicio 13 otra partícula Q recorre C con el doble de rapidez que P, entonces la magnitud de la aceleración de Q es cuatro veces mayor que la de P.
15. Demuestre que si una partícula se mueve sobre la gráfica de $y = f(x)$ para $a \le x \le b$, entonces la componente normal de la aceleración en un punto de inflexión es 0. Ilustre este hecho utilizando $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$.
16. Aplique el Teorema (15.23) para demostrar que si una curva plana está dada paramétricamente por $x = f(t), y = g(t)$, donde f'' y g'' existen, entonces la curvatura K está dada por el Teorema (15.17).
17. Demuestre que la curvatura en cualquier punto de la hélice circular $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, z = bt$, con $a > 0$, está dada por $K = a/(a^2 + b^2)$.
18. Determine la curvatura en (x, y, z) de la *hélice elíptica* que tiene ecuaciones paramétricas $x = a\cos t, y = b\operatorname{sen} t, z = ct$ donde a, b y c son números reales positivos.

15.6 LEYES DE KEPLER

Es justo concluir este capítulo poniendo de manifiesto el poder y la elegancia de los métodos vectoriales, cuando se aplican a la deducción de tres leyes clásicas de la física. Lo que se presenta en esta sección no es sencillo porque el problema que se considera no lo es. Sin embargo, el estudio de lo que aquí se presenta proporciona una experiencia importante que vale la pena adquirir.

Tras haber analizado durante varios años una gran cantidad de datos empíricos, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) formuló tres leyes que describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Estas leyes pueden enunciarse como sigue.

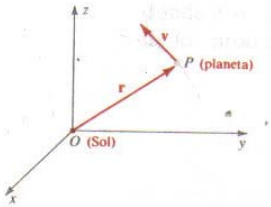
LEYES DE KEPLER (15.24)

Primera Ley:	La órbita de cada planeta es una elipse que tiene al Sol en uno de sus focos.
Segunda Ley:	El vector que va del centro del Sol al *del planeta en movimiento describe* áreas iguales en tiempos iguales.
Tercera Ley:	Si el tiempo que requiere un planeta para recorrer una vez su órbita elíptica es T y el eje mayor de tal elipse es $2a$, entonces $T^2 = ka^3$ para una constante k.

Unos cincuenta años más tarde, Sir Isaac Newton (1642-1727) demostró que las Leyes de Kepler son consecuencia de su Ley de la Gravitación Universal y de su Segunda Ley del Movimiento. La aportación de estos dos hombres fue extraordinaria porque estas leyes explicaron *todas* las observaciones astronómicas que se habían realizado hasta esa fecha.

En esta sección se demuestran las Leyes de Kepler utilizando vectores. Como la fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre un planeta es mucho mayor que la ejercida por otros cuerpos celestes, se despreciarán todas las otras fuerzas que actúan sobre un planeta. Desde este punto de vista sólo hay que considerar dos objetos: el Sol y un planeta que gira alrededor de él.

FIGURA 15.33



Es conveniente introducir un sistema coordenado con el centro de masa del Sol en el origen O, como se ilustra en la Figura 15.33. El punto P representa el centro de masa del planeta. Para simplificar la notación se denotará al vector de posición de P por $\mathbf{r}$ en vez de $\mathbf{r}(t)$, y se usarán $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ para denotar la velocidad $\mathbf{r}'(t)$ y la aceleración $\mathbf{r}''(t)$, respectivamente.

Antes de demostrar las Leyes de Kepler, se probará que el movimiento del planeta se realiza en un plano. Si se define $r = \|\mathbf{r}\|$, entonces $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ es un vector unitario que tie-

ne la misma dirección que $\mathbf{r}$. De acuerdo con la Ley de la Gravitación de Newton, la fuerza $\mathbf{F}$ de atracción gravitatoria sobre el planeta está dada por

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{u}$$

donde M es la masa del Sol, m la del planeta y G es la constante de la gravitación universal. La Segunda Ley del Movimiento de Newton (15.12) afirma que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Igualando estas dos expresiones de $\mathbf{F}$ y despejando $\mathbf{a}$ se obtiene

(a) $$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{u}.$$

Esto demuestra que $\mathbf{a}$ es paralela a $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ y por lo tanto, $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Además, como $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, se ve que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v}$$

$$= \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

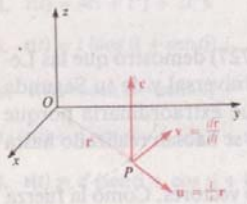
De modo que

(b) $$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector constante. El vector $\mathbf{c}$ desempeñará un papel importante en la demostración de las Leyes de Kepler.

Como $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$, el vector $\mathbf{r}$ es perpendicular a $\mathbf{c}$ para todo valor de t. Esto implica que la curva trazada por P está en un plano, es decir, *la órbita del planeta es una curva plana.*

FIGURA 15.34



A continuación se demuestra la Primera Ley de Kepler. Puede suponerse que el movimiento del planeta se realiza en el plano xy. En este caso, el vector $\mathbf{c}$ es perpendicular a dicho plano y se puede considerar que $\mathbf{c}$ tiene la misma dirección que la parte positiva del eje z, como se ilustra en la Figura 15.34.

Puesto que $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$, entonces

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}.$$

Sustituyendo en $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ y usando las propiedades del producto vectorial resulta

$$\mathbf{c} = r\mathbf{u} \times \left(r\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}\right)$$

$$= r^2\left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) + r\frac{dr}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{u}).$$

Como $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, esto se reduce a

(c) $$\mathbf{c} = r^2\left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right).$$

Usando (c) y (a) junto con (ii) y (vi) del Teorema (14.36), se ve que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \left(-\frac{GM}{r^2}\mathbf{u}\right) \times \left[r^2\left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\right]$$

$$= -GM\left[\mathbf{u} \times \left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\right]$$

$$= -GM\left[\left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right].$$

Como $\|\mathbf{u}\| = 1$, del Ejemplo 4 de la Sección 15.2 se deduce que $\mathbf{u} \cdot (d\mathbf{u}/dt) = 0$. Además, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 = 1$ y por lo tanto, la última fórmula para $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ se reduce a

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = GM\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(GM\mathbf{u}).$$

Esto puede escribirse también

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{c} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c})$$

y por consiguiente,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = \frac{d}{dt}(GM\mathbf{u}).$$

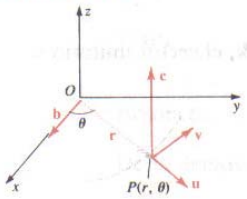
Integrando ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$\mathbf{v} \times \mathbf{c} = GM\mathbf{u} + \mathbf{b} \tag{d}$$

donde $\mathbf{b}$ es un vector constante.

El vector $\mathbf{v} \times \mathbf{c}$ es ortogonal a $\mathbf{c}$ y por lo tanto, está en el plano xy. Como $\mathbf{u}$ también está en el plano xy, se deduce de (d) que $\mathbf{b}$ está en el mismo plano.

FIGURA 15.35



Hasta ahora la demostración ha sido independiente de la posición de los ejes x y y. Se escoge ahora un sistema de coordenadas tal que la parte positiva del eje x tenga la misma dirección que el vector constante $\mathbf{b}$, como se ilustra en la Figura 15.35.

Sean (r, θ) las coordenadas polares del punto P, donde $r = \|\mathbf{r}\|$. Resulta entonces que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta = b\cos\theta$$

donde $b = \|\mathbf{b}\|$. Si se define $c = \|\mathbf{c}\|$, entonces usando (b) junto con las propiedades de los productos escalar y vectorial y también (d),

$$c^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{c})$$

$$= (r\mathbf{u}) \cdot (GM\mathbf{u} + \mathbf{b})$$

$$= rGM(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})$$

$$= rGM + rb\cos\theta.$$

Despejando r de esta ecuación,

$$r = \frac{c^2}{GM + b\cos\theta}.$$

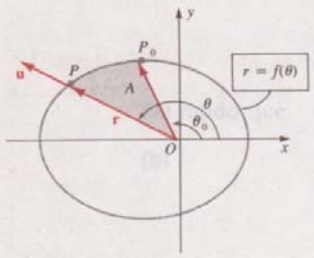
Dividiendo el numerador y el denominador de la fracción entre GM se obtiene

(e) $$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

donde $p = c^2/GM$ y $e = b/GM$. De acuerdo con el Teorema (13.17), la gráfica de esta ecuación polar es una cónica con excentricidad e y foco en el origen. Como la órbita es una curva cerrada, se tiene que $0 < e < 1$ y la cónica es en consecuencia una elipse. Esto completa la demostración de la Primera Ley de Kepler.

A continuación se demostrará la Segunda Ley de Kepler. Puede suponerse que la órbita del planeta es una elipse en el plano xy. Sea $r = f(\theta)$ una ecuación polar de la órbita cuando el centro del Sol está en el foco O. Sea P_0 la posición del planeta al tiempo t_0 y P su posición en cualquier tiempo $t \geq t_0$. Como se ilustra en la Figura 15.36, denotamos por θ_0 y θ los ángulos que con la parte positiva del eje x forman $\overrightarrow{OP_0}$ y $\overrightarrow{OP}$, respectivamente.

FIGURA 15.36



Por el Teorema (13.11), el área A descrita (o barrida) por $\overrightarrow{OP}$ durante el intervalo de tiempo $[t_0, t]$ es

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} \tfrac{1}{2}r^2\, d\theta$$

y por lo tanto, $$\frac{dA}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\int_{\theta_0}^{\theta} \tfrac{1}{2}r^2\, d\theta = \tfrac{1}{2}r^2.$$

Usando este hecho y la Regla de la Cadena,

(f) $$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

Ahora observamos que como $\mathbf{r} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, el vector unitario $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ se puede expresar en la forma

$$\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Por tanto,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Mediante cálculo directo se puede demostrar que

$$\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{k}.$$

Si $\mathbf{c}$ es el vector que se obtuvo en la demostración de la Primera Ley de Kepler, entonces de (c) y la última ecuación,

$$\mathbf{c} = r^2\left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) = r^2\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{k}$$

y así,

(g) $$c = |\mathbf{c}| = r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Combinando (f) y (g),

(h) $$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}c$$

es decir, la rapidez con que el vector $\overrightarrow{OP}$ describe el área A es constante. Esto demuestra la Segunda Ley de Kepler.

Para probar la Tercera Ley de Kepler se aprovechará la notación desarrollada en las demostraciones de las primeras dos leyes. En particular, se supone que la órbita del planeta tiene la ecuación polar

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

donde $p = c^2/GM$ y $e = b/GM$ (véase (e)).

Sea T el periodo, tiempo requerido por un planeta para dar una vuelta completa alrededor del Sol. De acuerdo con (h), el área descrita durante el intervalo de tiempo $[0, T]$ está dada por

$$A = \int_0^T \frac{dA}{dt}\,dt = \int_0^T \tfrac{1}{2}c\,dt = \tfrac{1}{2}cT.$$

Esto es igual también al área de la región del plano delimitada por la elipse. En el Ejemplo 4 de la Sección 12.3 se encontró que $A = \pi ab$ para una elipse cuyos ejes mayor y menor tienen longitudes $2a$ y $2b$, respectivamente. Por consiguiente,

$$\tfrac{1}{2}cT = \pi ab \quad \text{o bien} \quad T = \frac{2\pi ab}{c}.$$

Por (12.8),

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

y así,

$$a^2e^2 = a^2 - b^2 \quad \text{o bien} \quad b^2 = a^2(1 - e^2).$$

Entonces,
$$T^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2a^4(1 - e^2)}{c^2}.$$

De la demostración del Teorema (13.16) (en donde se usó $p = de$) se sabe que

$$a^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} \quad \text{o bien} \quad a = \frac{p}{1 - e^2}$$

y por tanto,
$$T^2 = \frac{4\pi^2a^4}{c^2}\left(\frac{p}{a}\right).$$

Como $p = c^2/GM$, lo anterior se reduce a

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 = ka^3$$

donde $k = 4\pi^2/GM$. Esto completa la demostración.

En las demostraciones que se dieron de las Leyes de Kepler se supuso que la única fuerza gravitacional que actúa sobre un planeta es la del Sol. Si se toman en cuenta las fuerzas ejercidas por otros planetas, entonces aparecen irregularidades en las órbitas elípticas. Las irregularidades observadas en el movimiento de Urano llevaron al astrónomo británico J. Adams (1819-1892) y al astrónomo francés U. Leverrier (1811-1877) a predecir la existencia de un planeta desconocido que era la causa de las irregularidades. Utilizando esas predicciones, en 1846 el astrónomo alemán J. Galle observó telescópicamente por primera vez a este planeta, que más tarde recibió el nombre de Neptuno.

15.7 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Función escalar.
2. Función vectorial.
3. Curva en el espacio.
4. Longitud de una curva en el espacio.
5. Límite de una función vectorial.
6. Continuidad de una función vectorial.
7. Derivada de una función vectorial.
8. Fórmulas de derivación para las funciones vectoriales.
9. Vector tangente a una curva.
10. Integrales de las funciones vectoriales.
11. Velocidad.
12. Aceleración.
13. Vector unitario tangente de una curva.
14. Vector unitario normal principal de una curva.
15. Longitud de arco de una curva como parámetro.
16. Curvatura de una línea curva plana.
17. Circunferencia de curvatura.
18. Radio de curvatura.
19. Curvatura de una línea curva en el espacio.
20. Componente tangencial de la aceleración.
21. Componente normal de la aceleración.
22. Leyes de Kepler.

EJERCICIOS 15.7

Ejercicios 1-2: La posición de una partícula que se mueve en un plano coordenado está dada por $\mathbf{r}(t)$. Calcule su velocidad, aceleración y rapidez al tiempo t.

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (4t^2 - t^4)\mathbf{j}$
2. $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$
3. La curva C está determinada por

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (e^t \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$$

para $0 \le t \le 1$.

(a) Halle un vector unitario tangente a C en el punto correspondiente a $t = 0$.
(b) Calcule la longitud de C.

4. El vector de posición de una partícula al tiempo t es

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}.$$

(a) Calcule la velocidad y la aceleración al tiempo t.
(b) Calcule la rapidez en $t = 1$.

5. Sea C la curva determinada por

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}.$$

(a) Encuentre los vectores unitarios tangente y normal $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.
(b) Trace la curva C junto con $\mathbf{T}(1)$ y $\mathbf{N}(1)$.

6. Sean $\mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}(t) = t\mathbf{i} - 5t\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}$. Encuentre los valores de t para los que $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}'(t)$ son ortogonales.

7. Sean $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ como en el Ejercicio 6. Encuentre $D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$ y $D_t[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$.

8. Evalúe $\int (\operatorname{sen} 3t\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k})\, dt$.

9. Evalúe $\int_0^1 (4t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - \mathbf{k})\, dt$.

10. Determine $\mathbf{u}(t)$ suponiendo que $\mathbf{u}'(t) = e^{-t}\mathbf{i} - 4 \operatorname{sen} 2t\mathbf{j} + 3\sqrt{t}\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}(0) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Ejercicios 11-12: Verifique la identidad sin usar componentes.

11. $D_t \|\mathbf{u}(t)\|^2 = 2\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)$

12. $D_t[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}''(t)] = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}'''(t)$

Ejercicios 13-15: Calcule la curvatura de la línea en el punto P.

13. $y = xe^x$; $P(0, 0)$

14. $x = \dfrac{1}{1+t}$, $y = \dfrac{1}{1-t}$; $P(\frac{1}{2}, 2)$

15. $x = 2t^2$, $y = t^4$, $z = 4t$; $P(x, y, z)$

16. Encuentre las abscisas de los puntos de la gráfica de $y = x^3 - 3x$ en los que la curvatura es máxima.

17. Sea C la gráfica de $y = \cosh x$. Obtenga la ecuación de la circunferencia de curvatura de C en el punto $P(0, 1)$.

18. Dada la curva llamada limazón $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$, calcule su radio de curvatura en el punto $P(\pi, 2)$.

Ejercicios 19-20: $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula. Obtenga las componentes tangencial y normal de la aceleración al tiempo t.

19. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$

20. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

784 en blanco

CAPÍTULO 16

DERIVADAS PARCIALES

En este capítulo se generaliza el concepto de derivada al caso de funciones de más de una variable. Esto tiene aplicaciones al cálculo de razones de cambio, máximos y mínimos y aproximaciones usando diferenciales.

16.1 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En los capítulos anteriores las funciones tenían sólo una variable independiente. Esas funciones tienen muchas aplicaciones; sin embargo, en algunos problemas aparecen *varias* variables independientes:

El área de un rectángulo depende de *dos* cantidades, la longitud y la anchura.

Si un objeto se halla en el espacio, entonces la temperatura de un punto P en el objeto puede depender de las *tres* coordenadas rectangulares x, y, z de P.

Si la temperatura de un objeto en el espacio varía en el tiempo t, entonces se tienen *cuatro* variables x, y, z y t.

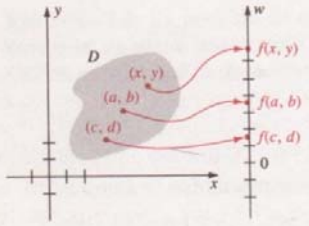
Un fabricante puede saber que el costo C de producir cierto artículo depende del material, la mano de obra, el equipo, el costo de mantenimiento y los gastos generales. Entonces, C depende de *cinco* variables diferentes.

En esta sección se definen las funciones de varias variables y se discuten algunas de sus propiedades. Recordemos que una función f es una correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto D un único elemento de un conjunto E. Si D es un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y E es un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces f es una *función de dos variables* (*reales*). La siguiente es otra manera de enunciar lo anterior.

DEFINICIÓN (16.1)

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Una **función f de dos variables** es una correspondencia que asocia a cada par (x, y) en D un único número real que se denota por $f(x, y)$. El conjunto D es el **dominio** de f. El **contradominio** de f consta de todos los números reales $f(x, y)$ para (x, y) en D.

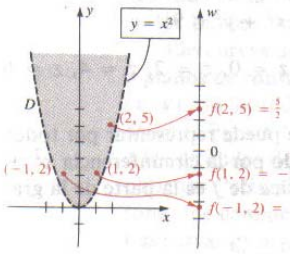
FIGURA 16.1



El dominio D en la Definición (16.1) se puede representar por puntos en un plano xy y el contradominio por puntos en una recta real, por ejemplo un eje w, como se ilustra en la Figura 16.1. Hay varias flechas que van de los pares ordenados en D a los números correspondientes en el contradominio. Como aplicación, consideremos una lámina delgada de metal que tiene la forma de D. A cada punto (x, y) de la lámina le corresponde una temperatura $f(x, y)$ que puede medirse con un termómetro y se representa en el eje w. También podría pensarse que D es la superficie de un lago y $f(x, y)$ la profundidad del agua bajo el punto (x, y). Hay muchas otras interpretaciones físicas de la Definición (16.1).

A menudo se utiliza una expresión en x y y para especificar $f(x, y)$, y se supone que el dominio es el conjunto de todos los pares (x, y) para los que la expresión tiene sentido. Entonces se dice que f es **una función de x y y**.

FIGURA 16.2



EJEMPLO 1

Sea $f(x, y) = \dfrac{xy - 5}{2\sqrt{y - x^2}}$. Encontrar el dominio D de f, esquematizar D y representar los números $f(2, 5)$, $f(1, 2)$ y $f(-1, 2)$ sobre un eje w, como en la Figura 16.1

Solución Analizando el denominador de $f(x, y)$, vemos que el dominio D es el conjunto de todos los pares (x, y) tales que $y - x^2$ es positivo; es decir, $y > x^2$. Entonces, la gráfica de D es la parte del plano xy que se encuentra arriba de la parábola $y = x^2$, y se muestra en la Figura 16.2.

Sustituyendo valores,

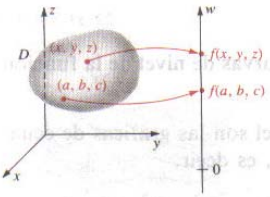
$$f(2, 5) = \frac{(2)(5) - 5}{2\sqrt{5 - 4}} = \frac{5}{2}.$$

Análogamente, $f(1, 2) = -\frac{3}{2}$ y $f(-1, 2) = -\frac{7}{2}$. Estos valores de la función están indicados en la Figura 16.2 sobre el eje w. •

A veces se usan fórmulas para definir las funciones de dos variables. Por ejemplo, la fórmula $V = \pi r^2 h$ expresa el volumen V de un cilindro circular recto como una función de la altura h y el radio de la base r. Los símbolos r y h se llaman **variables independientes** y V es la **variable dependiente**.

Una función f de tres variables (reales) se define como en (16.1) excepto que el dominio D es un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En este caso, a cada terna ordenada (x, y, z) en D se le asocia un único número real $f(x, y, z)$. Si D se representa como una región en tres dimensiones, como se ilustra en la Figura 16.3, entonces a cada punto (x, y, z) en D le corresponde un único punto $f(x, y, z)$ en el eje w. Como aplicación, se puede considerar a D como un objeto sólido y a $f(x, y, z)$ como la temperatura en (x, y, z).

FIGURA 16.3

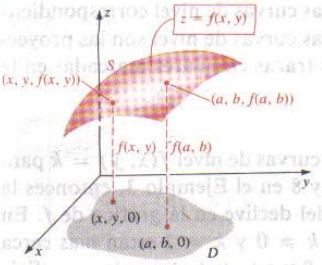


A menudo las funciones de tres variables se definen mediante expresiones. Por ejemplo,

$$f(x, y, z) = \frac{xe^y + \sqrt{z^2 + 1}}{xy \operatorname{sen} z}$$

determina una función de x, y y z. También se usan fórmulas como $V = lwh$, que es el volumen de un prisma rectangular de lados l, w y h, para definir funciones de tres variables.

FIGURA 16.4



Regresemos a la función f de las dos variables x y y. La **gráfica** de f es, por definición, la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$ en un sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones y es, en general, una superficie S de cierto tipo. Si se representa D por una región en el plano xy, entonces el par (x, y) en D queda representado por el punto $(x, y, 0)$. Los valores de la función $f(x, y)$ son las distancias (con signo) del plano xy a S, como se ilustra en la Figura 16.4.

EJEMPLO 2 Sea f la función con dominio D tal que

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Trazar la gráfica de f e indicar las trazas en los planos $z = 0$, $z = 2$, $z = 4$, $z = 6$ y $z = 8$.

Solución El dominio D se puede representar por todos los puntos del círculo delimitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano xy. La gráfica de f es la parte de la gráfica de

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

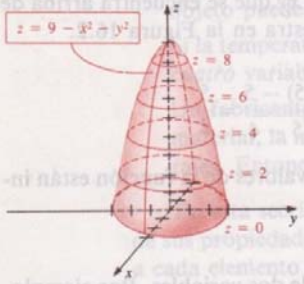
(un paraboloide) que se encuentra arriba del plano xy (véase la Figura 16.5).

Para encontrar la traza en el plano $z = k$, consideramos

$$k = 9 - x^2 - y^2 \quad \text{o bien} \quad x^2 + y^2 = 9 - k.$$

Tomando $k = 0$, 2, 4, 6 y 8 obtenemos las circunferencias con radios 3, $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$ y 1, respectivamente, que se muestran en la Figura 16.5. •

FIGURA 16.5
Trazas circulares en los planos $z = k$



Otro método gráfico que es útil para describir una función f de dos variables consiste en trazar en el plano xy las gráficas de las ecuaciones $f(x, y) = k$ para varios valores de k. Las gráficas que se obtienen de esta manera son las **curvas de nivel** de la función f. Es importante observar que cuando un punto (x, y) se mueve sobre una curva de nivel, los valores $f(x, y)$ de la función no cambian.

EJEMPLO 3 Trazar algunas curvas de nivel de la función f del Ejemplo 2.

Solución Las curvas de nivel son las gráficas de ecuaciones de la forma $f(x, y) = k$, es decir,

$$9 - x^2 - y^2 = k \quad \text{o bien} \quad x^2 + y^2 = 9 - k.$$

en el plano xy. Éstas son circunferencias cuando $0 \leq k < 9$. En la Figura 16.6 se tienen las curvas de nivel correspondientes a $k = 0$, 2, 4, 6 y 8. Estas curvas de nivel son las proyecciones en el plano xy de las trazas circulares marcadas en la Figura 16.5. •

FIGURA 16.6
Curvas de nivel $9 - x^2 - y^2 = k$



Si f es una función de dos variables y se trazan las curvas de nivel $f(x, y) = k$ para valores equidistantes de k tales como $k = 0$, 2, 4, 6 y 8 en el Ejemplo 3, entonces la cercanía de curvas sucesivas da información acerca del declive en la gráfica de f. En la Figura 16.6 las curvas de nivel correspondientes a $k = 0$ y $k = 2$ están más cerca una de otra que las correspondientes a $k = 6$ y $k = 8$ y esto indica que la superficie

ilustrada en la Figura 16.5 está más inclinada en los puntos cercanos al plano xy que en los puntos más alejados de él.

Las curvas de nivel se usan frecuentemente en la elaboración de **mapas orográficos** o **planos de configuración**. Por ejemplo, sea $f(x, y)$ la altitud (en metros) en un punto (x, y) con latitud x y longitud y (coordenadas geográficas). En la montaña representada en la Figura 16.7, se indican curvas de nivel (en tres dimensiones) correspondientes a las altitudes de 0, 100, 200, 300 y 400 metros. Se puede pensar que estas curvas se obtienen "rebanando" la colina con planos horizontales paralelos a la base. Una persona que camine a lo largo de una de estas curvas estará siempre a la misma altitud. Las curvas de nivel (en dos dimensiones) correspondientes a las mismas altitudes se muestran en la Figura 16.8. Estas curvas representan la montaña en el plano de configuración como vista directamente hacia abajo desde un avión.

FIGURA 16.7
Altitudes en una montaña

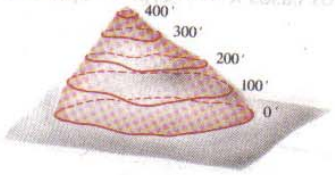


FIGURA 16.8
Mapa orográfico (representación de la montaña anterior)

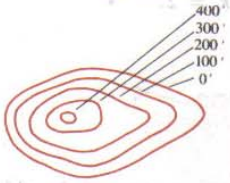


FIGURA 16.9
Profundidad del agua de un lago

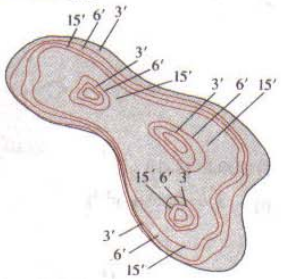


FIGURA 16.10
Isotermas

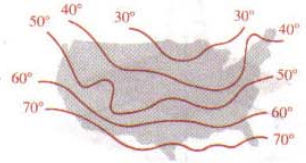
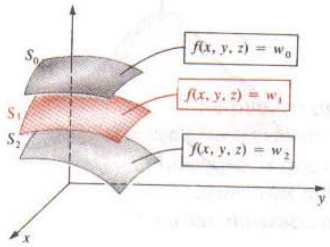


FIGURA 16.11
Curvas de nivel de $f(x, y, z)$



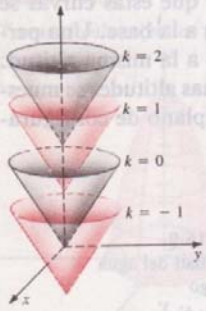
Para indicar la configuración del fondo de un l se emplean planos similares (**mapas hidrográficos**). En la Figura 16.9 se tiene un ejemplo; ahí $f(x, y)$ es la profundidad (en pies) bajo el punto (x, y). ¿Qué partes del lago tendrían que evitar los esquiadores?

En la Figura 16.10 aparece otro ejemplo de curvas de nivel en un **mapa meteorológico** o **climático** de Estados Unidos, en donde $f(x, y)$ denota la temperatura máxima (en grados Fahrenheit) en (x, y) durante cierto día. Las curvas de nivel son las **isotermas** y a lo largo de cada una la temperatura es constante. Se puede trazar un mapa meteorológico diferente en el que $f(x, y)$ represente la presión atmosférica en (x, y). En este caso, las curvas de nivel se llaman **isobaras**.

Si f es una función de tres variables x, y, z, entonces, por definición, las **superficies de nivel** de f son las gráficas de $f(x, y, z) = k$ para los diversos valores reales de k. Si se toman $k = w_0$, w_1 y w_2, las gráficas resultantes son las superficies respectivas S_0, S_1 y S_2, ilustradas en la Figura 16.11. Si un punto (x, y, z) se mueve sobre una de estas superficies, entonces $f(x, y, z)$ no cambia. Si $f(x, y, z)$ es la

temperatura en (x, y, z), entonces las superficies de nivel se llaman **superficies isotérmicas** y la temperatura es constante en cada una de ellas. Si $f(x, y, z)$ representa el potencial eléctrico, entonces las superficies de nivel son las **superficies equipotenciales** y mientras (x, y, z) permanezca en una de ellas, el potencial (o voltaje) no cambia.

FIGURA 16.12
Superficies de nivel $z - \sqrt{x^2 + y^2} = k$



EJEMPLO 4 Sea $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$. Esquematizar algunas de las superficies de nivel de f.

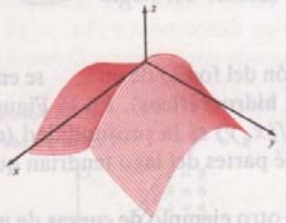
Solución Las superficies de nivel son las gráficas de

$$z - \sqrt{x^2 + y^2} = k \quad \text{o bien} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} + k$$

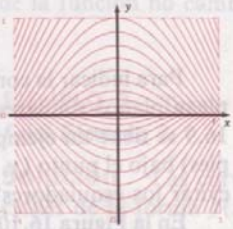
para cualquier número k. Para cada k se obtiene un cono circular recto con su eje a lo largo del eje z. En la Figura 16.12 están representados los casos $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$ y $k = 2$. •

FIGURA 16.13

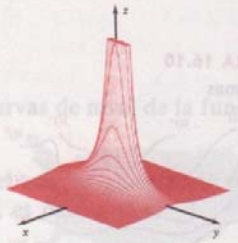
(i) $z = -(x^2 + y^{2/3})$



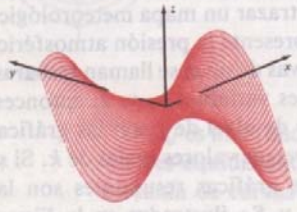
(ii) Curvas de nivel: $k = -(x^2 + y^{2/3})$



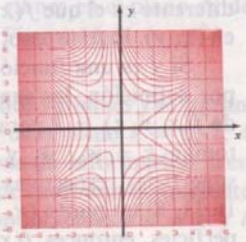
(iii) $z = \dfrac{1}{9x^2 + y^2}$



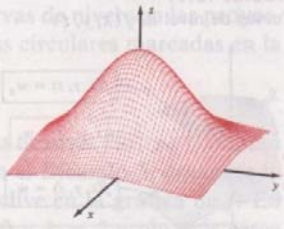
(iv) $z = x^3 - 2xy^2 - x^2 - y^2$



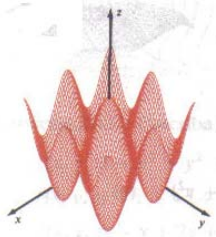
(v) Curvas de nivel: $k = x^3 - 2xy^2 - x^2 - y^2$



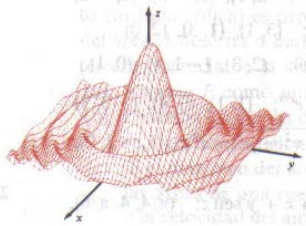
(vi) $z = 8e^{-(x^2+y^2)/4}$



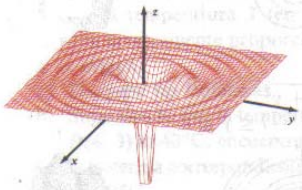
(vii) $z = \cos x + \cos y$



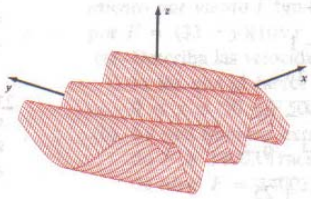
(viii) $z = \dfrac{\frac{1}{2}\cos(2x^2 + y^2)}{1 + 2x^2 + y^2}$



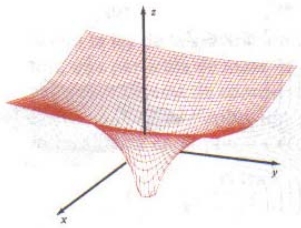
(ix) $z = \dfrac{1 - 2\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$



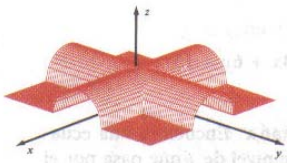
(x) $z = \cos x + 3\cos(3x + y)$



(xi) $z = \ln(2x^2 + y^2)$



(xii) $z = \begin{cases} \sqrt{1 - y^2} & \text{si } |x| \geq 1 \text{ y } |y| \leq 1, \text{ o bien} \\ & \text{si } |x| \leq 1 \text{ y } |y| \leq |x| \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } |y| \geq 1 \text{ y } |x| \leq 1, \text{ o bien} \\ & \text{si } |y| \leq 1 \text{ y } |x| \leq |y| \\ & \text{si } |x| \geq 1 \text{ y } |y| \geq 1 \\ 0 \end{cases}$



Se pueden usar las computadoras para representar gráficamente las curvas de nivel, las trazas de una superficie en varios planos y superficies en diversas perspectivas. Los croquis que se obtienen de esta manera se llaman *gráficas de computadora* o *gráficas generadas por computadora*. La Figura 16.13 y las de los Ejercicios 21-26 muestran varias ilustraciones obtenidas por medio de computadora.

EJERCICIOS 16.1

Ejercicios 1-6: Determine el dominio de f y el valor de f en los puntos indicados.

1. $f(x, y) = 2x - y^2$; $(-2, 5)$, $(5, -2)$, $(0, -2)$
2. $f(x, y) = (y + 2)/x$; $(3, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$
3. $f(u, v) = uv/(u - 2v)$; $(2, 3)$, $(-1, 4)$, $(0, 1)$
4. $f(r, s) = \sqrt{1 - r} - e^{r/s}$; $(1, 1)$, $(0, 4)$, $(-3, 3)$
5. $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$; $(1, -2, 2)$, $(-3, 0, 2)$
6. $f(x, y, z) = 2 + \tan x + y \operatorname{sen} z$; $(\pi/4, 4, \pi/6)$, $(0, 0, 0)$

Ejercicios 7-12: Describa la grafica de f.

7. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
8. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
9. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$
10. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - 4x^2 - 16}$
11. $f(x, y) = \sqrt{72 + 4x^2 - 9y^2}$
12. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 + 25}$

Ejercicios 13-18: Trace algunas de las curvas de nivel de f.

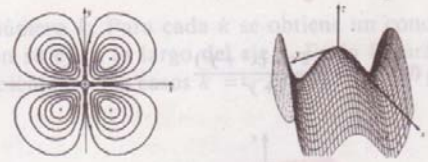
13. $f(x, y) = y^2 - x^2$
14. $f(x, y) = 3x - 2y$
15. $f(x, y) = x^2 - y$
16. $f(x, y) = xy$
17. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$
18. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$
19. Sea $f(x, y) = y \arctan x$. Encuentre una ecuación para la curva de nivel de f que pasa por el punto $P(1, 4)$.
20. Sea $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z^2$. Encuentre una ecuación para la superficie de nivel de f que pasa por el punto $P(2, -1, 3)$.

Ejercicios 21-26: Se da una función de dos variables con su correspondiente sistema de curvas de nivel. Identifique la gráfica por computadora en (a)-(f) que corresponde a cada función.

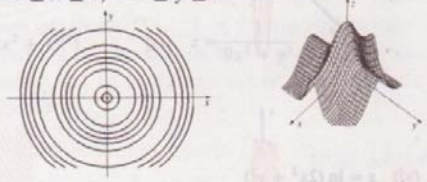
21. $z = (\operatorname{sen} xy)/xy$ (a)



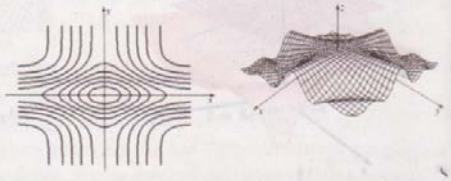
22. $z = 15x^2y^2e^{-x^2-y^2}/(x^2 + y^2)$ (b)



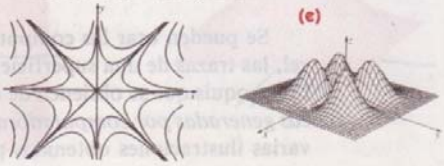
23. $z = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$, $-7 \le x \le 7$, $-7 \le y \le 7$ (c)



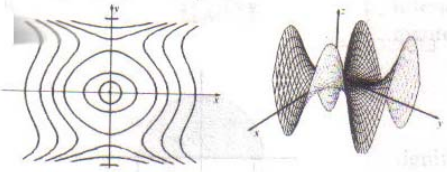
24. $z = e^{-x^2} + e^{-4y^2}$, $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$ (d)



25. $z = (xy^3 - x^3y)/2$, $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$ (e)



26. $z = y^4 - 8y^2 - 4x^2$, $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$ (f)



Ejercicios 27-32: Describa las superficies de nivel de f.

27. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

28. $f(x, y, z) = z + x^2 + 4y^2$

29. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$

30. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

31. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ **32.** $f(x, y, z) = z$

33. Una lámina de metal plana está situada en un plano xy y la temperatura T (en °C) en el punto (x, y) es inversamente proporcional a la distancia al origen.
(a) Describa las isotermas.
(b) Suponiendo que la temperatura en el punto $P(4, 3)$ es 40°C, encuentre una ecuación de la isoterma correspondiente a la temperatura de 20°C.

34. El voltaje V en un punto $P(x, y, z)$ está dado por $V = 6/(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}$.
(a) Describa las superficies equipotenciales.
(b) Encuentre una ecuación para la superficie equipotencial $V = 120$.

35. Según la ley de la gravitación universal de Newton, una partícula de masa M que está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares ejerce una fuerza F sobre una partícula de masa m localizada en el punto (x, y, z), dada por

$$F = \frac{GMm}{x^2 + y^2 + z^2}$$

donde G es la constante de la gravitación. ¿Cuántas variables independientes hay en esta expresión? Tomando M y m como constantes, describa las superficies de nivel de la función resultante de x, y, z. ¿Cuál es el significado físico de estas superficies de nivel?

36. Según la *ley de los gases ideales*, la presión P, el volumen V y la temperatura T de un gas encerrado están relacionadas por la fórmula $PV = kT$, donde k es una constante. Exprese P como *una función de V y T, y describa las curvas de* nivel de esta función. ¿Cuál es el significado físico de estas curvas?

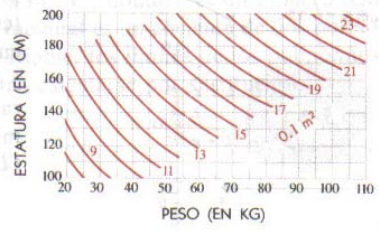
37. La potencia P producida por una rueda de viento (turbina eólica) es proporcional al producto del área A descrita o barrida por las aspas, y la tercera potencia de la velocidad del viento v.
(a) Exprese P como una función de A y v.
(b) Describa las curvas de nivel de P y explique su significado físico.
(c) Si el diámetro del área circular barrida por las aspas de una rueda de viento es de 3 m y la velocidad del aire es 30 km/h, entonces $P = 3000$ W (watts). Obtenga una ecuación para la curva de nivel $P = 4000$.

38. Si x es la velocidad del viento (en m/s) y y es la temperatura (en °C), entonces el *factor de enfriamiento por viento* F (en kcal/m² · h) está dado por $F = (33 - y)(10\sqrt{x} - x + 10.5)$.
(a) Describa las velocidades y temperaturas para las que el factor F es 0. (Suponga que $0 \le x \le 50$ y $-50 \le y \le 50$.)
(b) La piel humana expuesta se congela cuando $F \ge 1400$. Trace la gráfica de la curva de nivel $F = 1400$.

39. En la figura se muestran curvas de nivel del área de la superficie del cuerpo humano (en m²) en función del peso x (en kg), y la estatura y (en cm). Utilice este sistema de curvas de nivel para calcular aproximadamente el área de la superficie de su propio cuerpo. Compare este cálculo con uno más preciso que se obtiene usando la fórmula de Dubois y Dubois

$$S = 0.007184x^{0.425}y^{0.725}$$

EJERCICIO 39



40. La frontera superior de la región semicircular que se muestra en la figura se mantiene a una temperatura 10°C, y la frontera inferior, a 0°C. A la

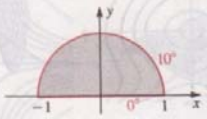
larga, cuando se alcance el *estado estacionario*, la temperatura T en un punto (x, y) de la región está dada por

$$T(x, y) = \frac{20}{\pi} \tan^{-1}\left[\frac{2y}{1 - x^2 - y^2}\right]$$

Demuestre que las isotermas son arcos de circunferencia que tienen su centro en la parte positiva del eje y y pasan por los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Trace la isoterma correspondiente a la temperatura de 5°C.

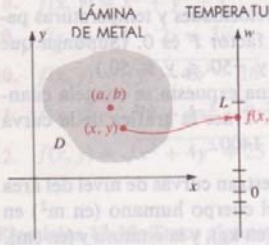
EJERCICIO 40



16.2 LÍMITES Y CONTINUIDAD

Sea f una función de dos variables y consideremos $f(x, y)$ cuando (x, y) varía dentro del dominio D de f. Como un ejemplo físico, supongamos que una lámina de metal plana tiene la forma de la región D en la Figura 16.14. A cada punto (x, y) de la lámina le corresponde una temperatura $f(x, y)$ que se mide con un termómetro y se representa en el eje w. Cuando el punto (x, y) se mueve dentro de la lámina, la temperatura aumenta, disminuye o permanece constante y por lo tanto, el punto en el eje w correspondiente a $f(x, y)$, se mueve en la dirección positiva, en la dirección negativa o permanece quieto, según el caso. Si la temperatura $f(x, y)$ se acerca a un valor fijo L cuando (x, y) se aproxima cada vez más a un punto fijo (a, b), entonces esto se denota como sigue.

FIGURA 16.14



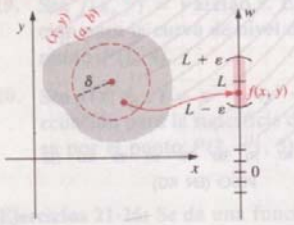
NOTACIÓN DE LÍMITE (16.2)

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L.$$

Esto puede leerse: **el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b) es L.**

Para definir (16.2) de manera matemáticamente precisa, procedemos como sigue. Para todo $\varepsilon > 0$, considérese el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ en el eje w, como se ilustra en la Figura 16.15. Si (16.2) se satisface, entonces existe un $\delta > 0$ tal que para todo punto (x, y) dentro del círculo de radio δ con centro (a, b), excepto posiblemente en (a, b) mismo, el valor de la función $f(x, y)$ está en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Esto equivale al siguiente enunciado:

FIGURA 16.15



$$\text{Si } 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta,$$

$$\text{entonces } |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente.

DEFINICIÓN DE LÍMITE 16.3)

Sea f una función de dos variables definida en todo el interior de un círculo con centro (a, b), excepto posiblemente en (a, b) mismo. El enunciado

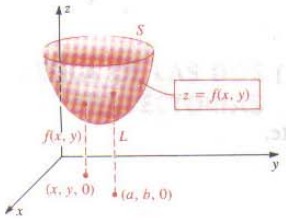
$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta,$$

$$\text{entonces} \quad |f(x, y) - L < \varepsilon.$$

FIGURA 16.16



Si se considera la gráfica de f ilustrada en la Figura 16.16, entonces (intuitivamente) la Definición (16.3) significa que cuando el punto $(x, y, 0)$ tiende a $(a, b, 0)$ en el plano x, y, el punto correspondiente $(x, y, f(x, y))$ en la gráfica S de f tiende a (a, b, L) (que puede estar o no en S). Es posible demostrar que *si el límite L existe, entonces es único.*

Si f y g son funciones de dos variables, entonces $f + g$, $f - g$, fg y f/g se definen de la manera acostumbrada y puede generalizarse a este caso el Teorema (2.15), referente a sumas, productos y cocientes de límites. Por ejemplo, si f y g tienen límite cuando (x, y) tiende a (a, b), entonces

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} [f(x, y) + g(x, y)] = \lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) + \lim_{(x, y)\to(a, b)} g(x, y),$$

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim\limits_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)}{\lim\limits_{(x, y)\to(a, b)} g(x, y)} \quad \text{si} \lim_{(x, y)\to(a, b)} g(x, y) \neq 0,$$

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} \sqrt{f(x, y)} = \sqrt{\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)} \quad \text{si} \lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) > 0,$$

etcétera.

Una función f de dos variables es una **función polinomio** si $f(x, y)$ se puede expresar como una suma de términos de la forma $cx^m y^n$, donde c es un número real, y m y n son enteros no negativos. Una **función racional** es un cociente de dos polinomios. Como en el caso de las funciones de una variable, los límites de los polinomios y las funciones racionales de dos variables pueden calcularse por sustitución.

EJEMPLO 1 Evaluar

(a) $\lim\limits_{(x, y)\to(2, -3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7)$

(b) $\lim\limits_{(x, y)\to(3, 4)} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Solución

(a) Como $x^3 - 4xy^2 + 5y - 7$ es un polinomio, podemos calcular el límite sustituyendo x por 2 y y por -3. Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(2,-3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7) = 2^3 - 4(2)(-3)^2 + 5(-3) - 7$$
$$= 8 - 72 - 15 - 7 = -86$$

(b) Es posible proceder como sigue:

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\lim_{(x,y)\to(3,4)} (x^2 - y^2)}{\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{9 - 16}{\sqrt{\lim_{(x,y)\to(3,4)} (x^2 + y^2)}}$$
$$= \frac{-7}{\sqrt{9 + 16}} = -\frac{7}{5}$$

EJEMPLO 2 Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

Solución

Sea $$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

La función f es racional; sin embargo, no se pueden sustituir x y y por 0 porque eso daría un denominador nulo.

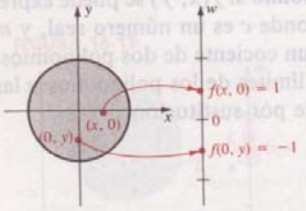
Sea $(x, 0)$ cualquier punto en el eje x. Entonces,

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1 \quad \text{siempre que } x \neq 0.$$

Para cualquier punto $(0, y)$ en el eje y,

$$f(0, y) = \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1 \quad \text{siempre que } y \neq 0.$$

FIGURA 16.17



Por lo tanto, *todo* círculo con centro $(0, 0)$ contiene puntos en los que el valor de f es 1 y puntos en los que el valor de f es -1, como se ilustra en la Figura 16.17. Se deduce que el límite no existe porque si se toma $\varepsilon = 1$ en la Definición (16.3) no hay ningún intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ en el eje w que contenga a 1 y a -1. Por lo tanto, es imposible hallar ningún $\delta > 0$ que satisfaga las condiciones de la definición. •

La Figura 16.18 muestra una gráfica de f generada por computadora. Obsérvese que para $x \neq 0$ y $y \neq 0$ la gráfica contiene todos los puntos $(x, 0, 1)$ y $(0, y, -1)$, como se observó anteriormente. Puede demostrarse que toda la gráfica se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$.

FIGURA 16.18



En el Capítulo 2 se demostró que $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe para una función con una discontinuidad de salto en $x = a$, probando que $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ no son iguales. Cuando se consideran tales límites unilaterales, se piensa que el punto sobre el eje x con coordenada x tiende al punto con coordenada a por la izquierda o por la derecha. La situación análoga para las funciones de dos variables es más complicada porque en un plano coordenado hay una infinidad de curvas diferentes o **trayectorias** a lo largo de las cuales (x, y) puede acercarse a (a, b). Si el límite en la Definición (16.3) existe, entonces $f(x, y)$ tiende al límite L independientemente de la trayectoria escogida. Esto ilustra la siguiente regla para analizar los límites.

REGLA DE LAS DOS TRAYECTORIAS (16.4)

Si dos trayectorias que llevan a un punto $P(a, b)$ producen dos valores límites diferentes para f, entonces

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$$

no existe.

A continuación se resuelve el Ejemplo 2 usando (16.4).

EJEMPLO 3 Demostrar que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

Solución Si (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo del eje x, entonces la coordenada y siempre es cero y la expresión $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ se reduce a x^2/x^2 o a 1. Entonces, el valor límite a lo largo de esta trayectoria es 1.

Si (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo del eje y, entonces la coordenada x es cero y $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ se reduce a $-y^2/y^2$ o a -1. Como se obtienen dos valores diferentes, por la Regla de las Dos Trayectorias (16.4), el límite no existe.

Por supuesto, pueden escogerse otras trayectorias que llegan al origen. Por ejemplo, si (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = 2x$, entonces

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - 4x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5}$$

y por lo tanto, el límite a lo largo de la recta $y = 2x$ es $-\frac{3}{5}$.

Para dar una solución alternativa, podemos cambiar la expresión en x y y a coordenadas polares como sigue:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2} = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos 2\theta.$$

Cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier rayo $\theta = k$, el valor de la función es

Si (a, b) es un punto en la frontera, se usa la Definición (16.3) *con la restricción adicional de que (x, y) debe estar tanto en el círculo de radio δ como en R.* Los teoremas sobre límites pueden entonces generalizarse para puntos en la frontera.

Una función f de dos variables es **continua** en un punto interior (a, b) de la región R si $f(a, b)$ existe, $f(x, y)$ tiene un límite cuando (x, y) tiende a (a, b) y

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Este concepto se puede generalizar para puntos (a, b) en la frontera de R aplicando las restricciones mencionadas para los límites en puntos de la frontera. Si R está contenida en el dominio D de f, entonces f es **continua en R** si es continua en todo par (a, b) de R. Si f es continua en R, entonces un cambio pequeño en (x, y) produce un cambio pequeño en $f(x, y)$. Haciendo referencia a la gráfica S de f (véase la Figura 16.16), si (x, y) está cerca de (a, b), el punto $(x, y, f(x, y))$ en S está cerca de $(a, b, f(a, b))$. Por lo tanto, en la gráfica de una función continua de dos variables no hay hoyos ni saltos verticales.

Se pueden demostrar teoremas sobre la continuidad de las funciones de dos variables que son análogos a los de las funciones de una variable. En particular, los polinomios son funciones continuas en todas partes y las funciones racionales son continuas excepto en los puntos donde el denominador es cero.

La discusión anterior sobre límites y continuidad puede generalizarse al caso de funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si f es una función de tres variables, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN (16.5)

Sea f una función de tres variables definida en el interior de una esfera con centro (a, b, c), excepto posiblemente en (a, b, c) mismo. El enunciado

$$\lim_{(x, y, z)\to(a, b, c)} f(x, y, z) = L$$

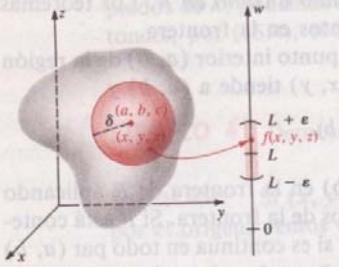
significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta,$$

entonces $$|f(x, y, z) - L| < \varepsilon.$$

Se puede dar una interpretación gráfica de la Definición (16.5) parecida a la que se ilustró en la Figura 16.14. La diferencia es que en tres dimensiones en vez de un *círculo* en el plano xy se usa una *esfera* de radio δ con centro en el punto (a, b, c). Específicamente, para cualquier $\varepsilon > 0$, se considera el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ en el eje w, como en la Figura 16.20. Si (16.5) se cumple, entonces existe un $\delta > 0$ tal que para todo punto (x, y, z) en la esfera de radio δ con centro en (a, b, c), excepto posiblemente para (a, b, c) mismo, el valor de la función $f(x, y, z)$ está en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

FIGURA 16.20



La definición de límite (16.5) puede generalizarse al caso de un punto (a, b, c) en la frontera de una región R, agregando la restricción de que (x, y, z) esté tanto dentro de la esfera de radio δ como en R.

Una función f de tres variables es **continua** en un punto interior (a, b, c) de una región si $f(a, b, c)$ existe, $f(x, y, z)$ tiene un límite cuando (x, y, z) tiende a (a, b, c) y

$$\lim_{(x, y, z)\to(a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c).$$

La continuidad en un punto de la frontera se define usando la generalización de la Definición (16.5) para puntos en la frontera.

Puede generalizarse la definición de límite de una función a cuatro o más variables, pero en esos casos no se dan interpretaciones geométricas.

En la Sección 16.5 se estudiará la composición de funciones de varias variables. Como un ejemplo sencillo, si f es una función de dos variables x y y, y g es una función de una variable t, entonces sus valores se denotan por $f(x, y)$ y $g(t)$ y se puede obtener una función h de dos variables sustituyendo t por $f(x, y)$; es decir, definiendo $h(x, y) = g(f(x, y))$ siempre y cuando el contradominio de f esté contenido en el dominio de g. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Expresar $g(f(x, y))$ en términos de x y y, y encontrar el dominio de la función compuesta resultante.

(a) $f(x, y) = xe^y$, $g(t) = 3t^2 + t + 1$

(b) $f(x, y) = y - 4x^2$, $g(t) = \operatorname{sen}\sqrt{t}$

Solución En cada caso sustituimos t por $f(x, y)$. Así:

(a) $g(f(x, y)) = g(xe^y) = 3x^2e^{2y} + xe^y + 1$

(b) $g(f(x, y)) = g(y - 4x^2) = \operatorname{sen}\sqrt{y - 4x^2}$

El dominio en la parte (a) es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y en la parte (b) consta de todos los pares ordenados (x, y) tales que $y \geq 4x^2$. •

Para funciones del tipo ilustrado en el Ejemplo 5, se puede demostrar el siguiente resultado que es análogo al Teorema (2.27).

TEOREMA (16.6) Si una función f de dos variables es continua en (a, b) y una función g de una variable es continua en $f(a, b)$, entonces la función h definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es continua en (a, b).

El Teorema (16.6) ayuda a verificar la continuidad de la composición de funciones de varias variables, como el siguiente ejemplo lo ilustra.

EJEMPLO 6 Sea $h(x, y) = e^{x^2+5xy+y^3}$. Demostrar que h es continua en todo par (a, b).

Solución Si definimos $f(x, y) = x^2 + 5xy + y^3$ y $g(t) = e^t$, resulta que $h(x, y) = g(f(x, y))$. Como f es un polinomio, es una función continua en todo par (a, b). Además g es continua para todo $t = f(a, b)$. Por lo tanto, según el Teorema (16.6), h es continua en (a, b). •

EJERCICIOS 16.2

Ejercicios 1-10: Calcular el límite si existe.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - 2}{3 + xy}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - 2xy + 5y^2}{3x^2 + 4y^2}$
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ (*Sugerencia:* Use coordenadas polares.)
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$
7. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{5x^4 + 2y^4}$
9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3 - 2x^2y + 3y^2x - 2y^3}{x^2 + y^2}$
10. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz + xz}{x^2 + y^2 + z^2}$

Ejercicios 11-16: Ejecute el análisis de la continuidad de la función f.

11. $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$
12. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$
13. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$
14. $f(x, y, z) = \sqrt{xy}\tan z$
15. $f(x, y) = \sqrt{x}e^{\sqrt{1-y^2}}$
16. $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$
17. En la figura se ilustra una gráfica generada por computadora de

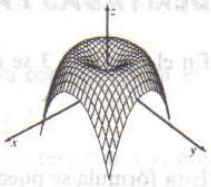
$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\ln(x^2 + y^2)}.$$

Si se define $f(0, 0)$ como 0, entonces parece que f es continua en (0, 0). Investigue

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

usando coordenadas polares.

EJERCICIO 17

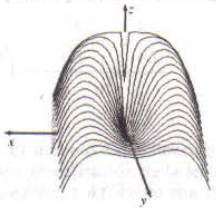


18. En la figura se muestra una gráfica generada por computadora de

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(2x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

para $-0.8 \le x \le 0.8$ y $-0.8 \le y \le 0.8$. Parece haber una "grieta" en la gráfica justo arriba del origen. Analice $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ estudiando los límites a lo largo de rayos $\theta = \theta_0$. (*Sugerencia:* Use la Regla de L'Hôpital.)

EJERCICIO 18



Ejercicios 19-22: Encuentre $h(x, y) = g(f(x, y))$ y use el Teorema (16.6) para determinar en dónde es continua h.

19. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $g(t) = (t^2 - 4)/t$

20. $f(x, y) = 3x + 2y - 4$, $g(t) = \ln(t + 5)$

21. $f(x, y) = x + \tan y$, $g(z) = z^2 + 1$

22. $f(x, y) = y \ln x$, $g(w) = e^w$

23. Sean $f(x, y) = x^2 + 2y$, $g(t) = e^t$ y $h(t) = t^2 - 3t$. Encuentre $g(f(x, y))$, $h(f(x, y))$ y $f(g(t), h(t))$.

24. Sean $f(x, y, z) = 2x + ye^z$ y $g(t) = t^2$. Encuentre $g(f(x, y, z))$.

25. Sean $f(u, v) = uv - 3u + v$, $g(x, y) = x - 2y$ y $k(x, y) = 2x + y$. Encuentre $f(g(x, y), k(x, y))$.

26. Sea $f(x, y) = 2x + y$. Encuentre $f(f(x, y), f(x, y))$.

27. Generalice la Definición (16.3) a las funciones de cuatro variables.

28. Demuestre que si f es una función continua de dos variables y $f(a, b) > 0$, entonces existe un círculo C en el plano xy con centro (a, b) tal que $f(x, y) > 0$ para todo par (x, y) que esté en el dominio de f y en C.

29. Demuestre, directamente a partir de la Definición (16.3), que

(a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a.$

(b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b.$

30. Demuestre, directamente a partir de la Definición (16.3), que si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ y c es un número real arbitrario, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x, y) = cL.$$

16.3 DERIVADAS PARCIALES

En el Capítulo 3 se definió la derivada $f'(x)$ de una función de *una* variable como

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Esta fórmula se puede interpretar como sigue: Primero se incrementa la variable independiente x en una cantidad h, luego se divide entre h el incremento correspondiente $f(x + h) - f(x)$ de f, y finalmente, se hace tender h a 0. Para las funciones de varias variables se puede aplicar un procedimiento análogo. Así, dada $f(x, y)$, primero se incrementa *una* de las variables, digamos x, en una cantidad h, luego se divide entre h el incremento correspondiente $f(x + h, y) - f(x, y)$ de f, y finalmente, se hace tender h a 0. Esto lleva al concepto de la *derivada parcial* $f_x(x, y)$ *de* f *con respecto a* x, que se define en (16.7). Para la variable y se sigue un procedimiento similar.

DEFINICIÓN (16.7)

Sea f una función de dos variables. Las **primeras derivadas parciales de f con respecto a x y a y** son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

En la Definición (16.7), x y y son fijas (pero arbitrarias) y h es la única variable. Por este motivo se usa la notación para límites de funciones de una variable en lugar de la notación "$(x, y) \to (a, b)$" que se presentó en la sección anterior. Si se toma $y = b$ y se define una función g de una variable por $g(x) = f(x, b)$, entonces $g'(x) = f_x(x, b) = f_x(x, y)$. Así, *para determinar $f_x(x, y)$ se considera y como una constante y se deriva $f(x, y)$ con respecto a x.* Análogamente, *para determinar $f_y(x, y)$ la variable x se considera como una constante y $f(x, y)$ se deriva con respecto a y.* Este método se ilustra en el Ejemplo 1.

En el siguiente recuadro se presentan notaciones comunes para las derivadas parciales.

NOTACIONES PARA LAS DERIVADAS PARCIALES (16.8)

Si $w = f(x, y)$, entonces

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x} = w_x$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} = w_y.$$

Por brevedad, se menciona a $\partial f/\partial x$ o $\partial f/\partial y$ simplemente como *parcial de f respecto a x*, o bien *respecto a y*, respectivamente.*

EJEMPLO 1 Sea $f(x, y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$.

(a) Encontrar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$. (b) Calcular $f_x(2, -1)$ y $f_y(2, -1)$.

Solución

(a) Consideramos a y como una constante y se deriva con respecto a x:

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy + 3$$

Considerando a x como una constante y derivando con respecto a y, obtenemos

$$f_y(x, y) = 2x^3y - 2x^2$$

(b) Sustituyendo $x = 2$ y $y = -1$ en las expresiones de la parte (a),

$$f_x(2, -1) = 3(2)^2(-1)^2 - 4(2)(-1) + 3 = 23$$

$$f_y(2, -1) = 2(2)^3(-1) - 2(2)^2 = -24$$

Hay fórmulas para las derivadas parciales parecidas a las de las funciones de una variable. Por ejemplo, si $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, entonces la Regla del Producto y la Regla del Cociente para las derivadas parciales son

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

* **(N. de R.)** El símbolo $\partial/\partial x$ o $\partial/\partial y$ es sólo operacional. El símbolo ∂ que interviene análogamente a la d en la notación de Leibnitz se llama "d de Jacobi" y es una modificación de la letra d aplicada por este matemático para denotar la derivada parcial. Desde luego, $\partial f/\partial x$ o $\partial f/\partial y$ no son cocientes.

o, con la notación de subíndices,

$$(fg)_x = fg_x + gf_x \quad \text{y} \quad \left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{gf_x - fg_x}{g^2}.$$

La Regla de la Potencia para las derivadas parciales es

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^n) = nu^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}$$

donde n es cualquier número real. De manera parecida,

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos u = -\operatorname{sen} u\,\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}e^u = e^u\frac{\partial u}{\partial x},$$

etcétera.

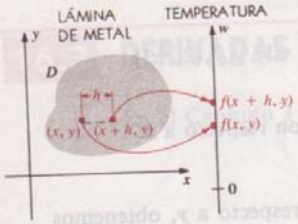
EJEMPLO 2 Obtener —— para $w = xy^2e^{xy}$.

Solución Se escribe $w = (xy^2)(e^{xy})$ y se deriva:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) + (e^{xy})\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)$$

$$= xy^2(xe^{xy}) + e^{xy}(2xy) = (xy + 2)xye^{xy}$$ •

FIGURA 16.21

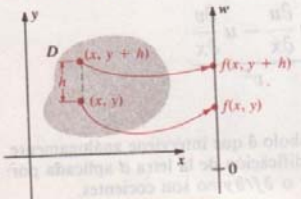


A continuación se aplica la Definición (16.7) al ejemplo físico que se dio al principio de la sección anterior: $f(x, y)$ es la temperatura en el punto (x, y) de una lámina de metal plana que se encuentra en un plano xy. Nótese que los puntos (x, y) y $(x + h, y)$ están en una recta horizontal, como se indica en la Figura 16.21. Si un punto se mueve horizontalmente desde (x, y) hasta $(x + h, y)$, entonces la diferencia $f(x + h, y) - f(x, y)$ es el cambio neto de la temperatura y se tiene

$$\text{Variación media de la temperatura:} \quad \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Por ejemplo, si la temperatura varía en 2 grados y la distancia h es 4, entonces el cambio medio de la temperatura desde (x, y) hasta $(x + h, y)$ es , o sea . Así, *en promedio*, la temperatura varía a razón de grado por unidad de cambio en la distancia. Tomando el límite de la variación media cuando h tiende a 0, se ve que $f_x(x, y)$ es la razón o tasa de cambio (instantánea) de la temperatura con respecto a la distancia cuando el punto (x, y) se mueve en la dirección horizontal.

FIGURA 16.22



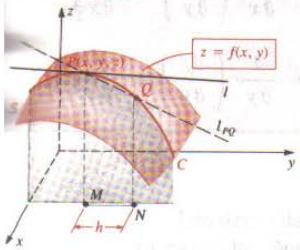
Análogamente, si un punto se mueve sobre una recta vertical desde (x, y) hasta $(x, y + h)$, como se muestra en la Figura 16.22, se obtiene

$$\text{Variación media de la temperatura:} \quad \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Haciendo tender h a 0, se ve que $f_y(x, y)$ es la tasa de cambio (instantánea) de la temperatura cuando el punto (x, y) se mueve en la dirección vertical.

Como otra aplicación, supongamos que D representa la superficie de un lago y que $f(x, y)$ es la profundidad del agua bajo el punto (x, y) en la superficie. En este caso, $f_x(x, y)$ es la tasa o intensidad con la que varía la profundidad cuando un punto se aleja de (x, y) paralelamente al eje x. Análogamente, $f_y(x, y)$ es la tasa de variación de la profundidad en la dirección del eje y.

FIGURA 16.23



Consideremos ahora una interpretación geométrica de la Definición (16.7) en términos de la gráfica S de f. Para ilustrar $f_y(x, y)$, consideremos los puntos $M(x, y, 0)$ y $N(x, y + h, 0)$. El plano paralelo al plano yz que pasa por M y N corta a S según la curva C (véase la Figura 16.23). Sean P y Q los puntos de C que tienen proyecciones M y N en el plano xy.

Si se introduce un sistema de coordenadas rectangulares en el plano que contiene a M, N, P y Q, entonces la pendiente m_{PQ} de la recta secante l_{PQ} entre P y Q es

$$m_{PQ} = \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

El límite de m_{PQ} cuando h tiende a 0, es decir, la derivada parcial $f_y(x, y)$, es la pendiente de la recta tangente l a C en P.

Análogamente, si C' es la traza de S en un plano paralelo al plano xz que pasa por M, entonces $f_x(x, y)$ es la pendiente de la recta tangente a C' en P.

Las primeras derivadas parciales de las funciones de tres o más variables se definen de manera parecida a (16.7). Concretamente, todas las variables menos una se consideran constantes y se deriva con respecto a la otra variable. Dada $f(x, y, z)$, se pueden encontrar f_x, f_y y f_z (o equivalentemente, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$). Por ejemplo,

$$f_z(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h}.$$

Como una aplicación, sea $f(x, y, z)$ la temperatura en el punto $P(x, y, z)$. La derivada parcial $f_z(x, y, z)$ es la tasa de variación de la temperatura con respecto a la distancia a lo largo de una recta que pasa por P y es paralela al eje z. Las derivadas parciales $f_x(x, y, z)$ y $f_y(x, y, z)$ son las tasas de variación en la dirección del eje x y la del eje y, respectivamente.

EJEMPLO 3 Sea $w = x^2y^3 \operatorname{sen} z + e^{xz}$. Encontrar $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ y $\partial w/\partial z$.

Solución Procedemos como sigue:

Considerando x y z como constantes: $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3 \operatorname{sen} z + ze^{xz}$

Considerando y y z como constantes: $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2 \operatorname{sen} z$

Considerando x y y como constantes: $\dfrac{\partial w}{\partial z} = x^2y^3 \cos z + xe^{xz}$ •

Si f es una función de dos variables x y y, entonces f_x y f_y son también funciones de dos variables y se pueden considerar *sus* primeras derivadas parciales. Éstas son las **segundas derivadas parciales** de f y se denotan como sigue.

SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES (16.9)

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x = (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x = (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_y = (f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_y = (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Si $w = f(x, y)$, se escribe

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_{xx},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f(x, y) = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} = w_{xy},$$

etcétera.

Nótese que f_{xy} significa que primero se deriva con respecto a x y luego con respecto a y, y que f_{yx} significa que se deriva primero con respecto a y y después con respecto a x. Cuando se usa la notación "∂", el orden es al revés, es decir, para encontrar $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$ se deriva primero con respecto a y y después con respecto a x.

f_{xy} y f_{yx} se llaman **segundas derivadas parciales mixtas** (o **cruzadas**) **de** f (o simplemente, *parciales mixtas de* f). El siguiente teorema afirma que, en condiciones adecuadas, las parciales cruzadas son iguales, es decir, el orden de derivación no altera el resultado. La demostración se puede consultar en libros de Cálculo avanzado.

TEOREMA (16.10)

Sea f una función de dos variables x y y. Si f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en una región abierta R, entonces $f_{xy} = f_{yx}$ en R.

La mayoría de las funciones que aparecen en el Cálculo y sus aplicaciones satisfacen la hipótesis del Teorema (16.10). Análogamente, si $w = f(x, y, z)$ y f tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces las parciales mixtas o cruzadas satisfacen las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}; \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}; \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}.$$

EJEMPLO 4 Obtener las segundas derivadas parciales de f para

$$f(x, y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x.$$

Solución Estudiamos esta función en el Ejemplo 1 y obtuvimos

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy + 3 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 2x^3y - 2x^2.$$

Por lo tanto,

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4xy + 3) = 6xy^2 - 4y$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4xy + 3) = 6x^2y - 4x$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y - 2x^2) = 6x^2y - 4x$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y - 2x^2) = 2x^3$$

Las derivadas parciales de tercer orden y de órdenes superiores se definen de manera parecida. Por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{xx} = f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{xy} = f_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x},$$

etcétera. Si la primera, la segunda y la tercera derivadas parciales son continuas, entonces el orden de derivación no afecta el resultado de las segundas derivadas, es decir,

$$f_{xyx} = f_{yxx} = f_{xxy} \quad \text{y} \quad f_{yxy} = f_{xyy} = f_{yyx}.$$

Por supuesto, se pueden usar letras diferentes de x y y para las variables independientes. Si f es una función de r y s, entonces

$$f_r(r, s), \quad f_s(r, s), \quad f_{rs}, \quad \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

son los símbolos de las derivadas parciales.

Para las parciales de funciones de más de dos variables se usan notaciones semejantes y se tienen resultados análogos.

EJERCICIOS 16.3

Ejercicios 1-18: Obtenga las primeras derivadas parciales de f.

1. $f(x, y) = 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$
2. $f(x, y) = (x^3 - y^2)^2$
3. $f(r, s) = \sqrt{r^2 + s^2}$
4. $f(s, t) = (t/s) - (s/t)$
5. $f(x, y) = xe^y + y \operatorname{sen} x$
6. $f(x, y) = e^x \ln xy$
7. $f(t, v) = \ln \sqrt{(t + v)/(t - v)}$
8. $f(u, w) = \arctan(u/w)$

9. $f(x, y) = x \cos(x/y)$

10. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 - y^2} \sec x$

11. $f(r, s, t) = r^2 e^{2s} \cos t$

12. $f(x, y, t) = (x^2 - t^2)/(1 + \operatorname{sen} 3y)$

13. $f(x, y, z) = (y^2 + z^2)^x$

14. $f(r, s, v) = (2r + 3s)^{\cos v}$

15. $f(x, y, z) = xe^z - ye^x + ze^{-y}$

16. $f(r, s, v, p) = r^3 \tan s + \sqrt{se^{v^2}} - \tilde{v} \cos 2p$

17. $f(q, v, w) = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{qv} + \operatorname{sen} vw$

18. $f(x, y, z) = xyze^{xyz}$

Ejercicios 19-24: Verifique que $w_{xy} = w_{yx}$.

19. $w = xy^4 - 2x^2y^3 + 4x^2 - 3y$

20. $w = x^2/(x + y)$

21. $w = x^3e^{-2y} + y^{-2} \cos x$

22. $w = y^2e^{x^2} + [1/(x^2y^3)]$

23. $w = x^2 \cosh(z/y)$

24. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

25. Sea $w = 3x^2y^3z + 2xy^4z^2 - yz$. Halle w_{xyz}.

26. Sea $w = u^4vt^2 - 3uv^2t^3$. Halle w_{tut}.

27. Sea $u = v \sec rt$. Halle u_{rvr}.

28. Sea $v = y \ln(x^2 + z^4)$. Obtenga v_{zzy}.

29. Sea $w = \operatorname{sen} xyz$. Obtenga $\partial^3 w/\partial z\, \partial y\, \partial x$.

30. Sea $w = x^2/(y^2 + z^2)$. Encuentre $\partial^3 w/\partial z\, \partial y^2$.

31. Sea $w = r^4s^3t - 3s^2e^{rt}$. Verifique que $w_{rrs} = w_{rsr} = w_{srr}$.

32. Sea $w = \tan uv + 2 \ln(u + v)$. Verifique que $w_{uvv} = w_{vuv} = w_{vvu}$.

Ejercicios 33-36: Una función f de x y y se llama *armónica* si $(\partial^2 f/\partial x^2) + (\partial^2 f/\partial y^2) = 0$ en todo el dominio de f. Demuestre que la función dada es armónica.

33. $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

34. $f(x, y) = \arctan(y/x)$

35. $f(x, y) = \cos x \operatorname{senh} y + \operatorname{sen} x \cosh y$

36. $f(x, y) = e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x$

37. Sea $w = \cos(x - y) + \ln(x + y)$. Demuestre que $(\partial^2 w/\partial x^2) - (\partial^2 w/\partial y^2) = 0$.

38. Sea $w = (y - 2x)^3 - \sqrt{y - 2x}$. Demuestre que $w_{xx} - 4w_{yy} = 0$.

39. Sea $w = e^{-c^2t} \operatorname{sen} cx$. Demuestre que $w_{xx} = w_t$ para todo número real c.

40. La ley de los gases ideales se puede enunciar como $PV = knT$, donde n es el número de moles del gas, V el volumen, T la temperatura, P la presión y k una constante. Demuestre que

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

Ejercicios 41-42: Demuestre que v satisface la *ecuación de onda*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

41. $v = (\operatorname{sen} akt)(\operatorname{sen} kx)$

42. $v = (x - at)^4 + \cos(x + at)$

Ejercicios 43-46: Demuestre que las funciones u y v satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$.

43. $u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$

44. $u(x, y) = y/(x^2 + y^2), \quad v(x, y) = x/(x^2 + y^2)$

45. $u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

46. $u(x, y) = \cos x \cosh y + \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$
$v(x, y) = \cos x \cosh y - \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

47. Escriba todas las segundas derivadas parciales de $w = f(x, y, z)$.

48. Sea $w = f(x, y, z, t, v)$. Defina w_t como un límite.

49. Una lámina de metal plana se encuentra en una plano xy y la temperatura T en (x, y) está dada por $T = 10(x^2 + y^2)^2$, donde T se mide en grados y x y y en centímetros. Calcule la tasa de cambio o variación de T con respecto a la distancia en el punto (1, 2) en la dirección (a) del eje x; (b) del eje y.

50. La superficie de un lago se representa mediante una región D en el plano xy de manera que la profundidad en (x, y) está dada por $f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$, donde x, y y $f(x, y)$ se miden en metros. Una joven está en el agua en el punto (4,9). Calcule la tasa o intensidad con la que

cambia la profundidad bajo esa joven cuando nada en la dirección (a) del eje x; (b) del eje y.

51. El potencial eléctrico V en un punto (x, y, z) está dado por $V = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$, donde V se mide en volts y x, y, z en centímetros. Calcule la razón de cambio de V con respecto a la distancia en el punto $P(2, -1, 1)$ en la dirección (a) del eje x; (b) del eje y; (c) del eje z.

52. Un objeto se encuentra en un sistema de coordenadas rectangulares y la temperatura T en el punto $P(x, y, z)$ está dada por $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$, donde T se mide en grados y x, y, z en centímetros. Calcule la razón de cambio de T con respecto a la distancia en el punto $P(4, -2, 1)$ en la dirección (a) del eje x; (b) del eje y; (c) del eje z.

53. Cuando una chimenea de h metros de altura arroja humo que contiene un contaminante, como el óxido nítrico, a la larga, la concentración $C(x, z)$ (en $\mu g/m^3$) del contaminante en un punto a x kilómetros de la chimenea y a z metros de altura (véase la figura) se puede representar por

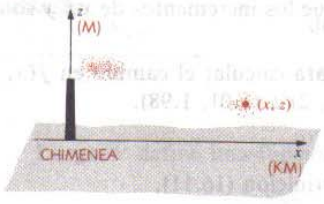
$$C(x, z) = \frac{a}{x^2}\left[e^{-b(z-h)^2/x^2} + e^{-b(z+h)^2/x^2}\right]$$

donde a y b son constantes positivas que dependen de las condiciones atmosféricas y de la tasa de emisión del contaminante. Suponga que

$$C(x, z) = \frac{200}{x^2}\left[e^{-0.02(z-10)^2/x^2} + e^{-0.02(z+10)^2/x^2}\right].$$

Calcule e interprete $\partial C/\partial x$ y $\partial C/\partial z$ en el punto $(2, 5)$.

EJERCICIO 53



54. En el análisis de algunos circuitos eléctricos se utiliza la fórmula $I = V/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$, donde I es la corriente, V la tensión o voltaje, R la resistencia, L la inductancia y ω una constante positiva. Calcule e interprete $\partial I/\partial R$ y $\partial I/\partial L$.

55. En la ingeniería de carreteras, al estudiar la penetración del congelamiento en los caminos, la temperatura T al tiempo t en horas y a una profundidad de x metros está dada aproximadamente por

$$T = T_0 e^{-\lambda x}\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

donde T_0, ω y λ son constantes. El periodo de $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$ es 24 horas.

(a) Calcule e interprete $\partial T/\partial t$ y $\partial T/\partial x$.

(b) Demuestre que T satisface la ecuación del calor en una dimensión

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{para una constante } k.$$

56. *Demuestre que cualquier función dada por*

$$w = (\operatorname{sen} ax)(\cos by)\, e^{-\sqrt{a^2+b^2}\,z}$$

satisface la ecuación de Laplace en tres dimensiones

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

57. La capacidad vital V de los pulmones es el mayor volumen (en ml) que se puede exhalar después de una inhalación máxima de aire. Para un hombre típico, V está dado aproximadamente por $V = 27.63y - 0.112xy$, donde x es la edad (en años) y y la altura (en cm).

(a) Calcule e interprete $\partial V/\partial x$.

(b) Explique por qué $\partial V/\partial y$ es difícil de interpretar.

58. La intensidad de la iluminación solar $I(x, t)$ (en luxes) al tiempo t en un día claro y a una profundidad x en el océano está dada aproximadamente por

$$I(x, t) = I_0 e^{-kx}\operatorname{sen}^3(\pi t/D)$$

donde I_0 es la intensidad al medio día, D es la duración del día (en horas) y $k > 0$. Suponiendo que $I_0 = 1000$, $D = 12$ y $k = 0.10$, calcule e interprete $\partial I/\partial t$ y $\partial I/\partial x$ cuando $t = 6$ horas y $x = 5$ metros.

59. Sea C la traza del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ en el plano $x = 1$. Obtenga ecuaciones paramétricas para la recta tangente l a la curva C en el punto $P(1, 2, 4)$. Esquematice el paraboloide, la curva C y la recta l. (*Sugerencia:* Véase la Figura 16.23.)

60. Sea C la traza de la gráfica de

$$z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$$

en el plano $y = 2$. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta tangente l a la curva C en el punto $(1, 2, \sqrt{11})$. Represente la superficie, la curva C y la recta l.

16.4 INCREMENTOS Y DIFERENCIALES

Si f es una función de dos variables x y y, entonces los símbolos Δx y Δy denotan los incrementos de x y y. Nótese que Δy es un incremento de la variable *independiente* y y no es lo mismo que se definió en (3.20) para una variable *dependiente* y. En términos de esta notación de incrementos, la Definición (16.7) se puede escribir

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

El incremento de $w = f(x, y)$ se define como sigue.

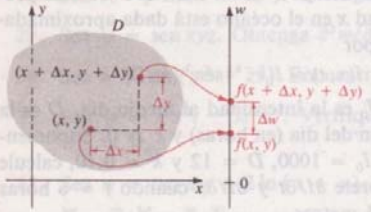
DEFINICIÓN (16.11)

Sea $w = f(x, y)$ y sean Δx y Δy los incrementos de x y y, respectivamente. El **incremento Δw de $w = f(x, y)$** es

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Nótese que el incremento Δw representa el cambio en el valor de la función cuando (x, y) varía a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Si se supone que $f(x, y)$ es la temperatura en el punto (x, y) de una lámina de metal D, como se muestra en la Figura 16.24, entonces Δw es el cambio neto en la temperatura al pasar de (x, y) a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

FIGURA 16.24



EJEMPLO 1 Sea $w = f(x, y) = 3x^2 - xy$.

(a) Suponiendo que los incrementos de x y y son Δx y Δy, determinar Δw.

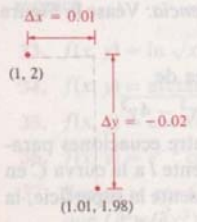
(b) Aplicar Δw para calcular el cambio en $f(x, y)$ cuando (x, y) varía de (1, 2) a (1.01, 1.98).

Solución

(a) Usando la Definición (16.11),

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)] - [3x^2 - xy] \\ &= [3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 \\ &\qquad - (xy + x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y)] - 3x^2 + xy \\ &= 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x\,\Delta y - y\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y\end{aligned}$$

FIGURA 16.25



(b) Si (x, y) varía de (1, 2) a (1.01, 1.98), se tiene la situación ilustrada en la Figura 16.25. Sustituyendo $x = 1, y = 2$,

$\Delta x = 0.01$, $\Delta y = -0.02$ en la fórmula para Δw,

$$\Delta w = 6(1)(0.01) + 3(0.01)^2 - (1)(-0.02) - 2(0.01) - (0.01)(-0.02)$$
$$= 0.0605.$$

Este número puede encontrarse también calculando $f(1.01, 1.98) - f(1, 2)$. •

La fórmula para Δw en la Definición (16.11) sólo sirve para calcular la diferencia de los valores funcionales en dos puntos. No es adecuada para obtener resultados sobre la variación de $f(x, y)$. El siguiente teorema da una fórmula más útil en las aplicaciones. Para simplificar el enunciado se utilizan las abreviaciones ε_1 y ε_2 para ciertas funciones de Δx y Δy, y para sus *valores* $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ en $(\Delta x, \Delta y)$.

TEOREMA (16.12)

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función definida en una región rectangular

$$R = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\},$$

para la cual f_x y f_y existen en toda R y son continuas en el punto (x_0, y_0) de R. Si $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está en R y

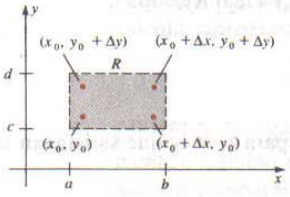
$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

entonces

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 son funciones de Δx y Δy que tienen límite 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

FIGURA 16.26



Demostración La gráfica de R y los puntos que se quieren considerar están en la Figura 16.26.

Restando y sumando $f(x_0, y_0 + \Delta y)$, el incremento Δw de (16.11) se puede escribir como sigue:

(a) $$\Delta w = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

Luego se define una función g de *una* variable x como

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) \quad \text{para} \quad a < x < b.$$

Resulta que $g'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y)$ para $a < x < b$. Aplicando el Teorema del Valor Medio (4.12) a g en el intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$, se obtiene

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(u)\,\Delta x$$

para u entre x_0 y $x_0 + \Delta x$. Como $g(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$ y $g'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y)$, la ecuación anterior puede escribirse

(b) $$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f_x(u, y_0 + \Delta y)\,\Delta x.$$

Asimismo, definiendo $h(y) = f(x_0, y)$ para $c < y < d$, se tiene $h'(y) = f_y(x_0, y)$. Aplicando el Teorema del Valor Medio a la función h en el intervalo $[y_0, y_0 + \Delta y]$,

$$h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(v)\,\Delta y$$

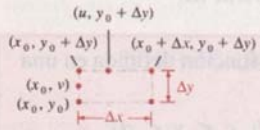
para v entre y_0 y $y_0 + \Delta y$, o equivalentemente,

(c) $$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, v)\,\Delta y.$$

Sustituyendo (b) y (c) en la expresión para Δw en (a),

(d) $$\Delta w = f_x(u, y_0 + \Delta y)\,\Delta x + f_y(x_0, v)\,\Delta y.$$

FIGURA 16.27



La Figura 16.27 muestra puntos típicos correspondientes a $(u, y_0 + \Delta y)$ y (x_0, v).

Sean ε_1 y ε_2 funciones dadas por

$$\varepsilon_1 = f_x(u, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)$$
$$\varepsilon_2 = f_y(x_0, v) - f_y(x_0, y_0).$$

Usando el hecho de que f_x y f_y son continuas y notando que $u \to x_0$ y $v \to y_0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, respectivamente, puede demostrarse que ε_1 y ε_2 tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Si las ecuaciones anteriores para ε_1 y ε_2 se escriben como

$$f_x(u, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1$$
$$f_y(x_0, v) = f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2$$

y se sustituye esto en la expresión (d) para Δw, se ve que

$$\Delta w = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\,\Delta y,$$

que lleva a la conclusión del teorema. • •

EJEMPLO 2 Sea $w = 3x^2 - xy$. Obtener expresiones para ε_1 y ε_2 que satisfagan la conclusión del Teorema (16.12) con $(x_0, y_0) = (x, y)$.

Solución De la solución del Ejemplo 1,

$$\Delta w = 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x\,\Delta y - y\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y,$$

que también se puede escribir

$$\Delta w = (6x - y)\,\Delta x + (-x)\,\Delta y + (3\,\Delta x)(\Delta x) + (-\Delta x)\,\Delta y.$$

Esto está en la forma del Teorema (16.12) con

$$f_x(x, y) = 6x - y, \quad f_y(x, y) = -x, \quad \varepsilon_1 = 3\,\Delta x, \quad \varepsilon_2 = (-\Delta x).$$

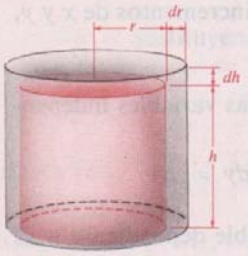
Nótese que ε_1 y ε_2 no son únicas pues también se puede escribir

$$\Delta w = (6x - y)\,\Delta x + (-x)\,\Delta y + (3\,\Delta x - \Delta y)\,\Delta x + (0)\,\Delta y$$

en cuyo caso $\varepsilon_1 = (3\,\Delta x - \Delta y)$ y $\varepsilon_2 = 0$. •

EJEMPLO 4 El radio y la altura de un cilindro circular recto miden 3 y 8 pulgadas, respectivamente, con un error posible en la medición de ±0.05 pulg. Usar diferenciales para estimar el error máximo que se comete al calcular el volumen del cilindro.

FIGURA 16.28



Solución El método es parecido al que se usó para las funciones de una variable (véase el Ejemplo 4 de la Sección 3.4). Comenzamos considerando la fórmula *general* para el volumen V de un cilindro de radio r y altura h, es decir, $V = \pi r^2 h$. Consideremos a r y a h como los valores medidos con errores máximos dr y dh, respectivamente en la medición. La Figura 16.28 ilustra un caso en el que dr y dh son positivas. Por supuesto, el error en una o en las dos medidas podría ser negativo. El error en el cálculo del volumen es el cambio en V correspondiente a dr y dh. Usando diferenciales, tenemos que, de acuerdo con los comentarios anteriores a la Definición (16.13) (ii),

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh.$$

Finalmente, sustituimos los valores específicos de las variables. Tomando $r = 3$, $h = 8$ y $dr = dh = \pm 0.05$, obtenemos la siguiente aproximación al error máximo:

$$dV = 48\pi(\pm 0.05) + 9\pi(\pm 0.05) = \pm 2.85\pi \approx \pm 8.95 \text{ pulg}^3.$$

Para una función de una variable, decir que es *diferenciable* es lo mismo que decir que es derivable, o sea que la derivada existe. Para las funciones de dos variables, se usa la siguiente definición que está basada en la fórmula para Δw en el Teorema (16.12).

DEFINICIÓN (16.14)

Sea $w = f(x, y)$. La función f es **diferenciable** en (x_0, y_0) si Δw se puede expresar en la forma

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Se dice que una función f de dos variables es **diferenciable en una región R** si es diferenciable en todos los puntos de R. El siguiente teorema es consecuencia directa del Teorema (16.12) y de la Definición (16.14). El término *región rectangular* significa una región como la descrita en (16.12).

TEOREMA (16.15)

Si $w = f(x, y)$ y f_x y f_y son continuas en una región rectangular R, entonces f es diferenciable en R.

El siguiente resultado muestra que una función diferenciable es continua, que es uno de los motivos por los que se usa la Definición (16.14) como definición de diferenciabilidad.

DEFINICIÓN (16.18)

Sea $w = f(x, y, z)$ y sean Δx, Δy y Δz incrementos de x, y y z, respectivamente.

(i) Las **diferenciales** dx, dy y dz de las variables independientes x, y y z son

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y, \quad dz = \Delta z.$$

(ii) La **diferencial** dw de la variable dependiente w es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Se puede usar dw para calcular aproximadamente Δw cuando los incrementos de x, y y z son pequeños. La diferenciabilidad se define como en (16.14). La generalización a cuatro o más variables se hace de manera análoga.

EJEMPLO 5 Los lados (en cm) de un paralelepípedo rectangular cambian de 9, 6 y 4 a 9.02, 5.97 y 4.01, respectivamente. Use diferenciales para calcular aproximadamente el cambio del volumen. ¿Cuál es la variación exacta del volumen?

Solución El método de solución es semejante al que se usó para el cilindro circular recto del Ejemplo 4. Comenzamos con la fórmula general $V = xyz$ para el volumen de un paralelepípedo rectangular de lados x, y y z. Luego consideramos dx, dy y dz como errores de medición. Entonces, el error en el cálculo del volumen es

$$\Delta V \approx dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

Finalmente, sustituyendo los valores especiales $x = 9$, $y = 6$, $z = 4$, $dx = 0.02$, $dy = -0.03$ y $dz = 0.01$, obtenemos

$$\begin{aligned} dV &= 24(0.02) + 36(-0.03) + 54(0.01) \\ &= 0.48 - 1.08 + 0.54 = -0.06 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen aumenta en aproximadamente 0.06 cm^3.

El cambio exacto del volumen es

$$dV = (9.02)(5.97)(4.01) - (9)(6)(4) = -0.063906 \quad \bullet$$

EJERCICIOS 16.4

Ejercicios 1-4: Encuentre los valores de ε_1 y ε_2 que satisfacen la Definición (16.14).

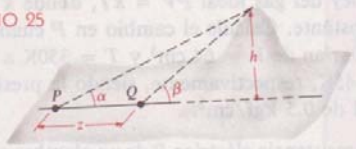
1. $f(x, y) = 4y^2 - 3xy + 2x$
2. $f(x, y) = (2x - y)^2$
3. $f(x, y) = x^3 + y^3$
4. $f(x, y) = 2x^2 - xy^2 + 3y$

Ejercicios 5-12: Determine dw.

5. $w = x^3 - x^2y + 3y^2$
6. $w = 5x^2 + 4y - 3xy^3$
7. $w = x^2 \operatorname{sen} y + 2y^{3/2}$
8. $w = ye^{-2x} - 3x^4$

de 30″ (o 0.000145 rad) y obtiene los valores $\alpha = 15°$, $\beta = 20°$ y $z = 2000$ m. Use diferenciales para estimar con una precisión de 0.1 m la precisión con la que debe medirse la longitud para que el error máximo en el cálculo de h no sea mayor de 10 m.

EJERCICIO 25



26. Cuando un medicamento se ingiere, el tiempo T en el que hay mayor cantidad del producto en la sangre se puede calcular en términos de la semivida x del medicamento en el estómago y la semivida y en la sangre. Para fármacos comunes (como la penicilina) T está dado por

$$T = \frac{xy\,(\ln x - \ln y)}{(x - y)\ln 2}.$$

Para un medicamento en particular, $x = 30$ min y $y = 1$ h. ¿Cuál es el máximo error en el cálculo de T si el error máximo en la estimación de las semividas es de 10%?*

Ejercicios 27-28: Demuestre que f es diferenciable en todos los puntos de su dominio.

27. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

28. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$

29. Sea $f(x, y) =$

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Demuestre que

(a) $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen. (*Sugerencia:* Use (16.7).)

(b) f no es continua en $(0, 0)$.

(c) f no es diferenciable en $(0, 0)$.

30. Sea $f(x, y, z) =$

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Demuestre que f_x, f_y y f_z existen en $(0, 0, 0)$ pero f no es diferenciable en $(0, 0, 0)$.

16.5 REGLA DE LA CADENA

Si f y g son funciones de *una* variable tales que

$$w = f(u) \quad \text{y} \quad u = g(x),$$

entonces la composición de f con g está dada por

$$w = f(g(x)).$$

La derivada de w con respecto a x se puede encontrar aplicando la Regla de la Cadena (3.26) como sigue:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dx}.$$

* **(N. de R.)** La semivida es el tiempo de reducción a la mitad, o *periodo medial*. Se le llama impropiamente "vida media" por traducción incorrecta del término en inglés *half-life*.

les a ε_1 y ε_2 en todos los otros valores. Hecho esto, las funciones ε_1 y ε_2 en (b) resultan continuas en (0, 0). Dividiendo ambos lados de la ecuación (b) entre Δx se obtiene

$$\text{(c)} \qquad \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \varepsilon_1 \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon_2 \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Si w se considera una función de x y y, entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

También, de las ecuaciones (a),

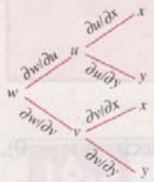
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Si Δx tiende a 0, de (a) se deduce que Δu y Δv también tienden a 0, y por lo tanto ε_1 y ε_2 tienden a 0. Por consiguiente, tomando el límite en la ecuación (c) cuando $\Delta x \to 0$,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La segunda fórmula en el enunciado del teorema se demuestra de manera análoga. • •

FIGURA 16.29



Para recordar la Regla de la Cadena (16.19) se puede usar el *diagrama de árbol* en la Figura 16.29. Para construir el diagrama se trazan *ramas* (segmentos) de w a u y v, para indicar que w es una función de estas dos variables. Como u es función de x y y, se trazan ramas de u a x y y. También se dibujan ramas de v a x y y. En el diagrama se han indicado las derivadas parciales correspondientes a las variables mencionadas.

La Figura 16.29 se emplea como sigue. Para encontrar $\partial w/\partial x$, se toman los productos de todos los pares de derivadas parciales que van de w a x, es decir $(\partial w/\partial u)(\partial u/\partial x)$ y $(\partial w/\partial v)(\partial v/\partial x)$, y luego se suman. Esto da

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La fórmula para $\partial w/\partial y$ se encuentra usando las ramas que van de w a y.

EJEMPLO 1 Sean $w = r^3 + s^2$ y $r = pq^2$, $s = p^2 \operatorname{sen} q$. Use la Regla de la Cadena para encontrar $\partial w/\partial p$ y $\partial w/\partial q$.

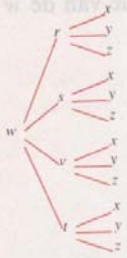
Solución Nótese que w es una función (compuesta) de p y q. Podemos sustituir r y s por sus expresiones y obtener

$$w = (pq^2)^3 + (p^2 \operatorname{sen} q)^2$$

EJEMPLO 2 Sean $w = r^2 + sv + t^3$ y $r = x^2 + y^2 + z^2$, $s = xyz$, $v = xe^y$ y $t = yz^2$. Usar la Regla de la Cadena para encontrar $\partial w/\partial z$.

Solución Nótese que w es una función de r, s, v, t y que cada una de estas cuatro variables es a su vez función de x, y y z. La Figura 16.32 muestra el diagrama correspondiente. Como se desea encontrar $\partial w/\partial z$, recorremos todas las ramas que van de w a z. Esto da

FIGURA 16.32



$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}\\ &= (2r)(2z) + v(xy) + s(0) + (3t^2)(2yz)\\ &= 4z(x^2 + y^2 + z^2) + xe^y(xy) + 0 + 3(yz^2)^2(2yz)\\ &= 4z(x^2 + y^2 + z^2) + x^2ye^y + 6y^3z^5\end{aligned}$$

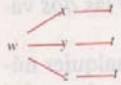
•

Si w es una función de varias variables, cada una de las cuales es función de *una* sola variable, digamos t, entonces w es una función de la variable t y se puede aplicar a dw/dt la Regla de la Cadena, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Sean $w = x^2 + yz$ y $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t - 4$, $z = t^3$. Encontrar dw/dt.

Solución Para aplicar la Regla de la Cadena construimos el diagrama de la Figura 16.33. Los pares de ramas que van de w a t dan lo siguiente, donde usamos el símbolo d/dt para la derivada con respecto a la *única* variable t:

FIGURA 16.33



$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}\\ &= (2x)(6t) + z(2) + y(3t^2)\\ &= 2(3t^2 + 1)6t + t^3(2) + (2t - 4)3t^2\\ &= 44t^3 - 12t^2 + 12t\end{aligned}$$

El problema también podría resolverse sin usar la Regla de la Cadena escribiendo

$$w = (3t^2 + 1)^2 + (2t - 4)t^3$$

y encontrando luego dw/dt con los métodos de derivación respecto a una sola variable. •

La Regla de la Cadena es útil para resolver problemas de rapidez de variación relacionadas, como los que se discutieron en la Sección 3.8. El método se ilustra en el siguiente ejemplo.

Si $\partial w/\partial y \neq 0$, entonces (dado que $u = x$)

$$f'(x) = -\frac{\partial w/\partial u}{\partial w/\partial y} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial y} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Esta discusión puede resumirse como sigue.

TEOREMA (16.20)

Si una ecuación $F(x, y) = 0$ determina implícitamente una función derivable f de una variable x tal que $y = f(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

EJEMPLO 5 Encontrar y' suponiendo que $y = f(x)$ satisface la ecuación

$$y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0.$$

Solución Si $F(x, y)$ es la expresión en el lado izquierdo de la ecuación, entonces por el Teorema (16.20),

$$y' = -\frac{-12x^2 - 5}{4y^3 + 3} = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}.$$

Es ilustrativo comparar esta solución con la del Ejemplo 2 en la Sección 3.6 que se obtuvo usando métodos para una sola variable. •

Dada una ecuación como

$$x^2 - 4y^3 + 2z - 7 = 0,$$

se puede despejar z, obteniendo así

$$z = \tfrac{1}{2}(-x^2 + 4y^3 + 7)$$

que es de la forma

$$z = f(x, y).$$

Por analogía con el caso de una sola variable, se dice que la función f de las variables x y y está determinada *implícitamente* por la ecuación dada. El siguiente teorema proporciona fórmulas para encontrar f_x y f_y o equivalentemente, $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, sin despejar z de la ecuación.

TEOREMA (16.21)

Si una ecuación $F(x, y, z) = 0$ determina implícitamente una función diferenciable f de dos variables x y y tales que $z = f(x, y)$ para todo (x, y) en el dominio de f, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

Ejercicios 5-6: Aplique la Regla de la Cadena para obtener $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

5. $z = r^2 + s + t^2, \quad r = xe^y, \quad s = ye^x, \quad t = x^2y$

6. $z = pq + qw, \quad p = 2x - y, \quad q = x - 2y, \quad w = -2x + 2y$

Ejercicios 7-8: Use la Regla de la Cadena para encontrar $\partial r/\partial u$, $\partial r/\partial v$ y $\partial r/\partial t$.

7. $r = x \ln y, \quad x = 3u + vt, \quad y = uvt$

8. $r = w^2 \cos z, \quad w = u^2vt, \quad z = uv^2$

9. Evalúe $\partial p/\partial r$, donde $p = u^2 + 3v^2 - 4w^2$, $u = x - 3y + 2r - s$, $v = 2x + y - r + 2s$, $w = -x + 2y + r + s$.

10. Evalúe $\partial z/\partial y$, donde $z = tr + ue^v$, $t = xy^2z$, $r = x^2yz$, $u = xyz^2$, $v = xyz$.

Ejercicios 11-14: Use la Regla de la Cadena para encontrar dw/dt.

11. $w = x^3 - y^3, \quad x = 1/(t+1), \quad y = t/(t+1)$

12. $w = \ln(u + v), \quad u = e^{-2t}, \quad v = t^3 - t^2$

13. $w = r^2 - s\tan v, \quad r = \operatorname{sen}^2 t, \quad s = \cos t, \quad v = 4t$

14. $w = x^2y^3z^4, \quad x = 2t + 1, \quad y = 3t - 2, \quad z = 5t + 4$

Ejercicios 15-18: Encuentre y' suponiendo que $y = f(x)$ satisface la ecuación dada.

15. $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$

16. $x^4 + 2x^2y^2 - 3xy^3 + 2x = 0$

17. $6x + \sqrt{xy} = 3y - 4$

18. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

Ejercicios 19-22: Encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ suponiendo que $z = f(x, y)$ satisface la ecuación dada.

19. $2xz^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z = 0$

20. $xz^2 + 2x^2y - 4y^2z + 3y - 2 = 0$

21. $xe^{yz} - 2ye^{xz} + 3ze^{xy} = 1$

22. $yx^2 + z^2 + \cos xyz = 4$

23. El radio r y la altura h de un cilindro circular recto aumentan a razón de 0.01 cm/min y 0.02 cm/min, respectivamente. Use la Regla de la Cadena para calcular la tasa de crecimiento del volumen con respecto al tiempo, cuando $r = 4$ cm y $h = 7$ cm. ¿Con qué rapidez varía el área de la superficie curva?

24. Los lados iguales y el ángulo entre ellos de un triángulo isósceles aumentan a razón de 0.1 m/h y 2°/h, respectivamente. Utilice la Regla de la Cadena para evaluar la tasa de crecimiento del área del triángulo en el momento en que la longitud de los lados iguales es de 20 m y el ángulo entre ellos es de 60°.

25. La presión P, el volumen V y la temperatura T de un gas encerrado están relacionadas por la ley del gas ideal $PV = kT$, donde k es una constante. Suponiendo que P y V varían con la rapidez dP/dt y dV/dt, respectivamente, encuentre una fórmula para evaluar dT/dt, usando la Regla de la Cadena.

26. El radio de la base r y la altura h de un cilindro circular recto tienen razones de cambio con respecto al tiempo dr/dt y dh/dt, respectivamente. Use la Regla de la Cadena para hallar una fórmula para dV/dt, donde V es el volumen del cilindro.

27. Un gas obedece la ley del gas ideal $PV = 8T$. El gas se calienta a razón de 2°C/min y la presión aumenta a razón de $\frac{1}{3}$ (kgf/cm²)/min. En cierto momento, la temperatura es de 200°C y la presión es de 10 kgf/cm². Calcule la rapidez de cambio del volumen en ese momento.

28. Por un agujero de un recipiente sale arena a razón de 6 cm³/min. Al caer va formando un montículo con la forma de un cono circular recto cuyo radio en la base aumenta a razón de 0.25 cm/min. En el momento en que han salido 40 cm³ de arena, el radio es de 5 cm. Calcule la rapidez con la que la altura del montículo aumenta.

29. A los dos años, un niño típico mide 86 cm de estatura, pesa 13 kg y crece a razón de 9 cm/año y 2 kg/año. Use la fórmula de Dubois y Dubois para el área de la superficie del cuerpo humano $S = 0.007184x^{0.425}y^{0.725}$, donde x es el peso y y es la estatura, para calcular aproximadamente la rapidez de crecimiento del área de la superficie (véase el Ejercicio 39 de la Sección 16.1).

30. Cuando se tienen en consideración el tamaño de las moléculas y sus fuerzas de atracción, la presión P, el volumen V y la temperatura T de un mol de un gas encerrado están relacionadas por la *ecuación de van der Waals*

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = kT$$

$u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Demuestre que si $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

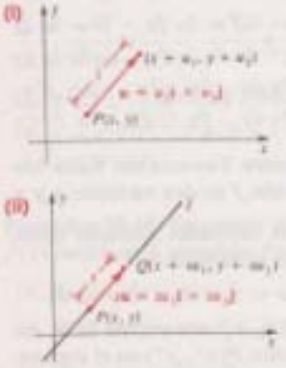
50. Sean $u = y/(x^2 + y^2)$ y $v = x/(x^2 + y^2)$. Verifique directamente las fórmulas para $\partial u/\partial r$ y $\partial v/\partial r$ en el Ejercicio 49, sustituyendo x por $r\cos\theta$ y y por $r\operatorname{sen}\theta$, y derivando luego.

16.6 DERIVADAS DIRECCIONALES

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función con dominio D. Recordemos que si $f(x, y)$ es la temperatura de una lámina plana de metal en el punto $P(x, y)$ del plano xy, entonces las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ dan las razones de cambio o tasas de variación (instantáneas) de la temperatura con respecto a la distancia en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente (véanse las Figuras 16.20 y 16.21). En esta sección se generalizará esto a la razón de cambio de $f(x, y)$ en *cualquier* dirección.

Sea $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ un vector unitario. Si $\mathbf{u}$ se representa con un vector con punto inicial $P(x, y)$, como en la Figura (16.38)(i), entonces el punto final tiene coordenadas $(x + u_1, y + u_2)$. Se desea definir la razón de cambio de $f(x, y)$ con respecto a la distancia en la dirección determinada por $\mathbf{u}$.

FIGURA 16.38



Sea l la recta que pasa por P y es paralela a $\mathbf{u}$, y sea Q un punto cualquiera en l, como se ilustra en la Figura 16.38(ii). El vector $\overrightarrow{PQ}$ corresponde al múltiplo escalar $s\mathbf{u} = (su_1)\mathbf{i} + (su_2)\mathbf{j}$ para algún s. Por lo tanto, las coordenadas de Q son $(x + su_1, y + su_2)$. Como $\mathbf{u}$ es un vector unitario,

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|s\mathbf{u}\| = |s|\,\|\mathbf{u}\| = |s|.$$

Entonces, s es la distancia (con signo) desde P medida a lo largo de l. Si $s > 0$, entonces $s\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{u}$. Si $s < 0$, entonces $s\mathbf{u}$ tiene la dirección opuesta.

Si la posición de un punto varía de P a Q, entonces el incremento Δw de $w = f(x, y)$ es

$$\Delta w = f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y).$$

La *razón media de cambio* de $f(x, y)$ es

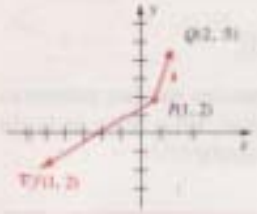
$$\frac{\Delta w}{s} = \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}.$$

Por ejemplo, sea $w = f(x, y)$ la temperatura en (x, y). Si la temperatura en P es 50° C y la temperatura en Q es 51.5° C, entonces $\Delta w = 1.5°$ C. Si $\|\overrightarrow{PQ}\| = 3$ cm, en- la tasa media de variación de la temperatura cuando el punto se mueve de P a Q es

$$\frac{\Delta w}{s} = 0.5° \text{ C/cm}.$$

Como se hizo antes con las derivadas, para encontrar la razón de cambio *instantá-*

FIGURA 16.41



El vector está en la Figura 16.41 con su punto inicial en $P(1, 2)$.

(b) Si tomamos $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$, entonces

$$\mathbf{a} = \langle 2 - 1, 5 - 2 \rangle = \langle 1, 3 \rangle = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

(véase la Figura 16.41). El vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

Aplicando (16.25),

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \mathbf{u}$$

$$= (-6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}(-6 - 12) = -\frac{18}{\sqrt{10}} \approx -5.7 \quad \bullet$$

Sea $P(x, y)$ un punto fijo y consideremos la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ cuando $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ varía. Para un vector unitario $\mathbf{u}$ dado, la derivada direccional puede ser positiva (es decir, $f(x, y)$ aumenta), negativa ($f(x, y)$ disminuye) o puede ser 0. En muchas aplicaciones es importante encontrar la dirección en la que $f(x, y)$ aumenta más rápidamente y también calcular la razón de cambio máxima. El siguiente teorema proporciona esta información.

TEOREMA DEL GRADIENTE (16.26)

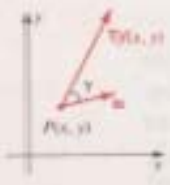
Sea f una función de dos variables que es diferenciable en el punto $P(x, y)$.

(i) El valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ en $P(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$.

(ii) La tasa de crecimiento máxima de $f(x, y)$ en $P(x, y)$ se alcanza en la dirección de $\nabla f(x, y)$.

Demostración

FIGURA 16.42



(i) Consideremos al punto $P(x, y)$ y al vector $\nabla f(x, y)$ como fijos (pero arbitrarios) y al vector unitario $\mathbf{u}$ como variable (véase la Figura 16.42). Sea γ el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\nabla f(x, y)$, por (16.25) y el Teorema (14.22),

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

$$= \|\nabla f(x, y)\| \, \|\mathbf{u}\| \cos \gamma$$

$$= \|\nabla f(x, y)\| \cos \gamma$$

GRADIENTE DE $f(x, y, z)$ (16.29)

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

El siguiente resultado es la versión para tres dimensiones del Teorema (16.23).

TEOREMA (16.30)

Si f es una función diferenciable de tres variables y $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ es un vector unitario, entonces

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) &= \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u} \\ &= f_x(x, y, z)u_1 + f_y(x, y, z)u_2 \\ &\quad + f_z(x, y, z)u_3. \end{aligned}$$

Al igual que en el Teorema (16.26), de todas las posibles derivadas direccionales $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$, la que tiene la derivada mayor es la correspondiente a la dirección de $\nabla f(x, y, z)$ y el valor máximo de la derivada direccional es $\| \nabla f(x, y, z) \|$.

EJEMPLO 4 La temperatura T en un punto (x, y, z) de un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio está dada por la fórmula $T = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$.

(a) Calcular la razón de cambio de T con respecto a la distancia en el punto $P(1, 3, -2)$ en la dirección del vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) ¿En qué dirección a partir de P aumenta más rápidamente T? ¿Cuál es la tasa máxima de variación de T en P?

Solución

(a) Por la Definición (16.29), el gradiente de $T = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$ es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Como

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-200x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-200y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-200z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

tenemos que

$$\nabla T = \frac{-200}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Si denotamos por $\nabla T]_P$ al valor de ∇T en el punto $P(1, 3, -2)$, entonces

$$\nabla T]_P = \frac{-200}{196}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}).$$

El vector unitario $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

(b) El vector unitario normal al lado AB es $\mathbf{j}$. En este caso, AB está aislado si y sólo si

$$\nabla T \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{o equivalentemente,} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

es decir, la razón de cambio de T en la dirección vertical es 0. •

EJERCICIOS 16.6

Ejercicios 1-6: Encuentre el gradiente de f en el punto indicado.

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P(-4, 3)$
2. $f(x, y) = 7y - 5x$, $P(2, 6)$
3. $f(x, y) = e^{3x} \tan y$, $P(0, \pi/4)$
4. $f(x, y) = x \ln (x - y)$, $P(5, 4)$
5. $f(x, y, z) = yz^3 - 2x^2$, $P(2, -3, 1)$
6. $f(x, y, z) = xy^2e^z$, $P(2, -1, 0)$

Ejercicios 7-20: Calcule la derivada direccional de f en el punto P en la dirección indicada.

7. $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2$, $P(3, -1)$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
8. $f(x, y) = x^3 - 3x^2y - y^3$, $P(1, -2)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$
9. $f(x, y) = \arctan (y/x)$, $P(4, -4)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
10. $f(x, y) = x^2 \ln y$, $P(5, 1)$, $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
11. $f(x, y) = \sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1}$, $P(3, -2)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
12. $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$, $P(2, -1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
13. $f(x, y) = x \cos^2 y$, $P(2, \pi/4)$, $\mathbf{a} = \langle 5, 1 \rangle$
14. $f(x, y) = xe^{3y}$, $P(4, 0)$, $\mathbf{a} = \langle -1, 3 \rangle$
15. $f(x, y, z) = xy^3z^2$, $P(2, -1, 4)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
16. $f(x, y, z) = x^2 + 3yz + 4xy$, $P(1, 0, -5)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$
17. $f(x, y, z) = z^2e^{xy}$, $P(-1, 2, 3)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
18. $f(x, y, z) = \sqrt{xy}\,\operatorname{sen} z$, $P(4, 9, \pi/4)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
19. $f(x, y, z) = (x + y)(y + z)$, $P(5, 7, 1)$, $\mathbf{a} = \langle -3, 0, 1 \rangle$
20. $f(x, y, z) = z^2 \tan^{-1} (x + y)$, $P(0, 0, 4)$, $\mathbf{a} = \langle 6, 0, 1 \rangle$

Ejercicios 21-24:
(a) Calcule la derivada direccional de f en P en la dirección de P a Q.
(b) Encuentre un vector unitario en la dirección de máximo crecimiento de f en P y calcule la tasa de crecimiento de f en esa dirección.
(c) Encuentre un vector unitario en la dirección en la que f disminuye más rápidamente en P y calcule la razón de cambio de f en esa dirección.

21. $f(x, y) = x^2e^{-2y}$, $P(2, 0)$, $Q(-3, 1)$
22. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x - y)$, $P(-\pi/3, \pi/6)$, $Q(0, 0)$
23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $P(-2, 3, 1)$, $Q(0, -5, 4)$
24. $f(x, y, z) = (x/y) - (y/z)$, $P(0, -1, 2)$, $Q(3, 1, -4)$
25. La temperatura T en un punto (x, y) de una placa de metal colocada en el plano xy es inversamente proporcional a la distancia al origen. La temperatura en $P(3, 4)$ es 100°C. Calcule la razón de cambio de T en P en la dirección del vector $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. ¿En qué dirección aumenta más rápidamente T en P? ¿En qué dirección disminuye más rápidamente T en P? ¿En qué dirección se anula la tasa de variación?
26. La superficie de un lago está representada por una región D en el plano xy de manera que la profundidad (en metros) bajo el punto correspondiente a (x, y) es $f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$. Una niña está en el agua en el punto $(4, 9)$. ¿En qué dirección debe nadar para que la profundidad del agua bajo ella disminuya más rápidamente? ¿En qué dirección permanecerá constante la profundidad?
27. El potencial eléctrico V en un punto $P(x, y, z)$ de un sistema de coordenadas rectangulares es $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Calcule la tasa de cambio de V en $P(2, -1, 3)$ en la dirección de P al

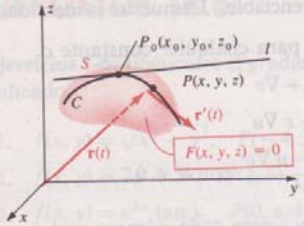
no son todas cero. Una recta l con tangencia a S en P_0 es, por definición, una **recta tangente** a cualquier curva C que se encuentre en S y que contiene a P_0, como se ilustra en la Figura 16.45.

Sea C una curva con ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, entonces $\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$ es un vector tangente a C en $P(x, y, z)$ (véase la Figura 16.45).

FIGURA 16.45



(véase la Figura 16.45).

Para cada t el punto $(f(t), g(t), h(t))$ en C también está en S y por lo tanto,

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0.$$

Si se toma

$$w = F(x, y, z) \quad \text{y} \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

entonces aplicando la Regla de la Cadena y tomando en cuenta que $w = 0$ para todo t,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

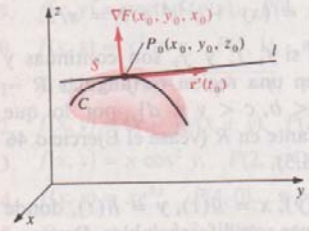
De manera que

$$F_x(x, y, z)f'(t) + F_y(x, y, z)g'(t) + F_z(x, y, z)h'(t) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\nabla F(x, y, z) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

FIGURA 16.46



para todo punto $P(x, y, z)$ en C. En particular, si corresponde $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a $t = t_0$, entonces

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Como $\mathbf{r}'(t_0)$ es un vector tangente a C en P_0, esto implica que *el vector* $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ *es perpendicular a toda recta tangente l a S en* P_0 (véase la Figura 16.46).

El plano que pasa por P_0 y tiene como vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es el **plano tangente a** S **en** P_0. Quedó demostrado que *toda recta tangente l a S en* P_0 *se encuentra en el plano tangente en* P_0. El siguiente teorema resume esta discusión.

TEOREMA (16.31)

Sea $F(x, y, z)$ una función con primeras derivadas parciales continuas y sea P_0 un punto en la gráfica S de $F(x, y, z) = 0$. Si F_x, F_y y F_z no son todas 0 en P_0, entonces el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente a S en P_0.

Se dice que el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ en el Teorema (16.31) es un vector *normal a*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

La recta perpendicular al plano tangente en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S es la **recta normal** a S en P_0. Si S es la gráfica de $F(x, y, z) = 0$, entonces la recta normal es paralela al vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

EJEMPLO 2 Encontrar una ecuación de la recta normal al elipsoide $\frac{1}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ en el punto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$.

Solución Esta superficie es la misma que se consideró en el Ejemplo 1. Por lo tanto, el vector

$$\nabla F(2, 1, \sqrt{6}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\sqrt{6}\mathbf{k},$$

que se muestra en la Figura 16.47, es paralelo a la recta normal. Usando el Teorema (14.37), obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas de la recta normal:

$$x = 2 + 3t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = \sqrt{6} + 2\sqrt{6}t; \qquad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Sea f una función de x y y, y sea S la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$. El plano tangente a S en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ puede servir para obtener una interpretación geométrica de la diferencial

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y$$

definida en (16.13). Como

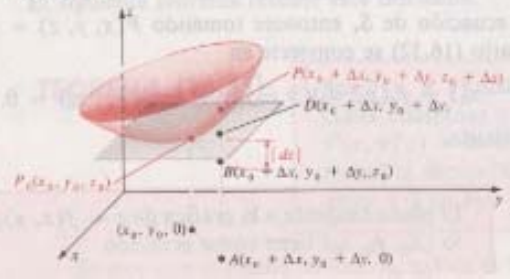
$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

el punto $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ está en S (véase la Figura 16.48).

Sea $D(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z)$ un punto en el plano tangente y consideremos los puntos $A(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, 0)$ y $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0)$ que se muestran en la Figura 16.48. Como D está en el plano tangente, sus coordenadas satisfacen la ecuación del Teorema (16.33), es decir,

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y_0 + \Delta y - y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y = dz. \end{aligned}$$

FIGURA 16.48



Solución Las superficies de nivel de F son gráficas de la forma $F(x, y, z) = c$, donde c es una constante. En particular, la superficie de nivel que pasa por $P(1, 2, 4)$ es la gráfica de

$$F(x, y, z) = F(1, 2, 4),$$

es decir, de

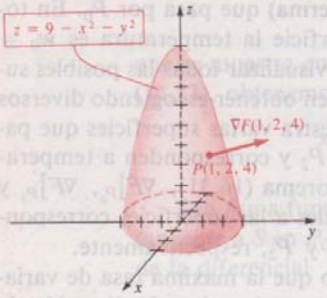
$$x^2 + y^2 + z = (1)^2 + (2)^2 + 4 = 9$$

o equivalentemente,

$$z = 9 - x^2 - y^2.$$

La representación de esta superficie de nivel es un paraboloide de revolución y está en la Figura 16.50.

FIGURA 16.50



El gradiente de F es

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

En $P(1, 2, 4)$,

$$\nabla F(1, 2, 4) = 2(1)\mathbf{i} + 2(2)\mathbf{j} + \mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

El vector $\nabla F(1, 2, 4)$ con punto inicial P está en la Figura 16.50. Según el Teorema (16.34), $\nabla F(1, 2, 4)$ es ortogonal a la superficie de nivel en P. •

El siguiente resultado para funciones de *dos* variables es análogo al Teorema (16.34).

TEOREMA (16.35)

Sea f una función de dos variables que es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$ y sea C la curva de nivel de f que contiene a P_0. Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces este vector gradiente es perpendicular a C en P_0. En este caso, la dirección del máximo cambio de $f(x, y)$ en P_0 es ortogonal a C.

FIGURA 16.51



Como ilustración del Teorema (16.35), consideremos $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$. Entonces, las curvas de nivel están dadas por $9 - x^2 - y^2 = k$, donde k es un número real (véase el Ejemplo 3 de la Sección 16.1). En la Figura 16.51 aparecen algunas de estas curvas de nivel (que son circunferencias). Por el Teorema (16.35), la tasa máxima (o mínima) de variación de $f(x, y)$ se alcanza cuando (x, y) se mueve en la dirección perpendicular a estas circunferencias, es decir, a lo largo de las rectas que pasan por el origen. Esto equivale a que el punto $(x, y, f(x, y))$ suba (o baje) en la parte de mayor inclinación de la gráfica de f que se ve en la Figura 16.50.

13. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1;\quad \dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}-\dfrac{zz_0}{c^2}=1$

14. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=cz;\quad \dfrac{2xx_0}{a^2}+\dfrac{2yy_0}{b^2}=c(z+z_0)$

15. Encuentre los puntos del hiperboloide $x^2-2y^2-4z^2=16$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $4x-2y+4z=5$.

16. Demuestre que la suma de los cuadrados de las coordenadas x, y, z de las intersecciones con los ejes x, y, z de cualquier plano tangente a la gráfica de la ecuación $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$ es igual a la constante a^2.

17. Demuestre que cualquier recta normal a una esfera pasa por el centro de ésta.

18. Encuentre los puntos del paraboloide $z=4x^2+9y^2$ en los que la recta normal es paralela a la recta que pasa por $P(-2, 4, 3)$ y $Q(5, -1, 2)$.

19. Se dice que dos superficies son *ortogonales* en uno de sus puntos de intersección $P(x, y, z)$ si sus rectas normales en P son perpendiculares. Torne patente que las gráficas de $F(x, y, z)=0$ y de $G(x, y, z)=0$ (donde F y G tienen derivadas parciales) son ortogonales en P si y sólo si

$$F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z=0.$$

20. Demuestre que la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el cono $x^2+y^2-z^2=0$ son ortogonales en todos sus puntos de intersección (véase el Ejercicio 19).

Ejercicios 21-24: Trace la curva de nivel C de f que pasa por el punto P y un vector (con punto inicial P) correspondiente a $\nabla f]_P$ (véanse los Ejercicios 13-16 de la Sección 16.1).

21. $f(x, y)=y^2-x^2,\quad P(2, 1)$

22. $f(x, y)=3x-2y,\quad P(-2, 1)$

23. $f(x, y)=x^2-y,\quad P(-3, 5)$

24. $f(x, y)=xy,\quad P(3, 2)$

Ejercicios 25-30: Esquematice la superficie de nivel S de F que pasa por el punto P y un vector (con punto inicial P) correspondiente a $\nabla F]_P$ (véanse los Ejercicios 27-32 de la Sección 16.1).

25. $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2,\quad P(1, 5, 2)$

26. $F(x, y, z)=z-x^2-y^2,\quad P(2, -2, 1)$

27. $F(x, y, z)=x+2y+3z,\quad P(3, 4, 1)$

28. $F(x, y, z)=x^2+y^2-z^2,\quad P(3, -1, 1)$

29. $F(x, y, z)=x^2+y^2,\quad P(2, 0, 3)$

30. $F(x, y, z)=z,\quad P(2, 3, 4)$

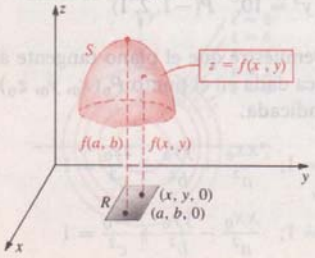
16.8 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En el resto de este capítulo, una región formada por los puntos de un plano coordenado que se encuentran dentro de un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, se llamará **región rectangular**. Si se incluyen los puntos de frontera se hablará de una **región rectangular cerrada**. Se dice que una región R es **acotada** si está contenida en alguna región rectangular cerrada.

Una función f de dos variables tiene un **máximo local** en (a, b) si existe una región rectangular R que contiene a (a, b) tal que $f(x, y)\le f(a, b)$ para todo par (x, y) en R. Geométricamente, esto significa que si una superficie S es la gráfica de f, entonces los máximos locales corresponden a los puntos más altos de S, como se ilustra en la Figura 16.54. Si f_y existe, entonces como se señaló en la Sección 16.3, $f_y(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente a la traza C de S en el plano $x=a$ (véase la Figura 16.23). Se deduce que si $f(a, b)$ es un máximo local, entonces $f_y(a, b)=0$. Análogamente, $f_x(a, b)=0$.

FIGURA 16.54

Curvas de nivel $f(a, b)$



La función f tiene un **mínimo local** en (c, d) si hay una región rectangular R que contiene a (c, d) tal que $f(x, y)\ge$

EJEMPLO 1 Sea $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ para $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Encontrar los máximos y mínimos de f.

Solución El dominio R de f es la región del plano xy que consta de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y su interior. De acuerdo con la Definición (16.36) (i), los puntos críticos son soluciones del sistema de dos ecuaciones

$$f_x(x, y) = 0, \qquad f_y(x, y) = 0,$$

es decir, de

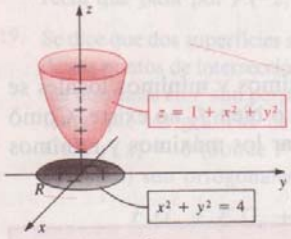
$$2x = 0, \qquad 2y = 0.$$

El único punto que satisface ambas ecuaciones es (0, 0) y por lo tanto, $f(0, 0) = 1$ es el único valor extremo local posible. Además, como

$$f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 > 1 \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

f tiene un mínimo local 1 en (0, 0). Este hecho también se puede ver de la gráfica de $z = f(x, y)$ que se tiene en la Figura 16.56. Obsérvese que el número $f(0, 0) = 1$ también es el mínimo absoluto de f.

FIGURA 16.56



Para encontrar los posibles máximos y mínimos en la frontera, estudiamos los puntos (a, b) de la frontera del dominio de f, es decir, de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Consultando la Figura 16.56, se ve que cualquiera de estos puntos, por ejemplo el (0, 2), da como resultado el máximo absoluto $f(0, 2) = 5$.

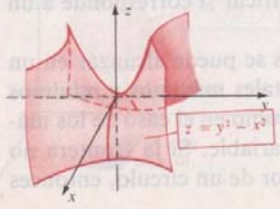
Como se ilustra en el siguiente ejemplo, no todos los números críticos dan lugar a máximos o mínimos.

EJEMPLO 2 Sea $f(x, y) = y^2 - x^2$ con dominio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Encontrar los máximos y mínimos de f.

Solución Según la Definición (16.36), los puntos críticos son soluciones del sistema de dos ecuaciones

$$f_x(x, y) = -2x = 0, \qquad f_y(x, y) = 2y = 0.$$

FIGURA 16.57



Como en el Ejemplo 1, el único valor extremo local posible es $f(0, 0) = 0$. Sin embargo, si $y \neq 0$, entonces $f(0, y) = y^2 > 0$; y si $x \neq 0$, entonces $f(x, 0) = -x^2 < 0$. Por lo tanto, cualquier región rectangular del plano xy que contenga a (0, 0) contiene puntos en los que el valor de la función es mayor que $f(0, 0)$ y también puntos en los que el valor de la función es menor que $f(0, 0)$. Por consiguiente, f no tiene máximos o mínimos locales. Este resultado es evidente a partir de la gráfica de $z = f(x, y)$ en la Figura 16.57. Debido a la forma de la superficie cerca de (0, 0, 0) se dice que este pun-

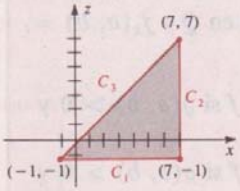
y por lo tanto,

$$g(x, y) = (2)(6y) - (-4)^2 = 12y - 16.$$

Como $g(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = -8 < 0$, de (16.37) (iii) se ve que $f(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ no es un valor extremo de f. Como $g(4, 2) = 8 > 0$ y $f_{xx}(4, 2) = 2 > 0$, de acuerdo con (16.37) (ii), f tiene un mínimo local $f(4, 2) = 0$. •

EJEMPLO 4 Sea $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$. Encontrar el máximo y el mínimo absolutos de f en la región triangular R que tiene como vértices $(-1, -1)$, $(7, -1)$ y $(7, 7)$.

FIGURA 16.58



Solución La frontera de R consta de los segmentos C_1, C_2 y C_3 que se muestran en la Figura 16.58. En el Ejemplo 3 encontramos que f tiene un mínimo local 0 en el punto $(4, 2)$ que está dentro de R. Por lo tanto sólo hace falta buscar los máximos y mínimos en la frontera.

En C_1 tenemos $y = -1$ y entonces, los valores de f están dados por

$$f(x, -1) = x^2 + 4x - 1 - 4 = x^2 + 4x - 5.$$

Esto determina una función de una variable cuyo dominio es el intervalo $[-1, 7]$. La primera derivada es $2x + 4$, que es igual a 0 en $x = -2$, pero este número se encuentra fuera del intervalo $[-1, 7]$. Por lo tanto no hay máximos o mínimos locales de $f(x, -1)$ en $[-1, 7]$. Como $f(x, -1)$ es creciente en todo este intervalo, el mínimo y el máximo en la frontera son

$$f(-1, -1) = -8 \quad \text{y} \quad f(7, -1) = 72.$$

En C_2 tenemos $x = 7$ y los valores de f están dados por

$$f(7, y) = 49 - 28y + y^3 + 4y = y^3 - 24y + 49$$

para $-1 \le y \le 7$. La primera derivada de esta función de y es $3y^2 - 24$ y por lo tanto, hay un número crítico si $3y^2 = 24$, o $y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Usando la segunda derivada $6y$ de $f(7, y)$ vemos que $f(7, 2\sqrt{2})$ es un mínimo local de *f en el segmento C_2*. Sin embargo, como $f(7, 2\sqrt{2}) = 49 - 32\sqrt{2} \approx 3.7$ y $f(-1, -1) = -8$, no se trata de un mínimo absoluto de f en R. Los valores de f en los extremos de C_2 son

$$f(7, -1) = 72 \quad \text{y} \quad f(7, 7) = 224.$$

Finalmente, en C_3 se tiene que $y = x$ y los valores de f están dados por

$$f(x, x) = x^2 - 4x^2 + x^3 + 4x = x^3 - 3x^2 + 4x.$$

La primera derivada $3x^2 - 6x + 4$ no tiene raíces reales y por lo tanto, no hay números críticos de $f(x, x)$. Ya habíamos calculado los valores $f(-1, -1) = -8$ y $f(7, 7) = 224$ en los extremos. Por lo tanto, estos valores en los extremos son el mínimo y el máximo absolutos de f en la región triangular R. •

EJEMPLO 5 Se desea contruir una caja sin tapa con la forma de un paralelepípedo rectangular que tenga un volumen de 12 pie^3. El costo por pie cuadrado del material

5. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$

6. $f(x, y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$

7. $f(x, y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$

8. $f(x, y) = \cos x + \cos y$

9. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

10. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

11. $f(x, y) = \dfrac{4y + x^2y^2 + 8x}{xy}$

12. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

13. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$; $0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi$

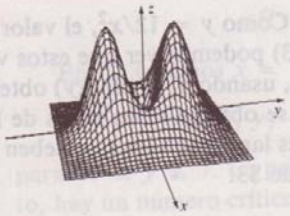
14. $f(x, y) = \dfrac{(x + y + 1)^2}{x^2 + y^2 + 1}$

15. La figura presenta una gráfica generada por computadora de

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$$

Parece haber cuatro puntos críticos. Demuestre que en realidad hay cinco puntos críticos y encuentre los máximos y mínimos de f.

EJERCICIO 15

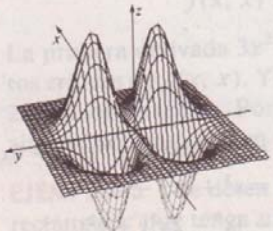


16. La figura ofrece una gráfica generada por computadora de

$$f(x, y) = xy^2e^{-(x^2+y^2)/4}$$

Parece haber cuatro puntos. Encuentre las coordenadas de estos cuatro puntos pero demuestre que hay una infinidad de puntos críticos además de estos. ¿En dónde se hallan?

EJERCICIO 16



Ejercicios 17-22: Encuentre el máximo y el mínimo absolutos de f suponiendo que el dominio es la región R indicada. (Consulte los Ejercicios 1-6 para obtener los máximos y mínimos locales.)

17. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$; $R = \{(x, y): -2 \le x \le 4, -1 \le y \le 3\}$

(*Sugerencia:* Para determinar los máximos y mínimos en la frontera, considere las siguientes funciones de *una* variable: $f(x, -1)$, $f(x, 3)$, $f(-2, y)$ y $f(4, y)$.)

18. $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$; $R = \{(x, y): |x| \le 3, |y| \le 2\}$

19. $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$; la región triangular R con vértices $(1, 2)$, $(1, -2)$ y $(-1, -2)$.

20. $f(x, y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2$; la región R acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 9$.

21. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$; la región R acotada por la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

22. $f(x, y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$; la región triangular R acotada por las rectas $y = x$, $y = -x$ y $y = 2$.

23. Establezca la distancia más corta del punto $P(2, 1, -1)$ al plano $4x - 3y + z = 5$.

24. Calcule la distancia más corta entre los planos $2x + 3y - z = 2$ y $2x + 3y - z = 4$.

25. Halle los puntos en la gráfica de $xy^3z^2 = 16$ que están más cerca del origen.

26. Encuentre tres números reales positivos cuya suma sea 1000 y su producto sea máximo.

27. Si una caja abierta con forma de paralelepípedo rectangular debe tener volumen V, ¿con qué dimensiones es mínima el área de su superficie?

28. Si una caja abierta con forma de paralelepípedo rectangular debe tener superficie con área A, ¿qué dimensiones harán que el volumen sea máximo?

29. Encuentre las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo con caras paralelas a los lados que puede inscribirse en el elipsoide

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144.$$

39.

Valores de x	1	4	7
Valores de y	3	5	6

40.

Valores de x	1	4	6	8
Valores de y	1	3	2	4

41. La siguiente tabla muestra una lista de la relación entre los promedios durante el semestre y las calificaciones en el examen final de diez estudiantes en una clase de matemáticas.

Promedio en el semestre	40	55	62	68	72	76	80	86	90	94
Examen final	30	45	65	72	60	82	76	92	88	98

Ajuste una recta a estos datos y úsela para predecir la calificación en el examen final de un estudiante con un promedio durante el semestre de 70.

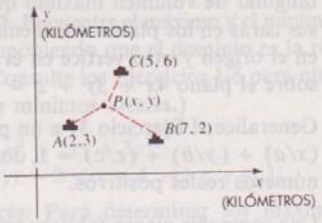
42. Al estudiar el diagrama de carga y alargamiento de un material elástico sometido a tensión (véase la página 287) un ingeniero encuentra que una parte de la curva parece ser lineal. En la tabla aparece una lista de algunos valores experimentales.

Carga (kgf)	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
Alargamiento (cm)	0.10	0.30	0.40	0.60	0.70	0.90

Ajuste una recta a estos datos y estime el alargamiento para una carga de 7.5 kgf.

43. La figura muestra las posiciones relativas de tres pueblos A, B y C. Los urbanistas adoptan el criterio de mínimos cuadrados para decidir en dónde construir una nueva escuela secundaria para dar servicio a las tres comunidades. La escuela se construirá en el punto $P(x, y)$ en el que las sumas de los cuadrados de las distancias a los pueblos A, B y C sea mínima. Encuentre la posición relativa del sitio para la construcción.

EJERCICIO 43



44. Generalice el Ejercicio 43 al caso de n pueblos localizados en los puntos $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$, . . . , $Q_n(x_n, y_n)$.

45. El Ejercicio 37 se puede generalizar al problema de encontrar el plano $z = ax + by + c$ que mejor se ajusta a los datos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), . . . , (x_n, y_n, z_n). El método de mínimos cuadrados consiste en determinar los valores a, b y c para los que

$$f(a, b, c) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ax_k - by_k - c)^2$$

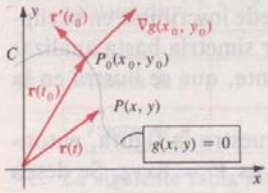
sea mínima. Encuentre un sistema de tres ecuaciones en las tres incógnitas a, b y c. Obtenga el plano que mejor se ajusta a los datos (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) y (1, 1, 2). (*Sugerencia:* Resuelva el sistema de tres ecuaciones $f_a = 0$, $f_b = 0$, $f_c = 0$.)

46. Tres alelos (variantes de un gen) A, B y O determinan los cuatro grupos sanguíneos del género humano: A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB. La ley de Hardy-Weinberg afirma que la proporción de individuos en una población que tiene dos alelos diferentes está dada por la fórmula $P = 2pq + 2pr + 2rq$, donde p, q y r son las proporciones en la población de los alelos A, B y O, respectivamente. Demuestre que P debe ser menor que o igual a $\frac{2}{3}$. (*Sugerencia:* $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$ y $p + q + r = 1$.)

16.9 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Las definiciones de máximos y mínimos dadas en la sección anterior se pueden generalizar a funciones f de cualquier número de variables. En muchas aplicaciones, para calcular los máximos y mínimos de f, hay que restringir las variables de alguna manera.

FIGURA 16.61



el vector de posición del punto $P(x, y)$ en C (véase la Figura 16.61) y sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto en el que f alcanza el valor máximo o mínimo y que corresponde a $t = t_0$, es decir,

$$\mathbf{r}(t_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} = h(t_0)\mathbf{i} + k(t_0)\mathbf{j}.$$

Si se define una función F de una variable t mediante

$$F(t) = f(h(t), k(t)),$$

entonces cuando t varía, se obtienen valores de la función $f(x, y)$ que corresponden a (x, y) en C, es decir, $f(x, y)$ está sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$. Como $f(x_0, y_0)$ es un máximo o mínimo de f bajo esta restricción, resulta que $F(t_0) = f(h(t_0), k(t_0))$ es un máximo o mínimo de $F(t)$. Entonces $F'(t_0) = 0$. Considerando a F como una función compuesta y usando la Regla de la Cadena,

$$F'(t) = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt} = f_x(x, y)h'(t) + f_y(x, y)k'(t).$$

Tomando $t = t_0$,

$$0 = F'(t_0) = f_x(x_0, y_0)h'(t_0) + f_y(x_0, y_0)k'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0).$$

Esto demuestra que el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ a C (véase el Teorema (16.35)). Pero $\nabla g(x_0, y_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ porque C es una curva de nivel de g. Como $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son ortogonales al mismo vector, son paralelos, es decir, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algún λ. • •

El número λ que aparece en el Teorema (16.38) es un **multiplicador de Lagrange**. Para aplicar este método se comienza considerando las ecuaciones

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \text{y} \quad g(x, y) = 0$$

o, equivalentemente,

(16.39) $$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y), \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \quad \text{y} \quad g(x, y) = 0.$$

Si f, sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$, tiene un máximo o mínimo en (x_0, y_0), entonces (x_0, y_0) debe ser solución de todas las ecuaciones en (16.39). Por lo tanto, para determinar los máximos y mínimos se necesita encontrar los puntos (a, b) que para algún valor adecuado λ satisfacen las tres ecuaciones en (16.39). Si f tiene un máximo o un mínimo, éste será el mayor o el menor de los valores de la función en esos puntos.

EJEMPLO 1 Calcular los máximos y mínimos de $f(x, y) = xy$ para (x, y) restringido a la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

Solución En este ejemplo la restricción es $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$. Tomando $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ obtenemos

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})$$

EJEMPLO 2 Calcular el volumen máximo del paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados que se puede inscribir en el elipsoide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

Solución La Figura 16.59 muestra una posición típica del paralelepípedo. Se desea obtener el valor máximo del volumen

$$V = f(x, y, z) = 8xyz$$

sujeto a la restricción

$$g(x, y, z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0.$$

Como en (16.40), comenzamos escribiendo $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$, o

$$8yz\mathbf{i} + 8xz\mathbf{j} + 8xy\mathbf{k} = \lambda(32x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 18z\mathbf{k}).$$

Esto, junto con $g(x, y, z) = 0$, da el siguiente sistema de cuatro ecuaciones:

$$8yz = 32x\lambda, \quad 8xz = 8y\lambda, \quad 8xy = 18z\lambda, \quad 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y, la tercera por z y sumándolas, obtenemos

$$24xyz = 32x^2\lambda + 8y^2\lambda + 18z^2\lambda = 2\lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2).$$

Esto, junto con el hecho de que $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$, implica que

$$24xyz = 2\lambda(144) \qquad \text{o bien} \qquad xyz = 12\lambda.$$

Esta última ecuación sirve para encontrar x, y y z. Por ejemplo, multiplicando por x ambos lados de la ecuación $8yz = 32x\lambda$, obtenemos

$$\begin{aligned} 8xyz &= 32x^2\lambda \\ 8(12\lambda) &= 32x^2\lambda \\ 96\lambda - 32x^2\lambda &= 0 \\ 32\lambda(3 - x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\lambda = 0$ o $x = \sqrt{3}$. Se puede rechazar $\lambda = 0$ porque esta solución lleva a $xyz = 0$ y entonces $V = 8xyz = 0$. Por lo tanto, la única posibilidad para x es $\sqrt{3}$.

Análogamente, multiplicando por y ambos lados de la ecuación $8xz = 8y\lambda$, obtenemos

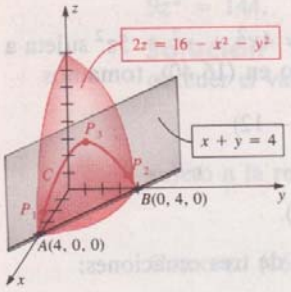
$$\begin{aligned} 8xyz &= 8y^2\lambda \\ 8(12\lambda) &= 8y^2\lambda \\ 96\lambda - 8y^2\lambda &= 0 \\ 8\lambda(12 - y^2) &= 0 \end{aligned}$$

y por tanto, $y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Finalmente, por z multiplicando la ecuación $8xy = 18z\lambda$ y usando el mismo método, resulta $z = 4\sqrt{3}/3$. Concluimos que el volumen deseado es

$$V = 8xyz = 8(\sqrt{3})(2\sqrt{3})\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = 64\sqrt{3} \approx 111. \quad \bullet$$

FIGURA 16.63



$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Es posible encontrar estos valores determinando las ternas (x, y, z) en las que el radicando

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

alcanza su máximo y su mínimo sujeto a las restricciones

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$$

y

$$h(x, y, z) = x + y - 4 = 0.$$

Como en la discusión anterior, consideramos

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda\nabla(x^2 + y^2 + 2z - 16) + \mu\nabla(x + y - 4).$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} &= \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + \mu(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= (2x\lambda + \mu)\mathbf{i} + (2y\lambda + \mu)\mathbf{j} + (2\lambda)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Igualando las componentes y usando las dos restricciones, obtenemos el siguiente sistema de cinco ecuaciones:

$$2x = 2x\lambda + \mu$$

$$2y = 2y\lambda + \mu$$

$$2z = 2\lambda$$

$$x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$$

$$x + y - 4 = 0$$

Restando la segunda ecuación de la primera:

$$2x - 2y = (2x\lambda + \mu) - (2y\lambda + \mu) = 2x\lambda - 2y\lambda$$

o sea

$$2(x - y) - 2\lambda(x - y) = 0$$

y por lo tanto,

$$2(x - y)(1 - \lambda) = 0.$$

En consecuencia, $\lambda = 1$ o bien $x = y$.

Si $\lambda = 1$, tenemos que $2z = 2\lambda = 2(1)$ o bien $z = 1$. La primera restricción $x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$ da $x^2 + y^2 - 14 = 0$. Resolviendo esta ecuación simultáneamente con $x + y - 4 = 0$, encontramos que

$$x = 2 + \sqrt{3}, \quad y = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{o bien} \qquad x = 2 - \sqrt{3}, \quad y = 2 + \sqrt{3}.$$

Por lo tanto, los puntos de C en donde pueden alcanzarse los valores extremos son

$$P_1(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1) \quad \text{y} \quad P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1).$$

Las distancias correspondientes desde el origen O son

$$d(O, P_1) = \sqrt{15} = d(O, P_2).$$

29. La resistencia de una viga de sección transversal rectangular es proporcional al producto de su anchura y el cuadrado de su peralte (o altura). Encuentre las dimensiones de la viga rectangular más resistente que se puede extraer de un tronco cilíndrico cuyas secciones transversales son elipses con eje mayor de 24 cm y eje menor de 16 cm.

30. Para fabricar $f(x, y)$ unidades de cierto producto se requieren x unidades de capital y y unidades de mano de obra. La *función de producción de Cobb-Douglas* se define como $f(x, y) = kx^a y^b$, donde k es una constante y a y b son números positivos tales que $a + b = 1$. Supongamos que $f(x, y) = x^{1/5}y^{4/5}$, que cada unidad de capital tiene un costo C y cada unidad de mano de obra tiene un costo L, y que la cantidad monetaria total disponible para cubrir estos gastos es M, de manera que $xC + yL = M$. ¿Cuántas unidades de capital y de mano de obra deben emplearse para lograr la producción máxima?

16.10 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Funciones de varias variables.
2. Curvas de nivel.
3. Superficies de nivel.
4. Límites de las funciones de varias variables.
5. Puntos interiores de una región.
6. Puntos en la frontera de una región.
7. Región cerrada.
8. Continuidad de las funciones de varias variables.
9. Primeras derivadas parciales.
10. Derivadas parciales de orden superior.
11. Incrementos de las funciones de varias variables.
12. Diferenciales.
13. Función diferenciable.
14. Regla de la Cadena.
15. Derivación implícita usando las derivadas parciales.
16. La derivada direccional.
17. El gradiente y sus propiedades.
18. Planos tangentes y rectas normales.
19. Máximos y mínimos de funciones de varias variables.
20. Multiplicadores de Lagrange.

EJERCICIOS 16.10

Ejercicios 1-4: Determine el dominio de f.

1. $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 + 9y^2}$
2. $f(x, y) = \ln xy$
3. $f(x, y, z) = (z^2 - x^2 - y^2)^{-3/2}$
4. $f(x, y, z) = (\sec z)/(x - y)$

Ejercicios 5-6: Calcule el límite si es que existe.

5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy + 5}{y^2 + 4}$
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$
7. Use coordenadas polares para demostrar que las curvas de nivel de $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)^{3/2}$ son rosas de cuatro pétalos. ¿Cuál es el valor de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$?
8. La gráfica generada por una computadora de $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^2)^2$ que se muestra en la figura, indica que f tiene primeras derivadas parciales en (0, 0) pero no es continua ahí. Verifique estos hechos.

Ejercicios 32-33: Encuentre los máximos y mínimos de f.

32. $f(x, y) = x^2 - 6x \cos y + 9$

$f(x, y) = x^2 + 3y - y^3$

34. El material para el fondo de una caja en forma de un paralelepípedo rectangular cuesta el doble por centímetro cuadrado que el que se usa para los lados y la tapa. ¿Cuáles con las dimensiones relativas con las que es mínimo el costo para un volumen fijo?

35. Dada $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{25}y^2$, trace varias curvas de nivel de f y represente $\nabla f]_P$ por un vector para un punto P de cada curva.

36. Dada $F(x, y, z) = z + 4x^2 + 9y^2$, trace varias superficies de nivel de F y represente $\nabla F]_P$ por un vector para un punto P en cada superficie.

37. Use el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los máximos y mínimos locales de $f(x, y, z) = xyz$ sujeta a la restricción $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 8$. También hágalo usando el Teorema (16.37).

38. Use el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los máximos y mínimos locales de $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones $2x - y + z = 4$ y $x + 2y - z = 1$. Verifique su respuesta usando métodos de una sola variable.

39. Encuentre los puntos de la gráfica de $x^{-1} + 2y^{-1} + 3z^{-1} = 1$ más cercanos al origen.

40. Se desea construir la tolva de un silo (o elevador de granos) en forma de un cono circular recto de 2 pie de radio, coronado por un cilindro circular recto, como se muestra en la figura. El volumen de la tolva debe ser de 100 pie^3. Calcule las alturas h y k del cilindro y del cono, respectivamente, para las que el área de la superficie es mínima.

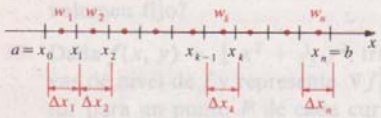
EJERCICIO 40



17.1 INTEGRALES DOBLES

La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función f de una variable se definió en (5.8). En este capítulo y en el siguiente se consideran integrales de las funciones de varias variables: *integrales dobles, integrales triples, integrales de superficie* e *integrales de línea*. Cada una de éstas se define de manera parecida a la que se utilizó para las integrales de las funciones de una variable. La diferencia principal es el dominio del integrando.

FIGURA 17.1



La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede definir en los siguientes cuatro pasos. (El Paso 1 y el Paso 2 se ilustran en la Figura 17.1.)

Paso 1 Tomar una partición de $[a, b]$ escogiendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Paso 2 Para cada k, elegir un número w_k en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

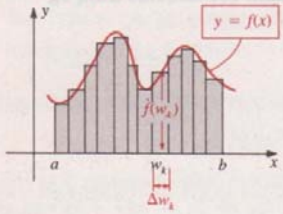
Paso 3 Considerar la suma de Riemann $\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k$, donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Paso 4 Establecer que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k.$$

donde $\|P\|$ es la norma de la partición (el mayor Δx_k).

FIGURA 17.2

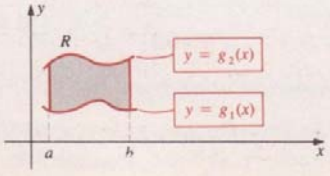


Si f no es negativa en $[a, b]$, entonces la suma de Riemann $\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k$ del Paso 3 es una suma de áreas de rectángulos como los que se ilustran en la Figura 17.2. Esta suma se aproxima al área de la región que se encuentra bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$. Si el límite de las sumas de Riemann cuando $\|P\| \to 0$ existe (Paso 4), entonces se obtiene la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ cuyo valor es el área (exacta) bajo la gráfica.

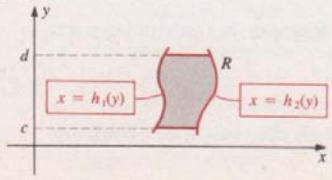
Sea f una función de *dos* variables tal que $f(x, y)$ existe en toda una región cerrada R del plano xy. A continuación se definirá la integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$. La definición seguirá el proceso de cuatro pasos usado para las funciones de una variable. Para lo que sigue las regiones en el plano xy de los tipos ilustrados en la Figura 17.3 son de particular importancia. Se supone que las funciones g_1, g_2 y h_1, h_2 son continuas en los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente, y satisfacen $g_1(x) \le g_2(x)$ para todo x en $[a, b]$ y $h_1(y) \le h_2(y)$ para todo y en $[c, d]$. La región ilustrada en la Figura 17.3(i) es una **región del Tipo I** y la ilustrada en la Figura 17.3(ii) es una **región del Tipo II**.

FIGURA 17.3

(i) Región del Tipo I



(ii) Región del Tipo II



significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $P = \{R_k\}$ es una partición interna de R con $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_k f(u_k, v_k)\, \Delta A_k - L \right| < \varepsilon$$

para cualquier elección de los pares (u_k, v_k) en R_k.

La Definición (17.2) afirma que se puede hacer que las sumas de Riemann de f se acerquen a L tanto como se quiera escogiendo particiones internas de norma $\|P\|$ suficientemente pequeña.

La integral doble de f se define como sigue:

DEFINICIÓN (17.3)

Sea f una función de dos variables que está definida en una región R. La **integral doble de f sobre R** se denota por $\iint_R f(x, y)\, dA$ y se define por

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\, \Delta A_k,$$

siempre y cuando el límite exista.

Si la integral doble de f sobre R existe, entonces se dice que f es **integrable sobre R**. Se puede demostrar que si f es continua en R, entonces f es integrable sobre R.

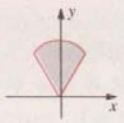
Hay una interpretación geométrica útil para las sumas de Riemann y las integrales dobles en el caso en que f es continua y $f(x, y) \geq 0$ en todo R. Sea S la gráfica de f, y Q el sólido (es decir la región en tres dimensiones) que se encuentra abajo de S y arriba de R, como se ilustra en la Figura 17.5. Si $P_k(u_k, v_k, 0)$ es un punto en la región R_k de una partición interna P de R, entonces $f(u_k, v_k)$ es la distancia del plano xy al punto B_k en S que se encuentra directamente arriba de P_k. El número $f(u_k, v_k)\, \Delta A_k$ es el volumen del prisma con base rectangular de área ΔA_k, como se ilustra en la Figura 17.5. La suma de los volúmenes de todos los prismas (véase la Figura 17.6) es una aproximación al volumen V de Q. (Esto es análogo a la suma de los rectángulos que se muestran en la Figura 17.2 para las sumas de Riemann de las funciones de una variable.) Como se ve que la aproximación al volumen mejora cuando $\|P\|$ tiende a cero, V se define como el límite de las sumas de los números $f(u_k, v_k)\, \Delta A_k$. Aplicando (17.3) se obtiene lo siguiente.

DEFINICIÓN (17.4)

Sea f una función continua de dos variables tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región R. El **volumen V** del sólido comprendido bajo la gráfica de $z = f(x, y)$ y sobre la región R es

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

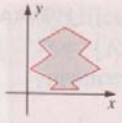
4.



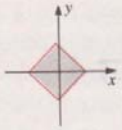
5.



6.



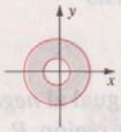
7.



8.



9.



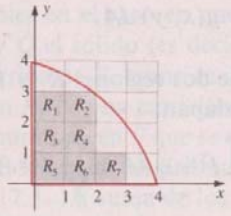
10.



11. Sea $f(x, y) = 4x + 2y + 1$ y sea R la región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y la gráfica de $y = 4 - \frac{1}{4}x^2$. Sea $\{R_k\}$ para $k = 1, 2, \ldots, 7$ la partición interna de R que se muestra en la figura. Calcule la suma de Riemann $\sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta A_k$ si para cada k, (u_k, v_k) es el punto

(a) de la esquina inferior izquierda de R_k.
(b) de la esquina superior derecha de R_k.
(c) en el centro de R_k.

EJERCICIO 11



12. Sea $f(x, y) = xy$ y sea R la región acotada por el trapecio con vértices (0, 0), (4, 4), (8, 4) y (12, 0). Sea P la partición interna de R determinada por las rectas verticales con abscisas 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, y por las rectas horizontales con ordenadas 0, 2, 4. Calcule las sumas de Riemann como en (a)-(c) del Ejercicio 11.

13. Sea R la región triangular con vértices (0, 0), (6, 0), (6, 12) y sea P la partición interna de R determinada por las rectas verticales con abscisas 0, 1, 3, 4, 6, y por las rectas horizontales con ordenadas 0, 2, 5, 7, 8, 12. Calcule la suma de Riemann para la partición P de la función f dada por $f(x, y) = x^2y$, donde (u_k, v_k) es el centroide de R_k.

14. Sea

$$R = \{(x, y): 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le \sqrt{25 - x^2}\}.$$

y sea P la partición de R determinada por las rectas verticales con intercepciones x iguales a 0, 2, 3, 4, 5, y por las rectas horizontales con intercepciones y iguales a 0, 2, 4, 5. Calcule la suma de Riemann para P de la función f dada por $f(x, y) = 4 - xy$, donde (u_k, v_k) es el punto en la esquina inferior derecha de R_k.

15. Sean $R = \{(x, y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ y $f(x, y) = k$ para todo (x, y) en R. Haga la demostración de que la integral doble de f sobre R es igual a $k(b - a)(d - c)$, usando (a) la Definición (17.3) y (b) la Definición (17.4).

16. Sean f y g dos funciones integrables sobre R tales que $f(x, y) \ge g(x, y)$ para todo (x, y) en R. Use las propiedades de las integrales dobles para demostrar que

$$\iint_R f(x, y)\,dA \ge \iint_R g(x, y)\,dA.$$

17. Demuestre el Teorema (17.5) (i). (*Sugerencia:* Véase la demostración del Teorema (5.14) en el Apéndice II.)

18. Demuestre el Teorema (17.5) (ii). (*Sugerencia:* Véase la demostración del Teorema (5.15) en el Apéndice II.)

17.2 EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES DOBLES

Excepto en algunos casos elementales, es casi imposible calcular el valor de una integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$ directamente a partir de la Definición (17.3). En esta sección se

Análogamente, puede integrarse $B(y)$ con respecto a y y se obtiene

$$\int_c^d B(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy.$$

Las integrales en el lado derecho de las dos fórmulas anteriores se llaman **integrales dobles iterativas**. Es costumbre simplificar la notación omitiendo los corchetes, como se especifica en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (17.6)

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy.$$

Obsérvese que en (17.6) la *primera* diferencial a la *derecha* del integrando $f(x, y)$ determina la variable de la *primera* integración parcial. El primer símbolo de integral a la *izquierda* de $f(x, y)$ especifica los límites o extremos de integración de dicha variable. Así, al evaluar una integral iterativa se determina primero la integral de *adentro*.

EJEMPLO 2 Evaluar $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)\,dy\,dx$.

Solución Por la Definición (17.6),

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left[\int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)\,dy\right] dx &= \int_1^4 \left[2xy + 3x^2y^2\right]_{-1}^2 dx \\ &= \int_1^4 [(4x + 12x^2) - (-2x + 3x^2)]\,dx \\ &= \int_1^4 (6x + 9x^2)\,dx \\ &= 3x^2 + 3x^3\Big]_1^4 = 234\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y)\,dx\,dy$.

Solución Por la Definición (17.6),

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \left[\int_1^4 (2x + 6x^2y)\,dx\right] dy &= \int_{-1}^2 \left[x^2 + 2x^3y\right]_1^4 dy \\ &= \int_{-1}^2 [(16 + 128y) - (1 + 2y)]\,dy \\ &= \int_{-1}^2 (126y + 15)\,dy \\ &= 63y^2 + 15y\Big]_{-1}^2 = 234\end{aligned}$$

El hecho de que las integrales iterativas en los Ejemplos 2 y 3 son iguales no es una casualidad. Si f es continua, entonces las dos integrales iterativas en (17.6) son *siempre* iguales. (La demostración puede encontrarse en libros de Cálculo avanzado.) Se dice que el resultado de la integración es independiente del *orden en que se integre*.

$$= -\cos y^2 - \tfrac{1}{2}y^2\Big]_1^3$$
$$= (-\cos 9 - \tfrac{9}{2}) - (-\cos 1 - \tfrac{1}{2})$$
$$= \cos 1 - \cos 9 - 4 \approx -2.55$$ •

El siguiente teorema dice que si la región R es del Tipo I o del Tipo II, entonces la integral doble definida en la Sección 17.1 se puede evaluar mediante una integral iterativa.

TEOREMA DE EVALUACIÓN DE INTEGRALES DOBLES (17.8)

(i) Sea R la región del Tipo I que se muestra en la Figura 17.9(i). Si f es continua en R, entonces

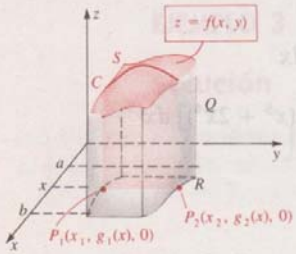
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

(ii) Sea R la región del Tipo II que se muestra en la Figura 17.9(ii). Si f es continua en R, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

En el Teorema (17.8) (i) la región R debe tener como **frontera inferior** la gráfica de una ecuación $y = g_1(x)$ y como **frontera superior** la gráfica de una ecuación $y = g_2(x)$ (véase la Figura 17.9(i)). En (ii) R debe tener como **frontera izquierda** la gráfica de una ecuación $x = h_1(y)$, y como **frontera derecha** la gráfica de una ecuación $x = h_2(y)$ (véase la Figura 17.9(ii)). Cuando una región es más complicada, a menudo puede dividirse en subregiones de los tipos requeridos y luego aplicar (i) o (ii) a cada subregión.

FIGURA 17.10



La demostración del Teorema (17.8) puede encontrarse en libros de Cálculo avanzado. A continuación se da una explicación intuitiva para funciones no negativas. Supongamos que $f(x, y) \geq 0$ en la región R de Tipo I que se ilustra en la Figura 17.9(i). Sean S la gráfica de f, Q el sólido que se encuentra bajo S y sobre R, y V el volumen de Q. Consideramos primero un plano paralelo al plano yz que corta al eje x en un punto $(x, 0, 0)$ con $a \leq x \leq b$. En la Figura 17.10 se ilustra la traza C de S que está en este plano. Los puntos $P_1(x, g_1(x), 0)$ y $P_2(x, g_2(x), 0)$ son en los que el plano corta a las fronteras $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$ de R. En la figura se muestra la parte del plano que se encuentra arriba del segmento P_1P_2 y abajo de la superficie S.

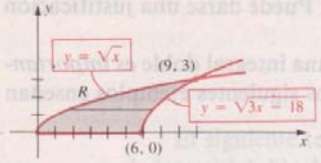
De acuerdo con lo que se vio en el Capítulo 6, el área $A(x)$ de esta parte del plano es

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Como $A(x)$ es el área de una sección transversal típica de Q, de (6.8) se deduce que

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

FIGURA 17.13



Solución Las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = \sqrt{3x - 18}$ son las mitades superiores de las parábolas $y^2 = x$ y $y^2 = 3x - 18$. La región R está en la Figura 17.13.

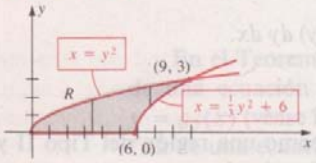
(a) Si sólo queremos usar el Teorema (17.8) (i), es necesario utilizar dos integrales iterativas porque para $0 \le x \le 6$ la frontera inferior de la región es la gráfica de $y = 0$, y para $6 \le x \le 9$, la frontera inferior es la gráfica de $y = \sqrt{3x - 18}$ (Los segmentos verticales en la Figura 17.13 van de la frontera inferior a la frontera superior de R.)

Si R_1 denota la parte de la región R que se encuentra entre $x = 0$ y $x = 6$, y R_2 denota la parte entre $x = 6$ y $x = 9$, entonces R_1 y R_2 son regiones del Tipo I. Por tanto,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx + \int_6^9 \int_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$$

FIGURA 17.14



(b) Para usar el Teorema (17.8) (ii), despejamos x en términos de y de cada una de las ecuaciones, obteniendo así

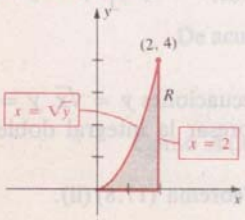
$$x = y^2 \quad \text{y} \quad x = \frac{y^2 + 18}{3} = \frac{1}{3}y^2 + 6 \quad \text{para } 0 \le y \le 3.$$

El segmento horizontal en la Figura 17.14 va de la frontera izquierda a la frontera derecha. En este caso se requiere sólo una integral iterativa porque R es una región del Tipo II. Así,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^3 \int_{y^2}^{(y^2/3)+6} f(x, y)\, dx\, dy \quad \bullet$$

Los Ejemplos 6 y 7 muestran cómo pueden evaluarse ciertas integrales dobles usando (i) o (ii) del Teorema (17.8). En general, la elección del *orden de integración dy dx* o *dx dy* depende de la forma de $f(x, y)$ y de la región R. A veces es muy difícil, o hasta imposible, evaluar una integral doble iterativa. Sin embargo, *invirtiendo a veces el orden de integración* de *dy dx* a *dx dy*, o viceversa se puede obtener una integral doble iterativa que es posible evaluar fácilmente. Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 17.15



EJEMPLO 8 Dada $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5\, dx\, dy$, invertir el orden de integración y evaluar la integral resultante.

Solución El orden de integración indicado *dx dy* señala que la región R es del Tipo II. Como se ilustra en la Figura 17.15, las fronteras izquierda y derecha son las gráficas de $x = \sqrt{y}$ y $x = 2$, respectivamente para $0 \le y \le 4$.

25. $8y = x^3$, $y - x = 4$, $4x + y = 9$

26. $x = 2\sqrt{y}$, $\sqrt{3}x = \sqrt{y}$, $y = 2x + 5$

27. $x = \sqrt{3 - y}$, $y = 2x$, $x + y + 3 = 0$

28. $x + 2y = 5$, $x - y = 2$, $2x + y = -2$

29. $y = e^x$, $y = \ln x$, $x + y = 1$, $x + y = 1 + e$

30. $y = \operatorname{sen} x$, $\pi y = 2x$

Ejercicios 31-38: Represente la región de integración correspondiente a la integral iterativa.

31. $\int_{-1}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} f(x, y)\, dy\, dx$

32. $\int_{-1}^{2} \int_{x^2-4}^{x-2} f(x, y)\, dy\, dx$

33. $\int_{0}^{1} \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\, dx\, dy$

34. $\int_{-2}^{-1} \int_{3y}^{2y} f(x, y)\, dx\, dy$

35. $\int_{-3}^{1} \int_{\arctan x}^{e^x} f(x, y)\, dy\, dx$

36. $\int_{-1}^{2} \int_{\operatorname{senh} x}^{\cosh x} f(x, y)\, dy\, dx$

37. $\int_{-1}^{1} \int_{1-y^4}^{\cosh y} f(x, y)\, dx\, dy$

38. $\int_{\pi}^{2\pi} \int_{\operatorname{sen} y}^{\ln y} f(x, y)\, dx\, dy$

Ejercicios 39-44: Invierta el orden de integración y evalúe la integral resultante.

39. $\int_{0}^{1} \int_{2x}^{2} e^{(y^2)}\, dy\, dx$

40. $\int_{0}^{9} \int_{\sqrt{y}}^{3} \operatorname{sen} x^3\, dx\, dy$

41. $\int_{0}^{2} \int_{y^2}^{4} y \cos x^2\, dx\, dy$

42. $\int_{1}^{e} \int_{0}^{\ln x} y\, dy\, dx$

43. $\int_{0}^{8} \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} \frac{y}{\sqrt{16 + x^7}}\, dx\, dy$

44. $\int_{0}^{1} \int_{x}^{1} \frac{1}{y} \operatorname{sen} y \cos \frac{x}{y}\, dy\, dx$

17.3 ÁREA Y VOLUMEN

En la sección anterior se vio que el volumen V de un sólido que se encuentra bajo la gráfica de $z = f(x, y)$ y sobre una región del Tipo I en el plano xy está dada por

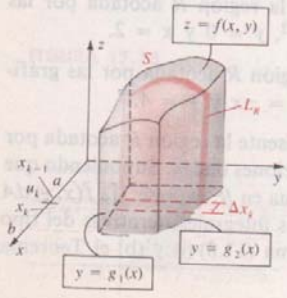
$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

donde $A(x)$ es el área de una sección transversal típica del sólido (véase la Figura 17.10). Estas integrales pueden considerarse límites de sumas. Por la fórmula (6.8) para determinar el volumen por secciones:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \lim_{\|P'\| \to 0} \sum_k A(u_k)\, \Delta x_k$$

donde P' es una partición del intervalo $[a, b]$, u_k es cualquier número en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de P' y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Como se ilustra en la Figura 17.16, $A(u_k)\, \Delta x_k$ es el volumen de una región laminar L_k con caras paralelas al plano yz y cuya base es un rectángulo de ancho Δx_k en el plano xy. Entonces el volumen V puede considerarse como el límite de las sumas de los volúmenes de estas regiones laminares.

FIGURA 17.16



La integral *iterativa* $V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ se puede expresar también como límite de sumas. Primero se aplica la definición de la integral definida como sigue. Si x está en $[a, b]$, entonces

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy = \lim_{\|P''\| \to 0} \sum_j f(x, v_j)\, \Delta y_j$$

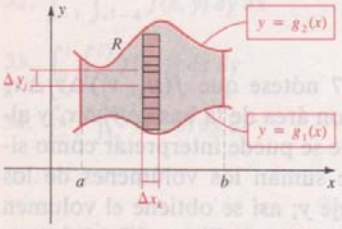
ción (17.3) es una suma de las áreas de los rectángulos de una partición interna P de R. Cuando la norma $\|P\|$ tiende a cero, los rectángulos cubren una parte mayor de R y el límite es igual al área de R.

Si se usa una integral iterativa para calcular un área, puede considerarse como límite de una suma doble, como se hizo para volúmenes. Concretamente, como en (17.9) pero con $f(x, y) = 1$, se tiene lo siguiente.

EL ÁREA COMO LÍMITE DE SUMAS DOBLES (17.10)

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k \sum_j \Delta y_j \, \Delta x_k$$

FIGURA 17.18



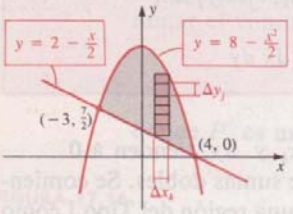
La suma doble en (17.10) puede interpretarse como sigue. Primero, *manteniendo x fija*, se suma sobre todos los rectángulos de áreas $\Delta y_j \, \Delta x_k$ en la dirección del eje y desde la gráfica de $y = g_1(x)$ hasta la gráfica de $y = g_2(x)$. Esto da el área de una franja rectangular paralela al eje y, como se ilustra en la Figura 17.18. Luego se "barre" la región R sumando sobre todas estas franjas desde $x = a$ hasta $x = b$. El límite de las sumas dobles (es decir la integral iterativa) efectúa esto al mismo tiempo que hace tender Δx_k y Δy_j a 0.

EJEMPLO 1 Calcular el área de la región acotada por las gráficas de

$$2y = 16 - x^2 \quad \text{y} \quad x + 2y - 4 = 0.$$

Solución La región se encuentra bajo la parábola $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$ y arriba de la recta $y = 2 - \frac{1}{2}x$, como se ilustra en la Figura 17.19. En la figura también se muestra un rectángulo típico de área $\Delta y_j \, \Delta x_k$, y la franja que se obtiene sumando en la dirección del eje y. Usando una integral iterativa tenemos

FIGURA 17.19



$$A = \int_{-3}^{4} \int_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dy\, dx = \int_{-3}^{4} y \Big]_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dx$$

$$= \int_{-3}^{4} \left[\left(8 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{x}{2}\right) \right] dx$$

$$= 6x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \Big]_{-3}^{4} = \frac{343}{12} \approx 28.6$$

Si se usa el Teorema (17.8)(ii) para calcular áreas, entonces

$$A = \iint_R dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_j \sum_k \Delta x_k \, \Delta y_j.$$

Esta doble suma puede interpretarse como sigue. Primero, *manteniendo y fija*, se suma sobre los rectángulos de áreas $\Delta x_k \, \Delta y_j$ en la dirección del eje x, desde la gráfica

en donde $(u_k^2 + v_j^2 + 1)\,\Delta y_j\,\Delta x_k$ representa el volumen de un prisma como el que se muestra en la Figura 17.22(i). Primero se suma en la dirección del eje y, desde $y = 0$ hasta $y = 2 - 2x$. El croquis en la Figura 17.22(ii) muestra la región R en el plano xy y una franja correspondiente a la primera suma. Esta primera suma da el volumen de una región laminar con caras paralelas al plano yz. Ahora sumamos los volúmenes de estas regiones laminares en la dirección del eje x desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Usando una integral iterativa,

$$V = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2y + \tfrac{1}{3}y^3 + y\right]_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\tfrac{14}{3}x^3 + 10x^2 - 10x + \tfrac{14}{3}\right) dx$$

$$= -\tfrac{7}{6}x^4 + \tfrac{10}{3}x^3 - 5x^2 + \tfrac{14}{3}x\Big]_0^1 = \tfrac{11}{6}.$$

También podemos calcular V integrando primero con respecto a x. En este caso la integral iterativa tiene la forma

$$V = \int_0^2 \int_0^{(2-y)/2} (x^2 + y^2 + 1)\,dx\,dy.$$

EJEMPLO 4 Calcular el volumen V del sólido acotado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 9$ y $y^2 + z^2 = 9$.

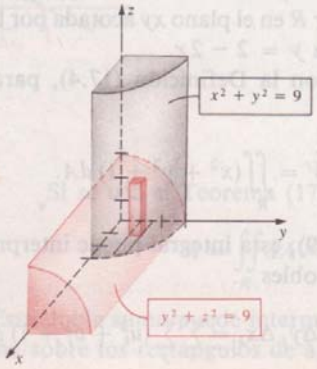
Solución Las gráficas son cilindros de radio 3 cuyos ejes se cortan ortogonalmente. En la Figura 17.23(i) se ilustra la parte de este sólido que está contenida en el primer octante. Por simetría, basta calcular el volumen de esta parte y multiplicar el resultado por 8. En la parte (i) de la figura se ve que el sólido se encuentra bajo la gráfica de $z = \sqrt{9 - y^2}$ y sobre la región R acotada por el eje x, por el eje y y por la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$. Entonces por la Definición (17.4),

$$V = 8 \iint_R (9 - y^2)^{1/2}\,dA.$$

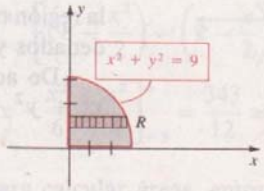
Podemos considerar la integral como límites de sumas dobles de los volúmenes de prismas, como se muestra en la Figura 17.23(i). Primero se suma en la dirección del

FIGURA 17.23

(i)



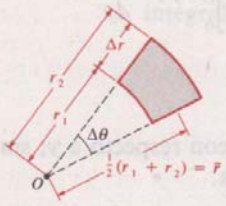
(ii)



17.4 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

FIGURA 17.24

$\Delta A = \bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta$



En esta sección se discute cómo evaluar una integral doble sobre una región R en un plano coordenado y que está acotada por gráficas de ecuaciones polares. Consideramos primero la región polar elemental de la Figura 17.24, delimitada por arcos de circunferencia de radios r_1 y r_2, con centro en el origen, y por dos rayos que parten de este punto. Si $\Delta\theta$ denota la medida en radianes del ángulo entre los rayos y $\Delta r = r_2 - r_1$, entonces el área ΔA de la región es

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}r_2^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_1^2\,\Delta\theta.$$

Esta fórmula también puede escribirse como

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\,\Delta\theta.$$

Si se denota el **radio medio** $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ por $\bar{r}$, entonces

$$\Delta A = \bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta.$$

Luego se considera una región R del tipo ilustrado en la Figura 17.25(i), acotada por dos rayos que forman ángulos positivos α y β con el eje polar, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$. Supóngase que las funciones g_1 y g_2 son continuas y que $g_1(\theta) \le g_2(\theta)$ para todo θ en el intervalo $[\alpha, \beta]$. Si R se subdivide por medio de arcos de circunferencia y rayos como se muestra en la Figura 17.25(ii), entonces el conjunto de regiones polares elementales $R_1, R_2, \ldots, R_n$ que están completamente contenidas en R es una **partición polar interior** P de R. La norma $\|P\|$ de P es la longitud mayor de las diagonales en las R_k. Si se escoge un punto (r_k, θ_k) en R_k tal que r_k es el radio medio, entonces

$$\Delta A_k = r_k\,\Delta r_k\,\Delta\theta_k.$$

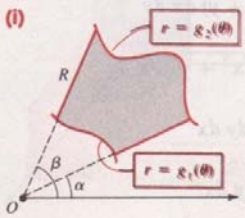
Para una función continua f de las variables polares r y θ, se puede demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA (17.11)

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(r_k, \theta_k) r_k\,\Delta r_k\,\Delta\theta_k = \iint_R f(r, \theta)\,dA$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

FIGURA 17.25

(i)



(ii)

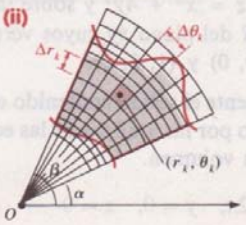
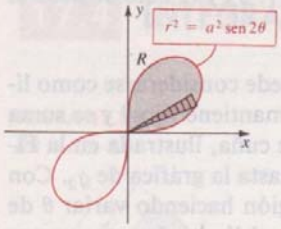


FIGURA 17.28



Solución La curva está en la Figura 17.28 junto con una cuña de regiones polares elementales obtenida sumando desde el origen ($r = 0$) hasta la frontera $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ de R en el primer cuadrante. Luego se describe tal rizo haciendo variar θ de 0 a $\pi/2$. (Obsérvese que r *no está definido* para $\pi/2 < \theta < \pi$ o bien $3\pi/2 < \theta < 2\pi$.)

Por el Teorema (17.11),

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2} r^2 \Big]_0^{a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}} d\theta = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$$

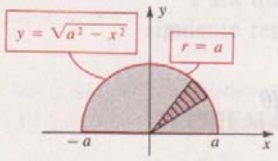
$$= -\tfrac{1}{4} a^2 \cos 2\theta \Big]_0^{\pi/2} = -\tfrac{1}{4} a^2 [-1 - 1] = \tfrac{1}{2} a^2 \quad \bullet$$

En condiciones adecuadas, una integral doble en coordenadas rectangulares se puede transformar en una integral doble en coordenadas polares. Primero se sustituyen en el integrando las variables x y y por $r\cos\theta$ y $r\operatorname{sen}\theta$. Luego se sustituye en la integral iterativa $dy\,dx$ o bien $dx\,dy$ por $r\,dr\,d\theta$ o bien $r\,d\theta\,dr$. La siguiente fórmula muestra la forma general del integrando. El símbolo de integral doble $\iint_R$ debe reemplazarse por un símbolo de integral *iterativa* apropiado.

(17.12)
$$\iint_R f(x, y)\, dy\, dx = \iint_R f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Si el integrando $f(x, y)$ de una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ contiene la expresión $x^2 + y^2$ o si la frontera de la región R incluye arcos de circunferencia, entonces el uso de las coordenadas polares facilita la evaluación. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 17.29



EJEMPLO 3 Usar coordenadas polares para evaluar

$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx.$$

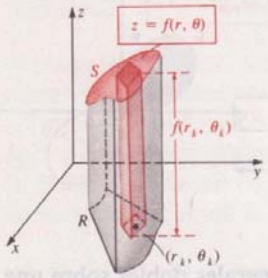
Solución La región de integración está delimitada por las gráficas de $y = 0$ (el eje x) y $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (media circunferencia), como se muestra en la Figura 17.29. Primero sustituimos $x^2 + y^2$ en el integrando por r^2 y $dy\,dx$ por $r\,dr\,d\theta$. Luego se cambian los límites a los de coordenadas polares. Haciendo referencia a la Figura 17.29, obtenemos

$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx = \int_0^{\pi} \int_0^{a} r^3\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{r^5}{5} \Big]_0^{a} d\theta = \frac{a^5}{5} \int_0^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{a^5}{5} \theta \Big]_0^{\pi} = \frac{\pi a^5}{5} \quad \bullet$$

FIGURA 17.32



en coordenadas *cilíndricas*. El sólido se encuentra bajo la gráfica de S y sobre la región R. Si se usa una partición polar de R, entonces la expresión $f(r_k, \theta_k)r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$ en (17.11) puede interpretarse como el volumen de un prisma de altura $f(r_k, \theta_k)$ y área de la base $r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$, como se ilustra en la Figura 17.32. El límite de las sumas de estas expresiones es igual al volumen.

EJEMPLO 5 Calcular el volumen V del sólido acotado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y por el plano xy.

Solución La parte del sólido incluida en el primer octante está en la Figura 17.33(i). Por simetría, basta encontrar el volumen de esta parte y multiplicar el resultado por 4. En coordenadas cilíndricas, la ecuación del paraboloide es $z = 4 - r^2$. La región R en el plano xy está acotada por los ejes coordenados y un cuarto de la circunferencia $r = 2$. Esto se muestra en la Figura 17.33(ii) junto con una cuña de regiones polares elementales.

De acuerdo con la discusión anterior a este ejemplo, con $f(r, \theta) = 4 - r^2$,

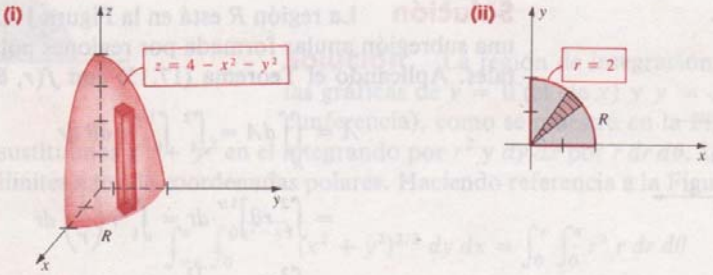
$$V = 4 \iint_R (4 - r^2)\, dA = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (4 - r^2) r\, dr\, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left[2r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right]_0^2 d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} 4\, d\theta = 16\theta \Big]_0^{\pi/2} = 8\pi.$$

El mismo problema, en coordenadas rectangulares, lleva a la siguiente integral doble:

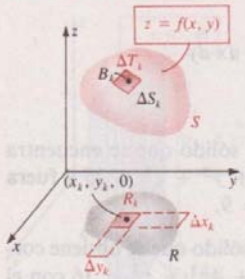
$$V = 4 \iint_R (4 - x^2 - y^2)\, dA = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4 - x^2}} (4 - x^2 - y^2)\, dy\, dx.$$

FIGURA 17.33



La evaluación de esta última integral convencerá de las ventajas de usar coordenadas cilíndricas (o polares) en ciertos problemas. •

FIGURA 17.34



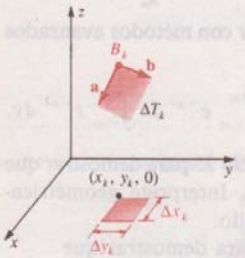
les. Sea f una función con primeras derivadas parciales continuas, tal que $f(x, y) \geq 0$ en toda una región R del plano xy. Sea S la parte de la gráfica de f cuya proyección en el plano xy es R, como se ilustra en la Figura 17.34. Para simplificar la discusión, se supondrá que ningún vector normal a S es paralelo al plano xy. A continuación se definirá el área A de S y se obtendrá una fórmula que puede usarse para calcular A.

Sea $P = \{R_k\}$ una partición interior de R, donde las longitudes de los lados de los rectángulos R_k son Δx_k y Δy_k. Sea $(x_k, y_k, 0)$ un punto cualquiera localizado en R_k y sea $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ el punto correspondiente en S. Consideremos ahora el plano tangente a S en B_k. Sean ΔT_k y ΔS_k las áreas de las regiones en el plano tangente y en S, respectivamente, que se obtiene proyectando R_k verticalmente hacia arriba (véase la Figura 17.34). Si la norma $\|P\|$ de la partición es pequeña, entonces ΔT_k es una aproximación a ΔS_k, y $\sum_k \Delta T_k$ es una aproximación al área A de S. Como esta aproximación mejora cuando $\|P\|$ tiende a 0, se obtiene el siguiente resultado.

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE (17.14)

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \Delta T_k.$$

FIGURA 17.35



Para encontrar una fórmula integral para A se escoge $(x_k, y_k, 0)$ como la esquina de R_k más cercana al origen. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ los vectores con punto inicial $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ que son tangentes a las trazas de S en los planos $y = y_k$ y $x = x_k$, respectivamente, como se ilustra en la Figura 17.35, en la que se muestra un rectángulo aislado. Usando la interpretación geométrica de las derivadas parciales dada en la Sección 16.3, las pendientes de las rectas determinadas por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en estos planos son $f_x(x_k, y_k)$ y $f_y(x_k, y_k)$, respectivamente. Resulta que

$$\mathbf{a} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\, \Delta x_k \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\, \Delta y_k \mathbf{k}.$$

El área ΔT_k del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k)\, \Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k, y_k)\, \Delta y_k \end{vmatrix}$$

se tiene,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -f_x(x_k, y_k)\, \Delta x_k\, \Delta y_k \mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\, \Delta x_k\, \Delta y_k \mathbf{j} + \Delta x_k\, \Delta y_k \mathbf{k}.$$

Se pueden obtener fórmulas semejantes a (17.15) cuando la superficie S tiene proyecciones adecuadas sobre los planos yz o xz. Por ejemplo, si S es la gráfica de una ecuación $y = g(x, z)$ y su proyección en el plano xz es R_1, entonces

$$A = \iint_{R_1} \sqrt{[g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2 + 1}\, dA.$$

También se puede dar una fórmula de este tipo cuando S está dada por $x = h(y, z)$.

EJERCICIOS 17.5

1. Calcule el área de la superficie de la parte de la gráfica de $z = y + \frac{1}{2}x^2$ que se encuentra sobre la región cuadrada del plano xy con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 0)$.
2. Determine el área de la región del plano $z = y + 1$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
3. Calcule el área de la parte de la gráfica de la ecuación $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = d^2$, donde a, b, c y d son números reales positivos.
4. Plantee, pero no evalúe, una integral para calcular el área de la superficie de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra sobre la región cuadrada del plano xy, con vértices $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$ y $(-1, -1, 0)$.
5. Calcule el área de la superficie de la parte de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se halla dentro del cilindro $x^2 + y^2 - ay = 0$.
6. Calcule el área de la superficie de la parte del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
7. Calcule el área de la superficie de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se obtiene al cortarlo por el plano $z = 1$.
8. Sea R la región triangular del plano xy con vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(2, 2, 0)$. Calcule el área de la superficie de la parte de la gráfica de $z = y^2$ que se encuentra sobre R.
9. Calcule el área de la superficie de la parte de la gráfica de $z = xy$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
10. Calcule el área de la superficie de la parte del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ que se encuentra en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

17.6 INTEGRALES TRIPLES

Las *integrales triples* de una función f de *tres* variables x, y, z se pueden definir siguiendo un proceso de cuatro pasos parecido al que se usó para las funciones de dos variables en la Sección 17.1. A continuación se definen para el caso más sencillo, cuando f es continua en un paralelepípedo rectangular Q dado por

$$Q = \{(x, y, z): a \le x \le b, c \le y \le d, m \le z \le n\}$$

como se ilustra en la Figura 17.38(i). Si se divide Q en subregiones $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ mediante planos paralelos a los tres planos coordenados (véase la Figura 17.38(ii)), entonces el conjunto $\{Q_k\}$ es una **partición** P de Q. La **norma** $\|P\|$ de la partición es la

EJEMPLO 1 Evaluar $\iiint_Q 3xy^3z^2\,dV$ para

$$Q = \{(x, y, z): -1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 2\}.$$

Solución De las seis integrales iterativas posibles elegimos la siguiente:

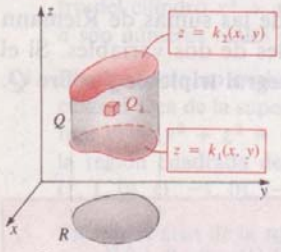
$$\int_1^4 \int_{-1}^3 \int_0^2 3xy^3z^2\,dz\,dx\,dy = \int_1^4 \int_{-1}^3 xy^3z^3\Big]_0^2\,dx\,dy$$
$$= \int_1^4 \int_{-1}^3 8xy^3\,dx\,dy = \int_1^4 4x^2y^3\Big]_{-1}^3\,dy$$
$$= \int_1^4 (36y^3 - 4y^3)\,dy = 8y^4\Big]_1^4 = 2040.$$

En el Ejercicio 1 se pide evaluar la integral con los otros cinco órdenes de integración. •

Pueden definirse las integrales triples sobre regiones más complicadas. Por ejemplo, sea R una región del plano xy que se puede dividir en subregiones del Tipo I y del Tipo II, y sea Q la región en tres dimensiones definida por

$$Q = \{(x, y, z): (x, y) \text{ está en } R \text{ y } k_1(x, y) \le z \le k_2(x, y)\}$$

FIGURA 17.39



donde las funciones k_1 y k_2 tienen primeras derivadas parciales continuas en R. La región Q se encuentra entre las gráficas de $z = k_1(x, y)$ y $z = k_2(x, y)$, y arriba o abajo de la región R (véase la Figura 17.39). Si Q se subdivide mediante planos paralelos a los tres planos coordenados, entonces los paralelepípedos (pequeños) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ resultantes que se encuentran completamente dentro de Q son una **partición interna** P de Q. En la Figura 17.39 se muestra un elemento típico Q_k de una partición interna de Q.

Una **suma de Riemann** de f para la partición P es una suma de la forma $\sum_k f(u_k, v_k, w_k)\,\Delta V_k$, donde (u_k, v_k, w_k) es un punto arbitrario en Q_k, y ΔV_k es el volumen Q_k. La integral triple de f sobre Q se define también como el límite en (17.16). Si f es continua en Q, se puede demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA DE EVALUACIÓN (17.17)

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \iint_R \left[\int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right] dA$$

La notación en el lado derecho de (17.17) significa que se integra primero con respecto a z y luego se evalúa la integral doble resultante sobre la región R del plano xy usando los métodos de la Sección 17.2. Si R es del Tipo I, como en la Figura 17.9(i), entonces

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx.$$

El símbolo del lado derecho de esta ecuación es una **integral triple iterativa**. Se evalúa con integraciones parciales de $f(x, y, z)$ en el orden z, y, x, sustituyendo los límites

Si $f(x, y, z) = 1$ en Q, entonces la integral triple de f sobre Q se escribe como $\iiint_Q dV$ y su valor es el volumen de la región Q. El volumen V de la región Q del Ejemplo 2, ilustrada en la Figura 17.41(i) es

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} dz\, dy\, dx.$$

EJEMPLO 3 Calcular el volumen del sólido acotado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$.

Solución El sólido está en la Figura 17.42(i) junto con la columna correspondiente a la primera suma en la dirección del eje z. Obsérvese que la columna va de $z = 0$ a $z = 4 - y$. La región R del plano xy se muestra en la Figura 17.42(ii) junto con la franja correspondiente a la primera integración (de una integral doble) con respecto a y. Aplicando (17.17) con $f(x, y, z) = 1$,

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_0^{4-y} dz\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} (4 - y)\, dy\, dx$$

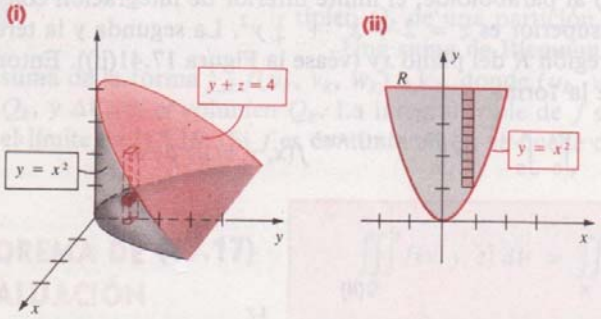
$$= \int_{-2}^{2} \left[4y - \tfrac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{4} dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - 4x^2 + \tfrac{1}{2}x^4\right) dx$$

$$= 8x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{10}x^5\Big]_{-2}^{2} = \tfrac{256}{15} \approx 17.$$

Si usáramos el orden $dx\,dy$ para la integral doble, entonces la franja en la Figura 17.42(ii) sería horizontal y

$$V = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{4-y} dz\, dx\, dy.$$

FIGURA 17.42

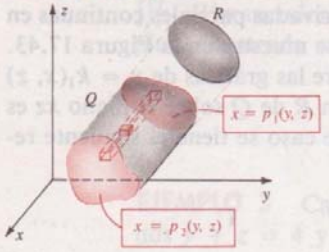


Se puede demostrar que el valor de esta integral es también $\frac{256}{15}$. •

Algunas integrales triples se pueden evaluar mediante una integral triple iterativa, en la que la primera integración se efectúa con respecto a y. Así, sea

$$Q = \{(x, y, z): a \le x \le b, h_1(x) \le z \le h_2(x), k_1(x, z) \le y \le k_2(x, z)\}$$

FIGURA 17.45



Si usáramos un orden de integración diferente, sería necesario evaluar varias integrales triples. (¿Puede verse a qué se debe esto?) •

Finalmente, si Q es una región del tipo ilustrado en la Figura 17.45, donde p_1 y p_2 son funciones con primeras derivadas continuas en una región adecuada R del plano yz, entonces

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{p_1(y,z)}^{p_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA.$$

En la última integral doble iterativa dA se puede reemplazar por $dz\,dy$ o bien $dy\,dz$.

EJEMPLO 5 En el Ejemplo 3 se consideró el sólido delimitado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$. Calcular el volumen integrando primero con respecto a x.

Solución El sólido aparece otra vez en la Figura 17.46. Integrar primero con respecto a x corresponde a una suma sobre una columna de pequeños paralelepípedos en la dirección del eje x, desde la gráfica de $x = -\sqrt{y}$ hasta la gráfica de $x = \sqrt{y}$. La región R del plano yz se encuentra entre estas gráficas y está acotada por el eje y, el eje z y la recta $y + z = 4$, como se muestra en la Figura 17.46(ii).

Si la segunda integración es con respecto a y, como se indica mediante la franja de rectángulos en (ii) de la figura, entonces

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dy\, dz.$$

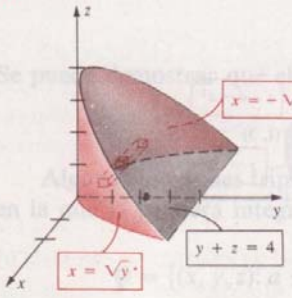
Puede verificarse que el valor de esta integral es $\frac{256}{15}$. Si hacemos la segunda integración con respecto a z en vez de con respecto a y, entonces la integral iterativa es

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dz\, dy \quad \bullet$$

En la siguiente sección se usarán integrales triples para encontrar el *centro de masa* de un sólido. Se concluye esta sección con el análisis de la primera aplicación: calcular la masa de un sólido.

FIGURA 17.46

(i)



(ii)

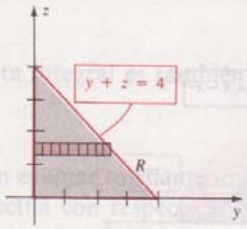
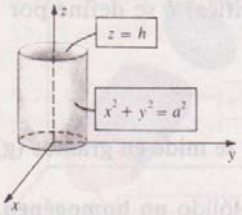


FIGURA 17.48

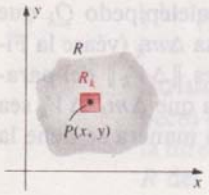


Solución Introduciendo un sistema de coordenadas como en la Figura 17.48, se ve que el sólido está acotado por las gráficas de $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ y $z = h$. Por hipótesis, la densidad en (x, y, z) es $\delta(x, y, z) = kz$ para una constante k. Por la forma de δ y la simetría del sólido, se puede calcular m para la parte que se encuentra en el primer octante y multiplicar el resultado por 4. De acuerdo con (17.20),

$$m = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h kz\, dz\, dy\, dx = 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{h^2}{2}\, dy\, dx$$

$$= 2kh^2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2kh^2\left(\frac{\pi a^2}{4}\right) = \frac{1}{2}k\pi h^2 a^2$$

FIGURA 17.49



Se puede obtener un resultado semejante para una lámina (superficie de pequeño grosor) con la forma de una región R en el plano xy. Consideramos una subregión rectangular R_k que contiene al punto P y tiene área ΔA_k (véase la Figura 17.49). En este caso, la **densidad superficial** en $P(x, y)$ se define por

$$\delta(x, y) = \lim_{\|\Delta A_k\| \to 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta A_k}$$

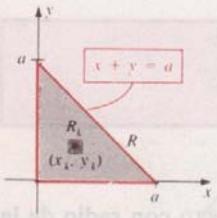
Las unidades son las de *masa por unidad de área*, como g/cm^2. Se puede obtener una forma análoga a (17.20) para una lámina.

MASA DE UNA LÁMINA (17.21)

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA$$

EJEMPLO 7 Una lámina tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud a. Calcular su masa suponiendo que la densidad en un punto P es proporcional al cuadrado de la distancia al vértice opuesto a la hipotenusa.

FIGURA 17.50



Solución Conviene introducir un sistema de coordenadas, como en la Figura 17.50, de manera que la hipotenusa del triángulo esté sobre la recta $x + y = a$ y el vértice opuesto en el origen. En la figura se muestra también un rectángulo típico R_k (de área ΔA_k) de una partición interna con un punto (x_k, y_k) en el rectángulo.

Por hipótesis, la densidad en (x, y) es de $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$, para una constante k. Aplicando la Definición (17.21) y el Teorema (17.8), obtenemos que la masa es

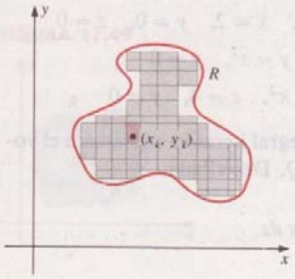
$$m = \iint_R k(x^2 + y^2)\, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

17.7 MOMENTOS Y CENTRO DE MASA

En la Sección 6.8 se estudiaron los momentos y el centro de masa de una lámina homogénea. En esta sección se usan las integrales dobles para generalizar estos conceptos a una lámina *no homogénea* L con la forma de una región R del plano xy. Si la densidad (en este caso la masa por unidad de área) en el punto (x, y) es $\delta(x, y)$, donde δ es una función continua en R, entonces por (17.21), la masa m de L está dada por

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA.$$

FIGURA 17.51



Sea $P = \{R_k\}$ una partición interna de R donde, para cada k, (x_k, y_k) es un punto arbitrario en R_k (véase la Figura 17.51). Como δ es continua, un cambio pequeño de (x, y) da lugar a una variación pequeña en la densidad $\delta(x, y)$; es decir, δ es *casi constante* en R_k. Entonces, si $\|P\| \approx 0$, la masa Δm_k correspondiente a R_k se puede aproximar por $\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k$, donde ΔA_k es el área de R_k. Suponiendo que la masa Δm_k está concentrada en el punto (x_k, y_k), su *momento* con respecto al eje x de este elemento de L, es el producto $y_k \delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k$. Intuitivamente se espera que la suma de los momentos $\sum_k y_k \delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ sea una aproximación al momento de la *lámina* con respecto al eje x. Entonces, se define el momento M_x de la masa de L con respecto al eje x como sigue:

$$M_x = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k y_k \delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R y\delta(x, y)\, dA.$$

Análogamente, el momento M_y de la masa de L con respecto al eje y es

$$M_y = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k x_k \delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R x\delta(x, y)\, dA.$$

Como en las Definiciones (6.22) y (6.23), se define el *centro de masa* de la lámina como el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ tal que $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$.

Así se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN (17.22)

Sea L una lámina con la forma de una región R del plano xy. Si la densidad (masa por unidad de área) en (x, y) es $\delta(x, y)$, y δ es continua en R, entonces la **masa** m, los **momentos** M_x y M_y y el **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ son

(i) $m = \iint_R \delta(x, y)\, dA$

(ii) $M_x = \iint_R y\delta(x, y)\, dA; \quad M_y = \iint_R x\delta(x, y)\, dA$

(iii) $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{\iint_R x\delta(x, y)\, dA}{\iint_R \delta(x, y)\, dA}; \quad \bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{\iint_R y\delta(x, y)\, dA}{\iint_R \delta(x, y)\, dA}$

Los momentos M_x y M_y de la Definición (17.22) se llaman también los *primeros momentos* de la masa de L con respecto a los ejes coordenados. Si se usan los *cuadrados* de las distancias a los ejes coordenados, se obtienen los *segundos momentos*, o **momentos de inercia**, I_x y I_y con respecto al eje x y al eje y, respectivamente. La suma $I_O = I_x + I_y$ es el **momento polar de inercia** o **momento de inercia con respecto al polo u origen**. En la siguiente fórmula, I_O se puede obtener también como el límite de una suma usando el *cuadrado* de la distancia del origen a (x_k, y_k) en la Figura 17.51.

MOMENTOS DE INERCIA DE UNA LÁMINA (17.23)

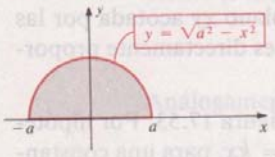
$$I_x = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k y_k^2\, \delta(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R y^2\, \delta(x, y)\, dA$$

$$I_y = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k x_k^2\, \delta(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R x^2\, \delta(x, y)\, dA$$

$$I_O = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k (x_k^2 + y_k^2)\delta(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R (x^2 + y^2)\delta(x, y)\, dA$$

EJEMPLO 3 Una lámina tiene la forma del semicírculo ilustrado en la Figura 17.54. La densidad es directamente proporcional a la distancia al eje x. Calcular el momento de inercia con respecto al citado eje x.

FIGURA 17.54



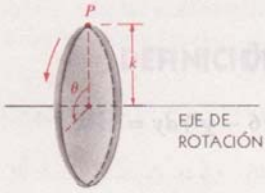
Solución Por hipótesis, la densidad en (x, y) está dada por $\delta(x, y) = ky$. Aplicando (17.23), resulta que el momento de inercia con respecto al eje x es

$$I_x = \int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2(ky)\, dy\, dx = k \int_{-a}^{a} \tfrac{1}{4} y^4 \Big]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \tfrac{1}{4}k \int_{-a}^{a} (a^4 - 2a^2x^2 + x^4)\, dx.$$

Integrando, obtenemos $I_x = \frac{4}{15}ka^5$. •

FIGURA 17.55



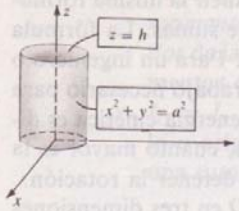
Los momentos de inercia son útiles en problemas en los que un objeto gira alrededor de un eje fijo, como lo hace una rueda (o un disco) alrededor de su eje (véase la Figura 17.55). Si P es una partícula en la rueda que tiene masa m y está a una distancia k del eje de rotación, el momento de inercia I de la masa m de P con respecto al eje es mk^2. Si la rapidez (o velocidad) angular $d\theta/dt$ es una constante ω, entonces la rapidez (o velocidad) lineal v de la partícula es $k\omega$. Por definición, la **energía cinética** E_K de P es

$$E_K = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

De manera que

$$E_K = \tfrac{1}{2}mk^2\omega^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2.$$

FIGURA 17.57



Solución El sólido se consideró en el Ejemplo 6 de la Sección 17.6 y ahora aparece en la Figura 17.57. Tomando $\delta(x, y, z) = kz$, encontramos que $m = \frac{1}{2}k\pi h^2a^2$.

Resulta evidente que el centro de masa está sobre el eje z y por lo tanto, basta calcular $\bar{z} = M_{xy}/m$. Además, por la forma de δ y la simetría del sólido, podemos calcular M_{xy} para la parte que está en el primer octante y multiplicar el resultado por cuatro. Usando (17.24),

$$M_{xy} = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h z(kz)\,dz\,dy\,dx = 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \tfrac{1}{3}h^3\,dy\,dx$$

$$= \tfrac{4}{3}kh^3\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{4}{3}kh^3(\tfrac{1}{4}\pi a^2) = \tfrac{1}{3}k\pi h^3a^2$$

Finalmente,

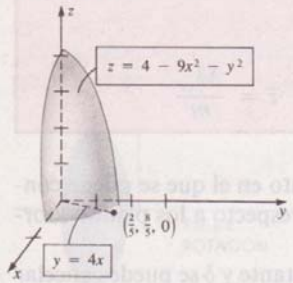
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{1}{3}k\pi h^3a^2}{\frac{1}{2}k\pi h^2a^2} = \tfrac{2}{3}h.$$

Por lo tanto, el centro de masa está sobre el eje del cilindro, a una distancia de la base inferior igual a dos tercios de la altura. •

En el siguiente ejemplo solamente *se plantearán* las integrales necesarias para obtener la solución, es decir, se escribirán las integrales iterativas pero no se evaluarán.

EJEMPLO 5 Un sólido tiene la forma de la región en el primer octante acotada por las gráficas de $4 - z = 9x^2 + y^2$, $y = 4x$, $z = 0$ y $y = 0$. La densidad en el punto $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia al origen. Plantear las integrales necesarias para calcular $\bar{x}$.

FIGURA 17.58



Solución La región está en la Figura 17.58. La densidad en (x, y, z) es $\delta(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, para un valor k. Usando (17.24),

$$m = \int_0^{8/5} \int_{y/4}^{\sqrt{4-y^2}/3} \int_0^{4-9x^2-y^2} k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\,dz\,dx\,dy$$

$$M_{yz} = \int_0^{8/5} \int_{y/4}^{\sqrt{4-y^2}/3} \int_0^{4-9x^2-y^2} xk(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\,dz\,dx\,dy.$$

y

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$$

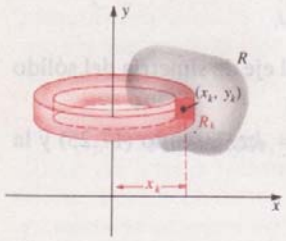
•

Si una partícula de masa m se encuentra en el punto (x, y, z), entonces su distancia al eje z es $(x^2 + y^2)^{1/2}$ y su **momento de inercia I_z con respecto al eje z** se define como $(x^2 + y^2)m$. Análogamente, los **momentos de inercia I_x y I_y con respecto al eje x y al eje y** son $(y^2 + z^2)m$ y $(x^2 + z^2)m$, respectivamente. Para los sólidos que tienen la forma de Q en la Figura 17.56 se usan límites de sumas de la manera acostumbrada para obtener lo siguiente.

TEOREMA DE PAPPUS (17.26)

Sea R una región del plano que se encuentra toda a un lado de una recta l en el mismo plano. El volumen generado cuando R gira una vez alrededor de l es el producto del área de R por la distancia recorrida por el centroide de R.

FIGURA 17.60



Demostración Podemos suponer que l es el eje y y R es una región en el primer cuadrante, como se muestra en la Figura 17.60. Sea $\{R_k\}$ una partición interna P de R y denotemos por ΔA_k al área de R_k. Para cada k, sea (x_k, y_k) el centro del rectángulo R_k.

Si R gira alrededor del eje y, entonces como se muestra en la Figura 17.60, R_k genera una envolvente cilíndrica de volumen $2\pi x_k \Delta A_k$. Entonces, el volumen V del sólido generado por R es

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k 2\pi x_k \, \Delta A_k = \iint_R 2\pi x \, dA.$$

Aplicando la Definición (17.22) al centroide, tomando $\delta(x, y) = 1$ y $m = A$, obtenemos

$$V = 2\pi \iint_R x \, dA = 2\pi M_y = 2\pi \bar{x} A.$$

Entonces, podemos calcular el volumen V multiplicando el área A de R por la distancia $2\pi\bar{x}$ que el centro de gravedad recorre cuando R da una vuelta alrededor del eje y. • •

FIGURA 17.61



EJEMPLO 8 Un círculo de radio a gira alrededor de una recta l en el plano del círculo, y que se encuentra a una distancia b de su centro, donde $b > a$ (véase la Figura 17.61). Calcular el volumen V del sólido resultante. (La superficie de este sólido en forma de rosca o argolla se llama *toroide* o *toro*.)

Solución El círculo tiene área πa^2 y la distancia recorrida por el centroide es $2\pi b$. Por lo tanto, según el Teorema de Pappus (17.26),

$$V = (2\pi b)(\pi a^2) = 2\pi^2 a^2 b. \quad \bullet$$

EJERCICIOS 17.7

Ejercicios 1-8: Calcule la masa y el centro de masa de la lámina que tiene la forma de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y la densidad indicada.

1. $y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$; $\delta(x, y) = x + y$
2. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $y = 0$; $\delta(x, y) = y^2$

27. El tetraedro homogéneo delimitado por los planos coordenados y por la gráfica de $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$, donde a, b y c son números reales positivos.

28. El sólido homogéneo acotado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ejercicios 29-30: Use el Teorema de Pappus para calcular el volumen generado al girar el cuadrilátero con vértices A, B, C, D, con respecto a (a) el eje y; (b) el eje x.

29. $A(1, 0)$; $B(3, 6)$; $C(11, 6)$; $D(9, 0)$

30. $A(2, 2)$; $B(1, 3)$; $C(4, 6)$; $D(5, 5)$

Ejercicios 31-34: Use el Teorema de Pappus en la solución.

31. Calcule el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por la gráfica de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y los ejes coordenados.

32. Determine el centroide del triángulo con vértices $O(0, 0)$, $A(0, a)$, $B(b, 0)$, donde a y b son números positivos.

33. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región del plano xy acotada por $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$ alrededor del eje x.

34. Calcule el volumen del cilindro circular recto de altura h y radio de la base a.

17.8 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

En la Sección 14.7 se estudiaron las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y las coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) de un punto en tres dimensiones (véanse las Figuras 14.75 y 14.80). Estas coordenadas se pueden usar para evaluar ciertas integrales. El caso más sencillo para las coordenadas cilíndricas se tiene cuando una función de r, θ y z es continua en una región de la forma

$$Q = \{(r, \theta, z): a \le r \le b,\ c \le \theta \le d,\ m \le z \le n\}.$$

Primero se subdivide Q en subregiones $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ con la misma forma de Q usando las gráficas de ecuaciones de la forma $r = a_k$, $\theta = c_k$ y $z = m_k$ para números arbitrarios a_k, c_k y m_k en los intervalos $[a, b]$, $[c, d]$ y $[m, n]$, respectivamente (véase la Figura 17.62(i)). Estas gráficas son cilindros circulares, planos que contienen al eje z y planos paralelos al plano xy, respectivamente (véase la Figura 14.76). En la Figura 17.62(ii) está una subregión Q_k típica con sus dimensiones, además del radio medio $\bar{r}_k$ de la base de Q_k. El volumen ΔV_k de Q_k es el producto del área de la base $\bar{r}_k \Delta r_k \Delta\theta_k$ y la altura Δz_k. Así,

$$\Delta V_k = \bar{r}_k \Delta r_k \Delta\theta_k \Delta z_k.$$

FIGURA 17.62

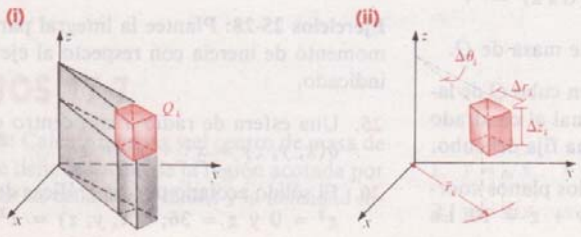
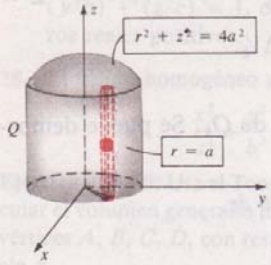


FIGURA 17.65



en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P al plano xy.

Solución La región Q está en la Figura 17.65 junto con una columna correspondiente a la primera suma en la dirección del eje z. Como la densidad en el punto $P(r, \theta, z)$ está dada por kz para una constante k, la masa m se puede calcular aplicando (17.27) con $f(r, \theta, z) = kz$:

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} (kz)r\,dz\,dr\,d\theta = \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a} z^2 r\Big]_0^{\sqrt{4a^2-r^2}}\,dr\,d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(4a^2r - r^3)\,dr\,d\theta = \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi} 2a^2r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\Big]_0^{a}\,d\theta$$
$$= \tfrac{7}{8}a^4k\int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{7}{4}a^4\pi k$$

Para calcular I_z usamos (17.25) y coordenadas cilíndricas, obteniendo

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2(kz)r\,dz\,dr\,d\theta = \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^3z^2\Big]_0^{\sqrt{4a^2-r^2}}\,dr\,d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(4a^2r^3 - r^5)\,dr\,d\theta = \tfrac{5}{6}a^6\pi k$$

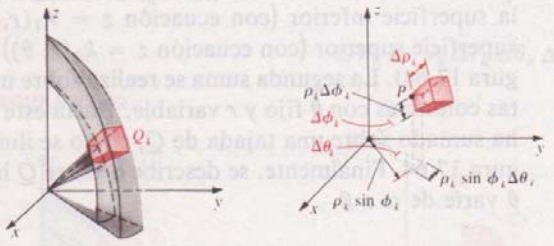
También pueden considerarse integrales triples en coordenadas esféricas. Sea f una función continua de ρ, ϕ y θ en una región de la forma

$$Q = \{(\rho, \phi, \theta): a \le \rho \le b, c \le \phi \le d, m \le \theta \le n\}.$$

Sean $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ las subregiones de Q con su misma forma que se obtienen dividiendo Q mediante gráficas de ecuaciones de la forma $\rho = a_k$, $\phi = c_k$ y $\theta = m_k$ (véase la Figura 17.66(i)). Estas gráficas son esferas, conos con su eje a lo largo del eje z y planos que contienen al eje z, respectivamente (véase la Figura 14.81). En la Figura 17.66(ii) está una subregión típica Q_k correspondiente a los incrementos $\Delta\rho_k$, $\Delta\phi_k$ y $\Delta\theta_k$.

FIGURA 17.66

(i) (ii)



El volumen de la subregión Q_k puede calcularse aproximadamente considerándola como un paralelepípedo rectangular. Si $P(\rho_k, \phi_k, \theta_k)$ es una esquina del paralelepípedo, entonces como se ilustra en la Figura 17.66(ii), las dimensiones del paralelepípedo

EJERCICIOS 17.8

Ejercicios 1-10: Use coordenadas cilíndricas.

1. Calcule el volumen y el centroide del sólido acotado por las gráficas de $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ y $z = 0$.
2. Calcule el volumen y localice el centroide del sólido acotado por las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$ y $z = 0$.
3. Calcule el momento de inercia de un cilindro circular recto de altura h y radio de la base a, con respecto a (a) el eje del cilindro; (b) un diámetro de la base.
4. Un sólido homogéneo está acotado por las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = x^2 + y^2$. Calcule (a) el centro de masa; (b) el momento de inercia con respecto al eje z.
5. La densidad en un punto P de una esfera sólida de radio a es directamente proporcional a la distancia de P a una recta fija l que pasa por el centro del sólido. Calcule la masa del cuerpo.
6. Calcule la masa del cono sólido acotado por las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 4$ suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P al eje z.
7. Calcule el momento de inercia con respecto a l del sólido descrito en el Ejercicio 5.
8. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del sólido descrito en el Ejercicio 6.
9. Sea

 $$Q = \{(x, y, z): 1 \le z \le 5 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \ge 1\}.$$

 La densidad en el punto $P(x, y, z)$ es directamente proporcional a la distancia de P al plano xy. Calcule la masa y el centro de masa de Q.
10. Calcule la masa y el centro de masa del sólido que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ y de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, suponiendo que la densidad en el punto $P(x, y, z)$ es directamente proporcional a la distancia de P al plano xy.

Ejercicios 11-18: Use coordenadas esféricas.

11. Calcule la masa y el centro de masa de una media esfera sólida de radio a suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P al centro de la base.
12. Calcule el volumen y el centroide del sólido acotado por las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$ y $z = 0$ (véase el Ejercicio 2).
13. Calcule el momento de inercia del hemisferio del Ejercicio 11 con respecto a su eje.
14. Calcule el momento de inercia de una media esfera sólida homogénea de radio a con respecto a un diámetro de la base.
15. Calcule el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.
16. Calcule el volumen del sólido que se halla fuera del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
17. Calcule la masa del sólido que se encuentra fuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y dentro de la esfera $z^2 + y^2 + z^2 = 2$, suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de P al centro de las esferas.
18. Una cáscara esférica homogénea tiene radio interior a y radio exterior b. Calcule su momento de inercia con respecto a una recta que pasa por el centro.

Ejercicios 19-20: Evalúe la integral cambiando a coordenadas cilíndricas.

19. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \, dx \, dy$
20. $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$

Ejercicios 21-22: Evalúe la integral cambiando a coordenadas esféricas.

21. $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx$
22. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dx \, dy$

Trazar en el plano uv las rectas verticales $u = 2$, $u = 4$, $u = 6$, $u = 8$ y las rectas horizontales $v = -1$, $v = 1$, $v = 3$, $v = 5$. Trazar las curvas u y las curvas v correspondientes en el plano xy.

Solución Las rectas verticales y horizontales en el plano uv están en la Figura 17.70(i).

Las curvas u en el plano xy son las rectas

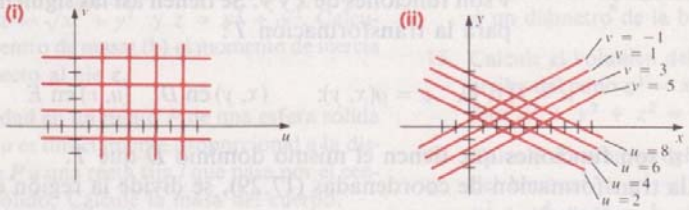
$$x + 2y = 2,\ x + 2y = 4,\ x + 2y = 6,\ x + 2y = 8$$

y las curvas v son las rectas

$$x - 2y = -1,\ x - 2y = 1,\ x - 2y = 3,\ x - 2y = 5$$

que se ilustran en la Figura 17.70(ii). •

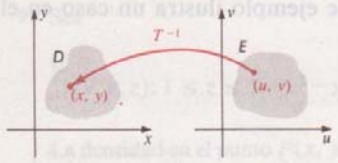
FIGURA 17.70



La transformación T en el Ejemplo 1 es biunívoca o uno a uno: si $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ en el plano xy, entonces $T(x_1, y_1) \neq T(x_2, y_2)$ en el plano uv. En general, si T es una transformación uno a uno de coordenadas, entonces invirtiendo la correspondencia se obtiene una transformación T^{-1} del plano uv al plano xy llamada **inversa** de T. Se puede especificar T^{-1} mediante ecuaciones de la forma

$$x = F(u, v),\ y = G(u, v)$$

FIGURA 17.71



para ciertas funciones F y G. Si se ilustra una transformación biunívoca T mediante una flecha, como en la Figura 17.68, entonces la inversa T^{-1} se puede ilustrar *invirtiendo* la citada flecha, como en la Figura 17.71. Obsérvese que $T^{-1}(T(x, y)) = (x, y)$ y $T(T^{-1}(u, v)) = (u, v)$ para todo (x, y) en D y para todo (u, v) en E.

EJEMPLO 2

(a) Hallar la inversa de la transformación T definida en el Ejemplo 1.

(b) Obtener la curva en el plano uv que T^{-1} transforma en la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

Solución

(a) La transformación T está dada por

$$u = x + 2y,\ v = x - 2y.$$

Para que exista una región S apropiada, hay que poner restricciones a la región R y al integrando $F(x, y)$. Se supone que R consta de todos los puntos que están dentro o sobre una curva cerrada simple C que es regular por partes, y que F tiene primeras derivadas parciales en toda una región abierta que contiene a R. El **sentido (o dirección) positivo a lo largo de C** es tal que cuando el punto P recorre C, la región R queda siempre a la izquierda. Con el **sentido negativo**, R queda a la derecha. También se requiere que W transforme una región S del plano uv de manera biunívoca a R y que S esté acotada por una curva cerrada simple K que sea regular por partes y que W transforma en C. El último requisito es que cuando (u, v) recorra K una vez en el sentido positivo, el punto correspondiente (x, y) trace C una vez ya sea en la dirección positiva o en la negativa. Se pueden suavizar estas condiciones pero esto queda fuera del alcance de este libro.

La función de u y v que se define a continuación se usará en el cambio de variables. Lleva el nombre del matemático alemán C. G. Jacobi (1804-1851).

DEFINICIÓN (17.30)

Sean $x = f(u, v)$ y $y = g(u, v)$. El **jacobiano** de x y y con respecto a u y v se denota por $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ y se define por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

En el siguiente teorema todos los símbolos tienen el mismo significado que antes y se supone que las regiones y las funciones satisfacen las condiciones mencionadas. En el enunciado del teorema se usan las notaciones $dx\,dy$ y $du\,dv$ en lugar de dA para evitar confusiones acerca de la región de integración.

TEOREMA (17.31)

Si $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ es una transformación de coordenadas, entonces

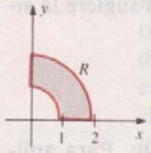
$$\iint_R F(x, y)\,dx\,dy = \pm \iint_S F(f(u, v), g(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Se escoge el signo $+$ o el signo $-$ dependiendo de que, si cuando (u, v) recorre la frontera K de S una vez en el sentido positivo, el punto correspondiente (x, y) traza la frontera C de R una vez en la dirección positiva o en la dirección negativa, respectivamente.

En el Apéndice II se da una demostración del Teorema (17.31) basada en el Teorema de Green (18.19).

EJEMPLO 4 Evaluar $\iint_R e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy$ para la región R en el plano xy acotada por el trapecio con vértices (0, 1), (0, 2), (2, 0) y (1, 0).

FIGURA 17.76



EJEMPLO 5 Evaluar $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ para la región R en el primer cuadrante del plano xy que se encuentra entre los arcos de circunferencia que se muestran en la Figura 17.76.

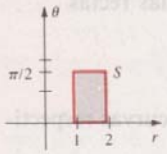
Solución Esta integral se puede evaluar cambiando a coordenadas polares como se hizo en la Sección 17.4, pero nuestro objetivo es mostrar cómo se usa el Teorema (17.31). La sustitución polar

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

determina una transformación del plano $r\theta$ al plano xy cuyo jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

FIGURA 17.77



Podemos verificar que la región rectangular S del plano $r\theta$ acotada por $r = 1$, $r = 2$, $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ (véase la Figura 17.77) corresponde a R bajo esta transformación. Además, cuando (r, θ) recorre la frontera de S una vez en el sentido (o dirección) positivo, el punto correspondiente (x, y) recorre R una vez en la dirección positiva. Entonces según el Teorema (17.31),

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} -\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_1^2\,d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2}(e^{-4} - e^{-1})\int_0^{\pi/2} d\theta = -\tfrac{1}{4}\pi(e^4 - e^{-1}) \approx 0.275 \quad \bullet$$

El Teorema (17.31) puede generalizarse a integrales triples. Dada una transformación

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)$$

de un sistema de coordenadas uvw a un sistema de coordenadas xyz, se define el **jacobiano** $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ de la transformación como

(17.32)

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Si R y S son regiones en los sistemas xyz y uvw que se transforman una en la otra bajo esta transformación y su inversa, entonces bajo ciertas restricciones,

(17.33)

$$\iiint_R F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \pm \iiint_S G(u, v, w)\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\,du\,dv\,dw$$

donde la expresión $G(u, v, w)$ se obtiene sustituyendo las de x, y y z en $F(x, y, z)$.

Integrando por partes o usando la Fórmula 83 de la Tabla de Integrales,

$$V = abh_M \int_0^{2\pi} \left[\frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} r\right) + \frac{2}{\pi} r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} r\right) \right]_0^1 d\theta$$

$$= abh_M \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) d\theta$$

$$= abh_M \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) 2\pi \approx 1.4535 abh_M.$$

Esta fórmula puede usarse para estimar el volumen del agua de un lago a partir de las tres medidas a, b y h_M.

Podemos demostrar que el área de la región elíptica R es πab. Aplicando una definición para integrales análoga a la Definición (5.21), obtenemos la profundidad media:

$$h_{med} = \frac{1}{\pi ab} \iint_R |f(x, y)|\, dA.$$

y por lo tanto $$h_{med} \approx \frac{1}{\pi ab} (1.4535) abh_M \approx 0.4627 h_M.$$

Un estudio de 107 lagos en todo el mundo dio un valor medio para h_{med}/h_M de 0.467.

EJERCICIOS 17.9

Ejercicios 1-8: Sea T la transformación del plano xy al plano uv definida por las ecuaciones dadas.
(a) Describa las curvas u y las curvas v.
(b) Suponiendo que T es uno a uno, encuentre ecuaciones $x = F(u, v)$, $y = G(u, v)$ que determinen T^{-1}.

1. $u = 3x, \quad v = 5y$
2. $u = e^x, \quad v = e^y$
3. $u = x - y, \quad v = 3y + 2x$
4. $u = 5x - 4y, \quad v = 2x + 3y$
5. $u = 2x + y, \quad v = xy$
6. $u = x^3, \quad v = x + y$
7. $u = x^2 + 4y^2, \quad v = 4x^2 - y^2$
8. $u = x + y, \quad v = x^2 - y$

9. Sea T la transformación definida en el Ejercicio 1. Encuentre la curva en el plano uv que corresponde al rectángulo con vértices (0, 0), (0, 1), (2, 1) y (2, 0) bajo T. ¿Qué curva corresponde a la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$?

10. Sea T la transformación definida en el Ejercicio 3. Encuentre la curva en el plano uv que corresponde al triángulo con vértices (0, 0), (0, 1), (2, 0). ¿Qué curva corresponde a la recta $x + 2y = 1$?

Ejercicios 11-14: Lleve a cabo la determinación del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

11. $x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$
12. $x = e^u \operatorname{sen} v, \quad y = e^u \cos v$
13. $x = ve^{-2u}, \quad y = u^2 e^{-v}$
14. $x = u/(u^2 + v^2), \quad y = v/(u^2 + v^2)$

Ejercicios 15-16: Determine $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$.

15. $x = 2u + 3v - w, \quad y = v - 5w, \quad z = u + 4w$
16. $x = u^2 + vw, \quad y = 2v + u^2 w, \quad z = uvw$

Ejercicios 17-20: Use el cambio de variables indicado para expresar la integral como una integral doble sobre una región S en el plano uv. (No evalúe la integral.)

11. Evaluación de integrales triples.
12. Densidad.
13. Masa de un sólido.
14. Centro de masa de una lámina y de un sólido.
15. Momentos de inercia de una lámina y de un sólido.
16. Teorema de Pappus.
17. Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas.
18. Cambio de variables de integrales múltiples.

EJERCICIOS 17.10

Ejercicios 1-6: Evalúe la integral.

1. $\int_{-1}^{0} \int_{x+1}^{x^3} (x^2 - 2y)\, dy\, dx$
2. $\int_{1}^{2} \int_{1}^{\ln y} \frac{1}{y}\, dx\, dy$
3. $\int_{0}^{3} \int_{r}^{r^2+1} r\, d\theta\, dr$
4. $\int_{2}^{0} \int_{0}^{z^2} \int_{x}^{z} (x + z)\, dy\, dx\, dz$
5. $\int_{0}^{2} \int_{\sqrt{y}}^{1} \int_{z^2}^{y} xy^2 z^3\, dx\, dz\, dy$
6. $\int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{\pi/4} \int_{0}^{a \cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

Ejercicios 7-10: Exprese $\iint_R f(x, y)\, dA$ como una integral iterativa donde R es la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

7. $x^2 - y^2 = 4, \quad x = 4$
8. $x^2 - y^2 = 4, \quad y = 4, \quad y = 0$
9. $y^2 = 4 + x, \quad y^2 = 4 - x$
10. $y = -x^2 + 4, \quad y = 3x^2$

Ejercicios 11-12: La integral representa el área de una región R en el plano xy. Describa R.

11. $\int_{-1}^{1} \int_{e^y}^{e^3} dx\, dy$
12. $\int_{-1}^{0} \int_{x}^{-x^2} dy\, dx$

Ejercicios 13-14: Invierta el orden de integración y evalúe la integral resultante.

13. $\int_{0}^{3} \int_{y^2}^{9} ye^{-x^2}\, dx\, dy$
14. $\int_{0}^{1} \int_{x}^{\sqrt{x}} e^{x/y}\, dy\, dx$

15. Calcule el área de la región acotada por el eje polar y las gráficas de $r = e^{\theta}$ y $r = 2$ entre $\theta = 0$ y $\theta = \ln 2$.
16. Use coordenadas polares para evaluar
$$\int_{-a}^{0} \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{0} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx.$$
17. Calcule el volumen del sólido que se encuentra bajo la gráfica de $z = xy^2$ y sobre el rectángulo en el plano xy con vértices (1, 1, 0), (2, 1, 0), (1, 3, 0) y (2, 3, 0).
18. Exprese $\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$ de seis maneras diferentes como una integral iterativa, donde Q es la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 4z^2$ y $y = 4$.

Ejercicios 19-20: Calcule la masa y el centro de masa de la lámina que tiene la forma de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y tiene la densidad indicada.

19. $y = x, y = 2x, x = 3$; la densidad en el punto $P(x, y)$ es directamente proporcional a la distancia de P al eje y.
20. $y^2 = x, x = 4$; la densidad en el punto $P(x, y)$ es directamente proporcional a la distancia de P a la recta con ecuación $x = -1$.
21. Una lámina tiene la forma de la región que se encuentra dentro de la gráfica de $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$ y fuera de la gráfica de $r = 1$. La densidad en el punto $P(r, \theta)$ es inversamente proporcional a la distancia de P al polo. Calcule la masa.
22. Una lámina está delimitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$, y su densidad en el punto $P(x, y)$ es directamente proporcional a la distancia de P al eje y. Calcule I_x, I_y y I_O.

En el Capítulo 3 se definieron las diferenciales de las funciones de una variable. Recordemos de (3.22) que si $u = f(x)$ y Δx es un incremento de x, entonces $dx = \Delta x$ y $du = f'(x)\,dx$. La siguiente definición generaliza este concepto a las funciones de dos variables.

DEFINICIÓN (16.13) Sea $w = f(x, y)$ y sean Δx y Δy incrementos de x y y, respectivamente.

(i) Las **diferenciales** dx y dy de las variables independientes x y y son

$$dx = \Delta x \quad \text{y} \quad dy = \Delta y.$$

(ii) La **diferencial** dw de la variable dependiente w es

$$dw = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy.$$

Si f satisface la hipótesis del Teorema (16.12), entonces por la conclusión de ese teorema con (x, y) en lugar de (x_0, y_0), se ve que

$$\Delta w = dw + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

o sea

$$\Delta w - dw = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

y tanto ε_1 como ε_2 tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Resulta que si Δx y Δy son pequeños, entonces $\Delta w - dw \approx 0$; es decir, $dw \approx \Delta w$. Este hecho puede usarse para calcular aproximadamente el cambio en w debido a un cambio pequeño de x y y.

EJEMPLO 3 Sea $w = 3x^2 - xy$. Encuentre dw y úsela para calcular aproximadamente el cambio en w cuando (x, y) varía de $(1, 2)$ a $(1.01, 1.98)$. ¿Cómo es esta estimación comparada con el cambio exacto en w?

Solución Ésta es la misma función que se consideró en los Ejemplos 1 y 2. Aplicando la Definición (16.13),

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy$$

$$= (6x - y)\,dx + (-x)\,dy.$$

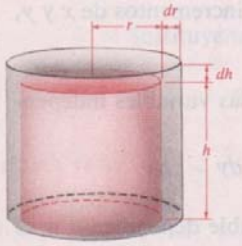
Sustituyendo $x = 1$, $y = 2$, $dx = \Delta x = 0.01$ y $dy = \Delta y = -0.02$, obtenemos

$$dw = (6 - 2)(0.01) + (-1)(-0.02) = 0.06.$$

En el Ejemplo 1 demostramos que $\Delta w = 0.0605$. Por lo tanto, el error que se comete al usar dw es 0.0005. •

EJEMPLO 4 El radio y la altura de un cilindro circular recto miden 3 y 8 pulgadas, respectivamente, con un error posible en la medición de ±0.05 pulg. Usar diferenciales para estimar el error máximo que se comete al calcular el volumen del cilindro.

FIGURA 16.28



Solución El método es parecido al que se usó para las funciones de una variable (véase el Ejemplo 4 de la Sección 3.4). Comenzamos considerando la fórmula *general* para el volumen V de un cilindro de radio r y altura h, es decir, $V = \pi r^2 h$. Consideremos a r y a h como los valores medidos con errores máximos dr y dh, respectivamente en la medición. La Figura 16.28 ilustra un caso en el que dr y dh son positivas. Por supuesto, el error en una o en las dos medidas podría ser negativo. El error en el cálculo del volumen es el cambio en V correspondiente a dr y dh. Usando diferenciales, tenemos que, de acuerdo con los comentarios anteriores a la Definición (16.13) (ii),

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh.$$

Finalmente, sustituimos los valores específicos de las variables. Tomando $r = 3$, $h = 8$ y $dr = dh = \pm 0.05$, obtenemos la siguiente aproximación al error máximo:

$$dV = 48\pi(\pm 0.05) + 9\pi(\pm 0.05) = \pm 2.85\pi \approx \pm 8.95 \text{ pulg}^3.$$

Para una función de una variable, decir que es *diferenciable* es lo mismo que decir que es derivable, o sea que la derivada existe. Para las funciones de dos variables, se usa la siguiente definición que está basada en la fórmula para Δw en el Teorema (16.12).

DEFINICIÓN (16.14)

Sea $w = f(x, y)$. La función f es **diferenciable** en (x_0, y_0) si Δw se puede expresar en la forma

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Se dice que una función f de dos variables es **diferenciable en una región R** si es diferenciable en todos los puntos de R. El siguiente teorema es consecuencia directa del Teorema (16.12) y de la Definición (16.14). El término *región rectangular* significa una región como la descrita en (16.12).

TEOREMA (16.15)

Si $w = f(x, y)$ y f_x y f_y son continuas en una región rectangular R, entonces f es diferenciable en R.

El siguiente resultado muestra que una función diferenciable es continua, que es uno de los motivos por los que se usa la Definición (16.14) como definición de diferenciabilidad.

TEOREMA (16.16) Si una función f de dos variables es diferenciable en (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

Demostración Sean Δx y Δy los incrementos. Puede escribirse Δw de dos maneras usando (16.11) y (16.14):

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta w = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\,\Delta y.$$

Si se igualan estas expresiones y se toman $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta x$, entonces

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2](y - y_0).$$

Resulta que

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

o bien

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Por lo tanto, f es continua en (x_0, y_0). • •

Si f_x y f_y son continuas, entonces por el Teorema (16.15), f es diferenciable. Esto da el siguiente corolario del Teorema (16.16).

COROLARIO (16.17) Si f es una función de dos variables y f_x y f_y son continuas en una región rectangular R, entonces f es continua en R.

Se puede demostrar por medio de ejemplos que la simple *existencia* de f_x y f_y no es suficiente para asegurar la continuidad de f (véase el Ejercicio 29). Esto es diferente en el caso de una sola variable, donde la existencia de f' implica la continuidad de f.

La discusión anterior se puede generalizar al caso de funciones de más de dos variables. Por ejemplo, sea $w = f(x, y, z)$, donde f está definida en una región apropiada R (como por ejemplo un paralelepípedo); f_x, f_y, f_z existen en R y son continuas en (x, y, z). Si x, y, z se incrementan en Δx, Δy y Δz, respectivamente, entonces el incremento correspondiente

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

se puede escribir en la forma

$$\Delta w = f_x(x, y, z)\,\Delta x + f_y(x, y, z)\,\Delta y + f_z(x, y, z)\,\Delta z + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y + \varepsilon_3\,\Delta z$$

donde ε_1, ε_2 y ε_3 son funciones de Δx, Δy y Δz que tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$. Para las funciones de tres variables se pueden demostrar resultados análogos a (16.15)–(16.17).

La siguiente definición es una generalización de (16.13) para funciones de tres variables.

DEFINICIÓN (16.18)

Sea $w = f(x, y, z)$ y sean Δx, Δy y Δz incrementos de x, y y z, respectivamente.

(i) Las **diferenciales** dx, dy y dz de las variables independientes x, y y z son

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y, \quad dz = \Delta z.$$

(ii) La **diferencial** dw de la variable dependiente w es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Se puede usar dw para calcular aproximadamente Δw cuando los incrementos de x, y y z son pequeños. La diferenciabilidad se define como en (16.14). La generalización a cuatro o más variables se hace de manera análoga.

EJEMPLO 5 Los lados (en cm) de un paralelepípedo rectangular cambian de 9, 6 y 4 a 9.02, 5.97 y 4.01, respectivamente. Use diferenciales para calcular aproximadamente el cambio del volumen. ¿Cuál es la variación exacta del volumen?

Solución El método de solución es semejante al que se usó para el cilindro circular recto del Ejemplo 4. Comenzamos con la fórmula general $V = xyz$ para el volumen de un paralelepípedo rectangular de lados x, y y z. Luego consideramos dx, dy y dz como errores de medición. Entonces, el error en el cálculo del volumen es

$$\Delta V \approx dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

Finalmente, sustituyendo los valores especiales $x = 9$, $y = 6$, $z = 4$, $dx = 0.02$, $dy = -0.03$ y $dz = 0.01$, obtenemos

$$\begin{aligned} dV &= 24(0.02) + 36(-0.03) + 54(0.01) \\ &= 0.48 - 1.08 + 0.54 = -0.06 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen aumenta en aproximadamente 0.06 cm^3.

El cambio exacto del volumen es

$$dV = (9.02)(5.97)(4.01) - (9)(6)(4) = -0.063906 \quad \bullet$$

EJERCICIOS 16.4

Ejercicios 1-4: Encuentre los valores de ε_1 y ε_2 que satisfacen la Definición (16.14).

1. $f(x, y) = 4y^2 - 3xy + 2x$
2. $f(x, y) = (2x - y)^2$
3. $f(x, y) = x^3 + y^3$
4. $f(x, y) = 2x^2 - xy^2 + 3y$

Ejercicios 5-12: Determine dw.

5. $w = x^3 - x^2y + 3y^2$
6. $w = 5x^2 + 4y - 3xy^3$
7. $w = x^2 \operatorname{sen} y + 2y^{3/2}$
8. $w = ye^{-2x} - 3x^4$

9. $w = x^2 \ln (y^2 + z^2)$ **10.** $w = x^2y^3z + e^{-2z}$

11. $w = xyz/(x + y + z)$ **12.** $w = x^2e^{yz} + y \ln z$

13. Use diferenciales para calcular aproximadamente la variación en

$$f(x, y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$$

cuando (x, y) varía de $(-2, 3)$ a $(-2.02, 3.01)$.

14. Use diferenciales para calcular aproximadamente el cambio en

$$f(x, y, z) = x^2z^3 - 3yz^2 + x^{-3} + 2y^{1/2}z$$

cuando el valor de (x, y, z) varía de $(1, 4, 2)$ a $(1.02, 3.97, 1.96)$.

15. Los lados de un paralelepípedo rectangular miden 3, 4 y 5 pies, con un error posible de $\frac{1}{16}$ de pulgada. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de (a) el área de la superficie del paralelepípedo; (b) el volumen de este cuerpo.

16. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm, respectivamente, con un error posible de 0.02 cm. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de (a) la hipotenusa; (b) el área del triángulo.

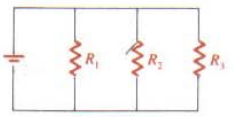
17. Una lata cilíndrica de hojalata, sin tapa, tiene un diámetro de 3 pulg y una altura de 4 pulg. Use diferenciales para calcular aproximadamente la cantidad de material que hay en la lata si ésta tiene un grosor de 0.015 pulg.

18. La resistencia total R de tres resistencias R_1, R_2 y R_3 conectadas en paralelo (véase la figura) está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Los valores de R_1, R_2 y R_3 son 100, 200 y 400 Ω (ohms), respectivamente, con un error máximo de 1% en las mediciones. Estime el error máximo en el cálculo del valor de R.

EJERCICIO 18



19. La densidad relativa de un objeto está dada por $s = A/(A - W)$, donde A y W son sus pesos en el aire y en el agua, respectivamente. Las medidas son $A = 12$ kgf y $W = 5$ kgf, con errores máximos de 0.015 kgf en el aire y 0.030 kgf en el agua. ¿Cuál es el error máximo en el valor calculado de s?

20. La presión P, el volumen V, la temperatura T (en K) de un gas encerrado están relacionadas por la ley del gas ideal $PV = kT$, donde k es una constante. Calcule el cambio en P cuando V y T varían de $V = 64$ cm³ y $T = 350$K a 70 cm³ y 345K, respectivamente, siendo la presión inicial de 0.5 kgf/cm².

21. La resistencia eléctrica R de un alambre es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro. El error posible en la medida de la longitud es de 1% y en la medida del diámetro es de 3%. ¿Cuál es el máximo error porcentual en el valor calculado de R?

22. En la Sección 6.9 se mostró que el flujo sanguíneo a través de una arteriola está dado por $F = \pi PR^4/(8vl)$, donde l es la longitud de ésta, R el radio, P la diferencia de presión en los extremos y v la viscosidad de la sangre. Suponiendo que v y l son constantes, calcule el cambio porcentual en el flujo, usando diferenciales, cuando el radio disminuye en 2% y la presión aumenta en 3%.

23. La temperatura T en el punto $P(x, y, z)$ en un sistema de coordenadas rectangulares está dada por $T = 8(2x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}$. Use diferenciales para calcular aproximadamente la diferencia de temperaturas entre los puntos $(6, 3, 2)$ y $(6.1, 3.3, 1.98)$.

24. Calcule aproximadamente el cambio en el área de un triángulo isósceles cuando los dos lados iguales aumentan de 100 a 101 y el ángulo entre ellos disminuye de 120° a 119°.

25. Cuando la cumbre de una montaña se ve desde el punto P según se muestra en la figura, el ángulo de elevación es α. Desde un punto Q que está z unidades más cerca de la montaña, el ángulo de elevación aumenta a β.

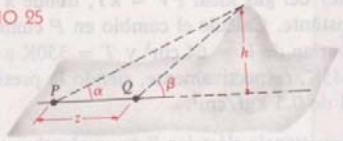
(a) Demuestre que la altura h de la cumbre está dada por

$$h = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\beta - \alpha)} z.$$

(b) Un topógrafo mide α y β con una precisión

de 30″ (o 0.000145 rad) y obtiene los valores $\alpha = 15°$, $\beta = 20°$ y $z = 2000$ m. Use diferenciales para estimar con una precisión de 0.1 m la precisión con la que debe medirse la longitud para que el error máximo en el cálculo de h no sea mayor de 10 m.

EJERCICIO 25



26. Cuando un medicamento se ingiere, el tiempo T en el que hay mayor cantidad del producto en la sangre se puede calcular en términos de la semivida x del medicamento en el estómago y la semivida y en la sangre. Para fármacos comunes (como la penicilina) T está dado por

$$T = \frac{xy\,(\ln x - \ln y)}{(x - y)\ln 2}.$$

Para un medicamento en particular, $x = 30$ min y $y = 1$ h. ¿Cuál es el máximo error en el cálculo de T si el error máximo en la estimación de las semividas es de 10%?*

Ejercicios 27-28: Demuestre que f es diferenciable en todos los puntos de su dominio.

27. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

28. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$

29. Sea $f(x, y) =$

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Demuestre que

(a) $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen. (*Sugerencia:* Use (16.7).)

(b) f no es continua en $(0, 0)$.

(c) f no es diferenciable en $(0, 0)$.

30. Sea $f(x, y, z) =$

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Demuestre que f_x, f_y y f_z existen en $(0, 0, 0)$ pero f no es diferenciable en $(0, 0, 0)$.

16.5 REGLA DE LA CADENA

Si f y g son funciones de *una* variable tales que

$$w = f(u) \quad \text{y} \quad u = g(x),$$

entonces la composición de f con g está dada por

$$w = f(g(x)).$$

La derivada de w con respecto a x se puede encontrar aplicando la Regla de la Cadena (3.26) como sigue:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dx}.$$

* **(N. de R.)** La semivida es el tiempo de reducción a la mitad, o *periodo medial*. Se le llama impropiamente "vida media" por traducción incorrecta del término en inglés *half-life*.

En esta sección se generaliza esta fórmula a las funciones de varias variables.

Sean f, g y k tres funciones de dos variables tales que

$$w = f(u, v), \quad \text{y} \quad u = g(x, y), \quad v = k(x, y).$$

Si para cada par (x, y) en un subconjunto D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el par (u, v) que le corresponde está en el dominio de f, entonces

$$w = f(g(x, y), k(x, y))$$

define w como una función (compuesta) de x y y. Por ejemplo, si

$$w = u^2 + u \operatorname{sen} v, \quad \text{and} \quad u = xe^{2y}, \quad v = xy$$

entonces

$$w = x^2e^{4y} + xe^{2y} \operatorname{sen} xy.$$

El siguiente teorema proporciona fórmulas para expresar $\partial w/\partial x$ y $\partial w/\partial y$ en términos de las primeras derivadas parciales de las funciones g, k y f. En el enunciado del teorema se supone que los dominios fueron escogidos de manera que la función compuesta está definida en un dominio apropiado D. Cada una de las fórmulas enunciadas en el Teorema (16.19) se llama *Regla de la Cadena*.

REGLA DE LA CADENA (16.19)

Si $w = f(u, v)$ y $u = g(x, y)$, $v = k(x, y)$, donde f, g y k son diferenciables, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Demostración Si x se incrementa en Δx y y se mantiene constante (es decir, $\Delta y = 0$), se obtienen los siguientes incrementos de u y v:

(a)
$$\Delta u = g(x + \Delta x, y) - g(x, y)$$
$$\Delta v = k(x + \Delta x, y) - k(x, y)$$

Éstos a su vez producen el siguiente incremento de w:

$$\Delta w = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

Como f es diferenciable, de la Definición (16.14) se tiene que

(b)
$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial w}{\partial v}\Delta v + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v$$

para ciertas funciones ε_1 y ε_2 de Δu y Δv que tienden a 0 cuando $(\Delta u, \Delta v) \to (0, 0)$. Más aún, se puede suponer que ε_1 y ε_2 son 0 cuando $(\Delta u, \Delta v) = (0, 0)$ porque si no lo son, pueden sustituirse por otras funciones μ_1 y μ_2 que tengan esta propiedad y que sean igua-

les a ε_1 y ε_2 en todos los otros valores. Hecho esto, las funciones ε_1 y ε_2 en (b) resultan continuas en (0, 0). Dividiendo ambos lados de la ecuación (b) entre Δx se obtiene

$$\text{(c)} \qquad \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \varepsilon_1 \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon_2 \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Si w se considera una función de x y y, entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

También, de las ecuaciones (a),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Si Δx tiende a 0, de (a) se deduce que Δu y Δv también tienden a 0, y por lo tanto ε_1 y ε_2 tienden a 0. Por consiguiente, tomando el límite en la ecuación (c) cuando $\Delta x \to 0$,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La segunda fórmula en el enunciado del teorema se demuestra de manera análoga. • •

FIGURA 16.29



Para recordar la Regla de la Cadena (16.19) se puede usar el *diagrama de árbol* en la Figura 16.29. Para construir el diagrama se trazan *ramas* (segmentos) de w a u y v, para indicar que w es una función de estas dos variables. Como u es función de x y y, se trazan ramas de u a x y y. También se dibujan ramas de v a x y y. En el diagrama se han indicado las derivadas parciales correspondientes a las variables mencionadas.

La Figura 16.29 se emplea como sigue. Para encontrar $\partial w/\partial x$, se toman los productos de todos los pares de derivadas parciales que van de w a x, es decir $(\partial w/\partial u)(\partial u/\partial x)$ y $(\partial w/\partial v)(\partial v/\partial x)$, y luego se suman. Esto da

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

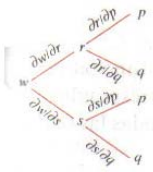
La fórmula para $\partial w/\partial y$ se encuentra usando las ramas que van de w a y.

EJEMPLO 1 Sean $w = r^3 + s^2$ y $r = pq^2$, $s = p^2 \operatorname{sen} q$. Use la Regla de la Cadena para encontrar $\partial w/\partial p$ y $\partial w/\partial q$.

Solución Nótese que w es una función (compuesta) de p y q. Podemos sustituir r y s por sus expresiones y obtener

$$w = (pq^2)^3 + (p^2 \operatorname{sen} q)^2$$

FIGURA 16.30



y luego encontrar $\partial w/\partial p$ y $\partial w/\partial q$ directamente. Sin embargo el objetivo es ilustrar la Regla de la Cadena.

Como w es una función de r y s y tanto r como s son funciones de p y q, construimos el diagrama de árbol en la Figura 16.30. Consultando el diagrama tomamos los productos de todos los pares de derivadas parciales que van de w a p y obtenemos

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p}.$$

$$= (3r^2)(q^2) + (2s)(2p \operatorname{sen} q)$$

Si ahora sustituimos $r = pq^2$ y $s = p^2 \operatorname{sen} q$, resulta

$$\frac{\partial w}{\partial p} = 3(pq^2)^2(q^2) + (2p^2 \operatorname{sen} q)(2p \operatorname{sen} q)$$

$$= 3p^2q^6 + 4p^3 \operatorname{sen}^2 q.$$

Haciendo referencia otra vez al diagrama de la Figura 16.30,

$$\frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial q}.$$

$$= (3r^2)(2pq) + (2s)(p^2 \cos q).$$

Sustituyendo r y s,

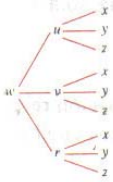
$$\frac{\partial w}{\partial q} = 3(pq^2)^2(2pq) + 2(p^2 \operatorname{sen} q)(p^2 \cos q)$$

$$= 6p^3q^5 + 2p^4 \operatorname{sen} q \cos q$$

Obsérvese que después de aplicar la Regla de la Cadena en el Ejemplo 1, se sustituyeron r y s con lo cual $\partial w/\partial p$ y $\partial w/\partial q$ quedaron expresadas en términos de p y q. Esto se hizo para recalcar el hecho de que w es una función (compuesta) de las *dos* variables p y q.

La Regla de la Cadena puede aplicarse a las funciones compuestas de cualquier número de variables y es posible construir diagramas de árbol como ayuda para formular la regla. A partir de ahora no se escribirán en las ramas los símbolos de derivada parcial. Queda entendido que si una rama lleva la variable w a otra variable r, como en la Figura 16.30, entonces la derivada parcial correspondiente es $\partial w/\partial r$. Sin embargo, si w es una función de *una* sola variable r, entonces se escribe dw/dr en lugar de $\partial w/\partial r$.

FIGURA 16.31



Por ejemplo, sea w una función de u, v y r, donde u, v y r son cada una funciones de x, y y z. Esto se indica en el diagrama de la Figura 16.31. Si se desea encontrar $\partial w/\partial y$, se toman los productos de los pares de derivadas parciales que llevan de w a y y se suman, con lo que se obtiene

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}.$$

EJEMPLO 2 Sean $w = r^2 + sv + t^3$ y $r = x^2 + y^2 + z^2$, $s = xyz$, $v = xe^y$ y $t = yz^2$. Usar la Regla de la Cadena para encontrar $\partial w/\partial z$.

Solución Nótese que w es una función de r, s, v, t y que cada una de estas cuatro variables es a su vez función de x, y y z. La Figura 16.32 muestra el diagrama correspondiente. Como se desea encontrar $\partial w/\partial z$, recorremos todas las ramas que van de w a z. Esto da

FIGURA 16.32



$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}\\ &= (2r)(2z) + v(xy) + s(0) + (3t^2)(2yz)\\ &= 4z(x^2 + y^2 + z^2) + xe^y(xy) + 0 + 3(yz^2)^2(2yz)\\ &= 4z(x^2 + y^2 + z^2) + x^2ye^y + 6y^3z^5\end{aligned}$$

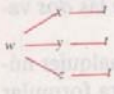
•

Si w es una función de varias variables, cada una de las cuales es función de *una* sola variable, digamos t, entonces w es una función de la variable t y se puede aplicar a dw/dt la Regla de la Cadena, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Sean $w = x^2 + yz$ y $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t - 4$, $z = t^3$. Encontrar dw/dt.

Solución Para aplicar la Regla de la Cadena construimos el diagrama de la Figura 16.33. Los pares de ramas que van de w a t dan lo siguiente, donde usamos el símbolo d/dt para la derivada con respecto a la *única* variable t:

FIGURA 16.33



$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}\\ &= (2x)(6t) + z(2) + y(3t^2)\\ &= 2(3t^2 + 1)6t + t^3(2) + (2t - 4)3t^2\\ &= 44t^3 - 12t^2 + 12t\end{aligned}$$

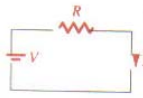
El problema también podría resolverse sin usar la Regla de la Cadena escribiendo

$$w = (3t^2 + 1)^2 + (2t - 4)t^3$$

y encontrando luego dw/dt con los métodos de derivación respecto a una sola variable. •

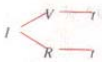
La Regla de la Cadena es útil para resolver problemas de rapidez de variación relacionadas, como los que se discutieron en la Sección 3.8. El método se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 16.34



EJEMPLO 4 En un circuito eléctrico simple se tienen una resistencia R y una tensión V (véase la Figura 16.34). En cierto momento V vale 80 V (volts) y crece a razón de 5 V/min mientras que R es de 40 Ω (ohms) y disminuye a razón de 2 Ω/min. Usar la ley de Ohm $I = V/R$ y la Regla de la Cadena para calcular la rapidez de variación de la corriente I (en amperes, A).

FIGURA 16.35



Solución Como I es función de V y R y tanto V como R son funciones de t (en minutos), se tiene el diagrama de la Figura 16.35. Aplicando la Regla de la Cadena,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R}\frac{dR}{dt}$$

$$= \left(\frac{1}{R}\right)\frac{dV}{dt} + \left(-\frac{V}{R^2}\right)\frac{dR}{dt}.$$

Sustituyendo,

$$V = 80, \quad \frac{dV}{dt} = 5, \quad R = 40, \quad \text{y} \quad \frac{dR}{dt} = -2,$$

obtenemos

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{1}{40}\right)(5) + \left(-\frac{80}{1600}\right)(-2) = \frac{9}{40} = 0.225 \text{ A/min.}$$

Las derivadas parciales se usan para obtener las derivadas de las funciones que están determinadas implícitamente. Como en la Sección 3.6, supongamos que una ecuación $F(x, y) = 0$ determina una función derivable f tal que $y = f(x)$, es decir, $F(x, f(x)) = 0$ para todo x en el dominio D de f. Definamos la función compuesta F como sigue:

$$w = F(u, y) \quad \text{con} \quad u = x, \quad y = f(x)$$

FIGURA 16.36



Esto lleva al diagrama de la Figura 16.36. Con la Regla de la Cadena y el hecho de que u y y son funciones de *una* variable x, se obtiene

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Como $w = F(x, f(x)) = 0$ para todo x, resulta que $dw/dx = 0$. Además, como $u = x$ y $y = f(x)$, se tiene que

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Por lo tanto, la Regla de la Cadena para dw/dx se convierte en

$$0 = \frac{\partial w}{\partial u}(1) + \frac{\partial w}{\partial y}f'(x).$$

Si $\partial w/\partial y \neq 0$, entonces (dado que $u = x$)

$$f'(x) = -\frac{\partial w/\partial u}{\partial w/\partial y} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial y} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Esta discusión puede resumirse como sigue.

TEOREMA (16.20)

Si una ecuación $F(x, y) = 0$ determina implícitamente una función derivable f de una variable x tal que $y = f(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

EJEMPLO 5 Encontrar y' suponiendo que $y = f(x)$ satisface la ecuación

$$y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0.$$

Solución Si $F(x, y)$ es la expresión en el lado izquierdo de la ecuación, entonces por el Teorema (16.20),

$$y' = -\frac{-12x^2 - 5}{4y^3 + 3} = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}.$$

Es ilustrativo comparar esta solución con la del Ejemplo 2 en la Sección 3.6 que se obtuvo usando métodos para una sola variable. •

Dada una ecuación como

$$x^2 - 4y^3 + 2z - 7 = 0,$$

se puede despejar z, obteniendo así

$$z = \tfrac{1}{2}(-x^2 + 4y^3 + 7)$$

que es de la forma

$$z = f(x, y).$$

Por analogía con el caso de una sola variable, se dice que la función f de las variables x y y está determinada *implícitamente* por la ecuación dada. El siguiente teorema proporciona fórmulas para encontrar f_x y f_y o equivalentemente, $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, sin despejar z de la ecuación.

TEOREMA (16.21)

Si una ecuación $F(x, y, z) = 0$ determina implícitamente una función diferenciable f de dos variables x y y tales que $z = f(x, y)$ para todo (x, y) en el dominio de f, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

Demostración La afirmación "$F(x, y, z) = 0$ determina una función f tal que $z = f(x, y)$" significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) en el dominio de f. Se define la función compuesta F de x y y como sigue:

$$w = F(u, v, z) \quad \text{y} \quad u = x, \quad v = y, \quad z = f(x, y).$$

FIGURA 16.37



Observemos que u y v son funciones de x y y pues se puede escribir $u = x + (0 \cdot y)$ y $v = y + (0 \cdot x)$. Consultando el diagrama de la Figura 16.37 y recorriendo las ramas que van de w a x, se obtiene

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Como $w = F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo x y para todo y, resulta que $\partial w/\partial x = 0$. Además, como $\partial u/\partial x = 1$ y $\partial v/\partial x = 0$, la fórmula de la Regla de la Cadena para $\partial w/\partial x$ se convierte en

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x}(1) + \frac{\partial w}{\partial y}(0) + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

y, si $\partial w/\partial z \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial z} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

La fórmula para $\partial z/\partial y$ se puede obtener de manera análoga. • •

EJEMPLO 6 Sea $z = f(x, y)$ tal que

$$x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0,$$

encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

Solución Si denotamos por $F(x, y, z)$ a la expresión en el lado izquierdo de la ecuación dada, entonces por el Teorema (16.21),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz^2 + y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy + 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}. \quad \bullet$$

EJERCICIOS 16.5

Ejercicios 1-2: Use la Regla de la Cadena para encontrar $\partial w/\partial x$ y $\partial w/\partial y$.

1. $w = u \operatorname{sen} v, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = xy$
2. $w = uv + v^2, \quad u = x \operatorname{sen} y, \quad v = y \operatorname{sen} x$

Ejercicios 3-4: Utilice la Regla de la Cadena para hallar $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial s$.

3. $w = u^2 + 2uv, \quad u = r \ln s, \quad v = 2r + s$
4. $w = e^{tv}, \quad t = r + s, \quad v = rs$

Ejercicios 5-6: Aplique la Regla de la Cadena para obtener $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

5. $z = r^2 + s + t^2, \quad r = xe^y, \quad s = ye^x, \quad t = x^2y$

6. $z = pq + qw, \quad p = 2x - y, \quad q = x - 2y, \quad w = -2x + 2y$

Ejercicios 7-8: Use la Regla de la Cadena para encontrar $\partial r/\partial u$, $\partial r/\partial v$ y $\partial r/\partial t$.

7. $r = x \ln y, \quad x = 3u + vt, \quad y = uvt$

8. $r = w^2 \cos z, \quad w = u^2vt, \quad z = uv^2$

9. Evalúe $\partial p/\partial r$, donde $p = u^2 + 3v^2 - 4w^2$, $u = x - 3y + 2r - s$, $v = 2x + y - r + 2s$, $w = -x + 2y + r + s$.

10. Evalúe $\partial z/\partial y$, donde $z = tr + ue^v$, $t = xy^2z$, $r = x^2yz$, $u = xyz^2$, $v = xyz$.

Ejercicios 11-14: Use la Regla de la Cadena para encontrar dw/dt.

11. $w = x^3 - y^3, \quad x = 1/(t+1), \quad y = t/(t+1)$

12. $w = \ln(u + v), \quad u = e^{-2t}, \quad v = t^3 - t^2$

13. $w = r^2 - s\tan t, \quad r = \operatorname{sen}^2 t, \quad s = \cos t, \quad t = 4t$

14. $w = x^2y^3z^4, \quad x = 2t + 1, \quad y = 3t - 2, \quad z = 5t + 4$

Ejercicios 15-18: Encuentre y' suponiendo que $y = f(x)$ satisface la ecuación dada.

15. $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$

16. $x^4 + 2x^2y^2 - 3xy^3 + 2x = 0$

17. $6x + \sqrt{xy} = 3y - 4$

18. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

Ejercicios 19-22: Encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ suponiendo que $z = f(x, y)$ satisface la ecuación dada.

19. $2xz^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z = 0$

20. $xz^2 + 2x^2y - 4y^2z + 3y - 2 = 0$

21. $xe^{yz} - 2ye^{xz} + 3ze^{xy} = 1$

22. $yx^2 + z^2 + \cos xyz = 4$

23. El radio r y la altura h de un cilindro circular recto aumentan a razón de 0.01 cm/min y 0.02 cm/min, respectivamente. Use la Regla de la Cadena para calcular la tasa de crecimiento del volumen con respecto al tiempo, cuando $r = 4$ cm y $h = 7$ cm. ¿Con qué rapidez varía el área de la superficie curva?

24. Los lados iguales y el ángulo entre ellos de un triángulo isósceles aumentan a razón de 0.1 m/h y 2°/h, respectivamente. Utilice la Regla de la Cadena para evaluar la tasa de crecimiento del área del triángulo en el momento en que la longitud de los lados iguales es de 20 m y el ángulo entre ellos es de 60°.

25. La presión P, el volumen V y la temperatura T de un gas encerrado están relacionadas por la ley del gas ideal $PV = kT$, donde k es una constante. Suponiendo que P y V varían con la rapidez dP/dt y dV/dt, respectivamente, encuentre una fórmula para evaluar dT/dt, usando la Regla de la Cadena.

26. El radio de la base r y la altura h de un cilindro circular recto tienen razones de cambio con respecto al tiempo dr/dt y dh/dt, respectivamente. Use la Regla de la Cadena para hallar una fórmula para dV/dt, donde V es el volumen del cilindro.

27. Un gas obedece la ley del gas ideal $PV = 8T$. El gas se calienta a razón de 2°C/min y la presión aumenta a razón de $\frac{1}{3}$ (kgf/cm²)/min. En cierto momento, la temperatura es de 200°C y la presión es de 10 kgf/cm². Calcule la rapidez de cambio del volumen en ese momento.

28. Por un agujero de un recipiente sale arena a razón de 6 cm³/min. Al caer va formando un montículo con la forma de un cono circular recto cuyo radio en la base aumenta a razón de 0.25 cm/min. En el momento en que han salido 40 cm³ de arena, el radio es de 5 cm. Calcule la rapidez con la que la altura del montículo aumenta.

29. A los dos años, un niño típico mide 86 cm de estatura, pesa 13 kg y crece a razón de 9 cm/año y 2 kg/año. Use la fórmula de Dubois y Dubois para el área de la superficie del cuerpo humano $S = 0.007184x^{0.425}y^{0.725}$, donde x es el peso y y es la estatura, para calcular aproximadamente la rapidez de crecimiento del área de la superficie (véase el Ejercicio 39 de la Sección 16.1).

30. Cuando se tienen en consideración el tamaño de las moléculas y sus fuerzas de atracción, la presión P, el volumen V y la temperatura T de un mol de un gas encerrado están relacionadas por la *ecuación de van der Waals*

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = kT$$

donde a, b y k son constantes positivas. Suponiendo que t es el tiempo, use la Regla de la Cadena para hallar una fórmula para dT/dt en términos de dP/dt, dV/dt, P y V.

31. Si se conectan n resistencias $R_1, R_2, \ldots, R_n$ en paralelo, entonces la resistencia total R está dada por

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}.$$

Demuestre que para $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial R}{\partial R_k} = \left(\frac{R}{R_k}\right)^2.$$

32. Se dice que una función f de dos variables es *homogénea de grado n* si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t tal que (tx, ty) está en el dominio de f. Ejecute la demostración de que para tales funciones, $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$. (*Sugerencia:* Derive $f(tx, ty)$ con respecto a t.)

Ejercicios 33-36: Encuentre el grado n de la función homogénea f (consulte el Ejercicio 32) y verifique la fórmula

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y).$$

33. $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3$

34. $f(x, y) = \dfrac{x^3y}{x^2 + y^2}$ **35.** $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$

36. $f(x, y) = xye^{y/x}$

37. Sean $w = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Demuestre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

38. Sean $w = f(x, y)$ y $x = e^r\cos\theta$, $y = e^r\operatorname{sen}\theta$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right).$$

39. Sean $w = f(x, y)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Pruebe que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}.$$

40. Sea $v = f(x - at) + g(x + at)$, donde f y g tienen segundas derivadas parciales. Demuestre que v satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

(Compare este ejercicio con el Ejercicio 42 de la Sección 16.3.)

41. Sea $w = \cos(x + y) + \cos(x - y)$. Sin usar las identidades trigonométricas, demuestre que $w_{xx} - w_{yy} = 0$.

42. Sea $w = f(x^2 + y^2)$. Efectúe la demostración de que $y(\partial w/\partial x) - x(\partial w/\partial y) = 0$. (*Sugerencia:* Defina $u = x^2 + y^2$.)

43. Sean $w = f(u, v)$ y $u = g(x, y)$, $v = k(x, y)$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

44. Para w, u y v como en el Ejercicio 43, pruebe que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

45. Demuestre el siguiente Teorema del Valor Medio para una función f de dos variables x y y:

Si f tiene primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular

$$R = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$$

y si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son puntos de R, entonces existe un punto $P(x^*, y^*)$ en el segmento AB tal que

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f_x(x^*, y^*)(x_2 - x_1) + f_y(x^*, y^*)(y_2 - y_1).$$

46. Sírvase del Ejercicio 45 para poner de manifiesto la siguiente generalización del Teorema (4.33): Si $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ para todo (x, y) en una región rectangular R, entonces $f(x, y)$ es constante en R.

47. Generalice el Ejercicio 45 al caso de funciones de tres variables.

48. Generalice el Ejercicio 46 al caso de funciones de tres variables.

49. Sean $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$ funciones que satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Demuestre que si $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

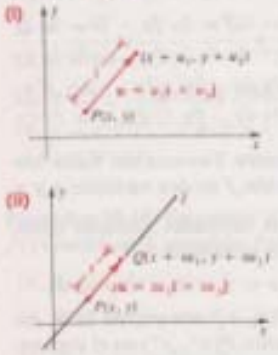
50. Sean $u = y/(x^2 + y^2)$ y $v = x/(x^2 + y^2)$. Verifique directamente las fórmulas para $\partial u/\partial r$ y $\partial v/\partial r$ en el Ejercicio 49, sustituyendo x por $r\cos\theta$ y y por $r\operatorname{sen}\theta$, y derivando luego.

16.6 DERIVADAS DIRECCIONALES

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función con dominio D. Recordemos que si $f(x, y)$ es la temperatura de una lámina plana de metal en el punto $P(x, y)$ del plano xy, entonces las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ dan las razones de cambio o tasas de variación (instantáneas) de la temperatura con respecto a la distancia en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente (véanse las Figuras 16.20 y 16.21). En esta sección se generalizará esto a la razón de cambio de $f(x, y)$ en *cualquier* dirección.

Sea $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ un vector unitario. Si $\mathbf{u}$ se representa con un vector con punto inicial $P(x, y)$, como en la Figura (16.38)(i), entonces el punto final tiene coordenadas $(x + u_1, y + u_2)$. Se desea definir la razón de cambio de $f(x, y)$ con respecto a la distancia en la dirección determinada por $\mathbf{u}$.

FIGURA 16.38



Sea l la recta que pasa por P y es paralela a $\mathbf{u}$, y sea Q un punto cualquiera en l, como se ilustra en la Figura 16.38(ii). El vector $\overrightarrow{PQ}$ corresponde al múltiplo escalar $s\mathbf{u} = (su_1)\mathbf{i} + (su_2)\mathbf{j}$ para algún s. Por lo tanto, las coordenadas de Q son $(x + su_1, y + su_2)$. Como $\mathbf{u}$ es un vector unitario,

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|s\mathbf{u}\| = |s|\,\|\mathbf{u}\| = |s|.$$

Entonces, s es la distancia (con signo) desde P medida a lo largo de l. Si $s > 0$, entonces $s\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{u}$. Si $s < 0$, entonces $s\mathbf{u}$ tiene la dirección opuesta.

Si la posición de un punto varía de P a Q, entonces el incremento Δw de $w = f(x, y)$ es

$$\Delta w = f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y).$$

La *razón media de cambio* de $f(x, y)$ es

$$\frac{\Delta w}{s} = \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}.$$

Por ejemplo, sea $w = f(x, y)$ la temperatura en (x, y). Si la temperatura en P es 50° C y la temperatura en Q es 51.5° C, entonces $\Delta w = 1.5°$ C. Si $\|\overrightarrow{PQ}\| = 3$ cm, entonces la tasa media de variación de la temperatura cuando el punto se mueve de P a Q es

$$\frac{\Delta w}{s} = 0.5°\,\text{C/cm}.$$

Como se hizo antes con las derivadas, para encontrar la razón de cambio *instantá-*

donde a, b y k son constantes positivas. Suponiendo que t es el tiempo, use la Regla de la Cadena para hallar una fórmula para dT/dt en términos de dP/dt, dV/dt, P y V.

31. Si se conectan n resistencias $R_1, R_2, \ldots, R_n$ en paralelo, entonces la resistencia total R está dada por

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}.$$

Demuestre que para $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial R}{\partial R_k} = \left(\frac{R}{R_k}\right)^2.$$

32. Se dice que una función f de dos variables es *homogénea de grado n* si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t tal que (tx, ty) está en el dominio de f. Ejecute la demostración de que para tales funciones, $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$. (*Sugerencia:* Derive $f(tx, ty)$ con respecto a t.)

Ejercicios 33-36: Encuentre el grado n de la función homogénea f (consulte el Ejercicio 32) y verifique la fórmula

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y).$$

33. $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3$

34. $f(x, y) = \dfrac{x^3y}{x^2 + y^2}$ **35.** $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$

36. $f(x, y) = xye^{y/x}$

37. Sean $w = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Demuestre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

38. Sean $w = f(x, y)$ y $x = e^r\cos\theta$, $y = e^r\operatorname{sen}\theta$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right).$$

39. Sean $w = f(x, y)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Pruebe que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}.$$

40. Sea $v = f(x - at) + g(x + at)$, donde f y g tienen segundas derivadas parciales. Demuestre que v satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

(Compare este ejercicio con el Ejercicio 42 de la Sección 16.3.)

41. Sea $w = \cos(x + y) + \cos(x - y)$. Sin usar las identidades trigonométricas, demuestre que $w_{xx} - w_{yy} = 0$.

42. Sea $w = f(x^2 + y^2)$. Efectúe la demostración de que $y(\partial w/\partial x) - x(\partial w/\partial y) = 0$. (*Sugerencia:* Defina $u = x^2 + y^2$.)

43. Sean $w = f(u, v)$ y $u = g(x, y)$, $v = k(x, y)$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

44. Para w, u y v como en el Ejercicio 43, pruebe que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

45. Demuestre el siguiente Teorema del Valor Medio para una función f de dos variables x y y:

Si f tiene primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular

$$R = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$$

y si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son puntos de R, entonces existe un punto $P(x^*, y^*)$ en el segmento AB tal que

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f_x(x^*, y^*)(x_2 - x_1) + f_y(x^*, y^*)(y_2 - y_1).$$

46. Sírvase del Ejercicio 45 para poner de manifiesto la siguiente generalización del Teorema (4.33): Si $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ para todo (x, y) en una región rectangular R, entonces $f(x, y)$ es constante en R.

47. Generalice el Ejercicio 45 al caso de funciones de tres variables.

48. Generalice el Ejercicio 46 al caso de funciones de tres variables.

49. Sean $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$ funciones que satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

El Teorema (16.23) sirve para expresar una derivada direccional mediante el producto escalar de dos vectores como sigue:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot [u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}]$$

El vector colocado entre los primeros corchetes, cuyas componentes son las primeras derivadas parciales de $f(x, y)$, es muy importante. Se denota por $\nabla f(x, y)$ y se le da el nombre especial de *gradiente de f*. (El símbolo ∇ se llama *del*.)

DEFINICIÓN (16.24)

Sea f una función de dos variables. El **gradiente de** f (o de $f(x, y)$) es la función vectorial dada por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

A veces en las aplicaciones, se denota al gradiente $\nabla f(x, y)$ por **grad** $f(x, y)$. De la discusión anterior se tiene lo siguiente.

DERIVADA DIRECCIONAL (EN TÉRMINOS DEL GRADIENTE) (16.25)

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}.$$

Entonces, *para obtener la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario* **u**, *se toma el producto escalar del gradiente de f con* **u**. En todo lo que sigue, para encontrar $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se usará esta fórmula en lugar del Teorema (16.23).

El símbolo ∇ es un *operador diferencial vectorial* y se define por

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Sus propiedades son parecidas a las del operador d/dx (véanse los Ejercicios 31-36). Operando sobre $f(x, y)$, produce el vector gradiente de la Definición (16.24).

EJEMPLO 2 Sea $f(x, y) = x^2 - 4xy$.

(a) Encontrar el gradiente de f en el punto $P(1, 2)$ y representarlo gráficamente.

(b) Usar dicho gradiente para calcular la derivada direccional de f en $P(1, 2)$ en la dirección de $P(1, 2)$ a $Q(2, 5)$.

Solución

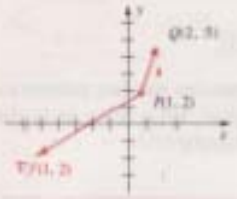
(a) Según la Definición (16.24),

$$\nabla f(x, y) = (2x - 4y)\mathbf{i} - 4x\mathbf{j}.$$

Por lo tanto en $P(1, 2)$,

$$\nabla f(1, 2) = (2 - 8)\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}.$$

FIGURA 16.41



El vector está en la Figura 16.41 con su punto inicial en $P(1, 2)$.

(b) Si tomamos $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$, entonces

$$\mathbf{a} = \langle 2 - 1, 5 - 2 \rangle = \langle 1, 3 \rangle = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

(véase la Figura 16.41). El vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

Aplicando (16.25),

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \mathbf{u}$$

$$= (-6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}(-6 - 12) = -\frac{18}{\sqrt{10}} \approx -5.7 \quad \bullet$$

Sea $P(x, y)$ un punto fijo y consideremos la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ cuando $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ varía. Para un vector unitario $\mathbf{u}$ dado, la derivada direccional puede ser positiva (es decir, $f(x, y)$ aumenta), negativa ($f(x, y)$ disminuye) o puede ser 0. En muchas aplicaciones es importante encontrar la dirección en la que $f(x, y)$ aumenta más rápidamente y también calcular la razón de cambio máxima. El siguiente teorema proporciona esta información.

TEOREMA DEL GRADIENTE (16.26)

Sea f una función de dos variables que es diferenciable en el punto $P(x, y)$.

(i) El valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ en $P(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$.

(ii) La tasa de crecimiento máxima de $f(x, y)$ en $P(x, y)$ se alcanza en la dirección de $\nabla f(x, y)$.

Demostración

FIGURA 16.42



(i) Consideremos al punto $P(x, y)$ y al vector $\nabla f(x, y)$ como fijos (pero arbitrarios) y al vector unitario $\mathbf{u}$ como variable (véase la Figura 16.42). Sea γ el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\nabla f(x, y)$, por (16.25) y el Teorema (14.22),

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

$$= \|\nabla f(x, y)\| \, \|\mathbf{u}\| \cos\gamma$$

$$= \|\nabla f(x, y)\| \cos\gamma$$

Como $-1 \leq \cos\gamma \leq 1$, el valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se alcanza cuando $\cos\gamma = 1$, y en este caso, $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \| \nabla f(x, y) \|$.

(ii) La derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es la razón de cambio de $f(x, y)$ con respecto a la distancia en $P(x, y)$ y en la dirección determinada por $\mathbf{u}$. Como en la parte (i), esta tasa de cambio toma su valor máximo cuando $\cos\gamma = 1$, es decir, si $\gamma = 0$. Sin embargo, si $\gamma = 0$, entonces $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\nabla f(x, y)$. • •

En la demostración del Teorema del Gradiente (16.26), se ve que el valor *mínimo* de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se alcanza cuando $\cos\gamma = -1$. En este caso $\gamma = \pi$ (o $\gamma = 180°$) y $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = -\| \nabla f(x, y) \|$, que es la tasa máxima de *decrecimiento* de $f(x, y)$. Esto da el siguiente corolario del Teorema (16.26).

COROLARIO (16.27)

Sea f una función de dos variables que es diferenciable en el punto $P(x, y)$.

(i) El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ en $P(x, y)$ es $-\| \nabla f(x, y) \|$.

(ii) La tasa mínima de crecimiento (o máxima de decrecimiento) de $f(x, y)$ en $P(x, y)$ se alcanza en la dirección de $-\nabla f(x, y)$.

EJEMPLO 3 Sea $f(x, y) = x^2 - 4xy$. Encontrar la dirección en la que $f(x, y)$ aumenta más rápidamente en el punto $P(1, 2)$ y encontrar también la tasa máxima de crecimiento en P.

Solución En el Ejemplo 2 consideramos la función f y encontramos que $\nabla f(1, 2) = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Entonces por el Teorema (16.26), $f(x, y)$ crece más rápidamente en $P(1, 2)$ en la dirección del vector $-6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (véase la Figura 16.41). La tasa máxima de crecimiento es

$$\| \nabla f(1, 2) \| = \| -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.2 \quad \bullet$$

La derivada direccional de una función f de tres variables se define de manera parecida a como se hizo para dos variables en la Definición (16.22). Concretamente, si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ es un vector unitario, se tiene lo siguiente.

DERIVADA DIRECCIONAL DE $f(x, y, z)$ (16.28)

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x + su_1, y + su_2, z + su_3) - f(x, y, z)}{s}$$

Como en el caso de dos variables, $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ es la razón de cambio de f con respecto a la distancia en $P(x, y, z)$ y en la dirección de $\mathbf{u}$. El **gradiente de f** (o de $f(x, y, z)$) se denota por $\nabla f(x, y, z)$ o por **grad** $f(x, y, z)$ y se define como sigue.

GRADIENTE DE $f(x, y, z)$ (16.29)

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

El siguiente resultado es la versión para tres dimensiones del Teorema (16.23).

TEOREMA (16.30)

Si f es una función diferenciable de tres variables y $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ es un vector unitario, entonces

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) &= \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u} \\ &= f_x(x, y, z)u_1 + f_y(x, y, z)u_2 \\ &\quad + f_z(x, y, z)u_3. \end{aligned}$$

Al igual que en el Teorema (16.26), de todas las posibles derivadas direccionales $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$, la que tiene la derivada mayor es la correspondiente a la dirección de $\nabla f(x, y, z)$ y el valor máximo de la derivada direccional es $\| \nabla f(x, y, z) \|$.

EJEMPLO 4 La temperatura T en un punto (x, y, z) de un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio está dada por la fórmula $T = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$.

(a) Calcular la razón de cambio de T con respecto a la distancia en el punto $P(1, 3, -2)$ en la dirección del vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) ¿En qué dirección a partir de P aumenta más rápidamente T? ¿Cuál es la tasa máxima de variación de T en P?

Solución

(a) Por la Definición (16.29), el gradiente de $T = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$ es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Como

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-200x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-200y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-200z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

tenemos que

$$\nabla T = \frac{-200}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Si denotamos por $\nabla T]_P$ al valor de ∇T en el punto $P(1, 3, -2)$, entonces

$$\nabla T]_P = \frac{-200}{196}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}).$$

El vector unitario $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

De acuerdo con el Teorema (16.30), la tasa de cambio de T en P en la dirección de $\mathbf{a}$ es

$$D_{\mathbf{u}} T]_P = \nabla T]_P \cdot \mathbf{u} = \frac{-200}{196} \frac{(1 - 3 - 2)}{\sqrt{3}} = \frac{200}{49\sqrt{3}} \approx 2.4.$$

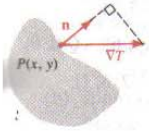
Si por ejemplo, T se expresa en grados Celsius (o centígrados) y la distancia en centímetros, entonces T en P aumenta en la dirección de $\mathbf{a}$ a razón de 2.4°C/cm.

(b) La tasa máxima de crecimiento de T en P se alcanza en la dirección del gradiente, es decir, en la dirección del vector $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. La tasa máxima de cambio es igual a la magnitud del gradiente, es decir

$$\| \nabla T]_P \| = \frac{200}{196} \sqrt{1 + 9 + 4} \approx 3.8$$

En esta sección se usó el gradiente de una función f principalmente para calcular derivadas direccionales. Más adelante se considerarán otros aspectos más importantes. Para terminar esta sección se da una aplicación en la termodinámica.

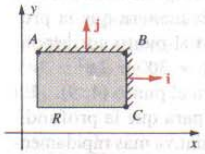
FIGURA 16.43



Sea $T = f(x, y)$ la temperatura en estado estacionario en el punto (x, y) de una región bidimensional R. (*Estado estacionario* significa que T es independiente del tiempo.) *La ley de Fourier de la trasmisión de calor* dice que la intensidad q con la que el flujo térmico pasa por un punto $P(x, y)$ en la frontera de R es directamente proporcional a la componente del gradiente de temperatura ∇T en la dirección del vector unitario $\mathbf{n}$ normal (exterior) a la frontera en P (véase la Figura 16.43). Entonces, $q = k \operatorname{comp}_{\mathbf{n}} \nabla T = k \nabla T \cdot \mathbf{n}$ para un escalar k (véase la Definición (14.28)). Se deduce que si $\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0$, la componente en la dirección de la normal será 0 y entonces no saldrá calor de la región por P. Se dice que la región está *aislada* en el punto P. La región está *aislada en una parte de la frontera* si lo está en todos los puntos de esa parte. Puede decirse algo parecido para regiones en tres dimensiones.

EJEMPLO 5 Sea R la región rectangular del plano xy que se muestra en la Figura 16.44 y sea $T = f(x, y)$ la temperatura en estado estacionario en (x, y). Encontrar condiciones para T que hagan que esté aislado **(a)** el lado BC; **(b)** el lado AB.

FIGURA 16.44



Solución

(a) Podemos tomar el vector $\mathbf{i}$ como el vector unitario normal $\mathbf{n}$ al lado BC. Entonces BC está aislado si y sólo si para todo punto P en BC,

$$\nabla T \cdot \mathbf{i} = 0 \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{i} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Esto significa que la razón de cambio de T en la dirección horizontal es 0.

(b) El vector unitario normal al lado AB es $\mathbf{j}$. En este caso, AB está aislado si y sólo si

$$\nabla T \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{o equivalentemente,} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

es decir, la razón de cambio de T en la dirección vertical es 0. •

EJERCICIOS 16.6

Ejercicios 1-6: Encuentre el gradiente de f en el punto indicado.

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P(-4, 3)$
2. $f(x, y) = 7y - 5x$, $P(2, 6)$
3. $f(x, y) = e^{3x} \tan y$, $P(0, \pi/4)$
4. $f(x, y) = x \ln (x - y)$, $P(5, 4)$
5. $f(x, y, z) = yz^3 - 2x^2$, $P(2, -3, 1)$
6. $f(x, y, z) = xy^2e^z$, $P(2, -1, 0)$

Ejercicios 7-20: Calcule la derivada direccional de f en el punto P en la dirección indicada.

7. $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2$, $P(3, -1)$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
8. $f(x, y) = x^3 - 3x^2y - y^3$, $P(1, -2)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$
9. $f(x, y) = \arctan (y/x)$, $P(4, -4)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
10. $f(x, y) = x^2 \ln y$, $P(5, 1)$, $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
11. $f(x, y) = \sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1}$, $P(3, -2)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
12. $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$, $P(2, -1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
13. $f(x, y) = x \cos^2 y$, $P(2, \pi/4)$, $\mathbf{a} = \langle 5, 1 \rangle$
14. $f(x, y) = xe^{3y}$, $P(4, 0)$, $\mathbf{a} = \langle -1, 3 \rangle$
15. $f(x, y, z) = xy^3z^2$, $P(2, -1, 4)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
16. $f(x, y, z) = x^2 + 3yz + 4xy$, $P(1, 0, -5)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$
17. $f(x, y, z) = z^2e^{xy}$, $P(-1, 2, 3)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
18. $f(x, y, z) = \sqrt{xy}\, \operatorname{sen} z$, $P(4, 9, \pi/4)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
19. $f(x, y, z) = (x + y)(y + z)$, $P(5, 7, 1)$, $\mathbf{a} = \langle -3, 0, 1 \rangle$
20. $f(x, y, z) = z^2 \tan^{-1} (x + y)$, $P(0, 0, 4)$, $\mathbf{a} = \langle 6, 0, 1 \rangle$

Ejercicios 21-24:
(a) Calcule la derivada direccional de f en P en la dirección de P a Q.
(b) Encuentre un vector unitario en la dirección de máximo crecimiento de f en P y calcule la tasa de crecimiento de f en esa dirección.
(c) Encuentre un vector unitario en la dirección en la que f disminuye más rápidamente en P y calcule la razón de cambio de f en esa dirección.

21. $f(x, y) = x^2e^{-2y}$, $P(2, 0)$, $Q(-3, 1)$
22. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x - y)$, $P(-\pi/3, \pi/6)$, $Q(0, 0)$
23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $P(-2, 3, 1)$, $Q(0, -5, 4)$
24. $f(x, y, z) = (x/y) - (y/z)$, $P(0, -1, 2)$, $Q(3, 1, -4)$
25. La temperatura T en un punto (x, y) de una placa de metal colocada en el plano xy es inversamente proporcional a la distancia al origen. La temperatura en $P(3, 4)$ es 100°C. Calcule la razón de cambio de T en P en la dirección del vector $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. ¿En qué dirección aumenta más rápidamente T en P? ¿En qué dirección disminuye más rápidamente T en P? ¿En qué dirección se anula la tasa de variación?
26. La superficie de un lago está representada por una región D en el plano xy de manera que la profundidad (en metros) bajo el punto correspondiente a (x, y) es $f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$. Una niña está en el agua en el punto $(4, 9)$. ¿En qué dirección debe nadar para que la profundidad del agua bajo ella disminuya más rápidamente? ¿En qué dirección permanecerá constante la profundidad?
27. El potencial eléctrico V en un punto $P(x, y, z)$ de un sistema de coordenadas rectangulares es $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Calcule la tasa de cambio de V en $P(2, -1, 3)$ en la dirección de P al

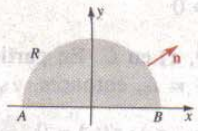
origen. Encuentre la dirección que produce la máxima tasa de cambio de V en P. ¿Cuál es la tasa máxima de cambio en P?

28. La temperatura T en un punto $P(x, y, z)$ de un objeto que está colocado en un sistema de coordenadas rectangulares está dada por $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$. Calcule la tasa de cambio de T en el punto $P(4, -2, 1)$ en la dirección del vector $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. ¿En qué dirección aumenta más rápidamente T en P? ¿Cuál es la tasa máxima de cambio? ¿Hacia qué dirección disminuye más rápidamente T en P? ¿Cuál es la razón de cambio correspondiente?

Ejercicios 29-30: Consulte la discusión previa al Ejemplo 5. En este caso T es la temperatura en (x, y).

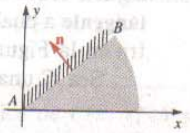
29. La figura muestra una región semicircular R.
 (a) Use coordenadas rectangulares para demostrar que la frontera superior AB está aislada si y sólo si $\partial T/\partial r = 0$. (*Sugerencia:* Ponga de manifiesto que si $T = f(x, y)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces $\partial T/\partial r = (\partial T/\partial x)\cos\theta + (\partial T/\partial y)\operatorname{sen}\theta$.)
 (b) Interprete $\partial T/\partial r$ como una razón de cambio de T.

EJERCICIO 29



30. La figura muestra un sector circular cuya frontera AB está aislada.
 (a) Use coordenadas polares para demostrar que la condición de aislamiento es equivalente a $\partial T/\partial\theta = 0$ en todos los puntos del segmento AB.
 (b) Interprete $\partial T/\partial\theta$ como una razón de cambio de T.

EJERCICIO 30



Ejercicios 31-36: Sean $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, donde f y g son diferenciables. Demuestre la identidad.

31. $\nabla(cu) = c\,\nabla u$, para cualquier constante c.

32. $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$

33. $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

34. $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ con $v \neq 0$.

35. $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$, para todo número real n.

36. Si $w = h(u)$, entonces $\nabla w = \dfrac{dw}{du}\nabla u$.

37. Sean $\mathbf{u}$ un vector unitario y θ el ángulo que forma con la parte positiva del eje x, medido en sentido contrario al del reloj.
 (a) Demuestre que
 $$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$
 (b) Sean $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ y $\theta = 5\pi/6$. Calcule $D_{\mathbf{u}} f(2, -3)$.

38. Consulte el Ejercicio 37. Calcule $D_{\mathbf{u}} f(2, -1)$, cuando $f(x, y) = (xy + y^2)^4$ y $\theta = \pi/3$.

39. Demuestre que si f, f_x y f_y son continuas y $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ en una región rectangular $R = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$, por lo que $f(x, y)$ es constante en R (véase el Ejercicio 46 de la Sección 16.5).

40. Sean $w = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$, donde todas las funciones son diferenciables. Demuestre que si $\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, entonces
 $$dw/dt = \nabla w \cdot \mathbf{r}'(t).$$

16.7 PLANOS TANGENTES Y RECTAS NORMALES A LAS SUPERFICIES

Sea S una superficie que es la gráfica de una ecuación $F(x, y, z) = 0$, donde F tiene primeras derivadas continuas. Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto de S en el que F_x, F_y y F_z

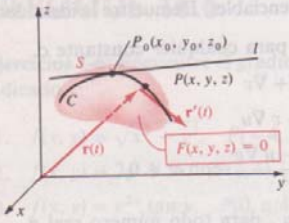
no son todas cero. Una recta l con tangencia a S en P_0 es, por definición, una **recta tangente** a cualquier curva C que se encuentre en S y que contiene a P_0, como se ilustra en la Figura 16.45.

Sea C una curva con ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, entonces $\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$ es un vector tangente a C en $P(x, y, z)$ (véase la Figura 16.45).

FIGURA 16.45



(véase la Figura 16.45).

Para cada t el punto $(f(t), g(t), h(t))$ en C también está en S y por lo tanto,

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0.$$

Si se toma

$$w = F(x, y, z) \quad \text{y} \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

entonces aplicando la Regla de la Cadena y tomando en cuenta que $w = 0$ para todo t,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

De manera que

$$F_x(x, y, z)f'(t) + F_y(x, y, z)g'(t) + F_z(x, y, z)h'(t) = 0$$

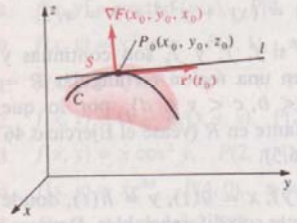
o, equivalentemente,

$$\nabla F(x, y, z) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

para todo punto $P(x, y, z)$ en C. En particular, si corresponde $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a $t = t_0$, entonces

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

FIGURA 16.46



Como $\mathbf{r}'(t_0)$ es un vector tangente a C en P_0, esto implica que *el vector* $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ *es perpendicular a toda recta tangente l a S en* P_0 (véase la Figura 16.46).

El plano que pasa por P_0 y tiene como vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es el **plano tangente a** S **en** P_0. Quedó demostrado que *toda recta tangente l a S en* P_0 *se encuentra en el plano tangente en* P_0. El siguiente teorema resume esta discusión.

TEOREMA (16.31)

Sea $F(x, y, z)$ una función con primeras derivadas parciales continuas y sea P_0 un punto en la gráfica S de $F(x, y, z) = 0$. Si F_x, F_y y F_z no son todas 0 en P_0, entonces el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente a S en P_0.

Se dice que el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ en el Teorema (16.31) es un vector *normal a*

la superficie S en P_0. Aplicando el Teorema (14.38) se obtiene el siguiente corolario, en el cual se supone que F_x, F_y y F_z no son todas 0 en (x_0, y_0, z_0).

COROLARIO (16.32)

El plano tangente a la gráfica de $F(x, y, z) = 0$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene como ecuación

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 1 Encontrar una ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ en el punto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$ y hacer un croquis.

Solución Para usar el Corolario (16.32) expresamos primero la ecuación de la superficie en la forma $F(x, y, z) = 0$ definiendo

$$F(x, y, z) = \tfrac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 - 12 = 0.$$

Las derivadas parciales de F son

$$F_x(x, y, z) = \tfrac{3}{2}x, \quad F_y(x, y, z) = 6y, \quad F_z(x, y, z) = 2z,$$

y por lo tanto en $P_0(2, 1, \sqrt{6})$,

$$F_x(2, 1, \sqrt{6}) = 3, \quad F_y(2, 1, \sqrt{6}) = 6, \quad F_z(2, 1, \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}.$$

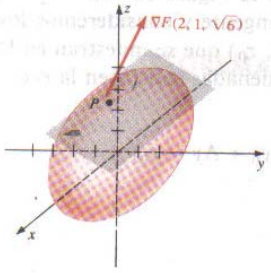
Aplicando el Corolario (16.32), obtenemos la ecuación

$$3(x - 2) + 6(y - 1) + 2\sqrt{6}(z - \sqrt{6}) = 0,$$

que se simplifica a

$$3x + 6y + 2\sqrt{6}z - 24 = 0.$$

FIGURA 16.47



Las coordenadas x, y y z de las intersecciones del elipsoide con los ejes x, y y z, respectivamente, son ± 4, ± 2 y $\pm\sqrt{12}$. En la Figura 16.47 se presenta el elipsoide. El plano tangente en el punto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$ tiene un vector normal

$$\nabla F(2, 1, \sqrt{6}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\sqrt{6}\mathbf{k},$$

que se muestra en la figura. •

Si $z = f(x, y)$ es una ecuación de S, entonces tomando $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, la ecuación en el Corolario (16.32) se convierte en

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0.$$

Esto da el siguiente resultado.

TEOREMA (16.33)

El plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) tiene como ecuación

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

La recta perpendicular al plano tangente en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S es la **recta normal** a S en P_0. Si S es la gráfica de $F(x, y, z) = 0$, entonces la recta normal es paralela al vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

EJEMPLO 2 Encontrar una ecuación de la recta normal al elipsoide $\frac{1}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ en el punto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$.

Solución Esta superficie es la misma que se consideró en el Ejemplo 1. Por lo tanto, el vector

$$\nabla F(2, 1, \sqrt{6}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\sqrt{6}\mathbf{k},$$

que se muestra en la Figura 16.47, es paralelo a la recta normal. Usando el Teorema (14.37), obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas de la recta normal:

$$x = 2 + 3t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = \sqrt{6} + 2\sqrt{6}t; \qquad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Sea f una función de x y y, y sea S la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$. El plano tangente a S en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ puede servir para obtener una interpretación geométrica de la diferencial

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y$$

definida en (16.13). Como

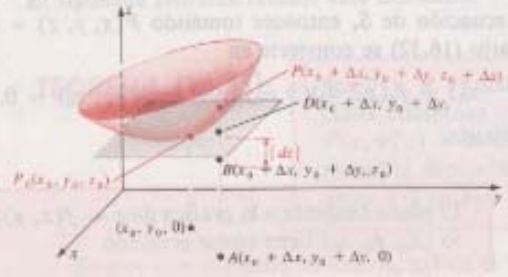
$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

el punto $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ está en S (véase la Figura 16.48).

Sea $D(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z)$ un punto en el plano tangente y consideremos los puntos $A(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, 0)$ y $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0)$ que se muestran en la Figura 16.48. Como D está en el plano tangente, sus coordenadas satisfacen la ecuación del Teorema (16.33), es decir,

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y_0 + \Delta y - y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y = dz. \end{aligned}$$

FIGURA 16.48



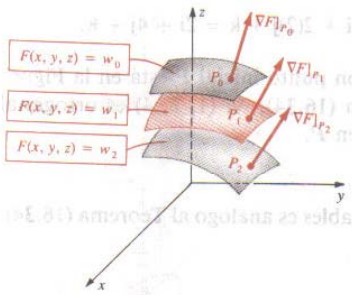
En términos de distancias, se demostró que $|dz| = \|\overrightarrow{BD}\|$, es decir, $|dz|$ *es la distancia de B al punto del plano tangente que se encuentra arriba (o abajo) de B*. Esto es análogo al caso $y = f(x)$ de una variable presentado en la Sección 3.4, en donde se interpretó dy como la distancia a un punto de la recta tangente a la gráfica de f (véase la Figura 3.13). Se deduce que cuando se usa dz como una aproximación al cambio en z, se supone que la superficie S casi coincide con su plano tangente en los puntos cercanos a P_0.

Como una aplicación del análisis en esta sección, supongamos que la temperatura en el punto $P(x, y, z)$ de un sólido, un líquido o un gas en un sistema de coordenadas en tres dimensiones es $w = F(x, y, z)$. Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto fijo, entonces la gráfica de la ecuación

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0)$$

es la superficie de nivel (isoterma) que pasa por P_0. En todos los puntos de esta superficie la temperatura es $w_0 = F(x_0, y_0, z_0)$. Es conveniente visualizar todas las posibles superficies de nivel que se pueden obtener escogiendo diversos puntos. La Figura 16.49 muestra varias superficies que pasan por los puntos P_0, P_1 y P_2 y corresponden a temperaturas w_0, w_1 y w_2. Por el Teorema (16.31), $\nabla F]_{P_0}$, $\nabla F]_{P_1}$ y $\nabla F]_{P_2}$ son los vectores normales a las superficies correspondientes en los puntos P_0, P_1 y P_2, respectivamente.

FIGURA 16.49



En la Sección 16.6 se vio que la máxima tasa de variación de $F(x, y, z)$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ está en la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. De acuerdo con los comentarios anteriores, esta razón máxima de cambio se alcanza en una dirección normal a la superficie de nivel de F que contiene a P_0.

El siguiente teorema resume estos comentarios.

TEOREMA (16.34)

Sea F una función de tres variables que es diferenciable en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y sea S la superficie de nivel de F que contiene a P_0. Si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces este vector gradiente es normal a S en P_0. En consecuencia, es normal a S la dirección en la que la razón de cambio de $F(x, y, z)$ en P_0 es máxima.

Este teorema se ilustra en la Figura 16.49 mediante las superficies isotermas. También se ilustra en la teoría de la electricidad donde $F(x, y, z)$ se interpreta como el potencial en $P(x, y, z)$. Si una partícula se mueve sobre una de las superficies de nivel (equipotenciales), el potencial permanece constante. El potencial cambia más rápidamente cuando la partícula se mueve en la dirección normal a una superficie equipotencial.

EJEMPLO 3 Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$. Esquematizar la superficie de nivel de F que pasa por el punto $P(1, 2, 4)$ y trazar un vector con punto inicial P que corresponda a $\nabla F(1, 2, 4)$.

Solución Las superficies de nivel de F son gráficas de la forma $F(x, y, z) = c$, donde c es una constante. En particular, la superficie de nivel que pasa por $P(1, 2, 4)$ es la gráfica de

$$F(x, y, z) = F(1, 2, 4),$$

es decir, de

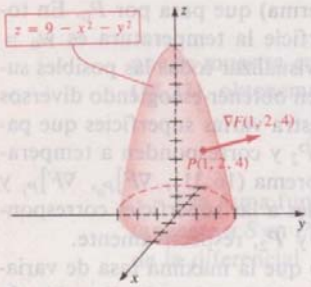
$$x^2 + y^2 + z = (1)^2 + (2)^2 + 4 = 9$$

o equivalentemente,

$$z = 9 - x^2 - y^2.$$

La representación de esta superficie de nivel es un paraboloide de revolución y está en la Figura 16.50.

FIGURA 16.50



El gradiente de F es

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

En $P(1, 2, 4)$,

$$\nabla F(1, 2, 4) = 2(1)\mathbf{i} + 2(2)\mathbf{j} + \mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

El vector $\nabla F(1, 2, 4)$ con punto inicial P está en la Figura 16.50. Según el Teorema (16.34), $\nabla F(1, 2, 4)$ es ortogonal a la superficie de nivel en P. •

El siguiente resultado para funciones de *dos* variables es análogo al Teorema (16.34).

TEOREMA (16.35)

Sea f una función de dos variables que es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$ y sea C la curva de nivel de f que contiene a P_0. Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces este vector gradiente es perpendicular a C en P_0. En este caso, la dirección del máximo cambio de $f(x, y)$ en P_0 es ortogonal a C.

FIGURA 16.51

Curvas de nivel: $9 - x^2 - y^2 = k$



Como ilustración del Teorema (16.35), consideremos $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$. Entonces, las curvas de nivel están dadas por $9 - x^2 - y^2 = k$, donde k es un número real (véase el Ejemplo 3 de la Sección 16.1). En la Figura 16.51 aparecen algunas de estas curvas de nivel (que son circunferencias). Por el Teorema (16.35), la tasa máxima (o mínima) de variación de $f(x, y)$ se alcanza cuando (x, y) se mueve en la dirección perpendicular a estas circunferencias, es decir, a lo largo de las rectas que pasan por el origen. Esto equivale a que el punto $(x, y, f(x, y))$ suba (o baje) en la parte de mayor inclinación de la gráfica de f que se ve en la Figura 16.50.

EJEMPLO 4 Sea $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

(a) Trazar la curva de nivel C de f que pasa por el punto $P(3, 1)$ y un vector con punto inicial P que corresponda a $\nabla f(3, 1)$.

(b) Explicar el significado de la parte (a) en términos de la gráfica de f.

FIGURA 16.52

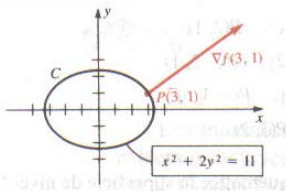
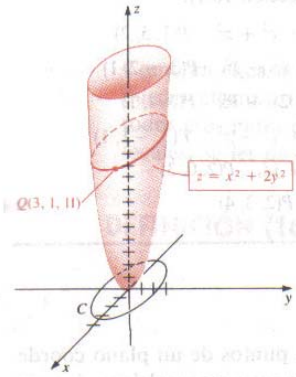


FIGURA 16.53



Solución

(a) La curva de nivel de f que pasa por el punto $P(3, 1)$ está dada por $f(x, y) = f(3, 1)$, es decir, por

$$x^2 + 2y^2 = (3)^2 + 2(1)^2 = 11.$$

La gráfica es la elipse que aparece en la Figura 16.52 El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$$

y por lo tanto,

$$\nabla f(3, 1) = 2(3)\mathbf{i} + 4(1)\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.$$

La Figura 16.52 muestra el vector $\nabla f(3, 1)$ con punto inicial P. De acuerdo con el Teorema (16.35), este vector es ortogonal a la curva de nivel C.

(b) La gráfica de f, es decir, de $z = x^2 + 2y^2$, es un paraboloide elíptico (véase la Figura 16.53). La curva de nivel $x^2 + 2y^2 = 11$ en el plano xy corresponde a la traza del paraboloide en el plano $z = 11$. La razón máxima de cambio de $f(x, y)$ en $P(3, 1)$ se alcanza cuando el punto (x, y) se mueve en el plano xy en la dirección de $\nabla f(1, 3)$. Esto equivale a que el punto $(x, y, f(x, y))$ se mueva hacia arriba sobre la parte de máxima inclinación del paraboloide en el punto $Q(3, 1, 11)$. •

EJERCICIOS 16.7

Ejercicios 1-10: Obtenga ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto P indicado.

1. $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 10, \quad P(2, -3, 1)$
2. $9x^2 - 4y^2 - 25z^2 = 40, \quad P(4, 1, -2)$
3. $z = 4x^2 + 9y^2, \quad P(-2, -1, 25)$
4. $z = 4x^2 - y^2, \quad P(5, -8, 36)$
5. $xy + 2yz - xz^2 + 10 = 0, \quad P(-5, 5, 1)$
6. $x^3 - 2xy + z^3 + 7y + 6 = 0, \quad P(1, 4, -3)$
7. $z = 2e^{-x}\cos y, \quad P(0, \pi/3, 1)$
8. $z = \ln xy, \quad P(\frac{1}{2}, 2, 0)$
9. $x = \ln(\frac{1}{2}y/z), \quad P(0, 2, 1)$
10. $xyz - 4xz^3 + y^3 = 10, \quad P(-1, 2, 1)$

Ejercicios 11-14: Demuestre que el plano tangente a la superficie cuádrica dada en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene la ecuación indicada.

11. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1; \quad \dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$
12. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1; \quad \dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1; \quad \dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} - \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

14. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = cz; \quad \dfrac{2xx_0}{a^2} + \dfrac{2yy_0}{b^2} = c(z + z_0)$

15. Encuentre los puntos del hiperboloide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $4x - 2y + 4z = 5$.

16. Demuestre que la suma de los cuadrados de las coordenadas x, y, z de las intersecciones con los ejes x, y, z de cualquier plano tangente a la gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ es igual a la constante a^2.

17. Demuestre que cualquier recta normal a una esfera pasa por el centro de ésta.

18. Encuentre los puntos del paraboloide $z = 4x^2 + 9y^2$ en los que la recta normal es paralela a la recta que pasa por $P(-2, 4, 3)$ y $Q(5, -1, 2)$.

19. Se dice que dos superficies son *ortogonales* en uno de sus puntos de intersección $P(x, y, z)$ si sus rectas normales en P son perpendiculares. Torne patente que las gráficas de $F(x, y, z) = 0$ y de $G(x, y, z) = 0$ (donde F y G tienen derivadas parciales) son ortogonales en P si y sólo si

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0.$$

20. Demuestre que la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ son ortogonales en todos sus puntos de intersección (véase el Ejercicio 19).

Ejercicios 21-24: Trace la curva de nivel C de f que pasa por el punto P y un vector (con punto inicial P) correspondiente a $\nabla f]_P$ (véanse los Ejercicios 13-16 de la Sección 16.1).

21. $f(x, y) = y^2 - x^2, \quad P(2, 1)$

22. $f(x, y) = 3x - 2y, \quad P(-2, 1)$

23. $f(x, y) = x^2 - y, \quad P(-3, 5)$

24. $f(x, y) = xy, \quad P(3, 2)$

Ejercicios 25-30: Esquematice la superficie de nivel S de F que pasa por el punto P y un vector (con punto inicial P) correspondiente a $\nabla F]_P$ (véanse los Ejercicios 27-32 de la Sección 16.1).

25. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad P(1, 5, 2)$

26. $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2, \quad P(2, -2, 1)$

27. $F(x, y, z) = x + 2y + 3z, \quad P(3, 4, 1)$

28. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, \quad P(3, -1, 1)$

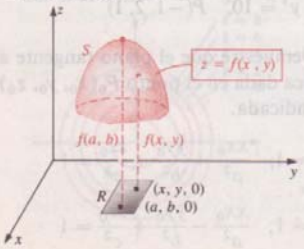
29. $F(x, y, z) = x^2 + y^2, \quad P(2, 0, 3)$

30. $F(x, y, z) = z, \quad P(2, 3, 4)$

16.8 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En el resto de este capítulo, una región formada por los puntos de un plano coordenado que se encuentran dentro de un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, se llamará **región rectangular**. Si se incluyen los puntos de frontera se hablará de una **región rectangular cerrada**. Se dice que una región R es **acotada** si está contenida en alguna región rectangular cerrada.

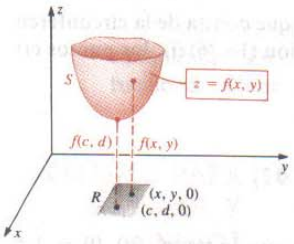
FIGURA 16.54
Curvas de nivel $f(a, b)$



Una función f de dos variables tiene un **máximo local** en (a, b) si existe una región rectangular R que contiene a (a, b) tal que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo par (x, y) en R. Geométricamente, esto significa que si una superficie S es la gráfica de f, entonces los máximos locales corresponden a los puntos más altos de S, como se ilustra en la Figura 16.54. Si f_y existe, entonces como se señaló en la Sección 16.3, $f_y(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente a la traza C de S en el plano $x = a$ (véase la Figura 16.23). Se deduce que si $f(a, b)$ es un máximo local, entonces $f_y(a, b) = 0$. Análogamente, $f_x(a, b) = 0$.

La función f tiene un **mínimo local** en (c, d) si hay una región rectangular R que contiene a (c, d) tal que $f(x, y) \geq$

FIGURA 16.55
Mínimo local $f(c, d)$



$f(c, d)$ para todo (x, y) en R. Si f tiene primeras derivadas parciales, éstas se anulan en (c, d). Los mínimos locales corresponden a los puntos más bajos de la gráfica de f, como se ilustra en la Figura 16.55.

Si una función f de dos variables es continua en una región cerrada y acotada R, entonces f tiene un **máximo absoluto** $f(a, b)$ y un **mínimo absoluto** $f(c, d)$ en puntos (a, b) y (c, d) de R. Esto significa que

$$f(c, d) \leq f(x, y) \leq f(a, b)$$

para todo (x, y) en R. La demostración de este hecho se puede encontrar en libros de cálculo avanzado.

Los máximos y mínimos locales son los **valores extremos locales** de f. Los **valores extremos** incluyen al máximo y al mínimo absolutos (si es que existen). Si f tiene primeras derivadas parciales continuas, entonces de acuerdo con la discusión anterior, los pares de números que dan lugar a valores extremos locales son soluciones de las *dos* ecuaciones siguientes:

$$f_x(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 0.$$

Como en el caso de las funciones de una variable, los máximos y mínimos locales se pueden alcanzar también en pares de números en los que f_x o bien f_y no existe. Como todos esos pares de números son importantes para encontrar los máximos y mínimos locales, se les da un nombre especial.

DEFINICIÓN (16.36)

Sea f una función de dos variables. Un par (a, b) es un **punto crítico** de f si

(i) $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o bien
(ii) $f_x(a, b)$ o $f_y(a, b)$ no existe.

Si f tiene primeras derivadas parciales continuas, entonces según el Teorema (16.33), el plano tangente a la gráfica de f en $(a, b, f(a, b))$ tiene la ecuación

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Si (a, b) es un punto crítico de f, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ y la ecuación se reduce a $z = f(a, b)$, es decir, el plano tangente es horizontal.

Para encontrar los máximos y mínimos locales de una función se comienza buscando los puntos críticos y luego se prueba cada punto para verificar si corresponde a un máximo o un mínimo local.

El máximo o el mínimo de una función de dos variables se puede alcanzar en un punto en la frontera de su dominio R. La investigación de tales **máximos y mínimos en la frontera** requiere a menudo un procedimiento especial como en el caso de los máximos y mínimos en la frontera de funciones de una sola variable. Si la frontera no tiene puntos, por ejemplo, si R es todo el plano xy o el interior de un círculo, entonces no puede haber máximos o mínimos en la frontera.

EJEMPLO 1 Sea $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ para $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Encontrar los máximos y mínimos de f.

Solución El dominio R de f es la región del plano xy que consta de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y su interior. De acuerdo con la Definición (16.36) (i), los puntos críticos son soluciones del sistema de dos ecuaciones

$$f_x(x, y) = 0, \qquad f_y(x, y) = 0,$$

es decir, de

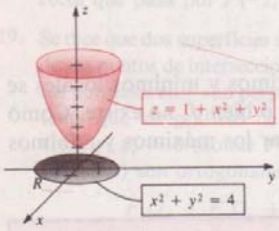
$$2x = 0, \qquad 2y = 0.$$

El único punto que satisface ambas ecuaciones es (0, 0) y por lo tanto, $f(0, 0) = 1$ es el único valor extremo local posible. Además, como

$$f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 > 1 \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

f tiene un mínimo local 1 en (0, 0). Este hecho también se puede ver de la gráfica de $z = f(x, y)$ que se tiene en la Figura 16.56. Obsérvese que el número $f(0, 0) = 1$ también es el mínimo absoluto de f.

FIGURA 16.56



Para encontrar los posibles máximos y mínimos en la frontera, estudiamos los puntos (a, b) de la frontera del dominio de f, es decir, de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Consultando la Figura 16.56, se ve que cualquiera de estos puntos, por ejemplo el (0, 2), da como resultado el máximo absoluto $f(0, 2) = 5$. •

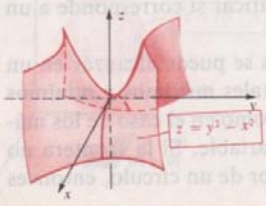
Como se ilustra en el siguiente ejemplo, no todos los números críticos dan lugar a máximos o mínimos.

EJEMPLO 2 Sea $f(x, y) = y^2 - x^2$ con dominio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Encontrar los máximos y mínimos de f.

Solución Según la Definición (16.36), los puntos críticos son soluciones del sistema de dos ecuaciones

$$f_x(x, y) = -2x = 0, \qquad f_y(x, y) = 2y = 0.$$

FIGURA 16.57



Como en el Ejemplo 1, el único valor extremo local posible es $f(0, 0) = 0$. Sin embargo, si $y \neq 0$, entonces $f(0, y) = y^2 > 0$; y si $x \neq 0$, entonces $f(x, 0) = -x^2 < 0$. Por lo tanto, cualquier región rectangular del plano xy que contenga a (0, 0) contiene puntos en los que el valor de la función es mayor que $f(0, 0)$ y también puntos en los que el valor de la función es menor que $f(0, 0)$. Por consiguiente, f no tiene máximos o mínimos locales. Este resultado es evidente a partir de la gráfica de $z = f(x, y)$ en la Figura 16.57. Debido a la forma de la superficie cerca de (0, 0, 0) se dice que este pun-

to de la gráfica es un **punto silla** (de montar). Como el dominio de f no tiene frontera, no hay máximos o mínimos en la frontera.

El siguiente criterio que se enuncia sin demostración es útil para las funciones más complicadas. En cierto sentido, es análogo al Criterio de la Segunda Derivada para las funciones de una variable.

CRITERIO PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS (16.37)

Sea f una función de dos variables que tiene segundas derivadas parciales continuas en una región rectangular Q y sea

$$g(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

para todo (x, y) en Q. Si (a, b) está en Q y $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$, entonces

(i) $f(a, b)$ es un máximo local de f si $g(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$.

(ii) $f(a, b)$ es un mínimo local de f si $g(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$.

(iii) $f(a, b)$ no es un valor extremo de f si $g(a, b) < 0$.

Es fácil recordar la fórmula para $g(x, y)$ observando que está dada por el determinante

$$g = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2.$$

Obsérvese que si $g(a, b) > 0$, entonces $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b)$ es positivo y por lo tanto $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ tienen el mismo signo. De modo que, puede sustituirse $f_{xx}(a, b)$ en (i) y (ii) por $f_{yy}(a, b)$. Si $g(a, b) = 0$, el criterio no da información. En este caso es necesario usar un método más directo como el que se usó en los ejemplos anteriores.

EJEMPLO 3 Sea $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$. Encontrar los máximos y mínimos locales de f.

Solución Como $f_x(x, y) = 2x - 4y$ y $f_y(x, y) = -4x + 3y^2 + 4$, los puntos críticos son soluciones del sistema de dos ecuaciones

$$2x - 4y = 0, \qquad -4x + 3y^2 + 4 = 0.$$

Resolviéndolas simultáneamente obtenemos los puntos (4, 2) y $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ (verifíquese este hecho).

Las segundas derivadas parciales de f son

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = -4, \quad f_{yy}(x, y) = 6y$$

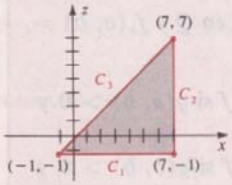
y por lo tanto,

$$g(x, y) = (2)(6y) - (-4)^2 = 12y - 16.$$

Como $g(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = -8 < 0$, de (16.37) (iii) se ve que $f(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ no es un valor extremo de f. Como $g(4, 2) = 8 > 0$ y $f_{xx}(4, 2) = 2 > 0$, de acuerdo con (16.37) (ii), f tiene un mínimo local $f(4, 2) = 0$. •

EJEMPLO 4 Sea $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$. Encontrar el máximo y el mínimo absolutos de f en la región triangular R que tiene como vértices $(-1, -1)$, $(7, -1)$ y $(7, 7)$.

FIGURA 16.58



Solución La frontera de R consta de los segmentos C_1, C_2 y C_3 que se muestran en la Figura 16.58. En el Ejemplo 3 encontramos que f tiene un mínimo local 0 en el punto $(4, 2)$ que está dentro de R. Por lo tanto sólo hace falta buscar los máximos y mínimos en la frontera.

En C_1 tenemos $y = -1$ y entonces, los valores de f están dados por

$$f(x, -1) = x^2 + 4x - 1 - 4 = x^2 + 4x - 5.$$

Esto determina una función de una variable cuyo dominio es el intervalo $[-1, 7]$. La primera derivada es $2x + 4$, que es igual a 0 en $x = -2$, pero este número se encuentra fuera del intervalo $[-1, 7]$. Por lo tanto no hay máximos o mínimos locales de $f(x, -1)$ en $[-1, 7]$. Como $f(x, -1)$ es creciente en todo este intervalo, el mínimo y el máximo en la frontera son

$$f(-1, -1) = -8 \quad \text{y} \quad f(7, -1) = 72.$$

En C_2 tenemos $x = 7$ y los valores de f están dados por

$$f(7, y) = 49 - 28y + y^3 + 4y = y^3 - 24y + 49$$

para $-1 \leq y \leq 7$. La primera derivada de esta función de y es $3y^2 - 24$ y por lo tanto, hay un número crítico si $3y^2 = 24$, o $y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Usando la segunda derivada $6y$ de $f(7, y)$ vemos que $f(7, 2\sqrt{2})$ es un mínimo local de *f en el segmento C_2*. Sin embargo, como $f(7, 2\sqrt{2}) = 49 - 32\sqrt{2} \approx 3.7$ y $f(-1, -1) = -8$, no se trata de un mínimo absoluto de f en R. Los valores de f en los extremos de C_2 son

$$f(7, -1) = 72 \quad \text{y} \quad f(7, 7) = 224.$$

Finalmente, en C_3 se tiene que $y = x$ y los valores de f están dados por

$$f(x, x) = x^2 - 4x^2 + x^3 + 4x = x^3 - 3x^2 + 4x.$$

La primera derivada $3x^2 - 6x + 4$ no tiene raíces reales y por lo tanto, no hay números críticos de $f(x, x)$. Ya habíamos calculado los valores $f(-1, -1) = -8$ y $f(7, 7) = 224$ en los extremos. Por lo tanto, estos valores en los extremos son el mínimo y el máximo absolutos de f en la región triangular R. •

EJEMPLO 5 Se desea contruir una caja sin tapa con la forma de un paralelepípedo rectangular que tenga un volumen de 12 pie^3. El costo por pie cuadrado del material

que se usará para el fondo es \$4 (dólares), el que se usará para dos de los lados opuestos es \$3, y el que se usará para los otros dos lados opuestos es de \$2. Calcular las dimensiones de la caja para las que el costo es mínimo.

Solución Sean x y y las dimensiones (en pies) de la base, y sea z la altura (también en pies). Como hay dos lados de área xz y dos lados de área yz, el costo C del material es

$$C = 4xy + 3(2xz) + 2(2yz)$$

donde x, y, z deben ser todos diferentes de 0. Como $xyz = 12$, resulta que $z = 12/(xy)$. *Sustituyendo en la fórmula para C y simplificando obtenemos*

$$C = 4xy + \frac{72}{y} + \frac{48}{x}.$$

La frontera no tiene puntos porque $x > 0$ y $y > 0$ para todo (x, y). Por lo tanto, no puede haber máximos o mínimos en la frontera. Para encontrar los máximos y mínimos locales resolvemos el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$C_x = 4y - \frac{48}{x^2} = 0, \qquad C_y = 4x - \frac{72}{y^2} = 0.$$

Estas ecuaciones implican que

$$x^2y = 12 \quad \text{y} \quad xy^2 = 18.$$

De la primera resulta $y = 12/x^2$. Sustituyendo en la segunda,

$$x\left(\frac{144}{x^4}\right) = 18 \qquad \text{o bien} \qquad 144 = 18x^3.$$

Despejando x obtenemos $x^3 = 8$, o sea $x = 2$. Como $y = 12/x^2$, el valor correspondiente de y es $\frac{12}{4}$, o 3. Usando el Teorema (16.3) podemos ver que estos valores de x y y corresponden a un mínimo de C. Finalmente, usando $z = 12/(xy)$ obtenemos $z = 12/(2 \cdot 3) = 2$. Por lo tanto, el costo mínimo se obtiene si los lados de la base son de 3 y 2 pie, y la altura es de 2 pie. Los lados más largos son los que deben construirse con el material de \$2, y los más cortos con el de \$3. •

Los resultados de esta sección se pueden generalizar a las funciones de más de dos variables. Por ejemplo, dada $f(x, y, z)$, se definen los máximos y mínimos locales de manera análoga al caso de dos variables. Si f tiene primeras derivadas parciales, un valor extremo local siempre se alcanza en un punto en el que f_x, f_y y f_z son todas nulas. Es difícil obtener criterios para determinar si tales puntos son máximos o mínimos o no lo son. Sin embargo, en las aplicaciones esto se puede dilucidar frecuentemente analizando la naturaleza física del problema.

EJERCICIOS 16.8

Ejercicios 1-14: Halle los máximos y mínimos de f.

1. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$
2. $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$
3. $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$
4. $f(x, y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2$

5. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$

6. $f(x, y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$

7. $f(x, y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$

8. $f(x, y) = \cos x + \cos y$

9. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

10. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

11. $f(x, y) = \dfrac{4y + x^2y^2 + 8x}{xy}$

12. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

13. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$; $0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi$

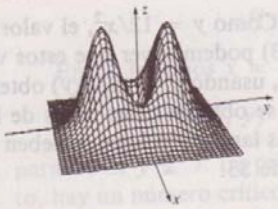
14. $f(x, y) = \dfrac{(x + y + 1)^2}{x^2 + y^2 + 1}$

15. La figura presenta una gráfica generada por computadora de

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$$

Parece haber cuatro puntos críticos. Demuestre que en realidad hay cinco puntos críticos y encuentre los máximos y mínimos de f.

EJERCICIO 15

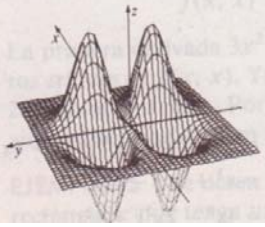


16. La figura ofrece una gráfica generada por computadora de

$$f(x, y) = xy^2e^{-(x^2+y^2)/4}$$

Parece haber cuatro puntos. Encuentre las coordenadas de estos cuatro puntos pero demuestre que hay una infinidad de puntos críticos además de estos. ¿En dónde se hallan?

EJERCICIO 16



Ejercicios 17-22: Encuentre el máximo y el mínimo absolutos de f suponiendo que el dominio es la región R indicada. (Consulte los Ejercicios 1-6 para obtener los máximos y mínimos locales.)

17. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$; $R = \{(x, y): -2 \le x \le 4, -1 \le y \le 3\}$

(*Sugerencia:* Para determinar los máximos y mínimos en la frontera, considere las siguientes funciones de *una* variable: $f(x, -1)$, $f(x, 3)$, $f(-2, y)$ y $f(4, y)$.)

18. $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$; $R = \{(x, y): |x| \le 3, |y| \le 2\}$

19. $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$; la región triangular R con vértices $(1, 2)$, $(1, -2)$ y $(-1, -2)$.

20. $f(x, y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2$; la región R acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 9$.

21. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$; la región R acotada por la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

22. $f(x, y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$; la región triangular R acotada por las rectas $y = x$, $y = -x$ y $y = 2$.

23. Establezca la distancia más corta del punto $P(2, 1, -1)$ al plano $4x - 3y + z = 5$.

24. Calcule la distancia más corta entre los planos $2x + 3y - z = 2$ y $2x + 3y - z = 4$.

25. Halle los puntos en la gráfica de $xy^3z^2 = 16$ que están más cerca del origen.

26. Encuentre tres números reales positivos cuya suma sea 1000 y su producto sea máximo.

27. Si una caja abierta con forma de paralelepípedo rectangular debe tener volumen V, ¿con qué dimensiones es mínima el área de su superficie?

28. Si una caja abierta con forma de paralelepípedo rectangular debe tener superficie con área A, ¿qué dimensiones harán que el volumen sea máximo?

29. Encuentre las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo con caras paralelas a los lados que puede inscribirse en el elipsoide

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144.$$

30. Generalice el Ejercicio 29 a un elipsoide arbitrario

$$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1.$$

31. Calcule las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo que tiene tres de sus caras en los planos coordenados, un vértice en el origen y otro vértice en el primer octante sobre el plano $4x + 3y + z = 12$.

32. Generalice el Ejercicio 31 a un plano arbitrario $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$, donde a, b y c son números reales positivos.

33. Una compañía planea fabricar cajas cerradas con la forma de un paralelepípedo rectangular con un volumen de 8 pie^3. El material de la tapa y del fondo cuesta el doble que el de los lados. Calcule las dimensiones para las que el costo es mínimo.

34. Una ventana debe tener la forma de un rectángulo coronado por un triángulo isósceles, como se ilustra en la figura. El perímetro de la ventana debe ser de 4 m. ¿Qué valores de x, y y θ producen la máxima área?

EJERCICIO 34



35. El Servicio Postal de Estados Unidos no acepta cajas rectangulares tales que la suma de su longitud y el perímetro de una sección transversal perpendicular a dicha longitud, sea mayor que 108 pulg. Calcule las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede enviarse por correo.

36. Encuentre un vector de magnitud 8 en tres dimensiones, tal que la suma de sus componentes sea lo más grande posible.

37. A menudo, en los experimentos científicos los valores de dos cantidades correspondientes x y y se escriben en una tabla, como sigue:

Valores de x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Valores de y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Al situar los puntos (x_k, y_k), un investigador puede conjeturar que las variables x y y están relacionadas *linealmente*, es decir $y = mx + b$ para números m y b. Entonces, querrá encontrar una recta l cuya ecuación sea la que "mejor se ajuste" a los datos, como se ilustra en la figura. Los estadísticos llaman a l *recta de regresión lineal*.

Se puede encontrar l usando el *método de mínimos cuadrados*. Para aplicar este método, se considera para cada k, la *desviación vertical* $d_k = y_k - (mx_k + b)$ del punto (x_k, y_k) con respecto a la recta $y = mx + b$ (véase la figura). Entonces, los valores de m y b se determinan buscando el mínimo de la suma de los cuadrados $\sum_{k=1}^{n} d_k^2$ (se usan los cuadrados d_k^2 porque algunos valores de d_k pueden ser negativos). Sustituyendo d_k se obtiene la siguiente función f de m y b:

$$f(m, b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - mx_k - b)^2.$$

Demuestre que para la recta $y = mx + b$ que mejor se ajusta a los datos,

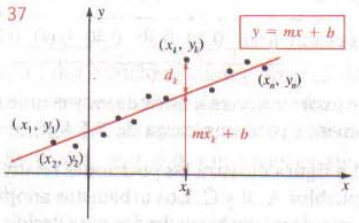
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)m + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

y

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)m + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Por lo tanto, la recta puede encontrarse resolviendo este sistema de dos ecuaciones en m y b.

EJERCICIO 37



38. Dadas las ecuaciones del Ejercicio 37 demuestre que es 0 la suma $\sum_{k=1}^{n} d_k$ de las desviaciones verticales. (Esto significa que las desviaciones positivas y negativas se cancelan mutuamente y es una de las razones por las que se usa $\sum_{k=1}^{n} d_k^2$ en el método de mínimos cuadrados.)

Ejercicios 39-40: Aplique el método de mínimos cuadrados (véase el Ejercicio 37) para encontrar la recta $y = mx + b$ que mejor se ajusta a los datos.

39.

Valores de x	1	4	7
Valores de y	3	5	6

40.

Valores de x	1	4	6	8
Valores de y	1	3	2	4

41. La siguiente tabla muestra una lista de la relación entre los promedios durante el semestre y las calificaciones en el examen final de diez estudiantes en una clase de matemáticas.

Promedio en el semestre	40	55	62	68	72	76	80	86	90	94
Examen final	30	45	65	72	60	82	76	92	88	98

Ajuste una recta a estos datos y úsela para predecir la calificación en el examen final de un estudiante con un promedio durante el semestre de 70.

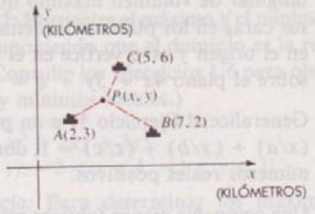
42. Al estudiar el diagrama de carga y alargamiento de un material elástico sometido a tensión (véase la página 287) un ingeniero encuentra que una parte de la curva parece ser lineal. En la tabla aparece una lista de algunos valores experimentales.

Carga (kgf)	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
Alargamiento (cm)	0.10	0.30	0.40	0.60	0.70	0.90

Ajuste una recta a estos datos y estime el alargamiento para una carga de 7.5 kgf.

43. La figura muestra las posiciones relativas de tres pueblos A, B y C. Los urbanistas adoptan el criterio de mínimos cuadrados para decidir en dónde construir una nueva escuela secundaria para dar servicio a las tres comunidades. La escuela se construirá en el punto $P(x, y)$ en el que las sumas de los cuadrados de las distancias a los pueblos A, B y C sea mínima. Encuentre la posición relativa del sitio para la construcción.

EJERCICIO 43



44. Generalice el Ejercicio 43 al caso de n pueblos localizados en los puntos $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $Q_n(x_n, y_n)$.

45. El Ejercicio 37 se puede generalizar al problema de encontrar el plano $z = ax + by + c$ que mejor se ajusta a los datos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\ldots$, (x_n, y_n, z_n). El método de mínimos cuadrados consiste en determinar los valores a, b y c para los que

$$f(a, b, c) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ax_k - by_k - c)^2$$

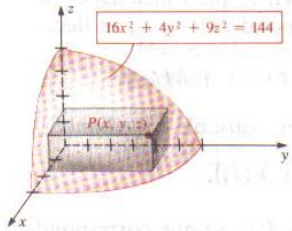
sea mínima. Encuentre un sistema de tres ecuaciones en las tres incógnitas a, b y c. Obtenga el plano que mejor se ajusta a los datos (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) y (1, 1, 2). (*Sugerencia:* Resuelva el sistema de tres ecuaciones $f_a = 0$, $f_b = 0$, $f_c = 0$.)

46. Tres alelos (variantes de un gen) A, B y O determinan los cuatro grupos sanguíneos del género humano: A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB. La ley de Hardy-Weinberg afirma que la proporción de individuos en una población que tiene dos alelos diferentes está dada por la fórmula $P = 2pq + 2pr + 2rq$, donde p, q y r son las proporciones en la población de los alelos A, B y O, respectivamente. Demuestre que P debe ser menor que o igual a $\frac{2}{3}$. (*Sugerencia:* $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$ y $p + q + r = 1$.)

16.9 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Las definiciones de máximos y mínimos dadas en la sección anterior se pueden generalizar a funciones f de cualquier número de variables. En muchas aplicaciones, para calcular los máximos y mínimos de f, hay que restringir las variables de alguna manera.

FIGURA 16.59



Por ejemplo, supongamos que se desea calcular el volumen máximo de un paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados, que puede inscribirse en el elipsoide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$. Por simetría basta analizar la parte contenida en el primer octante, que se ilustra en la Figura 16.59.

Si $P(x, y, z)$ es el vértice que muestra la figura, entonces el volumen V del paralelepípedo es $V = 8xyz$. Se desea calcular el valor máximo de V sujeto a la **restricción** (o **condición adicional**)

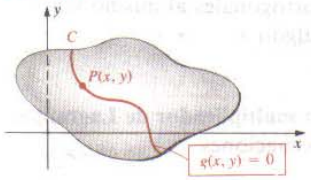
$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0.$$

Despejando z de esta ecuación y sustituyendo en la fórmula para V se obtiene

$$V = (8xy)\tfrac{1}{3}\sqrt{144 - 16x^2 - 4y^2}.$$

Entonces, es posible encontrar el máximo usando (16.37). Sin embargo, este método es complicado debido a la dificultad de calcular las derivadas parciales y hallar los puntos críticos. Otra desventaja de este método es que en algunos problemas parecidos puede ser imposible despejar z. Por estas razones resulta a veces más fácil usar el método de los *multiplicadores de Lagrange* que se presenta en esta sección.*

FIGURA 16.60



Como un segundo ejemplo, sea $f(x, y)$ la temperatura en el punto $P(x, y)$ de la lámina plana de metal que se ilustra en la Figura 16.60 y sea C una curva con ecuación rectangular $g(x, y) = 0$. Se desea encontrar los puntos de C en donde la temperatura es máxima o mínima. Esto equivale a calcular los máximos y mínimos de $f(x, y)$ *con la restricción* $g(x, y) = 0$. Un método para hacer esto consiste en aplicar el siguiente resultado.

TEOREMA DE LAGRANGE (16.38)

Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones con primeras derivadas parciales continuas tales que f tiene un máximo o mínimo $f(x_0, y_0)$ cuando (x, y) está sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Demostración La gráfica de $g(x, y) = 0$ es una curva C en el plano xy. Se puede demostrar que en las condiciones dadas C tiene una parametrización regular

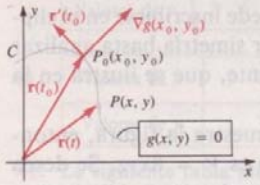
$$x = h(t), \qquad y = k(t)$$

para t en algún intervalo I. Sea

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = h(t)\mathbf{i} + k(t)\mathbf{j}$$

* Este método fue descubierto por el matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

FIGURA 16.61



el vector de posición del punto $P(x, y)$ en C (véase la Figura 16.61) y sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto en el que f alcanza el valor máximo o mínimo y que corresponde a $t = t_0$, es decir,

$$\mathbf{r}(t_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} = h(t_0)\mathbf{i} + k(t_0)\mathbf{j}.$$

Si se define una función F de una variable t mediante

$$F(t) = f(h(t), k(t)),$$

entonces cuando t varía, se obtienen valores de la función $f(x, y)$ que corresponden a (x, y) en C, es decir, $f(x, y)$ está sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$. Como $f(x_0, y_0)$ es un máximo o mínimo de f bajo esta restricción, resulta que $F(t_0) = f(h(t_0), k(t_0))$ es un máximo o mínimo de $F(t)$. Entonces $F'(t_0) = 0$. Considerando a F como una función compuesta y usando la Regla de la Cadena,

$$F'(t) = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt} = f_x(x, y)h'(t) + f_y(x, y)k'(t).$$

Tomando $t = t_0$,

$$0 = F'(t_0) = f_x(x_0, y_0)h'(t_0) + f_y(x_0, y_0)k'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0).$$

Esto demuestra que el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ a C (véase el Teorema (16.35)). Pero $\nabla g(x_0, y_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ porque C es una curva de nivel de g. Como $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son ortogonales al mismo vector, son paralelos, es decir, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algún λ. • •

El número λ que aparece en el Teorema (16.38) es un **multiplicador de Lagrange**. Para aplicar este método se comienza considerando las ecuaciones

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \text{y} \quad g(x, y) = 0$$

o, equivalentemente,

(16.39) $$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y), \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \quad \text{y} \quad g(x, y) = 0.$$

Si f, sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$, tiene un máximo o mínimo en (x_0, y_0), entonces (x_0, y_0) debe ser solución de todas las ecuaciones en (16.39). Por lo tanto, para determinar los máximos y mínimos se necesita encontrar los puntos (a, b) que para algún valor adecuado λ satisfacen las tres ecuaciones en (16.39). Si f tiene un máximo o un mínimo, éste será el mayor o el menor de los valores de la función en esos puntos.

EJEMPLO 1 Calcular los máximos y mínimos de $f(x, y) = xy$ para (x, y) restringido a la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

Solución En este ejemplo la restricción es $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$. Tomando $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ obtenemos

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})$$

y las ecuaciones (16.39) asumen la forma

$$y = 8x\lambda, \quad x = 2y\lambda \quad \text{y} \quad 4x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Hay muchas maneras de resolver este sistema de ecuaciones. Una de ellas consiste en escribir

$$x = 2y\lambda = 2(8x\lambda)\lambda = 16x\lambda^2.$$

Lo cual lleva a

$$x - 16x\lambda^2 = 0 \quad \text{o bien} \quad x(1 - 16\lambda^2) = 0$$

y por lo tanto, $x = 0$ o bien $\lambda = \pm \frac{1}{4}$. Si $x = 0$, entonces sustituyendo en la ecuación $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, se obtiene $y = \pm 2$. Por lo tanto, los puntos $(0, \pm 2)$ son posibles valores extremos de $f(x, y)$. Si $\lambda = \pm \frac{1}{4}$, entonces $y = 8x\lambda = 8x(\pm \frac{1}{4})$ o bien $y = \pm 2x$. Usando otra vez el hecho de que $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, resulta

$$4x^2 + 4x^2 - 4 = 0, \quad 8x^2 = 4, \quad \text{o bien} \quad x = \pm 1/\sqrt{2} = \pm\sqrt{2}/2.$$

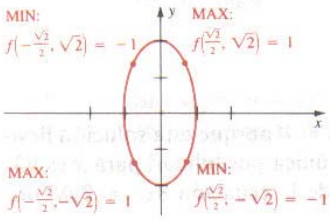
Los valores correspondientes de y satisfacen

$$4(\tfrac{1}{2}) + y^2 - 4 = 0, \quad y^2 = 2, \quad \text{o bien} \quad y = \pm\sqrt{2}.$$

Esto da los puntos $(\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2})$. En la siguiente tabla aparecen los valores de f en cada uno de los puntos que encontramos.

(x, y)	$(0, 2)$	$(0, -2)$	$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$
$f(x, y)$	0	0	1	-1	-1	1

FIGURA 16.62



Por ello, $f(x, y)$ alcanza un valor máximo de 1 en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ y en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$, y un valor mínimo de -1 en $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$ así como en $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$. Estos puntos están indicados sobre la elipse en la Figura 16.62. •

El Teorema de Lagrange (16.38) se puede generalizar a funciones de más de dos variables. Por ejemplo, para determinar los máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ con la restricción $g(x, y, z) = 0$ se puede comenzar encontrando las soluciones del sistema de ecuaciones

(16.40) $$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = 0$$

o equivalentemente, del sistema

(16.41) $$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad f_z = \lambda g_z, \quad g = 0$$

escrito en notación simplificada en la que se omiten los símbolos de las variables funcionales y los de sus derivadas. Pueden deducirse sistemas de ecuaciones semejantes para funciones de cuatro o más variables.

El siguiente ejemplo se discutió brevemente al principio de la sección.

EJEMPLO 2 Calcular el volumen máximo del paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados que se puede inscribir en el elipsoide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

Solución La Figura 16.59 muestra una posición típica del paralelepípedo. Se desea obtener el valor máximo del volumen

$$V = f(x, y, z) = 8xyz$$

sujeto a la restricción

$$g(x, y, z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0.$$

Como en (16.40), comenzamos escribiendo $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$, o

$$8yz\mathbf{i} + 8xz\mathbf{j} + 8xy\mathbf{k} = \lambda(32x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 18z\mathbf{k}).$$

Esto, junto con $g(x, y, z) = 0$, da el siguiente sistema de cuatro ecuaciones:

$$8yz = 32x\lambda, \quad 8xz = 8y\lambda, \quad 8xy = 18z\lambda, \quad 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y, la tercera por z y sumándolas, obtenemos

$$24xyz = 32x^2\lambda + 8y^2\lambda + 18z^2\lambda = 2\lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2).$$

Esto, junto con el hecho de que $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$, implica que

$$24xyz = 2\lambda(144) \qquad \text{o bien} \qquad xyz = 12\lambda.$$

Esta última ecuación sirve para encontrar x, y y z. Por ejemplo, multiplicando por x ambos lados de la ecuación $8yz = 32x\lambda$, obtenemos

$$\begin{aligned} 8xyz &= 32x^2\lambda \\ 8(12\lambda) &= 32x^2\lambda \\ 96\lambda - 32x^2\lambda &= 0 \\ 32\lambda(3 - x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\lambda = 0$ o $x = \sqrt{3}$. Se puede rechazar $\lambda = 0$ porque esta solución lleva a $xyz = 0$ y entonces $V = 8xyz = 0$. Por lo tanto, la única posibilidad para x es $\sqrt{3}$.

Análogamente, multiplicando por y ambos lados de la ecuación $8xz = 8y\lambda$, obtenemos

$$\begin{aligned} 8xyz &= 8y^2\lambda \\ 8(12\lambda) &= 8y^2\lambda \\ 96\lambda - 8y^2\lambda &= 0 \\ 8\lambda(12 - y^2) &= 0 \end{aligned}$$

y por tanto, $y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Finalmente, por z multiplicando la ecuación $8xy = 18z\lambda$ y usando el mismo método, resulta $z = 4\sqrt{3}/3$. Concluimos que el volumen deseado es

$$V = 8xyz = 8(\sqrt{3})(2\sqrt{3})\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = 64\sqrt{3} \approx 111 \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Sea $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$. Encontrar el punto del plano $2x + 3y + 4z = 12$ en el que $f(x, y, z)$ alcanza su valor mínimo.

Solución Se desea encontrar el mínimo de $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - 12 = 0$. Como en (16.40), tomamos

$$\nabla(4x^2 + y^2 + 5z^2) = \lambda\nabla(2x + 3y + 4z - 12)$$

o, equivalentemente,

$$8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 10z\mathbf{k} = \lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}).$$

Igualando las componentes, se obtiene el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$8x = 2\lambda, \quad 2y = 3\lambda, \quad 10z = 4\lambda.$$

Despejando λ de las tres ecuaciones,

$$\lambda = 4x = \tfrac{2}{3}y = \tfrac{5}{2}z.$$

Estas condiciones implican que

$$y = 6x \quad \text{y} \quad z = \tfrac{8}{5}x.$$

Sustituyendo en la ecuación $2x + 3y + 4z - 12 = 0$,

$$2x + 18x + \tfrac{32}{5}x - 12 = 0,$$

o bien $x = \frac{5}{11}$. Por ende, $y = 6(\frac{5}{11}) = \frac{30}{11}$ y $z = (\frac{8}{5})(\frac{5}{11}) = \frac{8}{11}$. Concluimos que el valor mínimo se alcanza en el punto $(\frac{5}{11}, \frac{30}{11}, \frac{8}{11})$.

Algunas aplicaciones requieren más de una restricción. En particular, consideremos el problema de encontrar los máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a las *dos* restricciones

$$g(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad h(x, y, z) = 0.$$

Si f sujeta a estas restricciones tiene un máximo o un mínimo, entonces se debe satisfacer la siguiente condición para algunos números reales λ y μ:

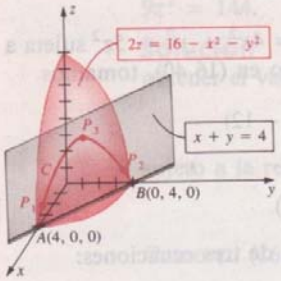
$$\nabla f(x, y, z) = \lambda\nabla g(x, y, z) + \mu\nabla h(x, y, z).$$

En el siguiente ejemplo se ilustra específicamente esta situación. El método también puede generalizarse a funciones de más de tres variables sujetas a más de dos restricciones.

EJEMPLO 4 Sea C la parte en el primer octante del arco de curva que es la intersección del paraboloide $2z = 16 - x^2 - y^2$ con el plano $x + y = 4$. Encontrar los puntos de C más cercanos al origen y los más lejanos. Calcular las distancias mínima y máxima de C al origen.

Solución La curva C se encuentra en la Figura 16.63. Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario de C. Queremos estimar el mayor y el menor de los valores de $d(O, P) =$

FIGURA 16.63



$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Es posible encontrar estos valores determinando las ternas (x, y, z) en las que el radicando

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

alcanza su máximo y su mínimo sujeto a las restricciones

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$$

y

$$h(x, y, z) = x + y - 4 = 0.$$

Como en la discusión anterior, consideramos

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda\nabla(x^2 + y^2 + 2z - 16) + \mu\nabla(x + y - 4).$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} &= \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + \mu(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= (2x\lambda + \mu)\mathbf{i} + (2y\lambda + \mu)\mathbf{j} + (2\lambda)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Igualando las componentes y usando las dos restricciones, obtenemos el siguiente sistema de cinco ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x &= 2x\lambda + \mu \\ 2y &= 2y\lambda + \mu \\ 2z &= 2\lambda \\ x^2 + y^2 + 2z - 16 &= 0 \\ x + y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Restando la segunda ecuación de la primera:

$$2x - 2y = (2x\lambda + \mu) - (2y\lambda + \mu) = 2x\lambda - 2y\lambda$$

o sea

$$2(x - y) - 2\lambda(x - y) = 0$$

y por lo tanto,

$$2(x - y)(1 - \lambda) = 0.$$

En consecuencia, $\lambda = 1$ o bien $x = y$.

Si $\lambda = 1$, tenemos que $2z = 2\lambda = 2(1)$ o bien $z = 1$. La primera restricción $x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$ da $x^2 + y^2 - 14 = 0$. Resolviendo esta ecuación simultáneamente con $x + y - 4 = 0$, encontramos que

$$x = 2 + \sqrt{3}, \quad y = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{o bien} \qquad x = 2 - \sqrt{3}, \quad y = 2 + \sqrt{3}.$$

Por lo tanto, los puntos de C en donde pueden alcanzarse los valores extremos son

$$P_1(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1) \quad \text{y} \quad P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1).$$

Las distancias correspondientes desde el origen O son

$$d(O, P_1) = \sqrt{15} = d(O, P_2).$$

Si $x = y$, entonces usando la restricción $x + y - 4 = 0$, obtenemos $x + x - 4 = 0$, $2x = 4$, o sea $x = 2$. Esto da $P_3(2, 2, 4)$ y $d(O, P_3) = 2\sqrt{6}$.

Respecto a la Figura 16.63 podemos hacer las siguientes observaciones. Cuando un punto P se mueve continuamente a lo largo de C desde $A(4, 0, 0)$ hasta $B(0, 4, 0)$, su distancia al origen comienza en $d(O, A) = 4$, disminuye a un valor mínimo $\sqrt{15}$ en P_1 y luego aumenta a un valor máximo $2\sqrt{6}$ en P_3. La distancia disminuye otra vez a $\sqrt{15}$ en P_2 y aumenta hasta el valor 4 en B.

Para verificar la solución, observamos que C tiene ecuaciones paramétricas

$$x = 4 - t, \quad y = t, \quad z = 4t - t^2; \quad 0 \le t \le 4.$$

y por lo tanto, puede escribirse

$$f(x, y, z) = (4 - t)^2 + t^2 + (4t - t^2)^2$$

Se pueden calcular los máximos y mínimos de f usando métodos para una sola variable. Se deja al lector demostrar que se obtienen los mismos puntos. •

EJERCICIOS 16.9

Ejercicios 1-10: Use el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los máximos y mínimos de la función f sujeta a las restricciones enunciadas.

1. $f(x, y) = y^2 - 4xy + 4x^2$; $x^2 + y^2 = 1$
2. $f(x, y) = 2x^2 + xy - y^2 + y$; $2x + 3y = 1$
3. $f(x, y, z) = x + y + z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 25$
5. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x - y + z = 1$
6. $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$; $z = 4x^2 + y^2$
7. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x - y = 1$; $y^2 - z^2 = 1$
8. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$; $x + y + z = 1$; $x^2 + y^2 = 4$
9. $f(x, y, z, t) = xyzt$; $x - z = 2$; $y^2 + t = 4$
10. $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$; $x + y + 2z = 1$; $2x - z + t = 2$; $y + 3z + 2t = -1$
11. Encuentre el punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ más cercano al punto $(2, 3, 4)$.
12. Sea C la recta de intersección de los planos $3x + 2y + z = 6$ y $x - 4y + 2z = 8$. Encuentre el punto de C más cercano al origen.
13. Se desea construir una caja con la forma de un paralelepípedo rectangular que tenga un volumen de 2 pie^3. El costo por pie cuadrado del material para los lados, el fondo y la tapa es \$1.00, \$2.00 y \$1.50 (en dólares), respectivamente. ¿Para qué dimensiones se obtiene el costo mínimo?
14. Encuentre el volumen máximo del paralelepípedo rectangular tal que tres de sus aristas están en las partes positivas de los ejes x, y y z, respectivamente, y uno de sus vértices está en el plano $2x + 3y + 4z = 12$.
15. Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro circular recto con tapa. ¿Qué dimensiones producen el volumen máximo suponiendo que el área de la superficie tiene un valor fijo S?
16. Demuestre que el triángulo de mayor área con perímetro p es equilátero. (*Sugerencia:* Si los lados son x, y y z, y $s = p/2$, entonces el área es igual a $[s(s - x)(s - y)(s - z)]^{1/2}$.)

17-26. Resuelva los Ejercicios 23-32 de la Sección 16.8 por el método de los multiplicadores de Lagrange.

27. Demuestre que el producto de los senos de los ángulos de un triángulo alcanza su mayor valor cuando el triángulo es equilátero.
28. Una caja sin tapa con la forma de paralelepípedo rectangular debe tener un volumen fijo V. ¿Para qué dimensiones el área de la superficie es mínima?

29. La resistencia de una viga de sección transversal rectangular es proporcional al producto de su anchura y el cuadrado de su peralte (o altura). Encuentre las dimensiones de la viga rectangular más resistente que se puede extraer de un tronco cilíndrico cuyas secciones transversales son elipses con eje mayor de 24 cm y eje menor de 16 cm.

30. Para fabricar $f(x, y)$ unidades de cierto producto se requieren x unidades de capital y y unidades de mano de obra. La *función de producción de Cobb-Douglas* se define como $f(x, y) = kx^a y^b$, donde k es una constante y a y b son números positivos tales que $a + b = 1$. Supongamos que $f(x, y) = x^{1/5}y^{4/5}$, que cada unidad de capital tiene un costo C y cada unidad de mano de obra tiene un costo L, y que la cantidad monetaria total disponible para cubrir estos gastos es M, de manera que $xC + yL = M$. ¿Cuántas unidades de capital y de mano de obra deben emplearse para lograr la producción máxima?

16.10 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Funciones de varias variables.
2. Curvas de nivel.
3. Superficies de nivel.
4. Límites de las funciones de varias variables.
5. Puntos interiores de una región.
6. Puntos en la frontera de una región.
7. Región cerrada.
8. Continuidad de las funciones de varias variables.
9. Primeras derivadas parciales.
10. Derivadas parciales de orden superior.
11. Incrementos de las funciones de varias variables.
12. Diferenciales.
13. Función diferenciable.
14. Regla de la Cadena.
15. Derivación implícita usando las derivadas parciales.
16. La derivada direccional.
17. El gradiente y sus propiedades.
18. Planos tangentes y rectas normales.
19. Máximos y mínimos de funciones de varias variables.
20. Multiplicadores de Lagrange.

EJERCICIOS 16.10

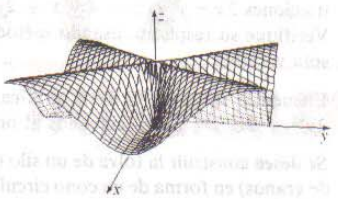
Ejercicios 1-4: Determine el dominio de f.

1. $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 + 9y^2}$
2. $f(x, y) = \ln xy$
3. $f(x, y, z) = (z^2 - x^2 - y^2)^{-3/2}$
4. $f(x, y, z) = (\sec z)/(x - y)$

Ejercicios 5-6: Calcule el límite si es que existe.

5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy + 5}{y^2 + 4}$
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$
7. Use coordenadas polares para demostrar que las curvas de nivel de $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)^{3/2}$ son rosas de cuatro pétalos. ¿Cuál es el valor de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$?
8. La gráfica generada por una computadora de $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^2)^2$ que se muestra en la figura, indica que f tiene primeras derivadas parciales en (0, 0) pero no es continua ahí. Verifique estos hechos.

EJERCICIO 8



Ejercicios 9-14: Obtenga las primeras derivadas parciales de f.

9. $f(x, y) = x^3 \cos y - y^2 + 4x$
10. $f(r, s) = r^2 e^{rs}$
11. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)/(y^2 + z^2)$
12. $f(u, v, t) = u \ln (v/t)$
13. $f(x, y, z, t) = x^2 z\sqrt{2y + t}$
14. $f(v, w) = v^2 \cos w + w^2 \cos v$

Ejercicios 15-16: Encuentre las segundas derivadas parciales de f.

15. $f(x, y) = x^3y^2 - 3xy^3 + x^4 - 3y + 2$
16. $f(x, y, z) = x^2 e^{y^2 - z^2}$
17. Sea $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

18. (a) Determine el valor dw para la expresión $w = y^3 \tan^{-1} x^2 + 2x - y$.
 (b) Determine dw para $w = x^2 \operatorname{sen} yz$.
19. Encuentre Δw y dw para $w = x^2 + 3xy - y^2$. Use Δw para encontrar el cambio exacto y dw para encontrar una estimación del cambio de w cuando (x, y) varía de $(-1, 2)$ a $(-1.1, 2.1)$.
20. Supongamos que al usar la ley de Ohm $R = V/I$ hay errores porcentuales de 3% y 2% en las mediciones de V y de I, respectivamente. Use diferenciales para estimar el error porcentual máximo en el valor calculado de R.

Ejercicios 21-23: Use la Regla de la Cadena para obtener la solución.

21. Sean $s = uv + vw - uw$, $u = 2x + 3y$, $v = 4x - y$ y $w = -x + 2y$. Encuentre $\partial s/\partial x$ y $\partial s/\partial y$.
22. Sean $z = ye^x$, $x = r + st$, $y = 2r + 3s - t$. Halle $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.
23. Sean $w = x \operatorname{sen} yz$, $x = 3e^{-t}$, $y = t^2$, $z = 3t$. Encuentre dw/dt.
24. Obtenga la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 5xy$ en el punto $P(2, -1)$ en la dirección del vector $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. ¿Cuál es la tasa máxima de crecimiento de $f(x, y)$ en P?
25. Suponga que la temperatura en el punto (x, y, z) está dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - 4z$. Determine el valor correspondiente a la tasa de variación de T en el punto $P(-1, -3, 2)$ en la dirección de P al punto $Q(-4, 1, -2)$. ¿Cuál es la tasa máxima de variación de T en P?
26. Un *modelo de la densidad urbana* es una fórmula que relaciona la densidad de población (el número de habitantes por unidad de área, por ejemplo, km^2) con la distancia al centro de la ciudad. Sea D la densidad de población en la vecindad del punto $P(x, y)$ de un sistema de coordenadas rectangulares con el origen en el centro de la ciudad. Para la función de densidad propuesta, encuentre la dirección en la que la población crece más rápidamente en P.
 (a) $D = ae^{-b\sqrt{x^2 + y^2}}$, donde a y b son constantes positivas.
 (b) $D = ae^{-b\sqrt{x^2 + y^2} + c(x^2 + y^2)}$, donde a, b y c son constantes positivas.
27. Halle ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la gráfica de $7z = 4x^2 - 2y^2$ en el punto $P(-2, -1, 2)$.
28. Una curva C está dada paramétricamente por $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Sea $f(x, y, z) = y^2 + xz$. Calcule $D_{\mathbf{u}} f(2, 4, 8)$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario tangente a C en $P(2, 4, 8)$.
29. Use derivadas parciales para obtener $f'(x)$ suponiendo que $y = f(x)$ satisface $x^3 - 4xy^3 - 3y + x - 2 = 0$.
30. Demuestre que cualquier plano tangente al cono

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

pasa por el origen.

31. Suponiendo que $z = f(x, y)$ satisface $x^2y + z \cos y - xz^3 = 0$, encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

Ejercicios 32-33: Encuentre los máximos y mínimos de f.

32. $f(x, y) = x^2 - 6x \cos y + 9$

$f(x, y) = x^2 + 3y - y^3$

34. El material para el fondo de una caja en forma de un paralelepípedo rectangular cuesta el doble por centímetro cuadrado que el que se usa para los lados y la tapa. ¿Cuáles con las dimensiones relativas con las que es mínimo el costo para un volumen fijo?

35. Dada $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{25}y^2$, trace varias curvas de nivel de f y represente $\nabla f]_P$ por un vector para un punto P de cada curva.

36. Dada $F(x, y, z) = z + 4x^2 + 9y^2$, trace varias superficies de nivel de F y represente $\nabla F]_P$ por un vector para un punto P en cada superficie.

37. Use el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los máximos y mínimos locales de $f(x, y, z) = xyz$ sujeta a la restricción $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 8$. También hágalo usando el Teorema (16.37).

38. Use el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los máximos y mínimos locales de $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones $2x - y + z = 4$ y $x + 2y - z = 1$. Verifique su respuesta usando métodos de una sola variable.

39. Encuentre los puntos de la gráfica de $x^{-1} + 2y^{-1} + 3z^{-1} = 1$ más cercanos al origen.

40. Se desea construir la tolva de un silo (o elevador de granos) en forma de un cono circular recto de 2 pie de radio, coronado por un cilindro circular recto, como se muestra en la figura. El volumen de la tolva debe ser de 100 pie^3. Calcule las alturas h y k del cilindro y del cono, respectivamente, para las que el área de la superficie es mínima.

EJERCICIO 40



CAPÍTULO 17

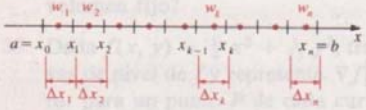
INTEGRALES MÚLTIPLES

En este capítulo se generaliza el concepto de integral definida que se presentó en el Capítulo 5 a las funciones de varias variables. Se definen las integrales dobles, las integrales triples y las integrales de superficie y se discuten algunas de sus propiedades fundamentales y sus aplicaciones.

17.1 INTEGRALES DOBLES

La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función f de una variable se definió en (5.8). En este capítulo y en el siguiente se consideran integrales de las funciones de varias variables: *integrales dobles, integrales triples, integrales de superficie* e *integrales de línea*. Cada una de éstas se define de manera parecida a la que se utilizó para las integrales de las funciones de una variable. La diferencia principal es el dominio del integrando.

FIGURA 17.1



La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede definir en los siguientes cuatro pasos. (El Paso 1 y el Paso 2 se ilustran en la Figura 17.1.)

Paso 1 Tomar una partición de $[a, b]$ escogiendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Paso 2 Para cada k, elegir un número w_k en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

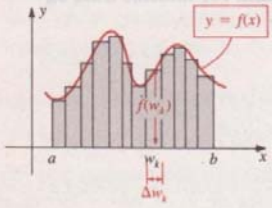
Paso 3 Considerar la suma de Riemann $\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k$, donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Paso 4 Establecer que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k.$$

donde $\|P\|$ es la norma de la partición (el mayor Δx_k).

FIGURA 17.2

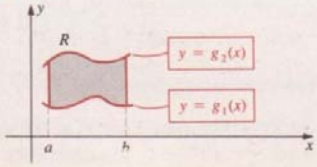


Si f no es negativa en $[a, b]$, entonces la suma de Riemann $\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k$ del Paso 3 es una suma de áreas de rectángulos como los que se ilustran en la Figura 17.2. Esta suma se aproxima al área de la región que se encuentra bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$. Si el límite de las sumas de Riemann cuando $\|P\| \to 0$ existe (Paso 4), entonces se obtiene la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ cuyo valor es el área (exacta) bajo la gráfica.

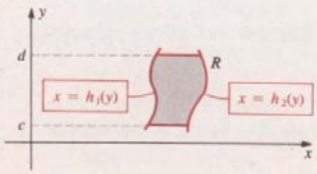
Sea f una función de *dos* variables tal que $f(x, y)$ existe en toda una región cerrada R del plano xy. A continuación se definirá la integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$. La definición seguirá el proceso de cuatro pasos usado para las funciones de una variable. Para lo que sigue las regiones en el plano xy de los tipos ilustrados en la Figura 17.3 son de particular importancia. Se supone que las funciones g_1, g_2 y h_1, h_2 son continuas en los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente, y satisfacen $g_1(x) \le g_2(x)$ para todo x en $[a, b]$ y $h_1(y) \le h_2(y)$ para todo y en $[c, d]$. La región ilustrada en la Figura 17.3(i) es una **región del Tipo I** y la ilustrada en la Figura 17.3(ii) es una **región del Tipo II**.

FIGURA 17.3

(i) Región del Tipo I



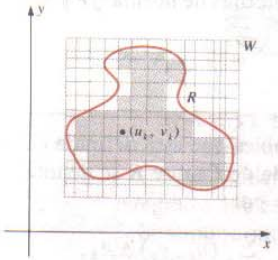
(ii) Región del Tipo II



Obsérvese que si R es una región del Tipo I, entonces *toda recta vertical* $x = k$ *para* $a < k < b$ *corta la frontera de* R *a lo más en dos puntos*. Si R es del Tipo II, entonces *toda recta horizontal* $y = k$ *para* $c < k < d$ *corta la frontera de* R *a lo más en dos puntos*.

En todo este capítulo, R denotará una región que se puede descomponer en un número finito de subregiones del Tipo I o del Tipo II. Una de estas regiones R está siempre contenida en un rectángulo cerrado W. Si W se divide en rectángulos más pequeños mediante una malla de rectas verticales y horizontales, entonces el conjunto de todas las subregiones rectangulares cerradas que están completamente *contenidas en* R se llama **partición interna** P de R. (Esto corresponde al Paso 1 del proceso.)

FIGURA 17.4
Partición interna de R



Los rectángulos sombreados en la Figura 17.4 ilustran una partición interna. Si a estas subregiones rectangulares sombreadas se les denota por $R_1, R_2, \ldots, R_n$, entonces la partición interna P se denota por $\{R_k\}$. La longitud mayor de la de las diagonales de los R_k se denota por $\|P\|$ y se llama **norma de la partición** P. El símbolo ΔA_k denota el área de R_k. Para todo k se elige un punto (u_k, v_k) en R_k, como se ilustra en la Figura 17.4. (Esto corresponde al Paso 2.) Las sumas de Riemann (Paso 3) se definen como sigue.

DEFINICIÓN (17.1)

Sea f una función de dos variables definida en una región R y sea $P = \{R_k\}$ una partición interna de R. Una **suma de Riemann** de f para P es una de la forma

$$\sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta A_k,$$

para los pares (u_k, v_k) están en R_k y ΔA_k es el área de R_k. La suma se extiende sobre todas las subregiones $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de P.

Finalmente, se toma el límite de las sumas de Riemann cuando $\|P\| \to 0$ (Paso 4). Se puede demostrar que si f es continua en R, entonces cuando $\|P\| \to 0$, las sumas de Riemann en la Definición (17.1) tienden a un número real L, independientemente de los puntos (u_k, v_k) elegidos en las subregiones R_k. El número L es la *integral doble* $\iint_R f(x, y)\,dA$. A continuación se da una definición matemáticamente rigurosa del límite de estas sumas de Riemann.

DEFINICIÓN (17.2)

Sea f una función de dos variables que está definida en una región R y sea L un número real. La expresión

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta A_k = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $P = \{R_k\}$ es una partición interna de R con $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_k f(u_k, v_k)\, \Delta A_k - L \right| < \varepsilon$$

para cualquier elección de los pares (u_k, v_k) en R_k.

La Definición (17.2) afirma que se puede hacer que las sumas de Riemann de f se acerquen a L tanto como se quiera escogiendo particiones internas de norma $\|P\|$ suficientemente pequeña.

La integral doble de f se define como sigue:

DEFINICIÓN (17.3)

Sea f una función de dos variables que está definida en una región R. La **integral doble de f sobre R** se denota por $\iint_R f(x, y)\, dA$ y se define por

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\, \Delta A_k,$$

siempre y cuando el límite exista.

Si la integral doble de f sobre R existe, entonces se dice que f es **integrable sobre R**. Se puede demostrar que si f es continua en R, entonces f es integrable sobre R.

Hay una interpretación geométrica útil para las sumas de Riemann y las integrales dobles en el caso en que f es continua y $f(x, y) \geq 0$ en todo R. Sea S la gráfica de f, y Q el sólido (es decir la región en tres dimensiones) que se encuentra abajo de S y arriba de R, como se ilustra en la Figura 17.5. Si $P_k(u_k, v_k, 0)$ es un punto en la región R_k de una partición interna P de R, entonces $f(u_k, v_k)$ es la distancia del plano xy al punto B_k en S que se encuentra directamente arriba de P_k. El número $f(u_k, v_k)\, \Delta A_k$ es el volumen del prisma con base rectangular de área ΔA_k, como se ilustra en la Figura 17.5. La suma de los volúmenes de todos los prismas (véase la Figura 17.6) es una aproximación al volumen V de Q. (Esto es análogo a la suma de los rectángulos que se muestran en la Figura 17.2 para las sumas de Riemann de las funciones de una variable.) Como se ve que la aproximación al volumen mejora cuando $\|P\|$ tiende a cero, V se define como el límite de las sumas de los números $f(u_k, v_k)\, \Delta A_k$. Aplicando (17.3) se obtiene lo siguiente.

DEFINICIÓN (17.4)

Sea f una función continua de dos variables tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región R. El **volumen V** del sólido comprendido bajo la gráfica de $z = f(x, y)$ y sobre la región R es

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

FIGURA 17.5

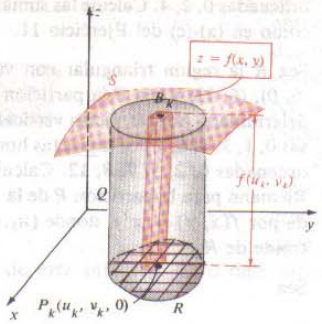
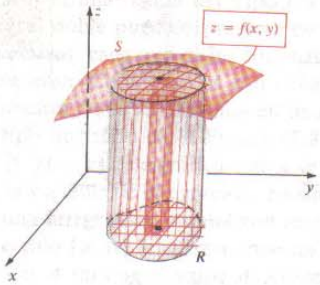


FIGURA 17.6



Si $f(x, y) \leq 0$ en todo R, entonces la integral doble de f sobre R es igual al *negativo* del volumen del sólido comprendido *sobre* la gráfica de f y *bajo* la región R.

En el siguiente teorema se presentan, sin demostración, algunas propiedades de las integrales dobles que corresponden a las de las integrales definidas dadas en el Capítulo 5. Se supone que todas las regiones y las funciones son tales que las integrales indicadas existen.

TEOREMA (17.5)

(i) $\iint_R cf(x, y)\,dA = c \iint_R f(x, y)\,dA$ para todo número real c.

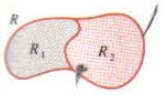
(ii) $\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\,dA = \iint_R f(x, y)\,dA + \iint_R g(x, y)\,dA.$

(iii) Si R es la unión de dos regiones R_1 y R_2 que no se sobreponen o traslapan,

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_R f(x, y)\,dA + \iint_R f(x, y)\,dA$$

(iv) Si $f(x, y) \geq 0$ en toda una región R, entonces $\iint_R f(x, y)\,dA \geq 0$.

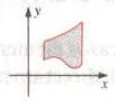
FIGURA 17.7



En (iii) del teorema, *que no se sobreponen* significa que las regiones R_1 y R_2 tienen en común, a lo sumo, sólo puntos de frontera, como se ilustra en la Figura 17.7.

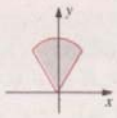
EJERCICIOS 17.1

Ejercicios 1-10: Determine si la región es (a) del Tipo I, (b) del Tipo II, o (c) no es del Tipo I ni del Tipo II.

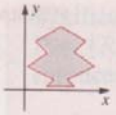
1. 

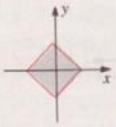
2. 

3. 

4. 

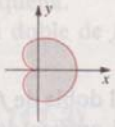
5. 

6. 

7. 

8. 

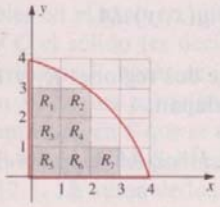
9. 

10. 

11. Sea $f(x, y) = 4x + 2y + 1$ y sea R la región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y la gráfica de $y = 4 - \frac{1}{4}x^2$. Sea $\{R_k\}$ para $k = 1, 2, \ldots, 7$ la partición interna de R que se muestra en la figura. Calcule la suma de Riemann $\sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta A_k$ si para cada k, (u_k, v_k) es el punto

(a) de la esquina inferior izquierda de R_k.
(b) de la esquina superior derecha de R_k.
(c) en el centro de R_k.

EJERCICIO 11



12. Sea $f(x, y) = xy$ y sea R la región acotada por el trapecio con vértices (0, 0), (4, 4), (8, 4) y (12, 0). Sea P la partición interna de R determinada por las rectas verticales con abscisas 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, y por las rectas horizontales con ordenadas 0, 2, 4. Calcule las sumas de Riemann como en (a)-(c) del Ejercicio 11.

13. Sea R la región triangular con vértices (0, 0), (6, 0), (6, 12) y sea P la partición interna de R determinada por las rectas verticales con abscisas 0, 1, 3, 4, 6, y por las rectas horizontales con ordenadas 0, 2, 5, 7, 8, 12. Calcule la suma de Riemann para la partición P de la función f dada por $f(x, y) = x^2y$, donde (u_k, v_k) es el centroide de R_k.

14. Sea

$$R = \{(x, y): 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le \sqrt{25 - x^2}\},$$

y sea P la partición de R determinada por las rectas verticales con intercepciones x iguales a 0, 2, 3, 4, 5, y por las rectas horizontales con intercepciones y iguales a 0, 2, 4, 5. Calcule la suma de Riemann para P de la función f dada por $f(x, y) = 4 - xy$, donde (u_k, v_k) es el punto en la esquina inferior derecha de R_k.

15. Sean $R = \{(x, y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ y $f(x, y) = k$ para todo (x, y) en R. Haga la demostración de que la integral doble de f sobre R es igual a $k(b - a)(d - c)$, usando (a) la Definición (17.3) y (b) la Definición (17.4).

16. Sean f y g dos funciones integrables sobre R tales que $f(x, y) \ge g(x, y)$ para todo (x, y) en R. Use las propiedades de las integrales dobles para demostrar que

$$\iint_R f(x, y)\,dA \ge \iint_R g(x, y)\,dA.$$

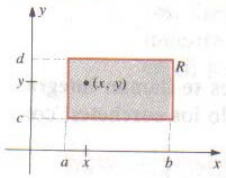
17. Demuestre el Teorema (17.5) (i). (*Sugerencia:* Véase la demostración del Teorema (5.14) en el Apéndice II.)

18. Demuestre el Teorema (17.5) (ii). (*Sugerencia:* Véase la demostración del Teorema (5.15) en el Apéndice II.)

17.2 EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES DOBLES

Excepto en algunos casos elementales, es casi imposible calcular el valor de una integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$ directamente a partir de la Definición (17.3). En esta sección se

FIGURA 17.8



demuestra que si R es una región del Tipo I o del Tipo II, entonces la integral doble puede expresarse en términos de dos *integrales sucesivas*, cada una de las cuales tiene sólo una variable independiente. Comenzamos con el caso más simple, el de una función f que es continua en una región rectangular R del tipo ilustrado en la Figura 17.8.

El símbolo $\int_c^d f(x, y)\,dy$ significa que x se toma como constante y y es la variable de integración. Evaluar esta integral equivale a una **integración parcial con respecto a y**. A cada x en el intervalo $[a, b]$ le corresponde un valor único de esta integral. Esto determina una función A tal que el valor $A(x)$ está dado por

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Se puede demostrar que la función A es continua para x en el intervalo $[a, b]$.

También se puede efectuar una **integración parcial con respecto a x** que se denota por

$$B(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

En este caso y se considera constante y se integra con respecto a x. La función B que se obtiene de esta manera es continua para y en el intervalo $[c, d]$.

EJEMPLO 1 Realice las siguientes integraciones parciales.

(a) $\int_1^2 (x^3 + 4y)\,dy$ **(b)** $\int_{-2}^4 (x^3 + 4y)\,dx$

Solución

(a) La diferencial dy indica que se debe integrar *con respecto a y*, considerando a x como constante. Después de integrar sustituimos los extremos (o límites) de integración para la variable y, como sigue:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^3 + 4y)\,dy &= x^3y + 2y^2\Big]_1^2 \\ &= (2x^3 + 8) - (x^3 + 2) \\ &= x^3 + 6\end{aligned}$$

(b) La diferencial dx dice que debemos integrar *con respecto a x*, considerando a y como constante. Después de integrar se sustituyen los extremos de integración para la variable x, como sigue:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^4 (x^3 + 4y)\,dx &= \tfrac{1}{4}x^4 + 4yx\Big]_{-2}^4 \\ &= (64 + 16y) - (4 - 8y) \\ &= 60 + 8y\end{aligned}$$

Como la función A en la discusión anterior es continua en $[a, b]$, $A(x)$ se puede integrar con respecto a x:

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx.$$

Análogamente, puede integrarse $B(y)$ con respecto a y y se obtiene

$$\int_c^d B(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy.$$

Las integrales en el lado derecho de las dos fórmulas anteriores se llaman **integrales dobles iterativas**. Es costumbre simplificar la notación omitiendo los corchetes, como se especifica en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (17.6)

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy.$$

Obsérvese que en (17.6) la *primera* diferencial a la *derecha* del integrando $f(x, y)$ determina la variable de la *primera* integración parcial. El primer símbolo de integral a la *izquierda* de $f(x, y)$ especifica los límites o extremos de integración de dicha variable. Así, al evaluar una integral iterativa se determina primero la integral de *adentro*.

EJEMPLO 2 Evaluar $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)\,dy\,dx$.

Solución Por la Definición (17.6),

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left[\int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)\,dy\right] dx &= \int_1^4 \left[2xy + 3x^2y^2\right]_{-1}^2 dx \\ &= \int_1^4 [(4x + 12x^2) - (-2x + 3x^2)]\,dx \\ &= \int_1^4 (6x + 9x^2)\,dx \\ &= 3x^2 + 3x^3\Big]_1^4 = 234\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y)\,dx\,dy$.

Solución Por la Definición (17.6),

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \left[\int_1^4 (2x + 6x^2y)\,dx\right] dy &= \int_{-1}^2 \left[x^2 + 2x^3y\right]_1^4 dy \\ &= \int_{-1}^2 [(16 + 128y) - (1 + 2y)]\,dy \\ &= \int_{-1}^2 (126y + 15)\,dy \\ &= 63y^2 + 15y\Big]_{-1}^2 = 234\end{aligned}$$

El hecho de que las integrales iterativas en los Ejemplos 2 y 3 son iguales no es una casualidad. Si f es continua, entonces las dos integrales iterativas en (17.6) son *siempre* iguales. (La demostración puede encontrarse en libros de Cálculo avanzado.) Se dice que el resultado de la integración es independiente del *orden en que se integre*.

Puede definirse una integral doble iterativa sobre regiones que no son rectangulares. En particular, sea f continua en una región R del Tipo I o del Tipo II, como se muestra en la Figura 17.9. Las integrales iterativas de f sobre las regiones ilustradas en (i) y (ii) de la figura, se definen como sigue:

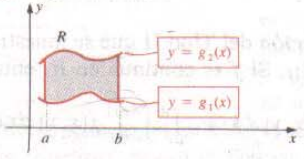
DEFINICIONES DE INTEGRALES ITERATIVAS (17.7)

$$\text{(i)} \quad \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

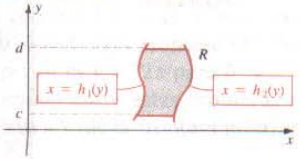
$$\text{(ii)} \quad \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

FIGURA 17.9

(i) Región del Tipo I



(ii) Región del Tipo II



En la Definición (17.7) (i) se realiza primero una integración parcial con respecto a y y se sustituye la variable y por $g_2(x)$ y $g_1(x)$, en la manera acostumbrada. Luego, la expresión en x resultante se integra de a a b. En (ii) de la definición se integra primero con respecto a x y después de sustituir x por $h_2(y)$ y $h_1(y)$, se integra el resultado con respecto a y, de c a d. Así, como en la Definición (7.6) para las regiones rectangulares, se trabaja de *dentro hacia afuera*.

EJEMPLO 4 Evaluar $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\, dy\, dx$.

Solución Por la Definición (17.7) (i),

$$\int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\, dy \right] dx = \int_0^2 \left[x^3 y + 2y^2 \right]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[(2x^4 + 8x^2) - (x^5 + 2x^4) \right] dx$$

$$= \tfrac{8}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x^6 \Big]_0^2 = \tfrac{32}{3}$$

EJEMPLO 5 Evaluar $\int_1^3 \int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos x\, dx\, dy$.

Solución Por la Definición (17.7) (ii),

$$\int_1^3 \left[\int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos x\, dx \right] dy = \int_1^3 \left[2y \operatorname{sen} x \right]_{\pi/6}^{y^2} dy$$

$$= \int_1^3 (2y \operatorname{sen} y^2 - y)\, dy$$

$$= -\cos y^2 - \tfrac{1}{2}y^2\Big]_1^3$$
$$= (-\cos 9 - \tfrac{9}{2}) - (-\cos 1 - \tfrac{1}{2})$$
$$= \cos 1 - \cos 9 - 4 \approx -2.55$$

El siguiente teorema dice que si la región R es del Tipo I o del Tipo II, entonces la integral doble definida en la Sección 17.1 se puede evaluar mediante una integral iterativa.

TEOREMA DE EVALUACIÓN DE INTEGRALES DOBLES (17.8)

(i) Sea R la región del Tipo I que se muestra en la Figura 17.9(i). Si f es continua en R, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

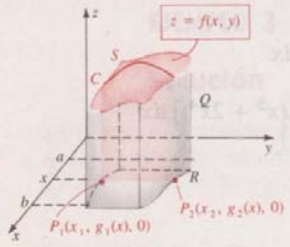
(ii) Sea R la región del Tipo II que se muestra en la Figura 17.9(ii). Si f es continua en R, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

En el Teorema (17.8) (i) la región R debe tener como **frontera inferior** la gráfica de una ecuación $y = g_1(x)$ y como **frontera superior** la gráfica de una ecuación $y = g_2(x)$ (véase la Figura 17.9(i)). En (ii) R debe tener como **frontera izquierda** la gráfica de una ecuación $x = h_1(y)$, y como **frontera derecha** la gráfica de una ecuación $x = h_2(y)$ (véase la Figura 17.9(ii)). Cuando una región es más complicada, a menudo puede dividirse en subregiones de los tipos requeridos y luego aplicar (i) o (ii) a cada subregión.

La demostración del Teorema (17.8) puede encontrarse en libros de Cálculo avanzado. A continuación se da una explicación intuitiva para funciones no negativas. Supongamos que $f(x, y) \geq 0$ en la región R de Tipo I que se ilustra en la Figura 17.9(i). Sean S la gráfica de f, Q el sólido que se encuentra bajo S y sobre R, y V el volumen de Q. Consideramos primero un plano paralelo al plano yz que corta al eje x en un punto $(x, 0, 0)$ con $a \leq x \leq b$. En la Figura 17.10 se ilustra la traza C de S que está en este plano. Los puntos $P_1(x, g_1(x), 0)$ y $P_2(x, g_2(x), 0)$ son en los que el plano corta a las fronteras $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$ de R. En la figura se muestra la parte del plano que se encuentra arriba del segmento P_1P_2 y abajo de la superficie S.

FIGURA 17.10



De acuerdo con lo que se vio en el Capítulo 6, el área $A(x)$ de esta parte del plano es

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

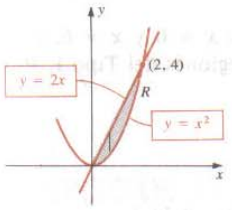
Como $A(x)$ es el área de una sección transversal típica de Q, de (6.8) se deduce que

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Aplicando el hecho de que V está dado también por la Definición (17.4) se obtiene la fórmula de evaluación en la parte (i) del Teorema (17.8). Puede darse una justificación análoga para la parte (ii).

Antes de usar el Teorema (17.8) en la evaluación de una integral doble *es importante esquematizar la región R* y determinar su frontera. Los siguientes ejemplos enseñan cómo aplicar el Teorema (17.8).

FIGURA 17.11



EJEMPLO 6 Sea R la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 2x$. Evaluar $\iint_R (x^3 + 4y)\,dA$, **(a)** usando el Teorema (17.8) (i), y **(b)** usando el Teorema (17.8) (ii).

Solución

(a) La región R está en la Figura 17.11. Nótese que la región es tanto del Tipo I como del Tipo II. Consideremos a R como una región del Tipo I cuya frontera inferior es $y = x^2$ y cuya frontera superior es $y = 2x$ para $0 \le x \le 2$. Se traza un segmento vertical entre estas fronteras para indicar que la primera integración se realiza con respecto a y (de la frontera inferior a la frontera superior). Según el Teorema (17.8) (i),

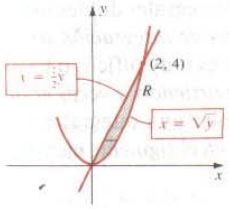
$$\iint_R (x^3 + 4y)\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\,dy\,dx.$$

Del Ejemplo 4 sabemos que esta integral es igual a $\frac{32}{3}$.

(b) Para usar el Teorema (17.8) (ii) consideramos a R como una región del Tipo II y se despeja x en términos de y de las dos ecuaciones, obteniendo

$$x = \tfrac{1}{2}y \quad \text{y} \quad x = \sqrt{y} \quad \text{para } 0 \le y \le 4.$$

FIGURA 17.12



El segmento horizontal en la Figura 17.12 va de la frontera izquierda a la frontera derecha indicando que la primera integración se efectúa con respecto a x. Merced al Teorema (17.8) (ii),

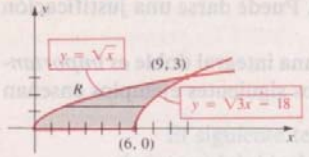
$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_0^4 \int_{(1/2)y}^{\sqrt{y}} (x^3 + 4y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \left[\tfrac{1}{4}x^4 + 4yx\right]_{(1/2)y}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left[(\tfrac{1}{4}y^2 + 4y^{3/2}) - (\tfrac{1}{64}y^4 + 2y^2)\right] dy = \tfrac{32}{3}. \quad \bullet$$

EJEMPLO 7 Sea R la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3x - 18}$, y $y = 0$, y sea f una función continua en R. Expresar la integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$ como una integral e iterativa, **(a)** usando el Teorema (17.8) (i), y **(b)** empleando el Teorema (17.8) (ii).

FIGURA 17.13



Solución Las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = \sqrt{3x - 18}$ son las mitades superiores de las parábolas $y^2 = x$ y $y^2 = 3x - 18$. La región R está en la Figura 17.13.

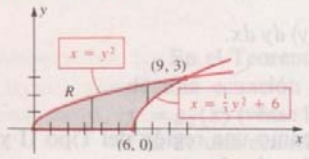
(a) Si sólo queremos usar el Teorema (17.8) (i), es necesario utilizar dos integrales iterativas porque para $0 \le x \le 6$ la frontera inferior de la región es la gráfica de $y = 0$, y para $6 \le x \le 9$, la frontera inferior es la gráfica de $y = \sqrt{3x - 18}$ (Los segmentos verticales en la Figura 17.13 van de la frontera inferior a la frontera superior de R.)

Si R_1 denota la parte de la región R que se encuentra entre $x = 0$ y $x = 6$, y R_2 denota la parte entre $x = 6$ y $x = 9$, entonces R_1 y R_2 son regiones del Tipo I. Por tanto,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx + \int_6^9 \int_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$$

FIGURA 17.14



(b) Para usar el Teorema (17.8) (ii), despejamos x en términos de y de cada una de las ecuaciones, obteniendo así

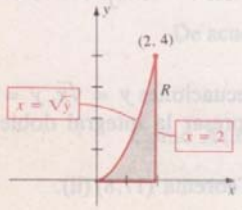
$$x = y^2 \quad \text{y} \quad x = \frac{y^2 + 18}{3} = \frac{1}{3}y^2 + 6 \quad \text{para } 0 \le y \le 3.$$

El segmento horizontal en la Figura 17.14 va de la frontera izquierda a la frontera derecha. En este caso se requiere sólo una integral iterativa porque R es una región del Tipo II. Así,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^3 \int_{y^2}^{(y^2/3)+6} f(x, y)\, dx\, dy \quad \bullet$$

Los Ejemplos 6 y 7 muestran cómo pueden evaluarse ciertas integrales dobles usando (i) o (ii) del Teorema (17.8). En general, la elección del *orden de integración* $dy\,dx$ o $dx\,dy$ depende de la forma de $f(x, y)$ y de la región R. A veces es muy difícil, o hasta imposible, evaluar una integral doble iterativa. Sin embargo, *invirtiendo a veces el orden de integración* de $dy\,dx$ a $dx\,dy$, o viceversa se puede obtener una integral doble iterativa que es posible evaluar fácilmente. Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 17.15



EJEMPLO 8 Dada $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5\, dx\, dy$, invertir el orden de integración y evaluar la integral resultante.

Solución El orden de integración indicado $dx\,dy$ señala que la región R es del Tipo II. Como se ilustra en la Figura 17.15, las fronteras izquierda y derecha son las gráficas de $x = \sqrt{y}$ y $x = 2$, respectivamente para $0 \le y \le 4$.

Observamos que R es también una región de Tipo I cuyas fronteras inferior y superior están dadas por $y = 0$ y $y = x^2$, respectivamente, para $0 \le x \le 2$. Por lo tanto, según el Teorema (17.8) (i),

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 \, dx \, dy = \iint_R y \cos x^5 \, dA = \int_0^2 \int_0^{x^2} y \cos x^5 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{y^2}{2} \cos x^5 \Big]_0^{x^2} dx = \int_0^2 \frac{x^4}{2} \cos x^5 \, dx$$

$$= \tfrac{1}{10} \int_0^2 (\cos x^5)(5x^4) \, dx$$

$$= \tfrac{1}{10} \operatorname{sen} x^5 \Big]_0^2 = \tfrac{1}{10} \operatorname{sen} 32 \approx 0.055$$

EJERCICIOS 17.2

Ejercicios 1-2: Verifique que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

1. $a = 1, \ b = 2, \ c = -1, \ d = 2; \quad f(x, y) = 12xy^2 - 8x^3$
2. $a = -2, \ b = -1, \ c = 0, \ d = 3; \quad f(x, y) = 4xy^3 + y$

Ejercicios 3-12: Evalúe la integral iterativa.

3. $\int_1^2 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \, dx$
4. $\int_{-1}^1 \int_{x^3}^{x+1} (3x + 2y) \, dy \, dx$
5. $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x - y) \, dx \, dy$
6. $\int_0^1 \int_{-y-1}^{y-1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$
7. $\int_1^2 \int_{x^3}^{x} e^{y/x} \, dy \, dx$
8. $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} (x \cos y - y \cos x) \, dy \, dx$
9. $\int_1^e \int_0^x \ln x \, dy \, dx$
10. $\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1 + y^2} \, dx \, dy$
11. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_{\tan x}^{\sec x} (y + \operatorname{sen} x) \, dy \, dx$
12. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_0^{\operatorname{sen} x} e^y \cos x \, dy \, dx$

Ejercicios 13-18: Esquematice la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y exprese $\iint_R f(x, y) \, dA$ como una integral iterativa mediante *(a) el Teorema (17.8) (i), y (b) el Teorema (17.8) (ii).*

13. $y = \sqrt{x}, \quad x = 4, \quad y = 0$
14. $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 2$
15. $y = x^3, \quad x = 0, \quad y = 8$
16. $y = x^3, \quad x = 2, \quad y = 0$
17. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^3$
18. $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = 0$

Ejercicios 19-24: Exprese la integral doble sobre R como una integral iterativa y calcule su valor.

19. $\iint_R (y + 2x) \, dA$; la región rectangular R con vértices $(-1, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 4)$ y $(-1, 4)$.
20. $\iint_R (x - y) \, dA$; la región triangular R con vértices $(2, 9)$, $(2, 1)$ y $(-2, 1)$.
21. $\iint_R xy^2 \, dA$; la región triangular R con vértices $(0, 0)$, $(3, 1)$ y $(-2, 1)$.
22. $\iint_R (y + 1) \, dA$; la región R entre las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ de $x = 0$ a $x = \pi/4$.
23. $\iint_R x^3 \cos xy \, dA$; la región R acotada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 2$.
24. $\iint_R e^{x/y} \, dA$; la región R acotada por las gráficas de $y = 2x$, $y = -x$ y $y = 4$.

Ejercicios 25-30: Represente la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Suponiendo que f es una función continua en R, exprese $\iint_R f(x, y) \, dA$ como una suma de dos integrales iterativas del tipo usado en (a) el Teorema (17.8) (i) y (b) el Teorema *(17.8) (ii).*

25. $8y = x^3, \quad y - x = 4, \quad 4x + y = 9$

26. $x = 2\sqrt{y}, \quad \sqrt{3}x = \sqrt{y}, \quad y = 2x + 5$

27. $x = \sqrt{3 - y}, \quad y = 2x, \quad x + y + 3 = 0$

28. $x + 2y = 5, \quad x - y = 2, \quad 2x + y = -2$

29. $y = e^x, \quad y = \ln x, \quad x + y = 1, \quad x + y = 1 + e$

30. $y = \operatorname{sen} x, \quad \pi y = 2x$

Ejercicios 31-38: Represente la región de integración correspondiente a la integral iterativa.

31. $\int_{-1}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} f(x, y)\, dy\, dx$

32. $\int_{-1}^{2} \int_{x^2-4}^{x-2} f(x, y)\, dy\, dx$

33. $\int_{0}^{1} \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\, dx\, dy$

34. $\int_{-2}^{-1} \int_{3y}^{2y} f(x, y)\, dx\, dy$

35. $\int_{-3}^{1} \int_{\arctan x}^{e^x} f(x, y)\, dy\, dx$

36. $\int_{-1}^{2} \int_{\operatorname{senh} x}^{\cosh x} f(x, y)\, dy\, dx$

37. $\int_{-1}^{1} \int_{1-y^4}^{\cosh y} f(x, y)\, dx\, dy$

38. $\int_{\pi}^{2\pi} \int_{\operatorname{sen} y}^{\ln y} f(x, y)\, dx\, dy$

Ejercicios 39-44: Invierta el orden de integración y evalúe la integral resultante.

39. $\int_{0}^{1} \int_{2x}^{2} e^{(y^2)}\, dy\, dx$

40. $\int_{0}^{9} \int_{\sqrt{y}}^{3} \operatorname{sen} x^3\, dx\, dy$

41. $\int_{0}^{2} \int_{y^2}^{4} y \cos x^2\, dx\, dy$

42. $\int_{1}^{e} \int_{0}^{\ln x} y\, dy\, dx$

43. $\int_{0}^{8} \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} \frac{y}{\sqrt{16 + x^7}}\, dx\, dy$

44. $\int_{0}^{1} \int_{x}^{1} \frac{1}{y} \operatorname{sen} y \cos \frac{x}{y}\, dy\, dx$

17.3 ÁREA Y VOLUMEN

En la sección anterior se vio que el volumen V de un sólido que se encuentra bajo la gráfica de $z = f(x, y)$ y sobre una región del Tipo I en el plano xy está dada por

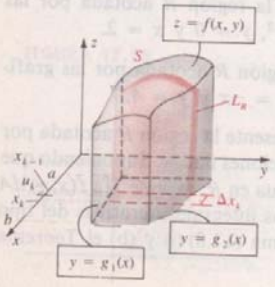
$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

donde $A(x)$ es el área de una sección transversal típica del sólido (véase la Figura 17.10). Estas integrales pueden considerarse límites de sumas. Por la fórmula (6.8) para determinar el volumen por secciones:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \lim_{\|P'\| \to 0} \sum_k A(u_k)\, \Delta x_k$$

donde P' es una partición del intervalo $[a, b]$, u_k es cualquier número en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de P' y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Como se ilustra en la Figura 17.16, $A(u_k)\, \Delta x_k$ es el volumen de una región laminar L_k con caras paralelas al plano yz y cuya base es un rectángulo de ancho Δx_k en el plano xy. Entonces el volumen V puede considerarse como el límite de las sumas de los volúmenes de estas regiones laminares.

FIGURA 17.16



La integral *iterativa* $V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ se puede expresar también como límite de sumas. Primero se aplica la definición de la integral definida como sigue. Si x está en $[a, b]$, entonces

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy = \lim_{\|P''\| \to 0} \sum_j f(x, v_j)\, \Delta y_j$$

donde P'' es una partición del intervalo $[g_1(x), g_2(x)]$ en el eje y, v_j es cualquier número en el j-ésimo subintervalo $[y_{j-1}, y_j]$ de P'' y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Entonces, para todo u_k en $[a, b]$,

$$A(u_k) = \lim_{\|P''\| \to 0} \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j$$

y por lo tanto,

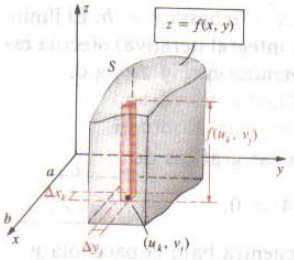
$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \lim_{\|P'\| \to 0} \sum_k A(u_k)\, \Delta x_k$$

$$= \lim_{\|P'\| \to 0} \sum_k \left[\lim_{\|P''\| \to 0} \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j \right] \Delta x_k.$$

Omitiendo los límites en esta fórmula se obtiene una **suma doble**:

$$\sum_k \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j\, \Delta x_k$$

FIGURA 17.17



En cuanto a la Figura 17.17 nótese que $f(u_k, v_j)\, \Delta y_j\, \Delta x_k$ es el volumen de un prisma con área de la base $\Delta y_j\, \Delta x_k$ y altura $f(u_k, v_j)$. La suma doble se puede interpretar como sigue. *Manteniendo x fija*, se suman los volúmenes de los prismas en la dirección del eje y; así se obtiene el volumen de la región laminar que se ilustra en la Figura 17.16. Luego se suman los volúmenes de estas regiones en la dirección del eje x. En cierto sentido la integral iterativa efectúa esto y al mismo tiempo toma los límites cuando la base de cada prisma se contrae a un punto. Esta interpretación es útil para visualizar las aplicaciones de la integral doble. Para recalcar este punto de vista a veces se expresa el volumen como sigue:

EL VOLUMEN COMO LÍMITE DE SUMAS DOBLES **(17.9)**

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j\, \Delta x_k$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dx\, dy$$

El símbolo $\|\Delta\| \to 0$ se usa para indicar que todos los Δx_k y Δy_j tienden a 0.

Las áreas también se pueden considerar como límites de sumas dobles. Se comienza denotando la integral doble $\iint_R 1\, dA$ por $\iint_R dA$. Si R es una región del Tipo I como la que se ilustra en la Figura 17.9 (i), entonces por el Teorema (17.8) (i),

$$\iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\, dy\, dx = \int_a^b y \Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx$$

que según el Teorema (6.1), es igual al área A de R. Lo mismo sucede si R es una región del Tipo II. Estos hechos también resultan evidentes a partir de la definición de la integral doble, pues si $f(x, y) = 1$ en todo R, entonces la suma de Riemann en la Defini-

ción (17.3) es una suma de las áreas de los rectángulos de una partición interna P de R. Cuando la norma $\|P\|$ tiende a cero, los rectángulos cubren una parte mayor de R y el límite es igual al área de R.

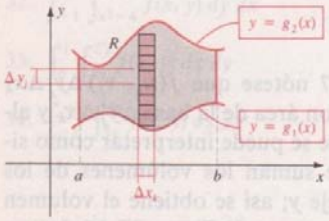
Si se usa una integral iterativa para calcular un área, puede considerarse como límite de una suma doble, como se hizo para volúmenes. Concretamente, como en (17.9) pero con $f(x, y) = 1$, se tiene lo siguiente.

EL ÁREA COMO LÍMITE DE SUMAS DOBLES

(17.10)

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k \sum_j \Delta y_j\, \Delta x_k$$

FIGURA 17.18



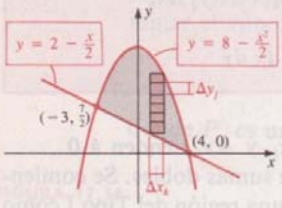
La suma doble en (17.10) puede interpretarse como sigue. Primero, *manteniendo x fija*, se suma sobre todos los rectángulos de áreas $\Delta y_j\, \Delta x_k$ en la dirección del eje y desde la gráfica de $y = g_1(x)$ hasta la gráfica de $y = g_2(x)$. Esto da el área de una franja rectangular paralela al eje y, como se ilustra en la Figura 17.18. Luego se "barre" la región R sumando sobre todas estas franjas desde $x = a$ hasta $x = b$. El límite de las sumas dobles (es decir la integral iterativa) efectúa esto al mismo tiempo que hace tender Δx_k y Δy_j a 0.

EJEMPLO 1 Calcular el área de la región acotada por las gráficas de

$$2y = 16 - x^2 \quad \text{y} \quad x + 2y - 4 = 0.$$

Solución La región se encuentra bajo la parábola $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$ y arriba de la recta $y = 2 - \frac{1}{2}x$, como se ilustra en la Figura 17.19. En la figura también se muestra un rectángulo típico de área $\Delta y_j\, \Delta x_k$, y la franja que se obtiene sumando en la dirección del eje y. Usando una integral iterativa tenemos

FIGURA 17.19



$$A = \int_{-3}^{4} \int_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dy\, dx = \int_{-3}^{4} y \Big]_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dx$$

$$= \int_{-3}^{4} \left[\left(8 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{x}{2}\right) \right] dx$$

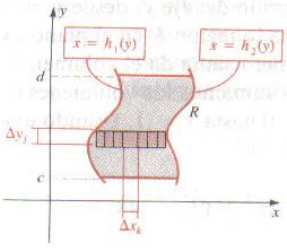
$$= 6x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \Big]_{-3}^{4} = \frac{343}{12} \approx 28.6$$

Si se usa el Teorema (17.8) (ii) para calcular áreas, entonces

$$A = \iint_R dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_j \sum_k \Delta x_k\, \Delta y_j.$$

Esta doble suma puede interpretarse como sigue. Primero, *manteniendo y fija*, se suma sobre los rectángulos de áreas $\Delta x_k\, \Delta y_j$ en la dirección del eje x, desde la gráfica

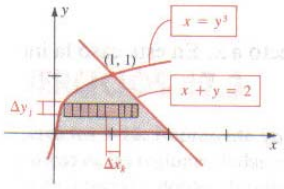
FIGURA 17.20



de $x = h_1(y)$ hasta la gráfica de $x = h_2(y)$. Esto da el área de una franja rectangular paralela al eje x, como se ilustra en la Figura 17.20. Luego se barre la región R sumando sobre todas las franjas desde $y = c$ hasta $y = d$. Como antes, la integral iterativa efectúa esto al mismo tiempo que hace tender Δx_k y Δy_j a 0.

EJEMPLO 2 Calcular el área A de la región en el plano xy acotada por las gráficas de $x = y^3$, $x + y = 2$ y $y = 0$.

FIGURA 17.21



Solución La región está en la Figura 17.21 junto con un rectángulo típico de área $\Delta x_k \, \Delta y_j$ y una franja que se obtiene sumando en la dirección del eje x.

Usando una integral iterativa,

$$A = \iint_R dA = \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx \, dy = \int_0^1 x \Big]_{y^3}^{2-y} dy$$

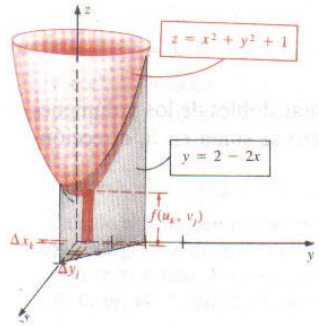
$$= \int_0^1 (2 - y - y^3) \, dy = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \Big]_0^1 = \frac{5}{4}.$$

También podemos calcular el área usando el Teorema (17.8) (i), pero en este caso hay que dividir la región R en dos partes separadas por la recta vertical que pasa por (1, 1). Entonces tenemos

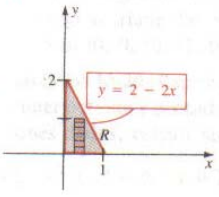
$$A = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} dy \, dx \quad \bullet$$

FIGURA 17.22

(i)



(ii)



En los siguientes dos ejemplos se calculan volúmenes usando (17.9).

EJEMPLO 3 Calcular el volumen V del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y por las gráficas de las ecuaciones $z = x^2 + y^2 + 1$ y $2x + y = 2$.

Solución Como se ilustra en la Figura 17.22(i), el sólido se encuentra bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ y sobre la región triangular R en el plano xy acotada por los ejes coordenados y la recta $y = 2 - 2x$.

De acuerdo con la Definición (17.4), para $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$,

$$V = \iint_R (x^2 + y^2 + 1) \, dA.$$

Como en (17.9), esta integral puede interpretarse como límite de sumas dobles

$$\sum_k \sum_j f(u_k, v_j) \, \Delta y_j \, \Delta x_k = \sum_k \sum_j (u_k^2 + v_j^2 + 1) \, \Delta y_j \, \Delta x_k$$

en donde $(u_k^2 + v_j^2 + 1)\,\Delta y_j\,\Delta x_k$ representa el volumen de un prisma como el que se muestra en la Figura 17.22(i). Primero se suma en la dirección del eje y, desde $y = 0$ hasta $y = 2 - 2x$. El croquis en la Figura 17.22(ii) muestra la región R en el plano xy y una franja correspondiente a la primera suma. Esta primera suma da el volumen de una región laminar con caras paralelas al plano yz. Ahora sumamos los volúmenes de estas regiones laminares en la dirección del eje x desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Usando una integral iterativa,

$$V = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2y + \tfrac{1}{3}y^3 + y\right]_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\tfrac{14}{3}x^3 + 10x^2 - 10x + \tfrac{14}{3}\right) dx$$

$$= -\tfrac{7}{6}x^4 + \tfrac{10}{3}x^3 - 5x^2 + \tfrac{14}{3}x\Big]_0^1 = \tfrac{11}{6}.$$

También podemos calcular V integrando primero con respecto a x. En este caso la integral iterativa tiene la forma

$$V = \int_0^2 \int_0^{(2-y)/2} (x^2 + y^2 + 1)\,dx\,dy \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Calcular el volumen V del sólido acotado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 9$ y $y^2 + z^2 = 9$.

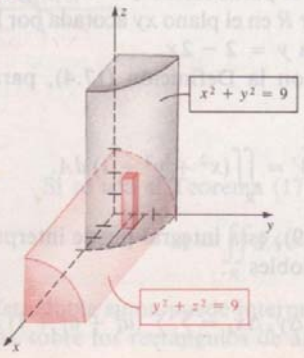
Solución Las gráficas son cilindros de radio 3 cuyos ejes se cortan ortogonalmente. En la Figura 17.23(i) se ilustra la parte de este sólido que está contenida en el primer octante. Por simetría, basta calcular el volumen de esta parte y multiplicar el resultado por 8. En la parte (i) de la figura se ve que el sólido se encuentra bajo la gráfica de $z = \sqrt{9 - y^2}$ y sobre la región R acotada por el eje x, por el eje y y por la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$. Entonces por la Definición (17.4),

$$V = 8 \iint_R (9 - y^2)^{1/2}\,dA.$$

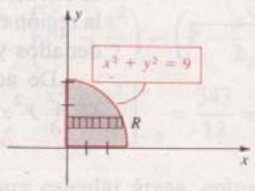
Podemos considerar la integral como límites de sumas dobles de los volúmenes de prismas, como se muestra en la Figura 17.23(i). Primero se suma en la dirección del

FIGURA 17.23

(i)



(ii)



eje x, desde $x = 0$ hasta $x = (9 - y^2)^{1/2}$. El croquis en la Figura 17.23(ii) muestra la región R en el plano xy y una franja correspondiente a esta primera suma. Esto da el volumen de una región laminar con caras paralelas al plano xz. Luego se suman estos volúmenes laminares en la dirección del eje y, desde $y = 0$ hasta $y = 3$. Usando una integral iterativa,

$$V = 8\int_0^3 \int_0^{(9-y^2)^{1/2}} (9 - y^2)^{1/2}\, dx\, dy = 8\int_0^3 \left[(9 - y^2)^{1/2}x\right]_0^{(9-y^2)^{1/2}} dy$$

$$= 8\int_0^3 (9 - y^2)\, dy = 8\left[9y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^3 = 144.$$

La integral doble también se podría evaluar integrando primero con respecto a y; sin embargo, la integración en este orden es mucho más complicada. •

EJERCICIOS 17.3

Ejercicios 1-10: Represente la región acotada por las gráficas de las regiones dadas y calcule el área por medio de integrales dobles. Interprete cada una de las integrales dobles como límite de sumas dobles trazando un rectángulo típico de área $\Delta y_j \Delta x_k$ y la franja rectangular correspondiente a la primera suma de la suma doble.

1. $y = 1/x^2$, $y = -x^2$, $x = 1$, $x = 2$
2. $y = \sqrt{x}$, $y = -x$, $x = 1$, $x = 4$
3. $y^2 = -x$, $x - y = 4$, $y = -1$, $y = 2$
4. $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$, $y = 3$
5. $y = x$, $y = 3x$, $x + y = 4$
6. $x - y + 1 = 0$, $7x - y - 17 = 0$, $2x + y + 2 = 0$
7. $y = e^x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = -\pi$, $x = \pi$
8. $y = \ln|x|$, $y = 0$, $y = 1$
9. $y = x^2$, $y = 1/(1 + x^2)$
10. $y = \cosh x$, $y = \operatorname{senh} x$, $x = -1$, $x = 1$
11. Calcule el volumen del sólido que se encuentra bajo la gráfica de $z = 4x^2 + y^2$ y sobre la región rectangular R en el plano xy con vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(2, 0, 0)$ y $(2, 1, 0)$.
12. Calcule el volumen del sólido que se encuentra bajo la gráfica de $z = x^2 + 4y^2$ y sobre la región triangular R del plano xy cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(1, 2, 0)$.

Ejercicios 13-20: Represente el sólido contenido en el primer octante y acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas; calcule su volumen.

13. $x^2 + z^2 = 9$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$
14. $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
15. $2x + y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
16. $y^2 = z$, $y = x$, $x = 4$, $z = 0$
17. $z = x^2 + y^2$, $y = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
18. $z = y^3$, $y = x^3$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$
19. $z = x^3$, $x = 4y^2$, $16y = x^2$, $z = 0$
20. $x^2 + y^2 = 16$, $x = z$, $y = 0$, $z = 0$

Ejercicios 21-24: Calcule el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

21. $z = x^2 + 4$, $y = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $z = 0$
22. $y = x^3$, $y = x^4$, $z - x - y = 4$, $z = 0$
23. $x^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = a^2$ donde $a > 0$
24. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ donde $a > 0$

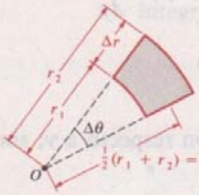
Ejercicios 25-30: La integral iterativa representa el volumen de un sólido. Descríbalo.

25. $\int_{-2}^{1} \int_{x-1}^{1-x^2} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$
26. $\int_0^1 \int_{3-x}^{3-x^2} \sqrt{25 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$
27. $\int_0^4 \int_{y/4}^{\sqrt{y}} (x + y)\, dx\, dy$
28. $\int_0^1 \int_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$
29. $\int_0^4 \int_{-1}^{2} 3\, dy\, dx$
30. $\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} dy\, dx$

17.4 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

FIGURA 17.24

$\Delta A = \bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta$



En esta sección se discute cómo evaluar una integral doble sobre una región R en un plano coordenado y que está acotada por gráficas de ecuaciones polares. Consideramos primero la región polar elemental de la Figura 17.24, delimitada por arcos de circunferencia de radios r_1 y r_2, con centro en el origen, y por dos rayos que parten de este punto. Si $\Delta\theta$ denota la medida en radianes del ángulo entre los rayos y $\Delta r = r_2 - r_1$, entonces el área ΔA de la región es

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}r_2^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_1^2\,\Delta\theta.$$

Esta fórmula también puede escribirse como

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\,\Delta\theta.$$

Si se denota el **radio medio** $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ por $\bar{r}$, entonces

$$\Delta A = \bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta.$$

Luego se considera una región R del tipo ilustrado en la Figura 17.25(i), acotada por dos rayos que forman ángulos positivos α y β con el eje polar, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$. Supóngase que las funciones g_1 y g_2 son continuas y que $g_1(\theta) \le g_2(\theta)$ para todo θ en el intervalo $[\alpha, \beta]$. Si R se subdivide por medio de arcos de circunferencia y rayos como se muestra en la Figura 17.25(ii), entonces el conjunto de regiones polares elementales $R_1, R_2, \ldots, R_n$ que están completamente contenidas en R es una **partición polar interior** P de R. La norma $\|P\|$ de P es la longitud mayor de las diagonales en las R_k. Si se escoge un punto (r_k, θ_k) en R_k tal que r_k es el radio medio, entonces

$$\Delta A_k = r_k\,\Delta r_k\,\Delta\theta_k.$$

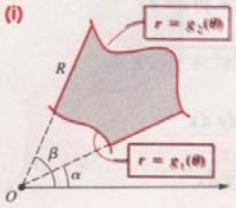
Para una función continua f de las variables polares r y θ, se puede demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA (17.11)

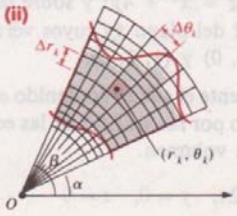
$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(r_k, \theta_k) r_k\,\Delta r_k\,\Delta\theta_k = \iint_R f(r, \theta)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

FIGURA 17.25

(i)

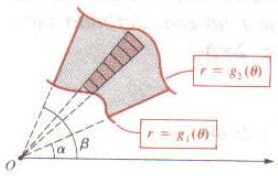


(ii)



El integrando al lado derecho de (17.11) es el producto de $f(r, \theta)$ y r. Esto se debe al hecho de que ΔA es igual a $r_k \Delta r_k \Delta \theta_k$.

FIGURA 17.26

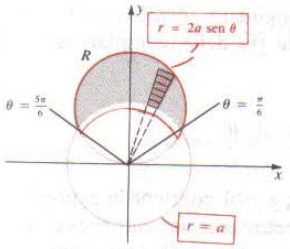


La integral iterativa (17.11) puede considerarse como límite de sumas dobles. Primero se mantiene fijo θ y se suma a lo largo de la región en forma de cuña, ilustrada en la Figura 17.26, desde la gráfica de g_1 hasta la gráfica de g_2. Con la segunda suma se describe la región haciendo variar θ de α a β. La integral iterativa denota el límite de estas sumas cuando $\|P\|$ tiende a cero.

Si $f(r, \theta) = 1$ en toda R, entonces la integral en (17.11) es igual al área de R. Esto se concluye también de los resultados del Capítulo 13, ya que después de la primera integración parcial con respecto a r, se obtiene la fórmula del Teorema (13.12).

EJEMPLO 1 Calcular el área de la región R que se encuentra fuera de la gráfica de $r = a$ y dentro de la gráfica de $r = 2a \operatorname{sen} \theta$.

FIGURA 17.27



Solución La región está en la Figura 17.27 junto con una cuña típica de regiones polares elementales obtenida al sumar desde la frontera $r = a$ hasta la frontera $r = 2a \operatorname{sen} \theta$. Luego se describe o barre la región haciendo variar θ de $\pi/6$ a $5\pi/6$. (Con frecuencia se comete el error de hacer variar θ de 0 a π. ¿Por qué es incorrecto lo anterior?)

Del Teorema (17.11) con $f(r, \theta) = 1$,

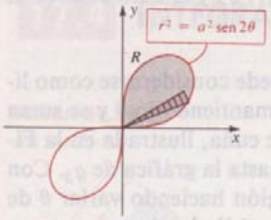
$$A = \iint_R dA = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_a^{2a \operatorname{sen} \theta} r \, dr \, d\theta.$$

Para simplificar las operaciones puede usarse la simetría de R con respecto al eje y. En este caso se hace variar θ de $\pi/6$ a $\pi/2$, y se multiplica por 2 el resultado. Así

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_a^{2a \operatorname{sen} \theta} r \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \tfrac{1}{2} r^2 \Big]_a^{2a \operatorname{sen} \theta} d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (4a^2 \operatorname{sen}^2 \theta - a^2) \, d\theta \\ &= a^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(4 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - 1 \right) d\theta = a^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - 2 \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= a^2 \left[\theta - \operatorname{sen} 2\theta \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = a^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\ &= a^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \approx 1.9a^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Calcular el área de la región R acotada por un rizo del lemniscato (o lemniscata) $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ donde $a > 0$.

FIGURA 17.28



Solución La curva está en la Figura 17.28 junto con una cuña de regiones polares elementales obtenida sumando desde el origen ($r = 0$) hasta la frontera $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ de R en el primer cuadrante. Luego se describe tal rizo haciendo variar θ de 0 a $\pi/2$. (Obsérvese que r *no está definido* para $\pi/2 < \theta < \pi$ o bien $3\pi/2 < \theta < 2\pi$.)

Por el Teorema (17.11),

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2} r^2 \Big]_0^{a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}} d\theta = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$$

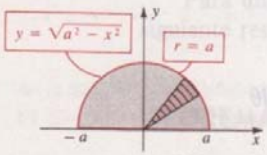
$$= -\tfrac{1}{4} a^2 \cos 2\theta \Big]_0^{\pi/2} = -\tfrac{1}{4} a^2 [-1 - 1] = \tfrac{1}{2} a^2 \quad \bullet$$

En condiciones adecuadas, una integral doble en coordenadas rectangulares se puede transformar en una integral doble en coordenadas polares. Primero se sustituyen en el integrando las variables x y y por $r\cos\theta$ y $r\operatorname{sen}\theta$. Luego se sustituye en la integral iterativa $dy\,dx$ o bien $dx\,dy$ por $r\,dr\,d\theta$ o bien $r\,d\theta\,dr$. La siguiente fórmula muestra la forma general del integrando. El símbolo de integral doble $\iint_R$ debe reemplazarse por un símbolo de integral *iterativa* apropiado.

(17.12)
$$\iint_R f(x, y)\, dy\, dx = \iint_R f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Si el integrando $f(x, y)$ de una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ contiene la expresión $x^2 + y^2$ o si la frontera de la región R incluye arcos de circunferencia, entonces el uso de las coordenadas polares facilita la evaluación. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 17.29



EJEMPLO 3 Usar coordenadas polares para evaluar

$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx.$$

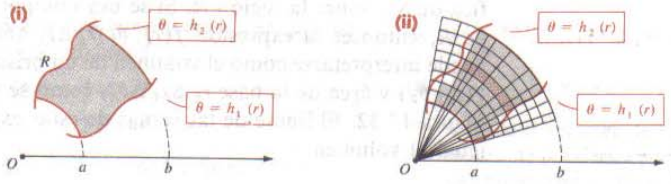
Solución La región de integración está delimitada por las gráficas de $y = 0$ (el eje x) y $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (media circunferencia), como se muestra en la Figura 17.29. Primero sustituimos $x^2 + y^2$ en el integrando por r^2 y $dy\,dx$ por $r\,dr\,d\theta$. Luego se cambian los límites a los de coordenadas polares. Haciendo referencia a la Figura 17.29, obtenemos

$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx = \int_0^{\pi} \int_0^{a} r^3\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{r^5}{5} \Big]_0^{a} d\theta = \frac{a^5}{5} \int_0^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{a^5}{5} \theta \Big]_0^{\pi} = \frac{\pi a^5}{5} \quad \bullet$$

FIGURA 17.30



Las coordenadas polares pueden usarse también para integrales dobles sobre una región R del tipo ilustrado en la Figura 17.30(i). En este caso R está acotada por los arcos de dos circunferencias de radios a y b, y por las gráficas de las ecuaciones polares $\theta = h_1(r)$ y $\theta = h_2(r)$, donde las funciones h_1 y h_2 son continuas, y $h_1(r) \leq h_2(r)$ para todo r en el intervalo $[a, b]$.

Si f es una función de r y θ que es continua en R, entonces el límite en (17.11) existe y la fórmula de evaluación correspondiente está dada como sigue.

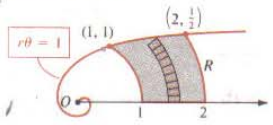
TEOREMA (17.13)

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r,\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

La integral iterativa en el Teorema (17.13) se puede interpretar en términos de límites de sumas dobles. Primero se mantiene r fijo y se suma sobre un arco de circunferencia, como se ilustra con la región coloreada en la Figura 17.30(ii). Luego se describe R sumando los términos correspondientes a cada una de estas regiones anulares desde $r = a$ hasta $r = b$. El siguiente ejemplo ilustra este método.

EJEMPLO 4 Calcular el área de la menor de las dos regiones acotadas por el eje polar, las gráficas de $r = 1$, $r = 2$ y la parte de la espiral $r\theta = 1$ que se encuentra entre $\theta = \frac{1}{2}$ y $\theta = 1$.

FIGURA 17.31



Solución La región R está en la Figura 17.31 junto con una subregión anular formada por regiones polares elementales. Aplicando el Teorema (17.13) con $f(r, \theta) = 1$:

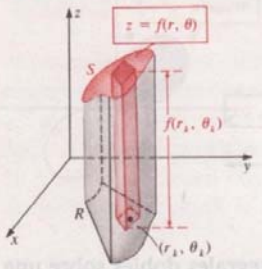
$$A = \iint_R dA = \int_1^2 \int_0^{1/r} r\,d\theta\,dr$$

$$= \int_1^2 r\theta\Big]_0^{1/r} dr = \int_1^2 r\left(\frac{1}{r}\right) dr$$

$$= \int_1^2 dr = r\Big]_1^2 = 2 - 1 = 1 \quad \bullet$$

Si $f(r, \theta) \geq 0$ en toda una región polar R, entonces la integral doble $\iint_R f(r, \theta)\,dA$ en (17.11) puede considerarse como el volumen de un sólido. La diferencia principal con las coordenadas rectangulares es que se considera la gráfica S de $z = f(r, \theta)$

FIGURA 17.32



en coordenadas *cilíndricas*. El sólido se encuentra bajo la gráfica de S y sobre la región R. Si se usa una partición polar de R, entonces la expresión $f(r_k, \theta_k)r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$ en (17.11) puede interpretarse como el volumen de un prisma de altura $f(r_k, \theta_k)$ y área de la base $r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$, como se ilustra en la Figura 17.32. El límite de las sumas de estas expresiones es igual al volumen.

EJEMPLO 5 Calcular el volumen V del sólido acotado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y por el plano xy.

Solución La parte del sólido incluida en el primer octante está en la Figura 17.33(i). Por simetría, basta encontrar el volumen de esta parte y multiplicar el resultado por 4. En coordenadas cilíndricas, la ecuación del paraboloide es $z = 4 - r^2$. La región R en el plano xy está acotada por los ejes coordenados y un cuarto de la circunferencia $r = 2$. Esto se muestra en la Figura 17.33(ii) junto con una cuña de regiones polares elementales.

De acuerdo con la discusión anterior a este ejemplo, con $f(r, \theta) = 4 - r^2$,

$$V = 4\iint_R (4 - r^2)\, dA = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (4 - r^2) r\, dr\, d\theta$$

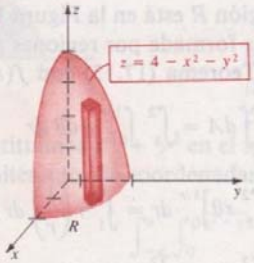
$$= 4\int_0^{\pi/2} \left[2r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right]_0^2 d\theta = 4\int_0^{\pi/2} 4\, d\theta = 16\theta\Big]_0^{\pi/2} = 8\pi.$$

El mismo problema, en coordenadas rectangulares, lleva a la siguiente integral doble:

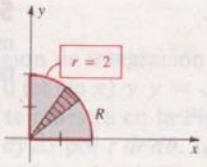
$$V = 4\iint_R (4 - x^2 - y^2)\, dA = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2)\, dy\, dx.$$

FIGURA 17.33

(i)



(ii)



La evaluación de esta última integral convencerá de las ventajas de usar coordenadas cilíndricas (o polares) en ciertos problemas. •

EJERCICIOS 17.4

Ejercicios 1-6: Use una integral doble para calcular el área de la región indicada.

1. Un rizo de $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$.
2. Un rizo de $r = 2 \cos 4\theta$.
3. Dentro de $r = 2 - 2 \cos \theta$ y fuera de $r = 3$.
4. Acotada por $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$.
5. Acotada por el rizo de $r^2 = 9 \cos 2\theta$ que va de $\theta = -\pi/4$ a $\theta = \pi/4$.
6. Dentro de $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y fuera de $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$.

Ejercicios 7-12: *Use coordenadas polares para evaluar* la integral.

7. $\iint_R (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$ para la región R acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$.
8. $\iint_R x^2(x^2 + y^2)^3\, dA$ para la región R acotada por las gráficas de $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = 0$.
9. $\iint_R [x^2/(x^2 + y^2)]\, dA$ para la región R que se encuentra entre las circunferencias concéntricas $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$, donde $0 < a < b$.
10. $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$ para la región R acotada por la gráfica de $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.
11. $\iint_R (x + y)\, dA$ para la región R acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
12. $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$ para la región triangular R con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(3, 3)$.

Ejercicios 13-18: Evalúe la integral.

13. $\int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{-(x^2 + y^2)}\, dy\, dx$
14. $\int_{0}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx$
15. $\int_{1}^{2} \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\, dx$
16. $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1 - x^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\, dx$
17. $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4 - y^2}} \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy$
18. $\int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{2y - y^2}}^{\sqrt{2y - y^2}} x\, dx\, dy$
19. Calcule el volumen del sólido que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
20. Calcule el volumen del sólido que se obtiene cortando el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
21. Calcule el volumen del sólido delimitado por el cono $z = r$ y el cilindro $r = 2 \cos \theta$.
22. Calcule el volumen del sólido delimitado por el paraboloide $z = 4r^2$, el cilindro $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y el plano $z = 0$.
23. Calcule el volumen del sólido que se encuentra dentro de las gráficas de $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
24. Calcule el volumen del sólido acotado por las gráficas de $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 5$.
25. Sea R_a la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Evalúe la integral impropia definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \lim_{a \to \infty} \iint_{R_a} e^{-(x^2 + y^2)}\, dA,$$

26. (a) Se puede demostrar con métodos avanzados que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy.$$

Use esto y el Ejercicio 25 para demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Interprete geométricamente este resultado.

(b) Use la parte (a) para demostrar que

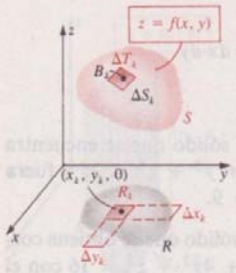
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1.$$

(Este resultado es importante en el campo de la estadística.)

17.5 ÁREA DE UNA SUPERFICIE

En la Sección 6.5 se obtuvieron fórmulas para el área de una superficie de revolución. En esta sección se presenta un método para calcular las áreas de superficies más genera-

FIGURA 17.34



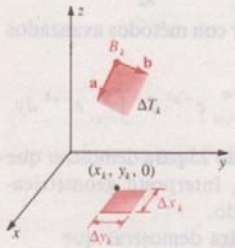
les. Sea f una función con primeras derivadas parciales continuas, tal que $f(x, y) \geq 0$ en toda una región R del plano xy. Sea S la parte de la gráfica de f cuya proyección en el plano xy es R, como se ilustra en la Figura 17.34. Para simplificar la discusión, se supondrá que ningún vector normal a S es paralelo al plano xy. A continuación se definirá el área A de S y se obtendrá una fórmula que puede usarse para calcular A.

Sea $P = \{R_k\}$ una partición interior de R, donde las longitudes de los lados de los rectángulos R_k son Δx_k y Δy_k. Sea $(x_k, y_k, 0)$ un punto cualquiera localizado en R_k y sea $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ el punto correspondiente en S. Consideremos ahora el plano tangente a S en B_k. Sean ΔT_k y ΔS_k las áreas de las regiones en el plano tangente y en S, respectivamente, que se obtiene proyectando R_k verticalmente hacia arriba (véase la Figura 17.34). Si la norma $\|P\|$ de la partición es pequeña, entonces ΔT_k es una aproximación a ΔS_k, y $\sum_k \Delta T_k$ es una aproximación al área A de S. Como esta aproximación mejora cuando $\|P\|$ tiende a 0, se obtiene el siguiente resultado.

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE **(17.14)**

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \Delta T_k.$$

FIGURA 17.35



Para encontrar una fórmula integral para A se escoge $(x_k, y_k, 0)$ como la esquina de R_k más cercana al origen. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ los vectores con punto inicial $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ que son tangentes a las trazas de S en los planos $y = y_k$ y $x = x_k$, respectivamente, como se ilustra en la Figura 17.35, en la que se muestra un rectángulo aislado. Usando la interpretación geométrica de las derivadas parciales dada en la Sección 16.3, las pendientes de las rectas determinadas por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en estos planos son $f_x(x_k, y_k)$ y $f_y(x_k, y_k)$, respectivamente. Resulta que

$$\mathbf{a} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k \mathbf{k}.$$

El área ΔT_k del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k \end{vmatrix}$$

se tiene,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k\,\Delta y_k \mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\,\Delta x_k\,\Delta y_k \mathbf{j} + \Delta x_k\,\Delta y_k \mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\Delta T_k = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\, \Delta x_k\, \Delta y_k$$

donde $\Delta x_k\, \Delta y_k = \Delta A_k$. Si, como en (17.14), se toma el límite de las sumas de las ΔT_k y se aplica la definición de la integral doble, se obtiene lo siguiente.

INTEGRAL PARA EL ÁREA DE UNA SUPERFICIE

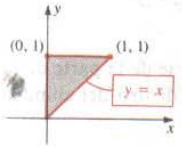
$$A = \iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA. \tag{17.15}$$

La fórmula en (17.15) también puede servir aunque $f(x, y) \leq 0$ en algunos puntos de R.

EJEMPLO 1 Sea R la región triangular del plano xy con vértices (0, 0, 0), (0, 1, 0) y (1, 1, 0). Calcular el área de la superficie de la parte de la gráfica de $z = 3x + y^2$ que se encuentra sobre R.

Solución La región R del plano xy está acotada por las gráficas de $y = x$, $x = 0$ y $y = 1$, como se muestra en la Figura 17.36. Empleando $f(x, y) = 3x + y^2$ y aplicando (17.15), obtenemos

FIGURA 17.36

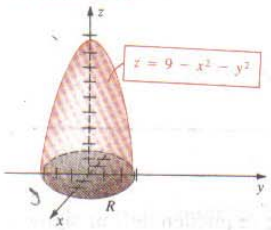


$$A = \iint_R \sqrt{3^2 + (2y)^2 + 1}\, dA = \int_0^1 \int_0^y (10 + 4y^2)^{1/2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 (10 + 4y^2)^{1/2} x \Big]_0^y dy = \int_0^1 (10 + 4y^2)^{1/2} y\, dy$$

$$= \frac{1}{12}(10 + 4y^2)^{3/2} \Big]_0^1 = \frac{14^{3/2} - 10^{3/2}}{12} \approx 1.7$$

FIGURA 17.37



EJEMPLO 2 Calcular el área de la superficie de la parte de la gráfica de la ecuación $z = 9 - x^2 - y^2$ que se encuentra por arriba o en el plano xy.

Solución La gráfica está en la Figura 17.37. Por (17.15),

$$A = \iint_R \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy$$

para la región R del plano xy acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. Si usamos coordenadas polares para evaluar la integral doble, entonces la ecuación de la frontera circular de R es $r = 3$ y por lo tanto,

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta.$$

Podemos demostrar que $A = \pi(37^{3/2} - 1)/6 \approx 117.3$.

Se pueden obtener fórmulas semejantes a (17.15) cuando la superficie S tiene proyecciones adecuadas sobre los planos yz o xz. Por ejemplo, si S es la gráfica de una ecuación $y = g(x, z)$ y su proyección en el plano xz es R_1, entonces

$$A = \iint_{R_1} \sqrt{[g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2 + 1}\, dA.$$

También se puede dar una fórmula de este tipo cuando S está dada por $x = h(y, z)$.

EJERCICIOS 17.5

1. Calcule el área de la superficie de la parte de la gráfica de $z = y + \frac{1}{2}x^2$ que se encuentra sobre la región cuadrada del plano xy con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 0)$.
2. Determine el área de la región del plano $z = y + 1$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
3. Calcule el área de la parte de la gráfica de la ecuación $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = d^2$, donde a, b, c y d son números reales positivos.
4. Plantee, pero no evalúe, una integral para calcular el área de la superficie de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra sobre la región cuadrada del plano xy, con vértices $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$ y $(-1, -1, 0)$.
5. Calcule el área de la superficie de la parte de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se halla dentro del cilindro $x^2 + y^2 - ay = 0$.
6. Calcule el área de la superficie de la parte del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
7. Calcule el área de la superficie de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se obtiene al cortarlo por el plano $z = 1$.
8. Sea R la región triangular del plano xy con vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(2, 2, 0)$. Calcule el área de la superficie de la parte de la gráfica de $z = y^2$ que se encuentra sobre R.
9. Calcule el área de la superficie de la parte de la gráfica de $z = xy$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
10. Calcule el área de la superficie de la parte del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ que se encuentra en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

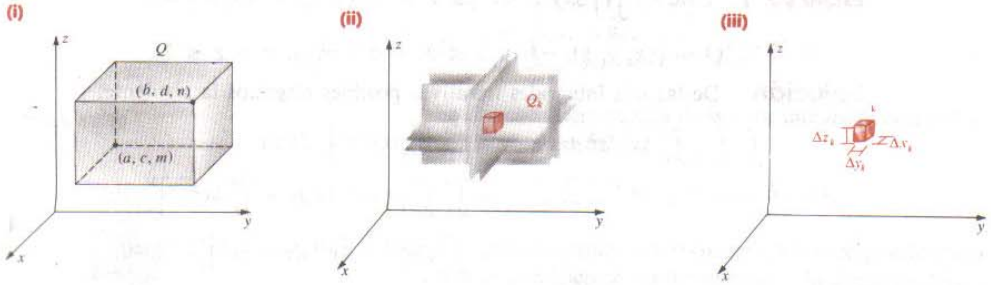
17.6 INTEGRALES TRIPLES

Las *integrales triples* de una función f de *tres* variables x, y, z se pueden definir siguiendo un proceso de cuatro pasos parecido al que se usó para las funciones de dos variables en la Sección 17.1. A continuación se definen para el caso más sencillo, cuando f es continua en un paralelepípedo rectangular Q dado por

$$Q = \{(x, y, z): a \le x \le b, c \le y \le d, m \le z \le n\}$$

como se ilustra en la Figura 17.38(i). Si se divide Q en subregiones $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ mediante planos paralelos a los tres planos coordenados (véase la Figura 17.38(ii)), entonces el conjunto $\{Q_k\}$ es una **partición** P de Q. La **norma** $\|P\|$ de la partición es la

FIGURA 17.38



longitud de la mayor de las diagonales de todos los Q_k. Si Δx_k, Δy_k y Δz_k son las longitudes de los lados de Q_k, como en la Figura 17.38(iii), entonces su volumen ΔV_k es

$$\Delta V_k = \Delta x_k \, \Delta y_k \, \Delta z_k.$$

Una **suma de Riemann** de f para la partición P es una suma como

$$\sum_k f(u_k, v_k, w_k) \, \Delta V_k$$

donde (u_k, v_k, w_k) es un punto arbitrario en Q_k. El límite de las sumas de Riemann cuando $\|P\| \to 0$, se define como en el caso de las funciones de dos variables. Si el límite existe, se denota por $\iiint_Q f(x, y, z) \, dV$ y se llama **integral triple de f sobre Q**. A continuación se tiene, usando la notación de límites.

INTEGRAL TRIPLE DE f SOBRE Q (17.16)

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k) \, \Delta V_k$$

Se puede demostrar que si Q es la región en la Figura 17.38(i), entonces

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

La integral iterativa del lado derecho se evalúa de *dentro* hacia afuera. Así, primero se integra con respecto a x (manteniendo y y z fijas); luego con respecto a y (manteniendo z fija) y después con respecto a z. Hay otras cinco integrales iterativas equivalentes a la integral triple de f sobre Q. Por ejemplo, si el orden de integración es y, z, x, se tiene

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_m^n \int_c^d f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx.$$

Cuando Q es el paralelepípedo rectangular sombreado en la Figura 17.38(i), el orden de integración no altera el resultado.

EJEMPLO 1 Evaluar $\iiint_Q 3xy^3z^2\,dV$ para

$$Q = \{(x, y, z): -1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 2\}.$$

Solución De las seis integrales iterativas posibles elegimos la siguiente:

$$\int_1^4 \int_{-1}^3 \int_0^2 3xy^3z^2\,dz\,dx\,dy = \int_1^4 \int_{-1}^3 xy^3z^3\Big]_0^2\,dx\,dy$$

$$= \int_1^4 \int_{-1}^3 8xy^3\,dx\,dy = \int_1^4 4x^2y^3\Big]_{-1}^3\,dy$$

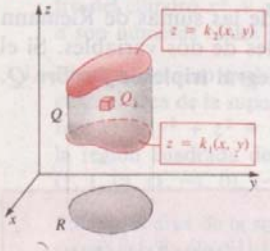
$$= \int_1^4 (36y^3 - 4y^3)\,dy = 8y^4\Big]_1^4 = 2040.$$

En el Ejercicio 1 se pide evaluar la integral con los otros cinco órdenes de integración. •

Pueden definirse las integrales triples sobre regiones más complicadas. Por ejemplo, sea R una región del plano xy que se puede dividir en subregiones del Tipo I y del Tipo II, y sea Q la región en tres dimensiones definida por

$$Q = \{(x, y, z): (x, y) \text{ está en } R \text{ y } k_1(x, y) \le z \le k_2(x, y)\}$$

FIGURA 17.39



donde las funciones k_1 y k_2 tienen primeras derivadas parciales continuas en R. La región Q se encuentra entre las gráficas de $z = k_1(x, y)$ y $z = k_2(x, y)$, y arriba o abajo de la región R (véase la Figura 17.39). Si Q se subdivide mediante planos paralelos a los tres planos coordenados, entonces los paralelepípedos (pequeños) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ resultantes que se encuentran completamente dentro de Q son una **partición interna** P de Q. En la Figura 17.39 se muestra un elemento típico Q_k de una partición interna de Q.

Una **suma de Riemann** de f para la partición P es una suma de la forma $\sum_k f(u_k, v_k, w_k)\,\Delta V_k$, donde (u_k, v_k, w_k) es un punto arbitrario en Q_k, y ΔV_k es el volumen Q_k. La integral triple de f sobre Q se define también como el límite en (17.16). Si f es continua en Q, se puede demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA DE EVALUACIÓN (17.17)

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \iint_R \left[\int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right] dA$$

La notación en el lado derecho de (17.17) significa que se integra primero con respecto a z y luego se evalúa la integral doble resultante sobre la región R del plano xy usando los métodos de la Sección 17.2. Si R es del Tipo I, como en la Figura 17.9(i), entonces

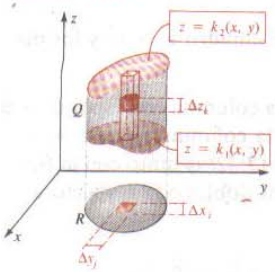
$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx.$$

El símbolo del lado derecho de esta ecuación es una **integral triple iterativa**. Se evalúa con integraciones parciales de $f(x, y, z)$ en el orden z, y, x, sustituyendo los límites

de integración de la manera acostumbrada. Análogamente, si R es del Tipo II, como en la Figura 17.9(ii), entonces

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy.$$

FIGURA 17.40



Es útil considerar a una de las dos integrales como el límite de una *suma triple*:

$$\sum_i \sum_j \sum_k f(u_i, v_j, w_k)\, \Delta z_k\, \Delta y_j\, \Delta x_i,$$

donde la primera suma (con respecto a k) corresponde a una columna de paralelepípedos (pequeños) en la dirección del eje z, desde la superficie de abajo (con ecuación $z = k_1(x, y)$) hasta la superficie de arriba (con ecuación $z = k_2(x, y)$), como se ilustra en la Figura 17.40. Las otras dos sumas se efectúan sobre la región R del plano xy, como en el caso de las integrales dobles de la Sección 17.2.

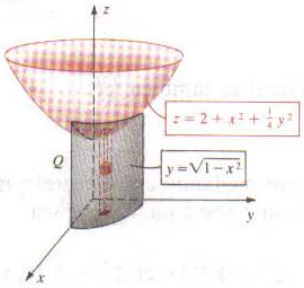
EJEMPLO 2 Expresar $\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$ como una integral iterativa, para la región Q en el primer octante acotada por los planos coordenados y las gráficas de $z - 2 = x^2 + \frac{1}{4} y^2$ y $x^2 + y^2 = 1$.

Solución Como se puede ver en la Figura 17.41(i), Q se encuentra bajo el paraboloide $z = 2 + x^2 + \frac{1}{4} y^2$ y sobre la gráfica de $z = 0$ (el plano xy). La región R del plano xy está acotada por los ejes coordenados y la gráfica de $y = \sqrt{1 - x^2}$. En la figura también aparece una columna que corresponde a la primera suma sobre los paralelepípedos de volúmenes, $\Delta z_k\, \Delta y_j\, \Delta x_i$ en la dirección del eje z. Como la columna va del plano xy ($z = 0$) al paraboloide, el límite inferior de integración con respecto a z es $z = 0$ y el límite superior es $z = 2 + x^2 + \frac{1}{4} y^2$. La segunda y la tercera integraciones son sobre la región R del plano xy (véase la Figura 17.41(ii)). Entonces, la integral en (17.17) tiene la forma

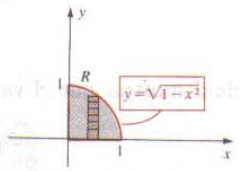
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

FIGURA 17.41

(i)



(ii)



Si $f(x, y, z) = 1$ en Q, entonces la integral triple de f sobre Q se escribe como $\iiint_Q dV$ y su valor es el volumen de la región Q. El volumen V de la región Q del Ejemplo 2, ilustrada en la Figura 17.41(i) es

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} dz\, dy\, dx.$$

EJEMPLO 3 Calcular el volumen del sólido acotado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$.

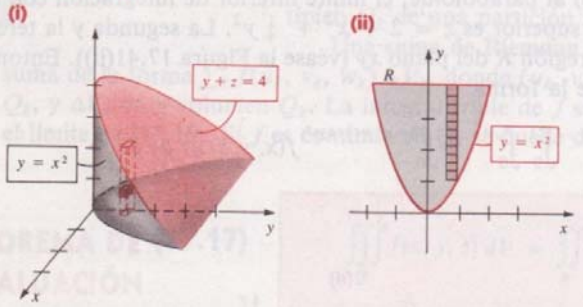
Solución El sólido está en la Figura 17.42(i) junto con la columna correspondiente a la primera suma en la dirección del eje z. Obsérvese que la columna va de $z = 0$ a $z = 4 - y$. La región R del plano xy se muestra en la Figura 17.42(ii) junto con la franja correspondiente a la primera integración (de una integral doble) con respecto a y. Aplicando (17.17) con $f(x, y, z) = 1$,

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_0^{4-y} dz\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} (4 - y)\, dy\, dx$$
$$= \int_{-2}^{2} \left[4y - \tfrac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{4} dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - 4x^2 + \tfrac{1}{2}x^4\right) dx$$
$$= 8x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{10}x^5\Big]_{-2}^{2} = \tfrac{256}{15} \approx 17.$$

Si usáramos el orden $dx\,dy$ para la integral doble, entonces la franja en la Figura 17.42(ii) sería horizontal y

$$V = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{4-y} dz\, dx\, dy.$$

FIGURA 17.42

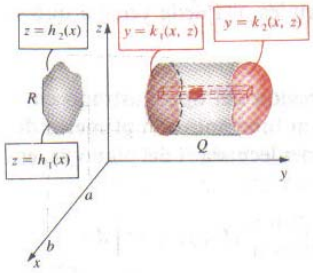


Se puede demostrar que el valor de esta integral es también $\frac{256}{15}$. •

Algunas integrales triples se pueden evaluar mediante una integral triple iterativa, en la que la primera integración se efectúa con respecto a y. Así, sea

$$Q = \{(x, y, z): a \le x \le b, h_1(x) \le z \le h_2(x), k_1(x, z) \le y \le k_2(x, z)\}$$

FIGURA 17.43



donde h_1 y h_2 son funciones continuas en $[a, b]$ y k_1, y k_2 son funciones con primeras derivadas parciales continuas en la región R del plano xz, que se muestra en la Figura 17.43. Nótese que Q se encuentra entre las gráficas de $y = k_1(x, z)$ y $y = k_2(x, z)$. La proyección R de Q sobre el plano xz es una región del Tipo I. En este caso se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA DE EVALUACIÓN (17.18)

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx.$$

La integral iterativa en (17.18) se puede interpretar como el límite de las sumas triples que se obtienen sumando primero sobre una columna horizontal de pequeños paralelepípedos, en la dirección del eje y, desde la superficie de la izquierda (con ecuación $y = k_1(x, z)$) hasta la superficie de la derecha (con ecuación $y = k_2(x, z)$), como se indica en la Figura 17.43. Se puede evaluar la integral doble resultante sobre la región R del plano xz, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Calcular el volumen de la región Q acotada por las gráficas de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ y $z + y = 6$.

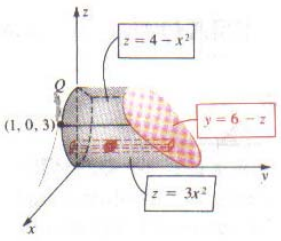
Solución Como se puede ver en la Figura 17.44(i), Q se encuentra bajo el cilindro $z = 4 - x^2$, y sobre el cilindro $z = 3x^2$, a la derecha del plano xz y a la izquierda del plano $z + y = 6$. Entonces, Q es una región del tipo ilustrado en la Figura 17.43, donde $k_1(x, z) = 0$ y $k_2(x, z) = 6 - z$. La región R del plano xz aparece en la Figura 17.44(ii). Aplicando (17.18),

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^{1} \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy\, dz\, dx = \int_{-1}^{1} \int_{3x^2}^{4-x^2} (6 - z)\, dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[6z - \tfrac{1}{2}z^2\right]_{3x^2}^{4-x^2} dx = \int_{-1}^{1} (16 - 20x^2 + 4x^4)\, dx = \tfrac{304}{15} \approx 20.3.$$

FIGURA 17.44

(i)



(ii)

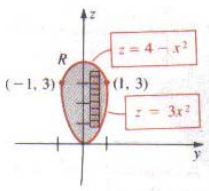
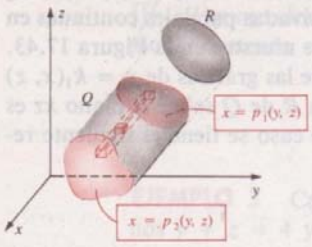


FIGURA 17.45



Si usáramos un orden de integración diferente, sería necesario evaluar varias integrales triples. (¿Puede verse a qué se debe esto?) •

Finalmente, si Q es una región del tipo ilustrado en la Figura 17.45, donde p_1 y p_2 son funciones con primeras derivadas continuas en una región adecuada R del plano yz, entonces

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{p_1(y,z)}^{p_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA.$$

En la última integral doble iterativa dA se puede reemplazar por $dz\, dy$ o bien $dy\, dz$.

EJEMPLO 5 En el Ejemplo 3 se consideró el sólido delimitado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$. Calcular el volumen integrando primero con respecto a x.

Solución El sólido aparece otra vez en la Figura 17.46. Integrar primero con respecto a x corresponde a una suma sobre una columna de pequeños paralelepípedos en la dirección del eje x, desde la gráfica de $x = -\sqrt{y}$ hasta la gráfica de $x = \sqrt{y}$. La región R del plano yz se encuentra entre estas gráficas y está acotada por el eje y, el eje z y la recta $y + z = 4$, como se muestra en la Figura 17.46(ii).

Si la segunda integración es con respecto a y, como se indica mediante la franja de rectángulos en (ii) de la figura, entonces

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dy\, dz.$$

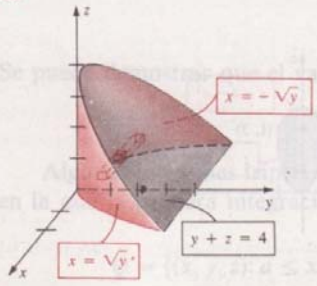
Puede verificarse que el valor de esta integral es $\frac{256}{15}$. Si hacemos la segunda integración con respecto a z en vez de con respecto a y, entonces la integral iterativa es

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dz\, dy \quad \bullet$$

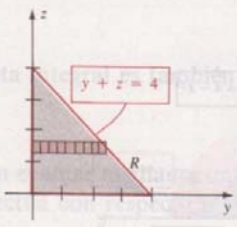
En la siguiente sección se usarán integrales triples para encontrar el *centro de masa* de un sólido. Se concluye esta sección con el análisis de la primera aplicación: calcular la masa de un sólido.

FIGURA 17.46

(i)



(ii)

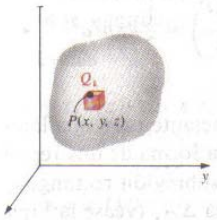


Se dice que un sólido de masa m y volumen V es **homogéneo** si la masa está distribuida uniformemente en el sólido. La **densidad** (o **masa específica**) δ se define por

$$\delta = \frac{m}{V} \quad \text{o bien} \quad m = \delta V$$

entonces δ es *masa por unidad de volumen*. Si, por ejemplo, m se mide en gramos (g) y V en cm^3, δ se expresa en g/cm^3.

FIGURA 17.47



A continuación se considera un sólido **no homogéneo**, es decir, uno en el que la densidad no es la misma en todo el sólido. Por ejemplo, un objeto puede estar formado por diferentes metales, como cobre, hierro y oro. Comenzamos introduciendo un sistema coordenado, como en la Figura 17.47, en el que la región Q tiene la forma del sólido. Para definir la densidad $\delta(x, y, z)$ en un punto $P(x, y, z)$, consideramos la subregión con forma de paralelepípedo Q_k que contiene a P, y tiene volumen ΔV_k y masa Δm_k (véase la Figura 17.47). Si la mayor de las diagonales $\|\Delta V_k\|$ del paralelepípedo es pequeña, entonces se espera que $\Delta m_k/\Delta V_k$ sea una aproximación de $\delta(x, y, z)$. De esta manera se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE DENSIDAD (17.19)

$$\delta(x, y, z) = \lim_{\|\Delta V_k\| \to 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta V_k}$$

Si el límite en (17.19) existe y $\|\Delta V_k\| \approx 0$, entonces

$$\Delta m_k \approx \delta(x, y, z)\, \Delta V_k.$$

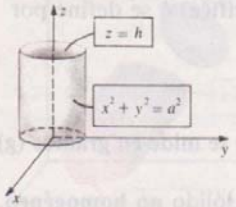
En algunos casos se conoce la densidad $\delta(x, y, z)$ y se quiere calcular la masa. Si δ es una función continua y Q es una región adecuada, se considera una partición interna $\{Q_k\}$ de Q escogiendo un punto (x_k, y_k, z_k) en cada Q_k y se forma la suma de Riemann $\sum_k \delta(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k$. A continuación se define la masa m de Q como el límite de estas sumas.

MASA DE UN SÓLIDO (17.20)

$$m = \iiint_Q \delta(x, y, z)\, dV$$

EJEMPLO 6 Un sólido tiene la forma de un cilindro circular recto con radio de la base a y altura h. Calcular la masa suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia a una de las bases.

FIGURA 17.48

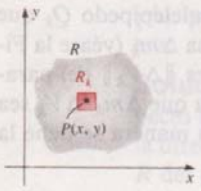


Solución Introduciendo un sistema de coordenadas como en la Figura 17.48, se ve que el sólido está acotado por las gráficas de $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ y $z = h$. Por hipótesis, la densidad en (x, y, z) es $\delta(x, y, z) = kz$ para una constante k. Por la forma de δ y la simetría del sólido, se puede calcular m para la parte que se encuentra en el primer octante y multiplicar el resultado por 4. De acuerdo con (17.20),

$$m = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h kz\, dz\, dy\, dx = 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{h^2}{2}\, dy\, dx$$

$$= 2kh^2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2kh^2\left(\frac{\pi a^2}{4}\right) = \frac{1}{2}k\pi h^2 a^2$$

FIGURA 17.49



Se puede obtener un resultado semejante para una lámina (superficie de pequeño grosor) con la forma de una región R en el plano xy. Consideramos una subregión rectangular R_k que contiene al punto P y tiene área ΔA_k (véase la Figura 17.49). En este caso, la **densidad superficial** en $P(x, y)$ se define por

$$\delta(x, y) = \lim_{\|\Delta A_k\| \to 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta A_k}$$

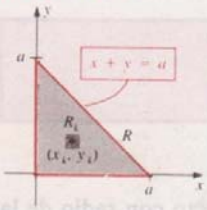
Las unidades son las de *masa por unidad de área*, como g/cm². Se puede obtener una forma análoga a (17.20) para una lámina.

MASA DE UNA LÁMINA (17.21)

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA$$

EJEMPLO 7 Una lámina tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud a. Calcular su masa suponiendo que la densidad en un punto P es proporcional al cuadrado de la distancia al vértice opuesto a la hipotenusa.

FIGURA 17.50



Solución Conviene introducir un sistema de coordenadas, como en la Figura 17.50, de manera que la hipotenusa del triángulo esté sobre la recta $x + y = a$ y el vértice opuesto en el origen. En la figura se muestra también un rectángulo típico R_k (de área ΔA_k) de una partición interna con un punto (x_k, y_k) en el rectángulo.

Por hipótesis, la densidad en (x, y) es de $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$, para una constante k. Aplicando la Definición (17.21) y el Teorema (17.8), obtenemos que la masa es

$$m = \iint_R k(x^2 + y^2)\, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= k \int_0^a \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3 \right]_0^{a-x} dx = k \int_0^a \left[x^2(a-x) + \tfrac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx.$$

Se puede verificar que el valor de esta última integral es $\frac{1}{6} ka^4$. •

EJERCICIOS 17.6

1. Evalúe la integral del Ejemplo 1 usando los cinco órdenes de integración diferentes al que se usó en la solución.

2. Evalúe

$$Q = \{(x, y, z): 1 \le x \le 2, -1 \le y \le 0, 0 \le z \le 3\},$$

$$\iiint_Q (x + 2y + 4z)\, dV$$

para la región de seis maneras diferentes.

Ejercicios 3-6: Evalúe la integral iterativa.

3. $\int_0^1 \int_{1+x}^{2x} \int_z^{x+z} x \, dy \, dz \, dx$

4. $\int_1^2 \int_0^{z^2} \int_{x+z}^{x-z} z \, dy \, dx \, dz$

5. $\int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2 y \, dz \, dy \, dx$

6. $\int_2^3 \int_0^{3y} \int_1^{yz} (2x + y + z) \, dx \, dz \, dy$

Ejercicios 7-10: Realice la representación de la región Q acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y exprese $\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$ como seis integrales iterativas diferentes.

7. $x + 2y + 3z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

8. $x^2 + y^2 = 9, \quad z = 0, \quad z = 2$

9. $z = 9 - 4x^2 - y^2, \quad z = 0$

10. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

Ejercicios 11-20: Represente la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y use una integral triple para calcular su volumen.

11. $z + x^2 = 4, \quad y + z = 4, \quad y = 0, \quad z = 0$

12. $x^2 + z^2 = 4, \quad y^2 + z^2 = 4$

13. $y = 2 - z^2, \quad y = z^2, \quad x + z = 4, \quad x = 0$

14. $z = 4y^2, \quad z = 2, \quad x = 2, \quad x = 0$

15. $y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 2, \quad x = 0$

16. $z = x^2 + y^2, \quad y + z = 2$

17. $z = 9 - x^2, \quad z = 0, \quad y = -1, \quad y = 2$

18. $z = e^{x+y}, \quad y = 3x, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad z = 0$

19. $z = x^2, \quad z = x^3, \quad y = z^2, \quad y = 0$

20. $y = x^2 + z^2, \quad z = x^2, \quad z = 4, \quad y = 0$

Ejercicios 21-26: La integral iterativa representa el volumen de una región Q. Descríbala.

21. $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_2^3 dx \, dy \, dz$

22. $\int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dy \, dx \, dz$

23. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dz \, dy \, dx$

24. $\int_0^1 \int_x^{3x} \int_0^{xy} dz \, dy \, dx$

25. $\int_1^2 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy \, dx \, dz$

26. $\int_1^4 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx \, dy \, dz$

Ejercicios 27-28: Un sólido tiene la forma de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y su densidad es δ. *Plantee* la integral para calcular su masa m; es decir, exprese m como una integral iterativa pero no evalúe ésta.

27. $x + 2y + z = 4, x = 0, y = 0, z = 0; \quad \delta(x, y, z) = x^2 + y^2$

28. $z = 4 - x^2 - y^2, \ z = 0; \quad \delta(x, y, z) = ky$

Ejercicios 29-30: Calcule la masa de la lámina que tiene la forma de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y la densidad indicada.

29. $y = e^{-x}, \ y = 0, \ x = 0, \ x = 1; \quad \delta(x, y) = y^2$

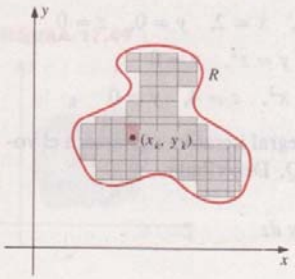
30. $xy^2 = 1, \ y = 1, \ y = 2; \quad \delta(x, y) = x^2 + y^2$

17.7 MOMENTOS Y CENTRO DE MASA

En la Sección 6.8 se estudiaron los momentos y el centro de masa de una lámina homogénea. En esta sección se usan las integrales dobles para generalizar estos conceptos a una lámina *no homogénea* L con la forma de una región R del plano xy. Si la densidad (en este caso la masa por unidad de área) en el punto (x, y) es $\delta(x, y)$, donde δ es una función continua en R, entonces por (17.21), la masa m de L está dada por

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA.$$

FIGURA 17.51



Sea $P = \{R_k\}$ una partición interna de R donde, para cada k, (x_k, y_k) es un punto arbitrario en R_k (véase la Figura 17.51). Como δ es continua, un cambio pequeño de (x, y) da lugar a una variación pequeña en la densidad $\delta(x, y)$; es decir, δ es *casi constante* en R_k. Entonces, si $\|P\| \approx 0$, la masa Δm_k correspondiente a R_k se puede aproximar por $\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k$, donde ΔA_k es el área de R_k. Suponiendo que la masa Δm_k está concentrada en el punto (x_k, y_k), su *momento* con respecto al eje x de este elemento de L, es el producto $y_k\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k$. Intuitivamente se espera que la suma de los momentos $\sum_k y_k\,\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ sea una aproximación al momento de la *lámina* con respecto al eje x. Entonces, se define el momento M_x de la masa de L con respecto al eje x como sigue:

$$M_x = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k y_k\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R y\delta(x, y)\, dA.$$

Análogamente, el momento M_y de la masa de L con respecto al eje y es

$$M_y = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k x_k\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R x\delta(x, y)\, dA.$$

Como en las Definiciones (6.22) y (6.23), se define el *centro de masa* de la lámina como el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ tal que $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$.

Así se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN (17.22)

Sea L una lámina con la forma de una región R del plano xy. Si la densidad (masa por unidad de área) en (x, y) es $\delta(x, y)$, y δ es continua en R, entonces la **masa** m, los **momentos** M_x y M_y y el **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ son

(i) $m = \iint_R \delta(x, y)\, dA$

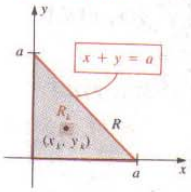
(ii) $M_x = \iint_R y\delta(x, y)\, dA; \quad M_y = \iint_R x\delta(x, y)\, dA$

(iii) $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{\iint_R x\delta(x, y)\, dA}{\iint_R \delta(x, y)\, dA}; \quad \bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{\iint_R y\delta(x, y)\, dA}{\iint_R \delta(x, y)\, dA}$

Si L es homogénea, entonces $\delta(x, y)$ es constante y se puede cancelar en (17.22) (iii). Así, como en la Sección 6.8, el centro de masa de una lámina homogénea depende sólo de su forma y $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama **centroide** de la región R.

EJEMPLO 1 Una lámina tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud a. La densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia al vértice opuesto a la hipotenusa. Encontrar su centro de masa.

FIGURA 17.52



Solución Esta lámina es la misma que la que se consideró en el Ejemplo 7 de la Sección 17.6, donde se colocó el triángulo como en la Figura 17.52. Usando la densidad $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$, encontramos que $m = \frac{1}{6}ka^4$. De acuerdo con la Definición (17.22) (ii),

$$M_y = \iint_R xk(x^2 + y^2)\, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} xk(x^2 + y^2)\, dy\, dx,$$

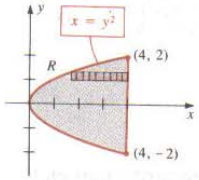
que es igual a $\frac{1}{15}ka^5$. Según (17.22) (iii),

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{15}ka^5}{\frac{1}{6}ka^4} = \frac{2}{5}a.$$

Análogamente, $M_x = \frac{1}{15}ka^5$ y $\bar{y} = \frac{2}{5}a$. Por lo tanto el centro de masa (el *punto de equilibrio*) de la lámina es $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$. •

EJEMPLO 2 Una lámina tiene la forma de la región R del plano xy acotada por las gráficas de $x = y^2$ y $x = 4$. La densidad en el punto $P(x, y)$ es directamente proporcional a la distancia al eje y. Calcular el centro de masa.

FIGURA 17.53



Solución La región está en la Figura 17.53. Por hipótesis, la densidad en (x, y) es $\delta(x, y) = kx$, para una constante k. Por la forma de δ y la simetría de la región vemos que el centro de masa está sobre el eje x, es decir, $y = 0$.

De acuerdo con la Definición (17.22) (i) e integrando primero con respecto a x, como indica la franja de rectángulos en la Figura 17.53, obtenemos

$$m = \iint_R kx\, dA = k \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} x\, dx\, dy$$

$$= k \int_{-2}^{2} \tfrac{1}{2}x^2 \Big]_{y^2}^{4} dy = \tfrac{1}{2}k \int_{-2}^{2} (16 - y^4)\, dy = \tfrac{128}{5}k.$$

Según la Definición (17.22) (ii),

$$M_y = \iint_R x(kx)\, dA = k \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} x^2\, dx\, dy$$

$$= k \int_{-2}^{2} \tfrac{1}{3}x^3 \Big]_{y^2}^{4} dy = \tfrac{1}{3}k \int_{-2}^{2} (64 - y^6)\, dy = \tfrac{512}{7}k.$$

De modo que,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{512k}{7} \cdot \frac{5}{128k} = \frac{20}{7} \approx 2.86.$$

Por consiguiente, el centro de masa es $(\frac{20}{7}, 0)$. •

Los momentos M_x y M_y de la Definición (17.22) se llaman también los *primeros momentos* de la masa de L con respecto a los ejes coordenados. Si se usan los *cuadrados* de las distancias a los ejes coordenados, se obtienen los *segundos momentos*, o **momentos de inercia**, I_x y I_y con respecto al eje x y al eje y, respectivamente. La suma $I_O = I_x + I_y$ es el **momento polar de inercia** o **momento de inercia con respecto al polo u origen**. En la siguiente fórmula, I_O se puede obtener también como el límite de una suma usando el *cuadrado* de la distancia del origen a (x_k, y_k) en la Figura 17.51.

MOMENTOS DE INERCIA DE UNA LÁMINA (17.23)

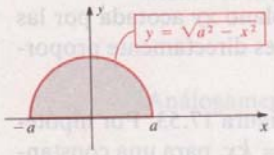
$$I_x = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k y_k^2\, \delta(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R y^2\, \delta(x, y)\, dA$$

$$I_y = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k x_k^2\, \delta(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R x^2\, \delta(x, y)\, dA$$

$$I_O = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k (x_k^2 + y_k^2)\delta(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R (x^2 + y^2)\delta(x, y)\, dA$$

EJEMPLO 3 Una lámina tiene la forma del semicírculo ilustrado en la Figura 17.54. La densidad es directamente proporcional a la distancia al eje x. Calcular el momento de inercia con respecto al citado eje x.

FIGURA 17.54



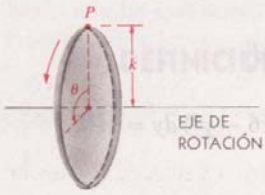
Solución Por hipótesis, la densidad en (x, y) está dada por $\delta(x, y) = ky$. Aplicando (17.23), resulta que el momento de inercia con respecto al eje x es

$$I_x = \int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2(ky)\, dy\, dx = k \int_{-a}^{a} \tfrac{1}{4} y^4 \Big]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \tfrac{1}{4}k \int_{-a}^{a} (a^4 - 2a^2x^2 + x^4)\, dx.$$

Integrando, obtenemos $I_x = \frac{4}{15}ka^5$. •

FIGURA 17.55



Los momentos de inercia son útiles en problemas en los que un objeto gira alrededor de un eje fijo, como lo hace una rueda (o un disco) alrededor de su eje (véase la Figura 17.55). Si P es una partícula en la rueda que tiene masa m y está a una distancia k del eje de rotación, el momento de inercia I de la masa m de P con respecto al eje es mk^2. Si la rapidez (o velocidad) angular $d\theta/dt$ es una constante ω, entonces la rapidez (o velocidad) lineal v de la partícula es $k\omega$. Por definición, la **energía cinética** E_K de P es

$$E_K = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

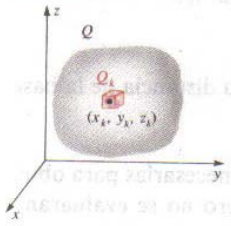
De manera que

$$E_K = \tfrac{1}{2}mk^2\omega^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2.$$

Si se representa la rueda mediante un disco, entonces se puede deducir la misma fórmula para la energía cinética de la rueda introduciendo un límite de sumas. La fórmula también puede generalizarse a láminas con formas no circulares. Para un ingeniero o un físico, la energía cinética de un objeto que gira representa el trabajo necesario para hacer que el objeto se detenga. Como $E_K = \frac{1}{2} I\omega^2$, se ve que la energía cinética es directamente proporcional al momento de inercia. Para una ω fija, cuanto mayor es la inercia, tanto mayor es el trabajo que habría que realizar para detener la rotación.

Consideremos ahora un sólido con la forma de una región Q en tres dimensiones y supongamos que la densidad (masa por unidad de volumen) en (x, y, z) es $\delta(x, y, z)$, donde δ es continua en Q. Sea $\{Q_k\}$ una partición interna de Q y sea ΔV_k el volumen de Q_k. Para un punto (x_k, y_k, z_k) en Q_k (véase la Figura 17.56), la masa que corresponde es aproximadamente $\delta(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k$. De acuerdo con (17.20), la masa del sólido es el límite de estas sumas, es decir, $\iiint_Q \delta(x, y, z)\,dV$.

FIGURA 17.56



El *momento con respecto al plano xy* de la parte del sólido correspondiente a Q_k es aproximadamente $z_k\delta(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$ (véase la Figura 17.56). Sumando y tomando el límite se obtiene el **momento M_{xy} del sólido con respecto al plano xy** (véase (17.24) (ii)). Los **momentos M_{xz} y M_{yz} con respecto al plano xz y al plano yz**, respectivamente, se obtienen de manera parecida. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$del sólido se define en (17.24) (iii).

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA EN TRES DIMENSIONES **(17.24)**

$$\text{(i)}\quad m = \iiint_Q \delta(x, y, z)\,dV$$

$$\text{(ii)}\quad M_{xy} = \iiint_Q z\delta(x, y, z)\,dV$$

$$M_{xz} = \iiint_Q y\delta(x, y, z)\,dV$$

$$M_{yz} = \iiint_Q x\delta(x, y, z)\,dV$$

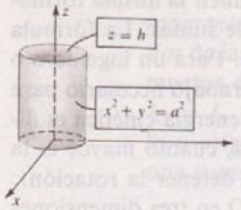
$$\text{(iii)}\quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m};\quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m};\quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

El centro de masa del sólido en la Figura 17.56 es el punto en el que se puede concentrar la masa total m sin que cambien los momentos con respecto a los planos coordenados.

Si el sólido es homogéneo, entonces la densidad δ es constante y δ se puede cancelar después de sustituirla en (17.24) (iii). Por lo tanto, el centro de masa de un sólido homogéneo depende únicamente de la forma de Q. Como en dos dimensiones, el punto correspondiente en los sólidos geométricos se llama **centroide** del sólido. Para encontrar los centroides se toma $\delta(x, y, z) = 1$ en (17.24).

EJEMPLO 4 Un sólido tiene la forma de un cilindro circular recto con radio de la base a y altura h. La densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia a una de las bases. Encontrar su centro de masa.

FIGURA 17.57



Solución El sólido se consideró en el Ejemplo 6 de la Sección 17.6 y ahora aparece en la Figura 17.57. Tomando $\delta(x, y, z) = kz$, encontramos que $m = \frac{1}{2}k\pi h^2a^2$.

Resulta evidente que el centro de masa está sobre el eje z y por lo tanto, basta calcular $\bar{z} = M_{xy}/m$. Además, por la forma de δ y la simetría del sólido, podemos calcular M_{xy} para la parte que está en el primer octante y multiplicar el resultado por cuatro. Usando (17.24),

$$M_{xy} = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h z(kz)\,dz\,dy\,dx = 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \tfrac{1}{3}h^3\,dy\,dx$$

$$= \tfrac{4}{3}kh^3\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{4}{3}kh^3(\tfrac{1}{4}\pi a^2) = \tfrac{1}{3}k\pi h^3a^2$$

Finalmente,

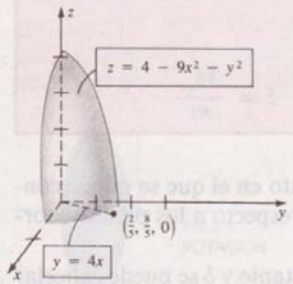
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{1}{3}k\pi h^3a^2}{\frac{1}{2}k\pi h^2a^2} = \tfrac{2}{3}h.$$

Por lo tanto, el centro de masa está sobre el eje del cilindro, a una distancia de la base inferior igual a dos tercios de la altura. •

En el siguiente ejemplo solamente *se plantearán* las integrales necesarias para obtener la solución, es decir, se escribirán las integrales iterativas pero no se evaluarán.

EJEMPLO 5 Un sólido tiene la forma de la región en el primer octante acotada por las gráficas de $4 - z = 9x^2 + y^2$, $y = 4x$, $z = 0$ y $y = 0$. La densidad en el punto $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia al origen. Plantear las integrales necesarias para calcular $\bar{x}$.

FIGURA 17.58



Solución La región está en la Figura 17.58. La densidad en (x, y, z) es $\delta(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, para un valor k. Usando (17.24),

$$m = \int_0^{8/5} \int_{y/4}^{\sqrt{4-y^2}/3} \int_0^{4-9x^2-y^2} k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\,dz\,dx\,dy$$

$$M_{yz} = \int_0^{8/5} \int_{y/4}^{\sqrt{4-y^2}/3} \int_0^{4-9x^2-y^2} xk(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\,dz\,dx\,dy.$$

y

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$$

•

Si una partícula de masa m se encuentra en el punto (x, y, z), entonces su distancia al eje z es $(x^2 + y^2)^{1/2}$ y su **momento de inercia I_z con respecto al eje z** se define como $(x^2 + y^2)m$. Análogamente, los **momentos de inercia I_x y I_y con respecto al eje x y al eje y** son $(y^2 + z^2)m$ y $(x^2 + z^2)m$, respectivamente. Para los sólidos que tienen la forma de Q en la Figura 17.56 se usan límites de sumas de la manera acostumbrada para obtener lo siguiente.

MOMENTOS DE INERCIA DE UN SÓLIDO

(17.25)

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)\,dV$$

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)\delta(x, y, z)\,dV$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)\delta(x, y, z)\,dV$$

EJEMPLO 6 Calcular el momento de inercia con respecto al eje de simetría del sólido cilíndrico descrito en el Ejemplo 4.

Solución El sólido está en la Figura 17.57 y $\delta(x, y, z) = kz$. Usando (17.25) y la simetría,

$$\begin{aligned} I_z &= 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h (x^2 + y^2)kz\,dz\,dy\,dx \\ &= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)\tfrac{1}{2}h^2\,dy\,dx \\ &= 2kh^2\int_0^a \left[x^2y + \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= 2kh^2\int_0^a \left[x^2\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3}\right] dx. \end{aligned}$$

La última integral puede evaluarse con una sustitución trigonométrica o usando una tabla de integrales. El resultado es $I_z = \frac{1}{4}k\pi h^2a^4$. •

EJEMPLO 7 Un sólido homogéneo tiene la forma de la región Q acotada por las gráficas de $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ y $y = 3$. Plantear una integral triple para calcular el momento de inercia con respecto al eje y.

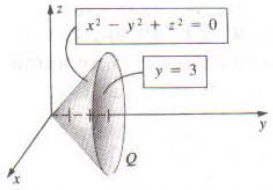
Solución La región es una parte del cono circular recto de la Figura 17.59. Nótese que la traza del cono en el plano xy es el par de rectas $x = \pm y$. Si denotamos la densidad constante por k, aplicando (17.25) obtenemos

$$I_y = \int_0^3 \int_{-y}^{y} \int_{-\sqrt{y^2-x^2}}^{\sqrt{y^2-x^2}} (x^2 + z^2)k\,dz\,dx\,dy.$$

También es posible calcular I_y multiplicando por 4 el momento de inercia de la parte del sólido que se encuentra en el primer octante. Así,

$$I_y = 4\int_0^3 \int_0^{y} \int_0^{\sqrt{y^2-x^2}} (x^2 + z^2)k\,dz\,dx\,dy$$ •

FIGURA 17.59

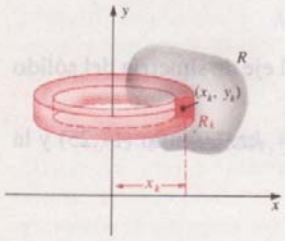


Para concluir esta sección se presenta el siguiente teorema sobre sólidos de revolución, que lleva el nombre del matemático Pappus de Alejandría (*circa* 300 D.C.).

TEOREMA DE PAPPUS (17.26)

Sea R una región del plano que se encuentra toda a un lado de una recta l en el mismo plano. El volumen generado cuando R gira una vez alrededor de l es el producto del área de R por la distancia recorrida por el centroide de R.

FIGURA 17.60



Demostración Podemos suponer que l es el eje y y R es una región en el primer cuadrante, como se muestra en la Figura 17.60. Sea $\{R_k\}$ una partición interna P de R y denotemos por ΔA_k al área de R_k. Para cada k, sea (x_k, y_k) el centro del rectángulo R_k.

Si R gira alrededor del eje y, entonces como se muestra en la Figura 17.60, R_k genera una envolvente cilíndrica de volumen $2\pi x_k \Delta A_k$. Entonces, el volumen V del sólido generado por R es

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k 2\pi x_k \, \Delta A_k = \iint_R 2\pi x \, dA.$$

Aplicando la Definición (17.22) al centroide, tomando $\delta(x, y) = 1$ y $m = A$, obtenemos

$$V = 2\pi \iint_R x \, dA = 2\pi M_y = 2\pi \bar{x} A.$$

Entonces, podemos calcular el volumen V multiplicando el área A de R por la distancia $2\pi\bar{x}$ que el centro de gravedad recorre cuando R da una vuelta alrededor del eje y. • •

FIGURA 17.61



EJEMPLO 8 Un círculo de radio a gira alrededor de una recta l en el plano del círculo, y que se encuentra a una distancia b de su centro, donde $b > a$ (véase la Figura 17.61). Calcular el volumen V del sólido resultante. (La superficie de este sólido en forma de rosca o argolla se llama *toroide* o *toro*.)

Solución El círculo tiene área πa^2 y la distancia recorrida por el centroide es $2\pi b$. Por lo tanto, según el Teorema de Pappus (17.26),

$$V = (2\pi b)(\pi a^2) = 2\pi^2 a^2 b. \quad \bullet$$

EJERCICIOS 17.7

Ejercicios 1-8: Calcule la masa y el centro de masa de la lámina que tiene la forma de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y la densidad indicada.

1. $y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$; $\delta(x, y) = x + y$
2. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $y = 0$; $\delta(x, y) = y^2$

3. $y = x^2$, $y = 4$; la densidad en el punto $P(x, y)$ es directamente proporcional a la distancia de P al eje y.

4. $y = x^3$, $y = 2x$; la densidad en el punto $P(x, y)$ es directamente proporcional a la distancia de P al eje x.

5. $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$; $\delta(x, y) = |xy|$

6. $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$; $\delta(x, y) = y$

7. $y = \sec x$, $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$, $y = 1/2$; $\delta(x, y) = 4$

8. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$; $\delta(x, y) = 1/x$

9. Determine I_x, I_y y I_O para la lámina del Ejercicio 1.

10. Determine I_x, I_y y I_O para la lámina del Ejercicio 2.

11. Determine I_x, I_y y I_O para la lámina del Ejercicio 3.

12. Determine I_x, I_y y I_O para la lámina del Ejercicio 4.

13. Una lámina homogénea tiene la forma de un cuadrado de lado a. Calcule el momento de inercia con respecto a (a) un lado; (b) una diagonal; (c) el centro de masa.

14. Una lámina homogénea tiene la forma de un triángulo equilátero de lado a. Calcule el momento de inercia con respecto a (a) una altura; (b) un lado; (c) un vértice.

15. Si un sólido de masa m tiene momento de inercia I con respecto a una recta, entonces su *radio de giro* es, por definición, el número positivo d tal que $I = md^2$. Esta fórmula implica que el radio de giro es la distancia de la recta en la que toda la masa puede concentrarse sin que el momento de inercia del sólido cambie. Calcule el radio de giro en (a) del Ejercicio 13.

16. Consulte el Ejercicio 15. Calcule el radio de giro en (a) del Ejercicio 14.

Ejercicios 17-18: Calcule el centro de masa de Q.

17. La densidad en un punto P de un cubo Q de lado a es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de P a una esquina fija del cubo.

18. Sea Q el tetraedro acotado por los planos coordenados y por el plano $2x + 5y + z = 10$. La densidad en el punto $P(x, y, z)$ es directamente proporcional a la distancia de P al plano xz.

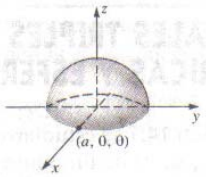
Ejercicios 19-20: Plantee, pero no evalúe, las integrales necesarias para calcular el centro de masa del sólido Q que tiene la forma descrita y la densidad indicada $\delta(x, y, z)$.

19. Q está acotado por el paraboloide $x = y^2 + 4z^2$ y por el plano $x = 4$; $\delta(x, y, z) = x^2 + z^2$.

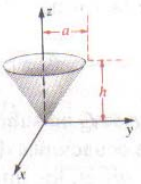
20. Q está acotado por el hiperboloide $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ y por el plano $y = 2$; $\delta(x, y, z) = x^2y^2z^2$.

Ejercicios 21-22: Plantee, pero no evalúe, las integrales necesarias para determinar el centroide de la región homogénea que se muestra en la figura.

21. (hemisferio)



22. (cono)



23. Sea Q el sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y las gráficas de $z = 9 - x^2$ y $2x + y = 6$. Plantee las integrales necesarias para determinar el centroide y luego úselas para calcular sus coordenadas.

24. Plantee, pero no evalúe las integrales necesarias para determinar el centroide del sólido acotado por las gráficas de $z = x^2$, $y = x^2$, $y = x^3$ y $z = 0$.

Ejercicios 25-28: Plantee la integral para calcular el momento de inercia con respecto al eje z del sólido indicado.

25. Una esfera de radio a con centro en el origen; $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

26. El sólido acotado por las gráficas de $x^2 + 9y^2 - z^2 = 0$ y $z = 36$; $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

27. El tetraedro homogéneo delimitado por los planos coordenados y por la gráfica de $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$, donde a, b y c son números reales positivos.

28. El sólido homogéneo acotado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ejercicios 29-30: Use el Teorema de Pappus para calcular el volumen generado al girar el cuadrilátero con vértices A, B, C, D, con respecto a (a) el eje y; (b) el eje x.

29. $A(1, 0)$; $B(3, 6)$; $C(11, 6)$; $D(9, 0)$

30. $A(2, 2)$; $B(1, 3)$; $C(4, 6)$; $D(5, 5)$

Ejercicios 31-34: Use el Teorema de Pappus en la solución.

31. Calcule el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por la gráfica de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y los ejes coordenados.

32. Determine el centroide del triángulo con vértices $O(0, 0)$, $A(0, a)$, $B(b, 0)$, donde a y b son números positivos.

33. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región del plano xy acotada por $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$ alrededor del eje x.

34. Calcule el volumen del cilindro circular recto de altura h y radio de la base a.

17.8 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

En la Sección 14.7 se estudiaron las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y las coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) de un punto en tres dimensiones (véanse las Figuras 14.75 y 14.80). Estas coordenadas se pueden usar para evaluar ciertas integrales. El caso más sencillo para las coordenadas cilíndricas se tiene cuando una función de r, θ y z es continua en una región de la forma

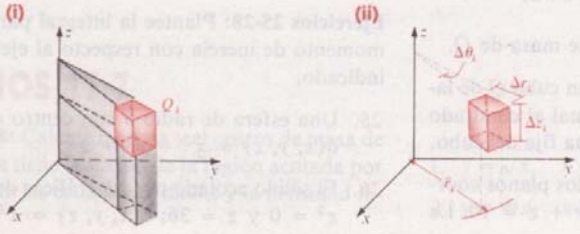
$$Q = \{(r, \theta, z): a \le r \le b,\ c \le \theta \le d,\ m \le z \le n\}.$$

Primero se subdivide Q en subregiones $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ con la misma forma de Q usando las gráficas de ecuaciones de la forma $r = a_k$, $\theta = c_k$ y $z = m_k$ para números arbitrarios a_k, c_k y m_k en los intervalos $[a, b]$, $[c, d]$ y $[m, n]$, respectivamente (véase la Figura 17.62(i)). Estas gráficas son cilindros circulares, planos que contienen al eje z y planos paralelos al plano xy, respectivamente (véase la Figura 14.76). En la Figura 17.62(ii) está una subregión Q_k típica con sus dimensiones, además del radio medio $\bar{r}_k$ de la base de Q_k. El volumen ΔV_k de Q_k es el producto del área de la base $\bar{r}_k \Delta r_k \Delta\theta_k$ y la altura Δz_k. Así,

$$\Delta V_k = \bar{r}_k \Delta r_k \Delta\theta_k \Delta z_k.$$

FIGURA 17.62

(i) (ii)



Si (r_k, θ_k, z_k) es un punto arbitrario en Q_k, entonces la integral triple de f sobre Q es

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(r_k, \theta_k, z_k)\, \Delta V_k.$$

La norma $\|P\|$ es la longitud de la mayor de las diagonales de Q_k. Se puede demostrar que

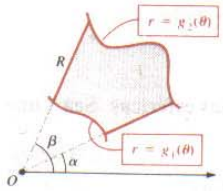
$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(r, \theta, z) r\, dr\, d\theta\, dz.$$

Hay otros cinco órdenes de integración diferentes para esta integral.

Las integrales triples en coordenadas cilíndricas se pueden definir sobre regiones más complicadas usando particiones internas. Si R es una región polar como las que se usaron en la Sección 17.4 y

$$Q = \{(r, \theta, z): (r, \theta) \text{ está en } R \text{ y } k_1(r, \theta) \leq z \leq k_2(r, \theta)\}$$

FIGURA 17.63



donde k_1 y k_2 son funciones con primeras derivadas parciales continuas en toda la R, entonces se puede demostrar que

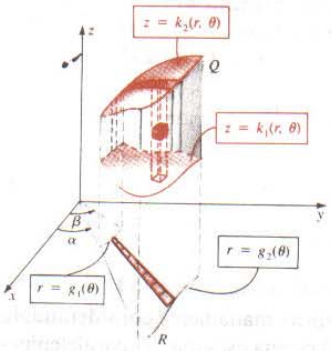
$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, dz \right] dA.$$

En particular, sea R una región del tipo ilustrado en la Figura 17.63. Entonces la integral triple de f sobre Q puede evaluarse como sigue.

TEOREMA DE EVALUACIÓN (COORDENADAS CILÍNDRICAS) (17.27)

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r, \theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta.$$

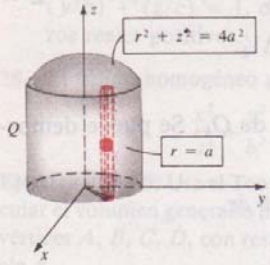
FIGURA 17.64



La integral iterativa en (17.27) se puede interpretar como un límite de sumas triples en el que la primera suma se realiza a lo largo de una columna de subregiones Q_k, desde la superficie inferior (con ecuación $z = k_1(r, \theta)$) hasta la superficie superior (con ecuación $z = k_2(r, \theta)$) (véase la Figura 17.64). La segunda suma se realiza sobre una fila de estas columnas con θ fijo y r variable. Hasta este momento se ha sumado sobre una tajada de Q, como se ilustra en la Figura 17.64. Finalmente, se describe o barre Q haciendo que θ varíe de α a β.

EJEMPLO 1 Un sólido tiene la forma de la región Q que se encuentra dentro del cilindro $r = a$ y de la esfera $r^2 + z^2 = 4a^2$, y por arriba del plano xy. Calcular el centro de masa y el momento de inercia I_z suponiendo que la densidad

FIGURA 17.65



en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P al plano xy.

Solución La región Q está en la Figura 17.65 junto con una columna correspondiente a la primera suma en la dirección del eje z. Como la densidad en el punto $P(r, \theta, z)$ está dada por kz para una constante k, la masa m se puede calcular aplicando (17.27) con $f(r, \theta, z) = kz$:

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} (kz)r\,dz\,dr\,d\theta = \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a} z^2 r\Big]_0^{\sqrt{4a^2-r^2}}\,dr\,d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(4a^2r - r^3)\,dr\,d\theta = \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi} 2a^2r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\Big]_0^{a}\,d\theta$$
$$= \tfrac{7}{8}a^4k\int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{7}{4}a^4\pi k$$

Para calcular I_z usamos (17.25) y coordenadas cilíndricas, obteniendo

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2(kz)r\,dz\,dr\,d\theta = \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^3z^2\Big]_0^{\sqrt{4a^2-r^2}}\,dr\,d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(4a^2r^3 - r^5)\,dr\,d\theta = \tfrac{5}{6}a^6\pi k$$

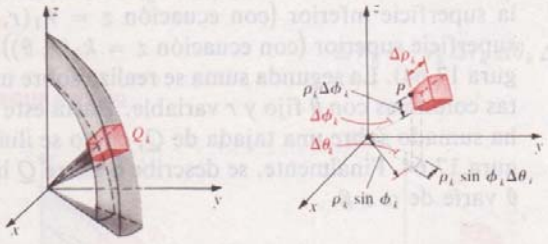
También pueden considerarse integrales triples en coordenadas esféricas. Sea f una función continua de ρ, ϕ y θ en una región de la forma

$$Q = \{(\rho, \phi, \theta): a \le \rho \le b, c \le \phi \le d, m \le \theta \le n\}.$$

Sean $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ las subregiones de Q con su misma forma que se obtienen dividiendo Q mediante gráficas de ecuaciones de la forma $\rho = a_k$, $\phi = c_k$ y $\theta = m_k$ (véase la Figura 17.66(i)). Estas gráficas son esferas, conos con su eje a lo largo del eje z y planos que contienen al eje z, respectivamente (véase la Figura 14.81). En la Figura 17.66(ii) está una subregión típica Q_k correspondiente a los incrementos $\Delta\rho_k$, $\Delta\phi_k$ y $\Delta\theta_k$.

FIGURA 17.66

(i) (ii)



El volumen de la subregión Q_k puede calcularse aproximadamente considerándola como un paralelepípedo rectangular. Si $P(\rho_k, \phi_k, \theta_k)$ es una esquina del paralelepípedo, entonces como se ilustra en la Figura 17.66(ii), las dimensiones del paralelepípedo

son aproximadamente $\Delta\rho_k$, $\rho_k\,\Delta\phi_k$ y $\rho_k \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\theta_k$. Por lo tanto, si ΔV_k es el volumen de Q_k, entonces

$$\Delta V_k \approx \rho_k^2 \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\rho_k\,\Delta\phi_k\,\Delta\theta_k.$$

La integral triple de f sobre Q se puede definir como el límite de las sumas de Riemann $\sum_k f(\rho_k, \phi_k, \theta_k)\,\Delta V_k$. Puede demostrarse el siguiente teorema.

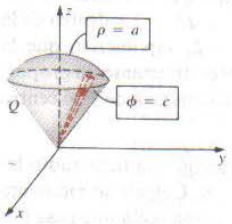
TEOREMA DE EVALUACIÓN (COORDENADAS ESFÉRICAS) (17.28)

$$\iiint_Q f(\rho,\phi,\theta)\,dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(\rho,\phi,\theta)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

Hay otros cinco órdenes de integración posibles para esta integral.

Las coordenadas esféricas también pueden usarse en regiones más complicadas utilizando particiones internas. En este caso los límites de integración en la integral iterativa deben escogerse de manera adecuada.

FIGURA 17.67



EJEMPLO 2 Calcular el volumen y el centroide de la región Q acotada arriba por la esfera $\rho = a$, y abajo por el cono $\phi = c$, donde $0 < c < \pi/2$.

Solución La región Q está en la Figura 17.67. El volumen V es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^c\int_0^a \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^c \tfrac{1}{3}a^3 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = \tfrac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}\Big[-\cos\phi\Big]_0^c d\theta \\ &= \tfrac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos c)\,d\theta = \tfrac{2}{3}\pi a^3(1-\cos c). \end{aligned}$$

Por simetría, el centroide está en el eje z. Si (x, y, z) son las coordenadas rectangulares de un punto, entonces por el Teorema (14.50), $z = \rho\cos\phi$. Usando (17.24) con $\delta(x, y, z) = 1$,

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_Q z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^c\int_0^a (\rho\cos\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^c \tfrac{1}{4}a^4 \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi\,d\theta = \tfrac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi\Big]_0^c d\theta \\ &= \tfrac{1}{8}a^4\operatorname{sen}^2 c\int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{1}{4}\pi a^4\operatorname{sen}^2 c. \end{aligned}$$

Las coordenadas rectangulares del centroide son $(0, 0, \bar{z})$, donde

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3}{8}a(1+\cos c). \quad \bullet$$

EJERCICIOS 17.8

Ejercicios 1-10: Use coordenadas cilíndricas.

1. Calcule el volumen y el centroide del sólido acotado por las gráficas de $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ y $z = 0$.
2. Calcule el volumen y localice el centroide del sólido acotado por las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$ y $z = 0$.
3. Calcule el momento de inercia de un cilindro circular recto de altura h y radio de la base a, con respecto a (a) el eje del cilindro; (b) un diámetro de la base.
4. Un sólido homogéneo está acotado por las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = x^2 + y^2$. Calcule (a) el centro de masa; (b) el momento de inercia con respecto al eje z.
5. La densidad en un punto P de una esfera sólida de radio a es directamente proporcional a la distancia de P a una recta fija l que pasa por el centro del sólido. Calcule la masa del cuerpo.
6. Calcule la masa del cono sólido acotado por las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 4$ suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P al eje z.
7. Calcule el momento de inercia con respecto a l del sólido descrito en el Ejercicio 5.
8. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del sólido descrito en el Ejercicio 6.
9. Sea

 $$Q = \{(x, y, z): 1 \le z \le 5 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \ge 1\}.$$

 La densidad en el punto $P(x, y, z)$ es directamente proporcional a la distancia de P al plano xy. Calcule la masa y el centro de masa de Q.
10. Calcule la masa y el centro de masa del sólido que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ y de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, suponiendo que la densidad en el punto $P(x, y, z)$ es directamente proporcional a la distancia de P al plano xy.

Ejercicios 11-18: Use coordenadas esféricas.

11. Calcule la masa y el centro de masa de una media esfera sólida de radio a suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P al centro de la base.
12. Calcule el volumen y el centroide del sólido acotado por las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$ y $z = 0$ (véase el Ejercicio 2).
13. Calcule el momento de inercia del hemisferio del Ejercicio 11 con respecto a su eje.
14. Calcule el momento de inercia de una media esfera sólida homogénea de radio a con respecto a un diámetro de la base.
15. Calcule el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.
16. Calcule el volumen del sólido que se halla fuera del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
17. Calcule la masa del sólido que se encuentra fuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y dentro de la esfera $z^2 + y^2 + z^2 = 2$, suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de P al centro de las esferas.
18. Una cáscara esférica homogénea tiene radio interior a y radio exterior b. Calcule su momento de inercia con respecto a una recta que pasa por el centro.

Ejercicios 19-20: Evalúe la integral cambiando a coordenadas cilíndricas.

19. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \, dx \, dy$
20. $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$

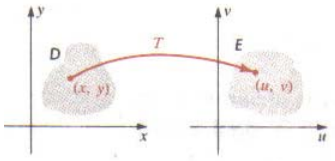
Ejercicios 21-22: Evalúe la integral cambiando a coordenadas esféricas.

21. $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx$
22. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dx \, dy$

17.9 CAMBIO DE VARIABLES EN LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

En la Sección 17.4 se estudió cómo cambiar una integral doble en coordenadas rectangulares a una integral doble en coordenadas polares. En la sección anterior se consideraron integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas. A continuación se presenta un método más general para cambiar las variables en las integrales múltiples. Este método esta íntimamente relacionado con las *transformaciones* (o *correspondencias*) de un sistema de coordenadas rectangulares a otro.

FIGURA 17.68



Comenzamos considerando una función T cuyo dominio D es una región en el plano xy y su contradominio E es una región en el plano uv. Como se ilustra en la Figura 17.68, a cada punto (x, y) en D le corresponde un único punto (u, v) en E tal que $T(x, y) = (u, v)$; T es una **transformación de coordenadas** del plano xy al plano uv. Como cada par (u, v) está determinado de manera única por (x, y), entonces u y v son funciones de x y y. Se tienen así las siguientes fórmulas para la transformación T:

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y); \qquad (x, y) \text{ en } D, \quad (u, v) \text{ en } E \tag{17.29}$$

donde f y g son funciones que tienen el mismo dominio D que T.

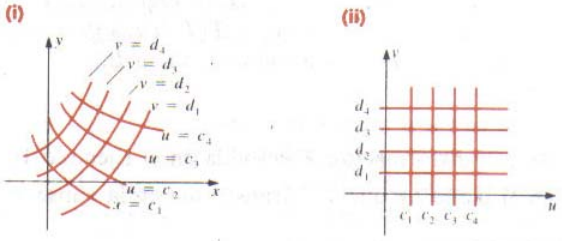
Dada la transformación de coordenadas (17.29), se divide la región del plano uv mediante rectas verticales $u = c_1$, $u = c_2$, $u = c_3$, ... y rectas horizontales $v = d_1$, $v = d_2$, $v = d_3$, ... Las curvas de nivel correspondientes de f y g, es decir,

$$u = f(x, y) = c_j, \qquad v = g(x, y) = d_k$$

para $j = 1, 2, 3, \ldots$ y $k = 1, 2, 3, \ldots$, determinan una *partición curvilínea* de una región en el plano xy. La Figura 17.69 muestra cuatro curvas de nivel de cada tipo correspondientes a cierta transformación T.

Las curvas $u = f(x, y) = c_j$ y $v = g(x, y) = d_k$ en el plano xy se denominan **curvas u** y **curvas v**, respectivamente. Por supuesto, el tipo de curvas que se obtiene depende de la naturaleza de las funciones f y g. El siguiente ejemplo ilustra un caso en el que las curvas u y las curvas v son rectas.

FIGURA 17.69



EJEMPLO 1 Sea T la transformación de coordenadas definida por

$$u = x + 2y, \qquad v = x - 2y.$$

Trazar en el plano uv las rectas verticales $u = 2$, $u = 4$, $u = 6$, $u = 8$ y las rectas horizontales $v = -1$, $v = 1$, $v = 3$, $v = 5$. Trazar las curvas u y las curvas v correspondientes en el plano xy.

Solución Las rectas verticales y horizontales en el plano uv están en la Figura 17.70(i).

Las curvas u en el plano xy son las rectas

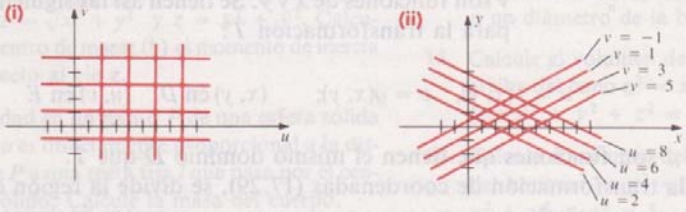
$$x + 2y = 2,\ x + 2y = 4,\ x + 2y = 6,\ x + 2y = 8$$

y las curvas v son las rectas

$$x - 2y = -1,\ x - 2y = 1,\ x - 2y = 3,\ x - 2y = 5$$

que se ilustran en la Figura 17.70(ii). •

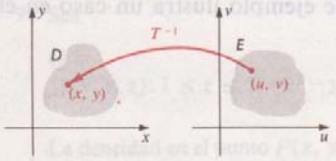
FIGURA 17.70



La transformación T en el Ejemplo 1 es biunívoca o uno a uno: si $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ en el plano xy, entonces $T(x_1, y_1) \neq T(x_2, y_2)$ en el plano uv. En general, si T es una transformación uno a uno de coordenadas, entonces invirtiendo la correspondencia se obtiene una transformación T^{-1} del plano uv al plano xy llamada **inversa** de T. Se puede especificar T^{-1} mediante ecuaciones de la forma

$$x = F(u, v),\ y = G(u, v)$$

FIGURA 17.71



para ciertas funciones F y G. Si se ilustra una transformación biunívoca T mediante una flecha, como en la Figura 17.68, entonces la inversa T^{-1} se puede ilustrar *invirtiendo* la citada flecha, como en la Figura 17.71. Obsérvese que $T^{-1}(T(x, y)) = (x, y)$ y $T(T^{-1}(u, v)) = (u, v)$ para todo (x, y) en D y para todo (u, v) en E.

EJEMPLO 2

(a) Hallar la inversa de la transformación T definida en el Ejemplo 1.

(b) Obtener la curva en el plano uv que T^{-1} transforma en la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

Solución

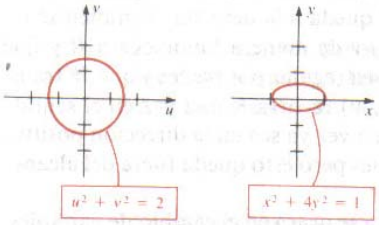
(a) La transformación T está dada por

$$u = x + 2y,\ v = x - 2y.$$

Sumando los lados de estas ecuaciones obtenemos $u + v = 2x$. Restando los lados correspondientes obtenemos $u - v = 4y$. Por lo tanto, T^{-1} está dada por

$$x = \tfrac{1}{2}(u + v), \quad y = \tfrac{1}{4}(u - v).$$

FIGURA 17.72



(b) Como x y y están relacionadas mediante las dos ecuaciones anteriores en la parte (a), los puntos (u, v) correspondientes a $x^2 + 4y^2 = 1$ deben satisfacer la ecuación

$$[\tfrac{1}{2}(u + v)]^2 + 4[\tfrac{1}{4}(u - v)]^2 = 1.$$

Esto se simplifica a

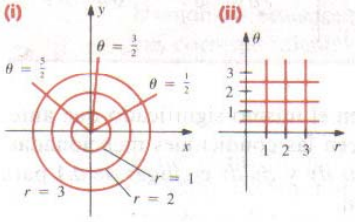
$$u^2 + v^2 = 2.$$

Resulta que la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ con centro en el origen del plano uv se transforma bajo T^{-1} en la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ (véase la Figura 17.72). •

EJEMPLO 3 Sea $P(x, y)$ un punto con $x \neq 0$ en el plano xy y sea

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x},$$

FIGURA 17.73



y sea $P(0, b)$ el punto correspondiente a $r = b, \theta = \pi/2$. Entonces, r y θ son coordenadas polares de P y las ecuaciones anteriores definen una transformación de coordenadas T del plano xy al plano $r\theta$. Representar en el plano $r\theta$ las gráficas de $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ y $\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{3}{2}$, $\theta = \frac{5}{2}$. Trazar las curvas r y curvas θ correspondientes en el plano xy.

Solución Las gráficas están en la Figura 17.73. •

En la Sección 5.5 se discutió cómo cambiar variables en una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Bajo ciertas condiciones, si se sustituye $x = g(u)$, entonces $dx = g'(u)\,du$ y

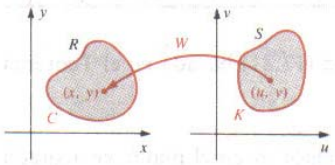
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

donde $a = g(c)$ y $b = g(d)$ (véase (5.34)). A continuación se obtiene una fórmula para cambiar variables en las integrales dobles.

Consideremos $\iint_R F(x, y)\,dA$ en una región R del plano xy y una sustitución

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v)$$

FIGURA 17.74



donde f y g tienen segundas derivadas parciales continuas. Estas ecuaciones definen una transformación de coordenadas W del plano uv al plano xy. Después de sustituir x y y, el integrando se convierte en una función de u y v. Se debe encontrar una región S en el plano uv que se transforme en R bajo W, como se ilustra en la Figura 17.74, tal que

$$\iint_R F(x, y)\,dA = \iint_S F(f(u, v), g(u, v))\,dA.$$

Para que exista una región S apropiada, hay que poner restricciones a la región R y al integrando $F(x, y)$. Se supone que R consta de todos los puntos que están dentro o sobre una curva cerrada simple C que es regular por partes, y que F tiene primeras derivadas parciales en toda una región abierta que contiene a R. El **sentido (o dirección) positivo a lo largo de C** es tal que cuando el punto P recorre C, la región R queda siempre a la izquierda. Con el **sentido negativo**, R queda a la derecha. También se requiere que W transforme una región S del plano uv de manera biunívoca a R y que S esté acotada por una curva cerrada simple K que sea regular por partes y que W transforma en C. El último requisito es que cuando (u, v) recorra K una vez en el sentido positivo, el punto correspondiente (x, y) trace C una vez ya sea en la dirección positiva o en la negativa. Se pueden suavizar estas condiciones pero esto queda fuera del alcance de este libro.

La función de u y v que se define a continuación se usará en el cambio de variables. Lleva el nombre del matemático alemán C. G. Jacobi (1804-1851).

DEFINICIÓN (17.30)

Sean $x = f(u, v)$ y $y = g(u, v)$. El **jacobiano** de x y y con respecto a u y v se denota por $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ y se define por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

En el siguiente teorema todos los símbolos tienen el mismo significado que antes y se supone que las regiones y las funciones satisfacen las condiciones mencionadas. En el enunciado del teorema se usan las notaciones $dx\,dy$ y $du\,dv$ en lugar de dA para evitar confusiones acerca de la región de integración.

TEOREMA (17.31)

Si $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ es una transformación de coordenadas, entonces

$$\iint_R F(x, y)\,dx\,dy = \pm \iint_S F(f(u, v), g(u, v))\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Se escoge el signo + o el signo − dependiendo de que, si cuando (u, v) recorre la frontera K de S una vez en el sentido positivo, el punto correspondiente (x, y) traza la frontera C de R una vez en la dirección positiva o en la dirección negativa, respectivamente.

En el Apéndice II se da una demostración del Teorema (17.31) basada en el Teorema de Green (18.19).

EJEMPLO 4 Evaluar $\iint_R e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy$ para la región R en el plano xy acotada por el trapecio con vértices (0, 1), (0, 2), (2, 0) y (1, 0).

Solución El hecho de que $y - x$ y $y + x$ aparezcan en el integrando sugiere la siguiente sustitución:

$$u = y - x, \quad v = y + x.$$

Estas ecuaciones definen una transformación T del plano xy al plano uv. Para aplicar el Teorema (17.31) debemos usar la transformación inversa T^{-1}. Para encontrar T^{-1} despejamos x y y en términos de u y v de las ecuaciones anteriores y obtenemos

$$x = \tfrac{1}{2}(v - u), \quad y = \tfrac{1}{2}(v + u).$$

Según (17.30) el jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{2}.$$

La región R está en la Figura 17.75(i). Para determinar la región S en el plano uv que se transforma en R, observamos que los lados de R están sobre las rectas

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1, \quad x + y = 2.$$

Usando las ecuaciones de las transformaciones T y T^{-1} vemos que las curvas respectivas correspondientes en el plano uv son

$$v = u, \quad v = -u, \quad v = 1, \quad v = 2.$$

Estas rectas forman la frontera de la región trapecial S que se muestra en la Figura 17.75(ii). Podemos demostrar que los puntos interiores de S corresponden a puntos interiores de R y que cuando (u, v) recorre la frontera de S una vez en el sentido *positivo* (contrario al del reloj), el punto correspondiente (x, y) traza la frontera de R una vez en el sentido *negativo* (o sea, el del reloj). Aplicando el Teorema (17.31),

$$\begin{aligned} \iint_R e^{(y-x)/(y+x)}\, dx\, dy &= -\int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v}(-\tfrac{1}{2})\, du\, dv \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left[ve^{u/v}\right]_{-v}^{v} dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 v(e - e^{-1})\, dv \\ &= \tfrac{1}{2}(e - e^{-1})\left[\tfrac{1}{2}v^2\right]_1^2 = \tfrac{3}{4}(e - e^{-1}) \end{aligned}$$

FIGURA 17.75

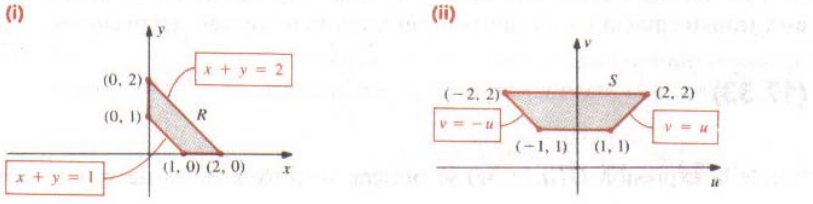
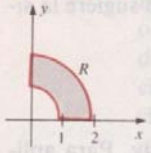


FIGURA 17.76



EJEMPLO 5 Evaluar $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ para la región R en el primer cuadrante del plano xy que se encuentra entre los arcos de circunferencia que se muestran en la Figura 17.76.

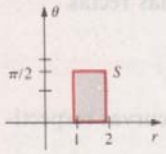
Solución Esta integral se puede evaluar cambiando a coordenadas polares como se hizo en la Sección 17.4, pero nuestro objetivo es mostrar cómo se usa el Teorema (17.31). La sustitución polar

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

determina una transformación del plano $r\theta$ al plano xy cuyo jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

FIGURA 17.77



Podemos verificar que la región rectangular S del plano $r\theta$ acotada por $r = 1$, $r = 2$, $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ (véase la Figura 17.77) corresponde a R bajo esta transformación. Además, cuando (r, θ) recorre la frontera de S una vez en el sentido (o dirección) positivo, el punto correspondiente (x, y) recorre R una vez en la dirección positiva. Entonces según el Teorema (17.31),

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} -\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_1^2\,d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2}(e^{-4} - e^{-1})\int_0^{\pi/2} d\theta = -\tfrac{1}{4}\pi(e^4 - e^{-1}) \approx 0.275 \quad \bullet$$

El Teorema (17.31) puede generalizarse a integrales triples. Dada una transformación

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)$$

de un sistema de coordenadas uvw a un sistema de coordenadas xyz, se define el **jacobiano** $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ de la transformación como

(17.32)

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Si R y S son regiones en los sistemas xyz y uvw que se transforman una en la otra bajo esta transformación y su inversa, entonces bajo ciertas restricciones,

(17.33)

$$\iiint_R F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \pm\iiint_S G(u, v, w)\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\,du\,dv\,dw$$

donde la expresión $G(u, v, w)$ se obtiene sustituyendo las de x, y y z en $F(x, y, z)$.

Por ejemplo, usando las fórmulas de las coordenadas esféricas (14.50), entonces

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho \cos\phi.$$

Se puede demostrar (véase el Ejercicio 27) que

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi.$$

Por lo tanto (17.33) toma la forma

$$\iiint_R F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \pm \iiint_S G(\rho, \theta, \phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Esto concuerda con la fórmula (17.28) que se obtuvo intuitivamente.

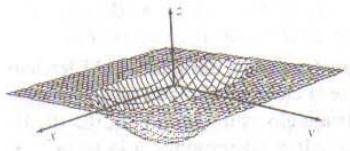
Esta sección termina con un problema aplicado que requiere un cambio de variable en una integral doble.

EJEMPLO 6 El fondo de muchos lagos tiene la forma de una *senoide* (o *sinusoide*) *elíptica*. Supongamos que la frontera de un lago es la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ y sea h_M la profundidad máxima del agua. Entonces puede suponerse que el fondo del lago tiene la forma de la gráfica de la senoide elíptica dada por

$$f(x, y) = -h_M \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right)$$

para $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) \leq 1$ (véase la Figura 17.78). Calcular el volumen V y la profundidad media h_{med} del agua del lago.

FIGURA 17.78



Solución Si R es la región elíptica correspondiente a la superficie del lago (véase la Figura 17.79(i)), entonces

$$V = \iint_R |f(x, y)|\, dA = h_M \iint_R \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) dA.$$

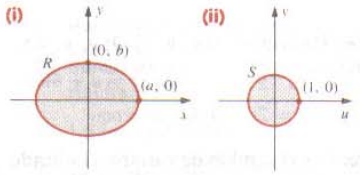
La forma del integrando sugiere hacer la sustitución

$$x = au, \quad y = bv.$$

En este caso el jacobiano es $\partial(x, y)/\partial(u, v) = ab$ y la región S correspondiente a R es el círculo $u^2 + v^2 \leq 1$ (véase la Figura 17.79(ii)). Aplicando el Teorema (17.31),

$$V = abh_M \iint_S \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{u^2 + v^2}\right) du\, dv.$$

FIGURA 17.79



Podemos evaluar esta integral usando la sustitución por coordenadas polares $u = r\cos\theta$, $v = r\operatorname{sen}\theta$. Esto da

$$V = abh_M \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} r\right) r\, dr\, d\theta.$$

Integrando por partes o usando la Fórmula 83 de la Tabla de Integrales,

$$V = abh_M \int_0^{2\pi} \left[\frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} r\right) + \frac{2}{\pi} r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} r\right) \right]_0^1 d\theta$$

$$= abh_M \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) d\theta$$

$$= abh_M \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) 2\pi \approx 1.4535 abh_M.$$

Esta fórmula puede usarse para estimar el volumen del agua de un lago a partir de las tres medidas a, b y h_M.

Podemos demostrar que el área de la región elíptica R es πab. Aplicando una definición para integrales análoga a la Definición (5.21), obtenemos la profundidad media:

$$h_{med} = \frac{1}{\pi ab} \iint_R |f(x, y)|\, dA.$$

y por lo tanto $$h_{med} \approx \frac{1}{\pi ab} (1.4535) abh_M \approx 0.4627 h_M.$$

Un estudio de 107 lagos en todo el mundo dio un valor medio para h_{med}/h_M de 0.467.

EJERCICIOS 17.9

Ejercicios 1-8: Sea T la transformación del plano xy al plano uv definida por las ecuaciones dadas.
(a) Describa las curvas u y las curvas v.
(b) Suponiendo que T es uno a uno, encuentre ecuaciones $x = F(u, v)$, $y = G(u, v)$ que determinen T^{-1}.

1. $u = 3x, \quad v = 5y$
2. $u = e^x, \quad v = e^y$
3. $u = x - y, \quad v = 3y + 2x$
4. $u = 5x - 4y, \quad v = 2x + 3y$
5. $u = 2x + y, \quad v = xy$
6. $u = x^3, \quad v = x + y$
7. $u = x^2 + 4y^2, \quad v = 4x^2 - y^2$
8. $u = x + y, \quad v = x^2 - y$

9. Sea T la transformación definida en el Ejercicio 1. Encuentre la curva en el plano uv que corresponde al rectángulo con vértices (0, 0), (0, 1), (2, 1) y (2, 0) bajo T. ¿Qué curva corresponde a la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$?

10. Sea T la transformación definida en el Ejercicio 3. Encuentre la curva en el plano uv que corresponde al triángulo con vértices (0, 0), (0, 1), (2, 0). ¿Qué curva corresponde a la recta $x + 2y = 1$?

Ejercicios 11-14: Lleve a cabo la determinación del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

11. $x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$
12. $x = e^u \operatorname{sen} v, \quad y = e^u \cos v$
13. $x = ve^{-2u}, \quad y = u^2 e^{-v}$
14. $x = u/(u^2 + v^2), \quad y = v/(u^2 + v^2)$

Ejercicios 15-16: Determine $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$.

15. $x = 2u + 3v - w, \quad y = v - 5w, \quad z = u + 4w$
16. $x = u^2 + vw, \quad y = 2v + u^2 w, \quad z = uvw$

Ejercicios 17-20: Use el cambio de variables indicado para expresar la integral como una integral doble sobre una región S en el plano uv. (No evalúe la integral.)

17. $\iint_R (y - x)\,dx\,dy$; R es la región acotada por $y = 2x$, $y = 0$, $x = 2$; $x = u + v$, $y = 2v$.

18. $\iint_R (3x - 4y)\,dx\,dy$; R es la región acotada por $y = 3x$, $2y = x$, $x = 4$; $x = u - 2v$, $y = 3u - v$.

19. $\iint_R (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2)\,dx\,dy$; $R = \{(x, y): \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 \leq 1\}$; $x = 2u$, $y = 3v$

20. $\iint_R xy\,dx\,dy$; R es la región acotada por $y = 2\sqrt{2 - x}$, $x = 0$, $y = 0$; $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

Ejercicios 21-26: Evalúe la integral haciendo el cambio de variables indicado.

21. $\iint_R (x - y)^2 \cos^2(x + y)\,dx\,dy$; R es la región acotada por el cuadrado con vértices (0, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 0); $u = x - y$, $v = x + y$.

22. $\iint_R \operatorname{sen}[(y - x)/(y + x)]\,dx\,dy$; R es el trapecio con vértices (1, 1), (2, 2), (4, 0), (2, 0); $u = y - x$, $v = y + x$.

23. $\iint_R (x^2 + 2y^2)\,dx\,dy$; R es la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$; $x = u/v$, $y = v$.

24. $\iint_R (4 - 4y + 1)^{-2}\,dx\,dy$; R es la región acotada por $x = \sqrt{-y}$, $x = y$, $x = 1$; $x = u + v$, $y = v - u^2$.

25. $\iint_R (2y + x)/(y - 2x)\,dx\,dy$; R es el trapecio con vértices (−1, 0), (−2, 0), (0, 4), (0, 2); $u = y - 2x$, $v = 2y + x$.

26. $\iint_R (\sqrt{x - 2y} + \frac{1}{4}y^2)\,dx\,dy$; R es el triángulo con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 2); $u = \frac{1}{2}y$, $v = x - 2y$.

27. Verifique que para la transformación a coordenadas esféricas,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi.$$

28. Usando el Teorema (17.33) deduzca una fórmula para

$$\iiint_R F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

correspondiente a una transformación de coordenadas rectangulares a cilíndricas.

29. Demuestre que si la transformación de coordenadas $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ es uno a uno, entonces

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1.$$

(*Sugerencia:* Use la siguiente propiedad de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{vmatrix}.\Big)$$

30. Dadas las transformaciones $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ y $u = h(r, s)$, $v = k(r, s)$, demuestre que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}.$$

(*Indicación:* Use la sugerencia del Ejercicio 29.)

17.10 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Particiones internas en dos y tres dimensiones.
2. Sumas de Riemann para funciones de varias variables.
3. La integral doble.
4. Integrales dobles iterativas.
5. Evaluación de integrales dobles.
6. Determinación de áreas y volúmenes usando integrales dobles.
7. Integrales dobles en coordenadas polares.
8. El área de una superficie.
9. La integral triple.
10. Integrales triples iterativas.

11. Evaluación de integrales triples.
12. Densidad.
13. Masa de un sólido.
14. Centro de masa de una lámina y de un sólido.
15. Momentos de inercia de una lámina y de un sólido.
16. Teorema de Pappus.
17. Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas.
18. Cambio de variables de integrales múltiples.

EJERCICIOS 17.10

Ejercicios 1-6: Evalúe la integral.

1. $\int_{-1}^{0}\int_{x+1}^{x^3}(x^2-2y)\,dy\,dx$
2. $\int_{1}^{2}\int_{1}^{\ln y}\frac{1}{y}\,dx\,dy$
3. $\int_{0}^{3}\int_{r}^{r^2+1} r\,d\theta\,dr$
4. $\int_{2}^{0}\int_{0}^{z^2}\int_{x}^{z}(x+z)\,dy\,dx\,dz$
5. $\int_{0}^{2}\int_{\sqrt{y}}^{1}\int_{z^2}^{y} xy^2z^3\,dx\,dz\,dy$
6. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{a\cos\phi}\rho^2\,\text{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

Ejercicios 7-10: Exprese $\iint_R f(x, y)\,dA$ como una integral iterativa donde R es la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

7. $x^2 - y^2 = 4, \quad x = 4$
8. $x^2 - y^2 = 4, \quad y = 4, \quad y = 0$
9. $y^2 = 4 + x, \quad y^2 = 4 - x$
10. $y = -x^2 + 4, \quad y = 3x^2$

Ejercicios 11-12: La integral representa el área de una región R en el plano xy. Describa R.

11. $\int_{-1}^{1}\int_{e^y}^{e^3} dx\,dy$
12. $\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-x^2} dy\,dx$

Ejercicios 13-14: Invierta el orden de integración y evalúe la integral resultante.

13. $\int_{0}^{3}\int_{y^2}^{9} ye^{-x^2}\,dx\,dy$
14. $\int_{0}^{1}\int_{x}^{\sqrt{x}} e^{x/y}\,dy\,dx$
15. Calcule el área de la región acotada por el eje polar y las gráficas de $r = e^{\theta}$ y $r = 2$ entre $\theta = 0$ y $\theta = \ln 2$.
16. Use coordenadas polares para evaluar
$$\int_{-a}^{0}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{0}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx.$$
17. Calcule el volumen del sólido que se encuentra bajo la gráfica de $z = xy^2$ y sobre el rectángulo en el plano xy con vértices (1, 1, 0), (2, 1, 0), (1, 3, 0) y (2, 3, 0).
18. Exprese $\iiint_Q f(x, y, z)\,dV$ de seis maneras diferentes como una integral iterativa, donde Q es la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 4z^2$ y $y = 4$.

Ejercicios 19-20: Calcule la masa y el centro de masa de la lámina que tiene la forma de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y tiene la densidad indicada.

19. $y = x, y = 2x, x = 3$; la densidad en el punto $P(x, y)$ es directamente proporcional a la distancia de P al eje y.
20. $y^2 = x, x = 4$; la densidad en el punto $P(x, y)$ es directamente proporcional a la distancia de P a la recta con ecuación $x = -1$.
21. Una lámina tiene la forma de la región que se encuentra dentro de la gráfica de $r = 2 + \text{sen}\,\theta$ y fuera de la gráfica de $r = 1$. La densidad en el punto $P(r, \theta)$ es inversamente proporcional a la distancia de P al polo. Calcule la masa.
22. Una lámina está delimitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$, y su densidad en el punto $P(x, y)$ es directamente proporcional a la distancia de P al eje y. Calcule I_x, I_y y I_O.

23. Una lámina tiene la forma de un triángulo rectángulo con lados de longitudes a, b y $\sqrt{a^2 + b^2}$. Su densidad es directamente proporcional a la distancia al cateto de longitud a. Calcule el momento de inercia con respecto a la recta que contiene al cateto de longitud a.

24. Una lámina tiene la forma de la región comprendida entre dos circunferencias concéntricas de radios a y b con $a < b$. Su densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P al centro. Use coordenadas polares para calcular el momento de inercia con respecto a una recta que pasa por el centro.

25. Aplique integrales triples para calcular el volumen y el centroide del sólido acotado por las gráficas de $z = x^2$, $z = 4$, $y = 0$ y $y + z = 4$.

26. Un sólido está acotado por las gráficas de $z = 9x^2 + y^2$ y $z = 9$. Su densidad en el punto $P(x, y, z)$ es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de P al punto $(0, 0, -1)$. Plantee una integral triple para el momento de inercia con respecto al eje z.

27. Un sólido está delimitado por las gráficas de $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ y $y = 4$. Su densidad en el punto $P(x, y, z)$, es directamente proporcional a la distancia de P al eje y. Plantee una integral triple para el momento de inercia con respecto al eje y.

28. Un sólido homogéneo está acotado por la gráfica de $z = 9 - x^2 - y^2$, el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, y el plano xy. Use coordenadas cilíndricas para determinar (a) la masa; (b) el centro de masa; (c) el momento de inercia con respecto al eje z.

29. Un sólido tiene la forma de una esfera de radio a. Su densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P al centro. Use coordenadas esféricas para calcular la masa.

30. Calcule el área de la superficie de la parte del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4x$.

31. Sea T la transformación del plano xy al plano uv dada por $u = 2x + 5y$, $v = 3x - 4y$. Encuentre:
 (a) las curvas u. (b) las curvas v
 (c) T^{-1}. (d) $\partial(x, y)/\partial(u, v)$
 (e) la imagen de la recta $ax + by + c = 0$.
 (f) la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

32. Evalúe la integral $\int_0^1 \int_y^{2-y} e^{(x-y)/(x+y)}\, dx\, dy$ mediante el cambio de variables $u = x - y$, $v = x + y$.

CAPÍTULO **18**

CÁLCULO VECTORIAL

En este capítulo se presentan primero los ***campos vectoriales*** *y se define la* ***integral de línea****. Luego se consideran los teoremas de evaluación y se determinan condiciones para la independencia de la trayectoria. Después se demuestra el* ***Teorema de Green*** *para las regiones planas elementales. Este importante resultado proporciona una conexión entre las integrales de línea y las integrales dobles. También se investigan la* ***divergencia*** *y el* ***rotacional*** *de un campo vectorial y se presentan dos de los teoremas más importantes del Cálculo vectorial: el* ***Teorema de la Divergencia*** *y el* ***Teorema de Stokes****.*

18.1 CAMPOS VECTORIALES

FIGURA 18.1

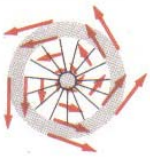


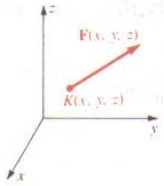
FIGURA 18.2



Si a cada punto K de una región se asocia un vector único con punto inicial K, entonces el conjunto de tales vectores se llama **campo vectorial**. La Figura 18.1 ilustra un campo vectorial determinado por una rueda que gira alrededor de un eje. A cada punto de la rueda le corresponde un vector velocidad. Un campo vectorial de este tipo es un **campo de velocidad** (o **de velocidades**). También un flujo de agua o una corriente de aire pueden determinar campos de velocidad. La Figura 18.2 muestra vectores velocidad asociados a las partículas de agua que se mueven en un río. Los croquis de este *tipo muestran solamente unos cuantos elementos del campo* vectorial. Hay que recordar que *todo* punto de la región tiene un vector asociado a él.

Otro tipo muy común de campos vectoriales es el **campo de fuerza**, (o **de fuerzas**), que se utiliza mucho en el estudio de la mecánica y de la electricidad. Las ilustraciones se han limitado al caso en el que los vectores son independientes del tiempo. Estos **campos vectoriales estacionarios** son los únicos que se considerarán en este capítulo.

FIGURA 18.3



Dado un campo vectorial, se supone que hay un sistema de coordenadas rectangulares y el vector asociado al punto $K(x, y, z)$ se denota por $\mathbf{F}(x, y, z)$ (véase la Figura 18.3). Como las componentes del vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ dependen de las coordenadas de K, se puede escribir

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

donde M, N y P son funciones escalares de tres variables. Inversamente, toda ecuación de esta forma determina un campo vectorial. Entonces, puede considerarse que un campo vectorial es una función $\mathbf{F}$ como la de la siguiente definición.

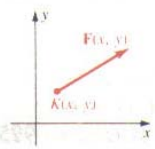
DEFINICIÓN (18.1)

Un **campo vectorial en tres dimensiones** es una función $\mathbf{F}$ cuyo dominio D es un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y cuyo contradominio es un subconjunto de V_3. Si (x, y, z) está en D, entonces

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

donde M, N y P son funciones escalares de tres variables.

FIGURA 18.4



y cuyo contradominio constituye un subconjunto de V_3. Si (x, y, z) está en D, entonces

Si el dominio D es una región en el plano xy y si el contradominio es un subconjunto de V_2 (véase la Figura 18.4),

entonces se obtiene el caso especial de (18.1) de un **campo vectorial F en dos dimensiones**, que es una función dada por

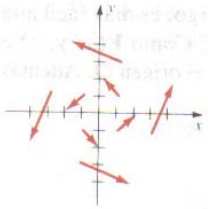
$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

donde M y N son funciones escalares de dos variables.

Si las funciones escalares M, N y P se definen por medio de expresiones simples, entonces el campo vectorial puede describirse trazando vectores correspondientes a $\mathbf{F}(x, y, z)$ o a $\mathbf{F}(x, y)$. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Realizar la descripción del campo vectorial $\mathbf{F}$ dado por $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

FIGURA 18.5



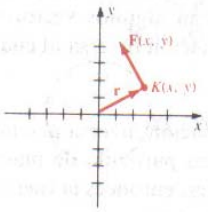
Solución *La siguiente tabla muestra los vectores* $\mathbf{F}(x, y)$ asociados a varios puntos (x, y) señalados en la Figura 18.5.

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 1)$	$-\mathbf{i} + \mathbf{j}$	$(1, 3)$	$-3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
$(-1, 1)$	$-\mathbf{i} - \mathbf{j}$	$(-3, 1)$	$-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
$(-1, -1)$	$\mathbf{i} - \mathbf{j}$	$(-1, -3)$	$3\mathbf{i} - \mathbf{j}$
$(1, -1)$	$\mathbf{i} + \mathbf{j}$	$(3, -1)$	$\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

Los vectores son semejantes a los asociados a la rueda giratoria de la Figura 18.1.

Para llegar a una descripción de un campo vectorial $\mathbf{F}$ se considera un punto arbitrario $K(x, y)$ y se define el vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de $K(x, y)$ (véase la Figura 18.6). Se ve que $\mathbf{F}(x, y)$ es ortogonal a $\mathbf{r}$ y por lo tanto, es tangente a la circunferencia de radio $\|\mathbf{r}\|$ con centro en el origen. Este hecho puede demostrarse probando que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(x, y) = 0$, como sigue:

FIGURA 18.6



$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(x, y) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \\ &= -xy + yx = 0.\end{aligned}$$

Además,

$$\|\mathbf{F}(x, y)\| = \sqrt{y^2 + x^2} = \|\mathbf{r}\|.$$

Por lo tanto, la magnitud de $\mathbf{F}(x, y)$ es igual al radio de la circunferencia. Esto implica que cuando el punto $K(x, y)$ se aleja del origen, la magnitud de $\mathbf{F}(x, y)$ aumenta como sucede en el caso de la rueda giratoria de la Figura 18.1. •

La siguiente definición presenta uno de los campos vectoriales más importantes de la física.

DEFINICIÓN (18.2)

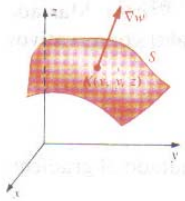
Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición de un punto $K(x, y, z)$. Se dice que un campo vectorial $\mathbf{F}$ es un **campo de variación inversa al cuadrado de la distancia** si

donde c es una constante; $\mathbf{r}$ y $\mathbf{u}$ son lo mismo que en la Definición (18.2). Obsérvese que la ley de Coulomb tiene la misma forma que la ley de la gravitación universal de Newton.

Si $w = f(x, y, z)$, entonces (véase (16.29)) el **gradiente** ∇w de w es el campo vectorial dado por

$$\nabla w = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

FIGURA 18.8



Según el Teorema (16.34), la dirección del vector ∇w en cualquier punto $K(x, y, z)$ es normal a la superficie de nivel S de f que pasa por K (véase la Figura 18.8). Además, la magnitud de ∇w es igual a la tasa o razón máxima de variación de f en el punto K. Estos hechos son de especial importancia cuando w es la temperatura (o el potencial) en $K(x, y, z)$. En tal caso la dirección en que la razón de cambio de la temperatura (o del potencial) es máxima, es normal a la superficie isotérmica (o equipotencial) que contiene a K.

DEFINICIÓN (18.3)

Se dice que un campo vectorial $\mathbf{F}$ es un **campo vectorial conservativo** si es el gradiente de una función escalar, es decir si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$$

para una función f.

Si $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces la función f de la Definición (18.3) es una **función de potencial** para $\mathbf{F}$, y $f(x, y, z)$ se llama **potencial** en el punto $K(x, y, z)$.

TEOREMA (18.4)

Todo campo vectorial del tipo de variación inversa al cuadrado (o de tipo gravitacional) es conservativo.

Demostración Si $\mathbf{F}$ es un campo de tipo gravitacional, entonces como en la solución del Ejemplo 2,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}$$

para alguna constante c. Según la Definición (18.3), si $\mathbf{F}$ es conservativo, existe una función escalar f tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, y las componentes de $\mathbf{F}$ son iguales a $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ y $f_z(x, y, z)$, respectivamente. Integrando parcialmente estas componentes con respecto a x, y y z, respectivamente, *se ve* que

$$f(x, y, z) = \frac{-c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}},$$

Calculando las derivadas parciales se demuestra que esta función f es lo que se buscaba. Por tanto, se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \nabla\left(\frac{-c}{r}\right) \quad \text{donde} \quad r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \bullet\bullet$$

En la física, la función de potencial de un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ se define como una función p tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla p(x, y, z)$. En este caso, tomando $p = -f$ en la demostración del Teorema (18.4), se obtiene $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla(c/r)$. Más adelante en el capítulo se estudiarán más a fondo los campos vectoriales conservativos.

El operador diferencial vectorial ∇ en tres dimensiones es*

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Según (16.29), si ∇ actúa sobre una función *escalar* f, da como resultado el gradiente de f:

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

A continuación se usará ∇ como un operador sobre un campo *vectorial* para definir otro campo vectorial, el *rotacional* de $\mathbf{F}$, que se denota por rot $\mathbf{F}$, o por $\nabla \times \mathbf{F}$.

DEFINICIÓN (18.5)

Sea $\mathbf{F}$ una función vectorial en tres dimensiones dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

donde M, N y P tienen derivadas parciales en alguna región. El **rotacional** de $\mathbf{F}$ está dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Se usará el símbolo rot $\mathbf{F}$ o bien $\nabla \times \mathbf{F}$ para denotar el vector rot $\mathbf{F}(x, y, z)$ o $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$, asociado a (x, y, z). La fórmula para rot $\mathbf{F}$ se puede considerar como el "desarrollo" de un determinante (con respecto al primer renglón).

rot F COMO UN DETERMINANTE (18.6)

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}.$$

* **(N. del R.)** Este símbolo se lee "del" debido a que es una delta mayúscula invertida. También se le dice "nabla", por su parecido con un instrumento musical antiguo semejante a la lira y que tiene ese nombre.

931

EJEMPLO 4 Determinar $\nabla \cdot \mathbf{F}$ para $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^4\mathbf{i} + (2x^2y + z)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$.

Solución De la Definición (18.7),

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + z) + \frac{\partial}{\partial z}(y^3z^2)$$
$$= y^2z^4 + 2x^2 + 2y^3z$$

En la Sección 18.6 se verá que si $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades en un fluido, entonces div $\mathbf{F}$ da información acerca del *flujo* o desplazamiento de la masa. Si div $\mathbf{F} < 0$ en un punto $K(x, y, z)$, entonces la masa fluye *hacia* el punto y se dice que hay un *sumidero* en K. Si div $\mathbf{F} > 0$, entonces la masa fluye *desde* el punto y se dice que hay una *fuente* en K. La condición div $\mathbf{F} = 0$ es característica de los fluidos incompresibles.*

Los operadores *div* y *rot* tienen varias propiedades algebraicas. Una de ellas que es análoga a la regla del producto para derivadas se presenta en el siguiente ejemplo. En los Ejercicios 23-26 se presentan otras de ellas.

EJEMPLO 5 Sea f una función escalar y $\mathbf{F}$ una función vectorial. Demostrar que si las derivadas parciales existen, entonces

$$\nabla \cdot [f\mathbf{F}] = f[\nabla \cdot \mathbf{F}] + [\nabla f] \cdot \mathbf{F}.$$

Solución Si escribimos $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, donde M, N y P son funciones de x, y, z, entonces

$$f\mathbf{F} = fM\mathbf{i} + fN\mathbf{j} + fP\mathbf{k}.$$

Aplicando la Definición (18.7),

$$\nabla \cdot [f\mathbf{F}] = \frac{\partial}{\partial x}(fM) + \frac{\partial}{\partial y}(fN) + \frac{\partial}{\partial z}(fP)$$
$$= f\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}M + f\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}N + f\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}P.$$

Reordenando los términos, obtenemos

$$\nabla \cdot [f\mathbf{F}] = f\left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x}M + \frac{\partial f}{\partial y}N + \frac{\partial f}{\partial z}P\right]$$
$$= f[\nabla \cdot \mathbf{F}] + [\nabla f] \cdot \mathbf{F}$$

* **(N. del R.)** De estas consideraciones se explica el nombre de *divergencia*. En una fuente las "líneas de velocidad" *divergen* al emanar o salir del punto; se dice que la divergencia es positiva. En un sumidero las líneas *convergen* al llegar al punto, y por tanto la divergencia es negativa.

Finalmente, si un campo vectorial $\mathbf{F}$ se describe como en (18.1), entonces pueden definirse límites, continuidad, derivadas parciales e integrales múltiples usando las componentes de $\mathbf{F}(x, y, z)$, como se hizo en el Capítulo 15 para las funciones vectoriales de una variable. Por ejemplo, si se quiere derivar o integrar $\mathbf{F}(x, y, z)$, hay que derivar o integrar cada componente. Se pueden establecer los teoremas acostumbrados: $\mathbf{F}$ es continua si y sólo si las funciones componentes M, N y P son continuas; $\mathbf{F}$ tiene derivadas parciales si y sólo si M, N y P las tienen; etcétera.

EJERCICIOS 18.1

Ejercicios 1-10: Represente suficientes vectores para ilustrar el patrón o pauta que siguen los vectores del campo $\mathbf{F}$.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{k}$

Ejercicios 11-14: Encuentre un campo vectorial conservativo que tenga el potencial dado.

11. $f(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$
12. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$
13. $f(x, y) = \arctan(xy)$
14. $f(x, y) = y^2 e^{-3x}$

Ejercicios 15-18: Encuentre $\nabla \times \mathbf{F}$ y $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} + y^2x\mathbf{j} + (y + 2z)\mathbf{k}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x + y)\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xyz^2\mathbf{i} + y^2 \operatorname{sen} z\mathbf{j} + xe^{2z}\mathbf{k}$
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 \ln z\mathbf{i} + xe^{-y}\mathbf{j} - (y^2 + 2z)\mathbf{k}$
19. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que (a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$; (b) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$; (c) $\nabla \|\mathbf{r}\| = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$.
20. Sean $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\mathbf{a}$, un vector constante. Demuestre que (a) $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$; (b) $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$.
21. Demuestre que la divergencia y el rotacional de un campo de tipo gravitacional son cero.
22. Demuestre que si un campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo y tiene derivadas parciales, entonces $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Ejercicios 23-26: Verifique la identidad.

23. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$
24. $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$
25. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$
26. $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$

Ejercicios 27-30: Verifique la identidad suponiendo que f y $\mathbf{F}$ tienen segundas derivadas parciales continuas y $\mathbf{a}$ es un vector constante.

27. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$
28. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$
29. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f + \operatorname{rot}\mathbf{F}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}$
30. $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$
31. Sean $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = \|\mathbf{r}\|$. Demuestre que si $\mathbf{F}(x, y, z) = (c/r^k)\mathbf{r}$, donde c es una constante y k es cualquier número real positivo, entonces el rotacional de $\mathbf{F}$ es $\mathbf{0}$. (*Sugerencia:* Use el Ejercicio 25.)
32. El operador diferencial $(\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$ se denota por $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. Cuando opera sobre $f(x, y, z)$ produce una función escalar llamada *laplaciano* de f que está dada por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Demuestre que si f y g son funciones escalares que tienen segundas derivadas parciales,

(a) $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$

(b) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$.

Ejercicios 33-34: Usando la notación del Ejercicio 32 demuestre que la función satisface la *ecuación de Laplace* $\nabla^2 f = 0$. (Las funciones de este tipo se llaman *armónicas* y tienen importantes aplicaciones en la física.)

33. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

34. $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ donde $a + b + c = 0$.

35. Si **F** está dado por (18.1), se define

$$\lim_{(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)} \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{a}$$

de manera análoga a la Definición (15.4). Dé una definición de este límite en términos de *épsilon* (ε) y *delta* (δ). ¿Cuál es el significado geométrico de tal límite?

36. Suponiendo que **F** está dado por (18.1), defina la noción de *continuidad* en (x_0, y_0, z_0) de manera análoga a la Definición (15.5). ¿Cuál es el significado geométrico de una función vectorial continua?

18.2 INTEGRALES DE LÍNEA

En el Capítulo 5 para definir $\int_a^b f(x)\,dx$ se comienza dividiendo el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Luego se escogen números arbitrarios w_k en cada subintervalo y se toma el límite de las sumas de Riemann $\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k$ cuando todos los Δx_k tienden a 0. Puede seguirse un procedimiento similar para definir las *integrales de línea* de funciones de varias variables sobre curvas en dos o tres dimensiones.

En la Sección 13.1 se vio que una curva plana C es *regular* (o *alisada*) si tiene una parametrización

$$x = g(t), \quad y = h(t); \qquad a \le t \le b$$

tal que g' y h' son continuas y no se anulan simultáneamente en $[a, b]$. Para las curvas en el espacio se considera una tercera función k del mismo tipo, tal que $z = k(t)$. El **sentido**, u **orientación**, **positivo** sobre C es la dirección en que se mueve un punto al aumentar t. Se dice que una curva C es *regular parte por parte* si $[a, b]$ se puede dividir en subintervalos cerrados de manera que C sea regular en cada subintervalo.

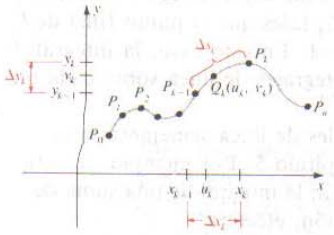
Sea f una función de dos variables x y y que es continua en una región D, la cual contiene una curva regular C con una parametrización $x = g(t), y = h(t); a \le t \le b$. Se definirán tres integrales diferentes de f sobre C. Comenzamos dividiendo el intervalo del parámetro $[a, b]$ escogiendo

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

La norma de esta partición, es decir, la longitud del mayor subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$, se denota por $\|\Delta\|$. Si $P(x_k, y_k)$ es el punto de C correspondiente a t_k, entonces los puntos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ dividen a C en n subarcos $\overset{\frown}{P_{k-1}P_k}$, como se ilustra en la Figura 18.10. Sean

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \quad \Delta s_k = \text{longitud de } \overset{\frown}{P_{k-1}P_k}.$$

FIGURA 18.10



Para cada k, sea $Q(u_k, v_k)$ un punto del subarco $\overset{\frown}{P_{k-1}P_k}$ correspondiente a algún número en $[t_{k-1}, t_k]$ (véase la Figura 18.10). Consideremos ahora las tres sumas

$$\sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta s_k, \quad \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta x_k, \quad \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta y_k.$$

Si los límites de estas sumas existen cuando $\|\Delta\| \to 0$, son entonces las **integrales de línea de f sobre C** con respecto a s, x y y, respectivamente, y se denotan como sigue.

INTEGRALES DE LÍNEA EN DOS DIMENSIONES (18.8)

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta s_k$$

$$\int_C f(x, y)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta x_k$$

$$\int_C f(x, y)\,dy = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta y_k$$

El término "integral de línea" se refiere a una integral sobre una línea curva, que podría ser en ciertos casos una *línea recta*. Se le podría llamar también genéricamente *integral de curva*.*

Si f es continua en D, entonces los límites en (18.8) existen y son los mismos para todas las parametrizaciones (siempre y cuando tengan la misma orientación). Además, las integrales se pueden evaluar sustituyendo $x = g(t)$, $y = h(t)$, o sea la parametrización de C y reemplazando las diferenciales por

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$

$$dx = g'(t)\,dt, \quad dy = h'(t)\,dt.$$

Obsérvese que según la Definición (13.6), la fórmula para ds es la diferencial de la longitud de arco. A continuación se enuncian estos hechos como referencia.

TEOREMA DE EVALUACIÓN PARA INTEGRALES DE LÍNEA (18.9)

Si una curva regular C está dada por $x = g(t)$, $y = h(t)$; $a \le t \le b$, y $f(x, y)$ es continua en una región D que contiene a C, entonces

(i) $\displaystyle\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(g(t), h(t))\sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$

(ii) $\displaystyle\int_C f(x, y)\,dx = \int_a^b f(g(t), h(t))g'(t)\,dt$

(iii) $\displaystyle\int_C f(x, y)\,dy = \int_a^b f(g(t), h(t))h'(t)\,dt.$

* **(N. del R.)** En la terminología matemática en español, *línea* significa en general una *curva* o una *recta*, de manera que el nombre *integral de línea* no causa confusión. En inglés sí ocurre porque *line*, a secas, denota básicamente una recta, por lo que *line integral* parece expresar esencialmente que se trata de una "integral de recta".

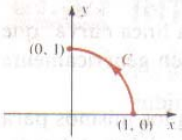
La discusión anterior se puede generalizar a curvas más complicadas. En particular, sea C una curva regular parte por parte que se puede expresar como la unión de un número finito de curvas regulares $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tales que el punto final de C_k es el punto inicial de C_{k+1} para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. En este caso, la integral de línea de f sobre C se define como la suma de las integrales de línea sobre cada una de las curvas.

Se pueden demostrar propiedades de las integrales de línea semejantes a las que se obtuvieron para las integrales definidas en el Capítulo 5. Por ejemplo, invertir la dirección de integración cambia el signo de la integral; la integral de una suma de dos funciones es la suma de las integrales de cada función, etcétera.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int_C xy^2\,ds$, donde C tiene la parametrización $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; $0 \le t \le \pi/2$.

Solución La curva C es la parte de la circunferencia unitaria con centro en el origen que se encuentra en el primer cuadrante, como se muestra en la Figura 18.11. La punta de flecha en C indica el sentido positivo (es decir, la dirección de integración). Aplicando el Teorema (18.9) (i),

FIGURA 18.11



$$\int_C xy^2\,ds = \int_0^{\pi/2} \cos t \operatorname{sen}^2 t \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\,dt$$

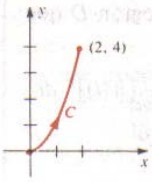
$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos t\,dt = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t\Big]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{3} \quad \bullet$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\int_C xy^2\,dx$ y $\int_C xy^2\,dy$, donde C es la parte de la parábola $y = x^2$ entre (0, 0) y (2, 4).

Solución La gráfica de $y = x^2$ entre (0, 0) y (2, 4) está en la Figura 18.12. C tiene ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = t^2; \qquad 0 \le t \le 2.$$

FIGURA 18.12



Las diferenciales son

$$dx = dt, \quad dy = 2t\,dt.$$

Aplicando las partes (ii) y (iii) del Teorema (18.9),

$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^2 t(t^2)^2\,dt = \int_0^2 t^5\,dt = \tfrac{1}{6}t^6\Big]_0^2 = \tfrac{32}{3}$$

$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^2 t(t^2)^2 2t\,dt = \int_0^2 2t^6\,dt = \tfrac{2}{7}t^7\Big]_0^2 = \tfrac{256}{7} \quad \bullet$$

Si C es la gráfica de una ecuación $y = g(x)$ para $a \le x \le b$, entonces C tiene ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = g(t); \qquad a \le t \le b.$$

Entonces, las integrales de línea (ii) y (iii) del Teorema (18.9) se pueden evaluar como sigue:

$$\int_C f(x, y)\,dx = \int_a^b f(t, g(t))\,dt = \int_a^b f(x, g(x))\,dx$$

$$\int_C f(x, y)\,dy = \int_a^b f(t, g(t))g'(t)\,dt = \int_a^b f(x, g(x))g'(x)\,dx$$

Esto demuestra que para las curvas dadas en la forma rectangular $y = g(x)$ con $a \le x \le b$ no hay que usar las ecuaciones paramétricas sino que basta sustituir $y = g(x)$, $dy = g'(x)\,dx$, y usar a y b como límites de integración. En el Ejemplo 2, donde $y = x^2$, se podría haber escrito

$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^2 x(x^4)\,dx = \int_0^2 x^5\,dx = \tfrac{32}{3}$$

$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^2 x(x^4)2x\,dx = \int_0^2 2x^6\,dx = \tfrac{256}{7}.$$

Puede obtenerse una aplicación física de la integral de línea $f(x, y)\,ds$ considerando la curva como un alambre delgado de densidad variable. Si el alambre se representa por la curva C en la Figura 18.10 y la **densidad lineal** (es decir, la masa por unidad de longitud) en el punto (x, y) está dada por $\delta(x, y)$, entonces $\delta(u_k, v_k)\,\Delta s_k$ es aproximadamente igual a la masa Δm_k de la parte del alambre que está entre P_{k-1} y P_k. La suma

$$\sum_k \Delta m_k = \sum_k \delta(u_k, v_k)\,\Delta s_k$$

es una aproximación a la masa total m del alambre. Para definir m se toma el límite de estas sumas y se obtiene lo siguiente.

MASA DE UN ALAMBRE (18.10)

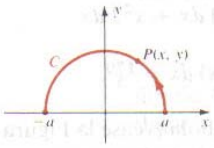
$$m = \int_C \delta(x, y)\,ds$$

EJEMPLO 3 Un alambre delgado tiene la forma de media circunferencia de radio a. La densidad lineal de masa en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P a la recta que pasa por los extremos del alambre. Calcular la masa del alambre.

Solución Introducimos un sistema de coordenadas de manera que la forma del alambre coincida con la mitad superior de la circunferencia de radio a con centro en el origen (véase la Figura 18.13); C tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t, \qquad y = a\,\text{sen}\,t; \qquad 0 \le t \le \pi.$$

FIGURA 18.13



Por hipótesis, la densidad lineal de masa en $P(x, y)$ está dada por $\delta(x, y) = ky$, para alguna constante k. Según (18.10) la masa del alambre es

$$m = \int_C (ky)\,ds = \int_0^\pi (ka\,\text{sen}\,t)\sqrt{a^2\text{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^\pi ka\,(\text{sen}\,t)a\,dt = -ka^2\cos t\Big]_0^\pi = 2ka^2 \quad \bullet$$

En las aplicaciones relacionadas con el trabajo, aparecen integrales de línea combinadas en la forma

$$\int_C M(x, y)\,dx + \int_C N(x, y)\,dy$$

donde M y N son funciones continuas sobre un dominio D que contiene a C. Esta suma se abrevia escribiéndola como

$$\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy.$$

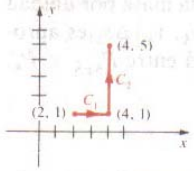
EJEMPLO 4 Evaluar $\int_C xy\,dx + x^2\,dy$ suponiendo que

(a) C consta de los segmentos que van de (2, 1) a (4, 1) y de (4, 1) a (4, 5).

(b) C es el segmento que va de (2, 1) a (4, 5).

(c) C tiene ecuaciones paramétricas $x = 3t - 1$, $y = 3t^2 - 2t$; $1 \le t \le \frac{5}{3}$.

FIGURA 18.14



Solución

(a) Si se divide C en dos partes C_1 y C_2, como se muestra en la Figura 18.14, estas curvas tienen las ecuaciones paramétricas

$$C_1\colon\ x = t,\quad y = 1;\qquad 2 \le t \le 4$$

$$C_2\colon\ x = 4,\quad y = t;\qquad 1 \le t \le 5.$$

La integral de línea sobre C puede expresarse como una suma de dos integrales de línea, la primera sobre C_1 y la segunda sobre C_2. Sobre C_1 tenemos $dy = 0$, $dx = dt$ y por lo tanto

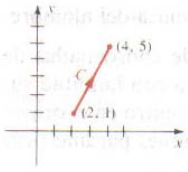
$$\int_{C_1} xy\,dx + x^2\,dy = \int_2^4 t(1)\,dt + 0 = \tfrac{1}{2}t^2\Big]_2^4 = 6.$$

Sobre C_2 tenemos $dx = 0$, $dy = dt$ y así

$$\int_{C_2} xy\,dx + x^2\,dy = \int_1^5 0 + 16\,dt = 16t\Big]_1^5 = 64.$$

Por lo tanto, la integral de línea sobre C es igual a $6 + 64$, o sea 70.

FIGURA 18.15

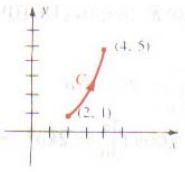


(b) La gráfica de C está en la Figura 18.15 y tiene la ecuación $y = 2x - 3$ para $2 \le x \le 4$. En este caso $dy = 2\,dx$ y

$$\int_C xy\,dx + x^2\,dy = \int_2^4 x(2x - 3)\,dx + x^2 2\,dx$$

$$= \int_2^4 (4x^2 - 3x)\,dx = \tfrac{170}{3}.$$

FIGURA 18.16



(c) La gráfica de C es parte de una parábola (véase la Figura 18.16). En este caso, usando las ecuaciones paramétricas $x = 3t - 1$, $y = 3t^2 - 2t$; $1 \le t \le \frac{5}{3}$, obtenemos $dx = 3\,dt$, $dy = (6t - 2)\,dt$ y la integral de línea es igual a

$$\int_1^{5/3} (3t - 1)(3t^2 - 2t)3\,dt + (3t - 1)^2(6t - 2)\,dt.$$

Se puede demostrar que el valor es 58.

Otra manera de resolver esto es usar la ecuación $y = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$ de la parábola para $2 \le x \le 4$. Entonces obtenemos la integral

$$\int_C xy\,dx + x^2\,dy = \int_2^4 x \cdot \tfrac{1}{3}(x^2 - 1)\,dx + x^2(\tfrac{2}{3}x)\,dx,$$

$$= \int_2^4 (x^3 - \tfrac{1}{3}x)\,dx = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{6}x^2\Big]_2^4 = 58 \quad \bullet$$

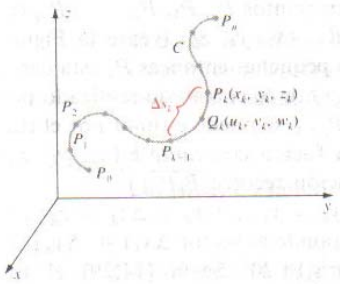
En el ejemplo anterior se obtuvieron tres valores diferentes para la integral de línea sobre tres trayectorias distintas de (2, 1) a (4, 5). En la Sección 18.3 se estudiarán integrales de línea que tienen el mismo valor sobre todas las curvas que van de un punto A a un punto B. De esas integrales se dice que son *independientes de la trayectoria*.

Si una curva C en tres dimensiones tiene una parametrización

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = k(t); \qquad a \le t \le b,$$

entonces las integrales de línea de una función f de *tres* variables se definen de manera parecida a las de dos variables En este caso, en lugar de usar, como en la Figura 18.10, a (x_k, y_k) y (u_k, v_k) como las coordenadas de P_k y Q_k en C, se usan (x_k, y_k, z_k) y (u_k, v_k, w_k), respectivamente (véase la Figura 18.17). Entonces

FIGURA 18.17



$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k)\,\Delta s_k.$$

Esta integral se puede evaluar usando la fórmula

$$\int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2 + [k'(t)]^2}\,dt.$$

Si un alambre tiene la forma de C, y $f(x, y, z)$ es la densidad lineal de masa en (x, y, z), entonces el valor de esta integral es la masa total del alambre.

Además de las integrales $\int_C f(x, y, z)\,dx$ y $\int_C f(x, y, z)\,dy$, una función de tres variables tiene también una integral de línea con respecto a z dada por

$$\int_C f(x, y, z)\,dz = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k)\,\Delta z_k$$

donde $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Como en el caso de dos dimensiones, estas integrales aparecen a menudo en sumas que se abrevian como

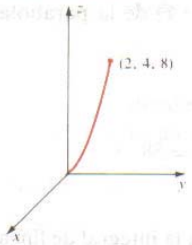
$$\int_C M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$$

donde M, N y P son funciones continuas en una región que contiene a C. Si C está dada paramétricamente, entonces esta integral de línea puede evaluarse sustituyendo x, y, z, de la misma manera que en el caso de dos variables.

EJEMPLO 5 Evaluar $\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, donde C está dada por

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \qquad 0 \le t \le 2.$$

FIGURA 18.18



Solución La curva C (una cúbica alabeada) está en la Figura 18.18 (véase el Ejemplo 2 de la Sección 15.1). Puede sustituirse x, y, z, y usar $dx = dt$, $dy = 2t\,dt$, $dz = 3t^2\,dt$:

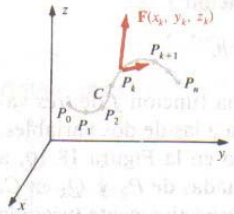
$$\int_0^2 t^5\,dt + 2t^5\,dt + 3t^5\,dt = \int_0^2 6t^5\,dt = t^6\Big]_0^2 = 64 \quad \bullet$$

Una de las aplicaciones más importantes de las integrales de línea a la física tiene que ver con campos de fuerza. Supongamos que la fuerza que actúa sobre el punto (x, y, z) es

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

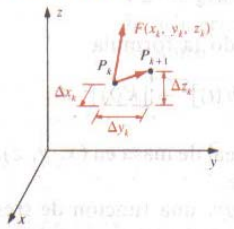
donde M, N y P son funciones continuas. A continuación se define el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}(x, y, z)$ recorre una curva regular C con parametrización $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = k(t)$; $a \le t \le b$. Se supone que el movimiento es en la dirección correspondiente al *crecimiento* de t.

FIGURA 18.19



Se divide C mediante los puntos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$, tales que P_k tiene coordenadas (x_k, y_k, z_k) (véase la Figura 18.19). Si la norma $\|\Delta\|$ es pequeña, entonces P_k está cerca de P_{k+1} para cada k. Por lo tanto, el trabajo realizado por $\mathbf{F}(x, y, z)$ a lo largo de $\overset{\frown}{P_kP_{k+1}}$ se puede estimar por el trabajo Δw_k realizado por la fuerza *constante* $\mathbf{F}(x_k, y_k, z_k)$ cuando su punto de aplicación recorre $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$.

FIGURA 18.20



Si $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ y $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, entonces $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$ corresponde al vector $\Delta x_k\mathbf{i} + \Delta y_k\mathbf{j} + \Delta z_k\mathbf{k}$ de V_3 (véase la Figura 18.20). Según (14.29), el trabajo Δw_k realizado por $\mathbf{F}(x_k, y_k, z_k)$ a lo largo de $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$ es

$$\begin{aligned}\Delta w_k &= \mathbf{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot (\Delta x_k\mathbf{i} + \Delta y_k\mathbf{j} + \Delta z_k\mathbf{k}) \\ &= M(x_k, y_k, z_k)\,\Delta x_k + N(x_k, y_k, z_k)\,\Delta y_k + P(x_k, y_k, z_k)\,\Delta z_k.\end{aligned}$$

El *trabajo W efectuado por* $\mathbf{F}$ a lo largo de C se define como sigue.

DEFINICIÓN DE TRABAJO (18.11)

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k \Delta w_k$$

$$= \int_C M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$$

En las aplicaciones, la integral (18.11) se expresa frecuentemente en forma vectorial. Si se define

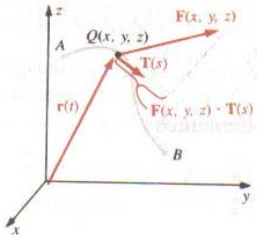
$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

donde $x = g(t)$, $y = h(t)$ y $z = k(t)$, entonces $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición del punto

$Q(x, y, z)$ de C. Si s denota la longitud de arco medida a lo largo de C, entonces como en la Sección 15.4, el vector unitario $\mathbf{T}(s)$ dado por

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{r}(t) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}.$$

FIGURA 18.21



es un vector unitario tangente a C en Q. Los vectores $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{F}(x, y, z)$ y $\mathbf{T}(s)$ se ilustran en la Figura 18.21.

La **componente tangencial de F en Q** (véase la Figura 18.21) es

$$\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(s) = M(x, y, z)\frac{dx}{ds} + N(x, y, z)\frac{dy}{ds} + P(x, y, z)\frac{dz}{ds}.$$

Nótese que esta componente es positiva si el ángulo entre $\mathbf{F}(x, y, z)$ y $\mathbf{T}(s)$ es agudo, y negativa si el ángulo es obtuso. La fórmula (18.11) puede escribirse ahora

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(s)\, ds;$$

es decir, *el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de* $\mathbf{F}(x, y, z)$ *recorre* C *es igual a la integral de línea con respecto a* s *de la componente tangencial de* $\mathbf{F}$ *a lo largo de* C. Para simplificar la notación se denotará $\mathbf{F}(x, y, z)$ por $\mathbf{F}$, y $\mathbf{T}(s)$ por $\mathbf{T}$, y se define

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \mathbf{T}\, ds.$$

La discusión anterior puede resumirse como sigue.

DEFINICIÓN (18.12)

Sean C una curva regular en el espacio, $\mathbf{T}$ un vector unitario tangente a C en (x, y, z), y $\mathbf{F}$ la fuerza que actúa en (x, y, z). El **trabajo** W **realizado por F a lo largo de** C es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Intuitivamente, se puede considerar que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ en la Definición (18.12) representa el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}$ se mueve a lo largo del vector $d\mathbf{r}$ tangente a C. La integral representa el límite de las sumas de los elementos de trabajo $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

EJEMPLO 6 Un campo de fuerza del tipo gravitacional $\mathbf{F}$ está dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}.$$

Calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo del eje x desde $A(1, 0, 0)$ hasta $B(2, 0, 0)$.

Solución Sea C el segmento de A a B; C tiene las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = 0$, $z = 0$; $1 \le t \le 2$. Como en el Ejemplo 2 de la Sección 18.1,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Aplicando la Definición (18.12),

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

Sustituyendo x, y, z por las ecuaciones paramétricas de C, obtenemos

$$W = \int_1^2 \frac{k}{(t^2)^{3/2}} t\,dt = \int_1^2 \frac{k}{t^2}\,dt = -\frac{k}{t}\Big]_1^2 = \frac{k}{2}.$$

Las unidades de W dependen de las de la distancia y de las de $\|\mathbf{F}(x, y, z)\|$. •

Si la discusión anterior se restringe a dos dimensiones, entonces el campo de fuerza puede expresarse en la forma

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}.$$

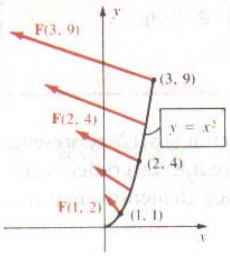
Si C es una curva plana finita regular parte por parte, entonces el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}(x, y)$ recorre C es

$$W = \int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

EJEMPLO 7 Sea C la parte de la parábola $y = x^2$ que se encuentra entre (0, 0) y (3, 9) y sea $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de C.

FIGURA 18.22



Solución El campo vectorial $\mathbf{F}$ se estudió en el Ejemplo 1 de la Sección 18.1. En la Figura 18.22 se muestran algunos vectores de fuerza típicos actuando sobre C. Por ejemplo,

$$\mathbf{F}(1, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \qquad \mathbf{F}(2, 4) = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j},$$
$$\mathbf{F}(3, 9) = -9\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Obsérvese el cambio de dirección y magnitud de $\mathbf{F}(x, y)$ cuando $P(x, y)$ recorre C de (0, 0) a (3, 9).

Como C tiene las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2$; $0 \le t \le 3$,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C -y\,dx + x\,dy$$

$$= \int_0^3 -t^2\,dt + t(2t)\,dt = \int_0^3 t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big]_0^3 = 9.$$

Si, por ejemplo, $\|\mathbf{F}\|$ está en newtons (N) y s en metros (m), entonces $W = 9$ joules (J).

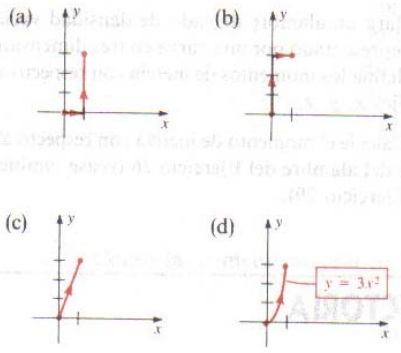
EJERCICIOS 18.2

Ejercicios 1-2: Realice la evaluación de las integrales de línea $\int_C f(x, y)\, ds$, $\int_C f(x, y)\, dx$, y $\int_C f(x, y)\, dy$ para la curva C con la parametrización dada.

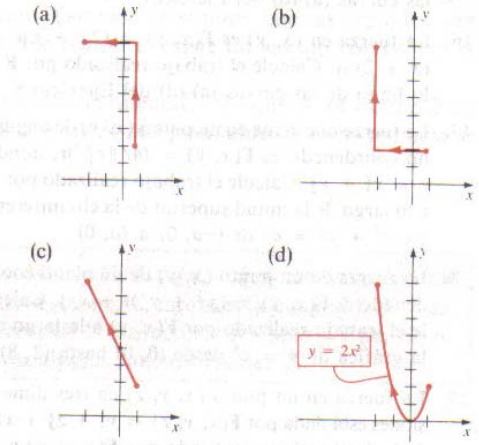
1. $f(x, y) = x^3 + y$, $x = 3t$, $y = t^3$; $0 \le t \le 1$
2. $f(x, y) = xy^{2/5}$, $x = \frac{1}{2}t$, $y = t^{5/2}$; $0 \le t \le 1$

Ejercicios 3-6: Evalúe la integral de línea a lo largo de la curva C dada.

3. $\int_C 6x^2y\, dx + xy\, dy$; C es la gráfica de $y = x^3 + 1$ entre $(-1, 0)$ y $(1, 2)$.
4. $\int_C y\, dx + (x + y)\, dy$; C es la gráfica de $y = x^2 + 2x$ entre $(0, 0)$ y $(2, 8)$.
5. $\int_C (x - y)\, dx + x\, dy$; C es la gráfica de $y^2 = x$ entre $(4, -2)$ y $(4, 2)$.
6. $\int_C xy\, dx + x^2y^3\, dy$; C es la gráfica de $x = y^3$ entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$.
7. Evalúe $\int_C xy\, dx + (x + y)\, dy$ para cada una de las curvas C que van de $(0, 0)$ a $(1, 3)$, ilustradas en (a)-(d).



8. Evalúe $\int_C (x^2 + y^2)\, dx + 2x\, dy$ para cada una de las curvas C que van de $(1, 2)$ a $(-2, 8)$, ilustradas en (a)-(d).



9. Evalúe $\int_C xz\, dx + (y + z)\, dy + x\, dz$; C es la gráfica de $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = e^{2t}$; $0 \le t \le 1$.
10. Evalúe $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$; C es la gráfica de $x = \operatorname{sen} t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$; $0 \le t \le \pi/2$.
11. Evalúe

$$\int_C (x + y + z)\, dx + (x - 2y + 3z)\, dy + (2x + y - z)\, dz$$

donde C es la curva que va de $(0, 0, 0)$ a $(2, 3, 4)$ en (a)-(c):

(a) C consta de tres segmentos (rectilíneos): el primero paralelo al eje x, el segundo paralelo al eje y y el tercero paralelo al eje z.

(b) C consta de tres segmentos: el primero paralelo al eje z, el segundo paralelo al eje x y el tercero paralelo al eje y.

(c) C es un solo segmento.

12. Encuentre $\int_C (x - y)\, dx + (y - z)\, dy + x\, dz$, donde C es la curva que va de $(1, -2, 3)$ a $(-4, 5, 2)$ de los tipos descritos en las partes (a)-(c) del Ejercicio 11.

13. Evalúe $\int_C xyz\,ds$; C es el segmento entre (0, 0, 0) y (1, 2, 3).

14. Evalúe $\int_C (xy + z)\,ds$; C es la hélice $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $z = bt$; $0 \le t \le 2\pi$. $0 \le t \le 2\pi$.

15. La fuerza en (x, y) es $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas (a)-(d) del Ejercicio 7.

16. La fuerza en (x, y) es $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas (a)-(d) del Ejercicio 8.

17. La fuerza que actúa en un punto (x, y) de un plano coordenado es $\mathbf{F}(x, y) = (4/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ de $(-a, 0)$ a $(a, 0)$.

18. La fuerza en un punto (x, y) de un plano coordenado es $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}(x, y)$ a lo largo de la gráfica de $y = x^3$ desde (0, 0) hasta (2, 8).

19. La fuerza en un punto (x, y, z) en tres dimensiones está dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}(x, y, z)$ a lo largo de la cúbica alabeada $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ de (0, 0, 0) a (2, 4, 8).

20. Resuelva el Ejercicio 19 si $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$.

21. Un objeto se mueve a lo largo de un campo de fuerza $\mathbf{F}$ de manera que en cada punto (x, y, z) el vector de velocidad es ortogonal a $\mathbf{F}(x, y, z)$. Demuestre que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre el objeto es 0.

22. Demuestre que si una fuerza constante $\mathbf{c}$ actúa sobre un objeto en movimiento que da una vuelta alrededor de una circunferencia, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{c}$ sobre el objeto es 0.

23. Si un alambre delgado tiene la forma de una curva plana C y su densidad lineal de masa en (x, y) es $\delta(x, y)$, entonces los *momentos con respecto al eje x y al eje y* se definen como

$$M_x = \int_C y\delta(x, y)\,ds \quad \text{y} \quad M_y = \int_C x\delta(x, y)\,ds.$$

Use límites de sumas para demostrar que estas definiciones de M_x y M_y son "naturales". El centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ del alambre se define mediante $\bar{x} = M_y/m$ y $\bar{y} = M_x/m$, donde m es la masa del alambre. Determine el centro de masa del alambre del Ejemplo 3.

24. Consulte el Ejercicio 23. Un alambre delgado sobre un plano coordenado tiene la forma de la parte de la parábola $y = 4 - x^2$ entre $(-2, 0)$ y (2, 0). La densidad en el punto (x, y) es directamente proporcional a su distancia al eje y. Calcule la masa y encuentre el centro de masa.

25. Generalice las definiciones de los momentos y el centro de masa de un alambre a tres dimensiones (véase el Ejercicio 23).

26. Un alambre de densidad constante tiene la forma de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $z = bt$; $0 \le t \le 3\pi$. Calcule la masa del alambre y encuentre su centro de masa (véase el Ejercicio 25).

27. Para un alambre delgado de densidad variable representado mediante una curva C en el plano xy, defina los momentos de inercia I_x y I_y con respecto al eje x y al eje y, respectivamente. Calcule I_x e I_y para el alambre del Ejemplo 3.

28. Determine los momentos de inercia I_x y I_y del alambre del Ejercicio 24.

29. Para un alambre delgado de densidad variable representado por una curva en tres dimensiones, defina los momentos de inercia con respecto a los ejes x, y, z.

30. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del alambre del Ejercicio 26 (véase también el Ejercicio 29).

18.3 INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

A una curva regular parte por parte con extremos A y B se le llama a veces **trayectoria** de A a B. A continuación se obtienen condiciones bajo las cuales una integral de línea es **independiente de la trayectoria** en una región, en el sentido de que si A y B son puntos arbitrarios, entonces se obtiene el mismo valor para *todas* las trayectorias de A a

B en esa región. Los resultados se demostrarán para integrales de línea en dos dimensiones. Las demostraciones para el caso de tres dimensiones son similares y se omiten.

Si la integral de línea $\int_C f(x, y)\,ds$ es independiente de la trayectoria, se denota a veces por $\int_A^B f(x, y)\,ds$ porque el valor de la integral depende sólo de los extremos A y B de la curva C. Una notación similar se usa para $\int_C f(x, y)\,dx$ y $\int_C f(x, y)\,dy$ y para las integrales de línea en tres dimensiones.

En toda esta sección se supone que todas las regiones del plano son **conexas**. Esto significa que dos puntos cualesquiera en una región se pueden unir por una curva regular parte por parte contenida en la región. También se supone que las regiones son *abiertas*, es decir, para todo punto A de una región D existe un círculo con centro A completamente contenido en D.

El siguiente teorema, que es el resultado fundamental, dice que si un campo $\mathbf{F}$ es continuo, entonces la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *es independiente de la trayectoria si y sólo si* $\mathbf{F}$ *es conservativo*.

TEOREMA (18.13)

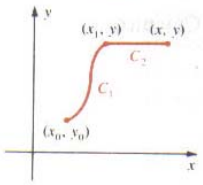
Si $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ es continuo en una región D abierta y conexa, entonces la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria si y sólo si $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ para alguna función escalar f.

Demostración Supongamos que la integral es independiente de la trayectoria en D. Si (x_0, y_0) es un punto fijo en D, se puede definir f por

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para todo punto (x, y) en D. Como la integral es independiente de la trayectoria, f depende sólo de x y y, y no de la trayectoria C de (x_0, y_0) a (x, y). Elíjase un círculo en D con centro en (x, y). Sea (x_1, y) un punto dentro del círculo tal que $x_1 \neq x$. Sea C_1 cualquier trayectoria de (x_0, y_0) a (x_1, y) y sea C_2 el segmento horizontal de (x_1, y) a (x, y), como se ilustra en la Figura 18.23. Se puede escribir

FIGURA 18.23



$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Como la primera integral no depende de x,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

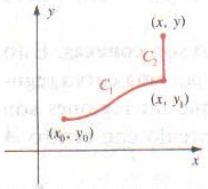
Escribiendo $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ y usando el hecho de que $dy = 0$ en C_2 (véase la Figura 18.23), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} M(x, y)\,dx.$$

Como y es fija en esta derivación parcial, puede considerarse el integrando como una función de una variable x. Aplicando (5.25),

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = M(x, y).$$

FIGURA 18.24



Análogamente, si se escoge la trayectoria que se muestra en la Figura 18.24 y se deriva con respecto a y, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = N(x, y).$$

Esto demuestra que $\nabla f(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{F}(x, y)$; es decir, $\mathbf{F}$ es conservativo.

Inversamente, si existe una función f tal que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, entonces

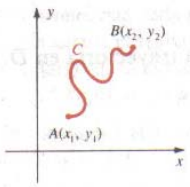
$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

o equivalentemente,

$$M(x, y) = f_x(x, y) \quad \text{y} \quad N(x, y) = f_y(x, y).$$

Entonces, si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son puntos en la región D y C es una curva regular por partes con extremos A y B (véase la Figura 18.25), entonces

FIGURA 18.25



$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy \\ &= \int_C f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy\end{aligned}$$

Si C tiene una parametrización regular $x = g(t)$, $y = h(t)$; $t_1 \le t \le t_2$, entonces aplicando el Teorema (18.9),

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} [f_x(g(t), h(t))g'(t) + f_y(g(t), h(t))h'(t)]\, dt.$$

Aplicando la Regla de la Cadena y el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [f(g(t), h(t))]\, dt \\ &= f(g(t_2), h(t_2)) - f(g(t_1), h(t_1)) \\ &= f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral de línea depende solamente de las coordenadas de A y B y no de la trayectoria C, que es lo que se quería demostrar. La demostración puede generalizarse a curvas regulares parte por parte dividiendo C en un número finito de curvas regulares. • •

La demostración del Teorema (18.13) contiene un método para evaluar integrales de línea que son independientes de la trayectoria. Este resultado, que es análogo al Teorema Fundamental del Cálculo, puede enunciarse como sigue.

TEOREMA (18.14)

Sea $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ continuo en una región abierta y conexa D, y sea C una curva regular parte por parte en D con extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. Si $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, entonces

$$\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

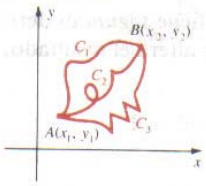
$$= f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f(x, y)\Big]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}$$

El siguiente corolario es una aplicación del Teorema (18.14) a los campos de fuerza conservativos.

COROLARIO (18.15)

Si un campo vectorial de fuerza $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces el trabajo realizado a lo largo de la trayectoria C de A a B es igual a la diferencia de potencial entre A y B.

FIGURA 18.26



El corolario se ilustra en la Figura 18.26, en la que C_1, C_2 y C_3 son curvas regulares parte por parte. Se requiere la misma cantidad de trabajo para cualquier trayectoria de A a B. Si C es una curva cerrada, es decir, si $A = B$, entonces el trabajo realizado al recorrer C es 0. Hay un resultado inverso de éste, concretamente, si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva cerrada simple C, entonces la integral es independiente de la trayectoria, y por lo tanto el campo es conservativo. Estos hechos son importantes en las aplicaciones, pues muchos de los campos vectoriales que aparecen en la naturaleza son de tipo gravitacional y por lo tanto, conservativos (véase el Teorema (18.4)). En términos de física, si una partícula da una vuelta completa sobre una curva cerrada que se halla en un campo de fuerza conservativo, entonces el trabajo realizado es 0. Al final de esta sección se discutirán con mayor detalle los campos conservativos.

El Teorema (18.14) y el Corolario (18.15) pueden generalizarse a campos vectoriales en tres dimensiones. El siguiente ejemplo ilustra estos resultados.

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{F}$ el campo gravitacional producido por una partícula de masa M colocada en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Calcular el trabajo realizado cuando una partícula de masa m se mueve de $A(2, 3, 4)$ a $B(1, 0, 0)$.

Solución De la página 928, la fuerza ejercida sobre una partícula de masa m colocada en $K(x, y, z)$ es

$$F(x, y, z) = -G\frac{Mm}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Como en la demostración del Teorema (18.4), $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ donde

$$f(x, y, z) = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Entonces por el teorema en tres dimensiones análogo al Teorema (18.14) (o al Corolario (18.15)),

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\Bigg]_{(2,3,4)}^{(1,0,0)} = GMm\left(1 - \frac{1}{\sqrt{29}}\right).$$

Si la integral $\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es independiente de la trayectoria, entonces por el Teorema (18.13) existe una función f tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}.$$

Si M y N tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces f tiene *segundas* derivadas parciales continuas y, por lo tanto, el orden de derivación no altera el resultado, es decir,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

El resultado inverso a éste es falso a menos que se impongan condiciones adicionales al dominio D de $\mathbf{F}(x, y)$. En particular, si D es una **región simplemente conexa** en el sentido de que el interior de toda curva cerrada simple C en D contiene sólo puntos de D (no hay "hoyos" en la región), entonces la condición $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ implica que la integral de línea $\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es independiente de la trayectoria. (La demostración se puede encontrar en libros de Cálculo avanzado.) Esta discusión puede resumirse como sigue.

TEOREMA (18.16)

Si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa D, entonces la integral de línea

$$\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

es independiente de la trayectoria en D si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

EJEMPLO 2 Demostrar que si $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y^3)\mathbf{i} + (3xy^2 + 4)\mathbf{j}$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria y evaluar $\int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Solución La función vectorial $\mathbf{F}$ tiene primeras derivadas parciales continuas para todo (x, y) y por lo tanto se puede aplicar el Teorema (18.16). Tomando $M = 2x + y^3$ y $N = 3xy^2 + 4$ vemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Por lo tanto, la integral de línea es independiente de la trayectoria. Según el Teorema (18.13), existe una función (de potencial) f tal que

$$f_x(x, y) = 2x + y^3 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 3xy^2 + 4.$$

Si integramos (parcialmente) $f_x(x, y)$ con respecto a x,

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + k(y)$$

donde k es una función que depende sólo de y. (Hay que usar $k(y)$ en lugar de una constante en la integración parcial para obtener la expresión *más general* de $f(x, y)$ tal que $f_x(x, y) = 2x + y^3$.)

Derivando $f(x, y)$ con respecto a y, y comparando con la expresión $f_y(x, y) = 3xy^2 + 4$ obtenemos

$$f_y(x, y) = 3xy^2 + k'(y) = 3xy^2 + 4.$$

Por lo tanto, $k'(y) = 4$ o bien $k(y) = 4y + c$ para una constante c. Entonces

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y + c$$

define una función del tipo deseado. Aplicando el Teorema (18.14),

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (2x + y^3)\,dx + (3xy^2 + 4)\,dy = x^2 + xy^3 + 4y\Big]_{(0,1)}^{(2,3)}$$
$$= (4 + 54 + 12) - 4 = 66.$$

No usamos la constante c porque para evaluar la integral puede usarse *cualquier* función de potencial f. •

EJEMPLO 3 Determinar si $\int_C x^2y\,dx + 3xy^2\,dy$ es independiente de la trayectoria.

Solución Si definimos $M = x^2y$ y $N = 3xy^2$, entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2.$$

Como $\partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x$, la integral no es independiente de la trayectoria, de acuerdo con el Teorema (18.16). •

En el Ejemplo 2 se obtuvo una función de potencial f para un campo vectorial conservativo en dos dimensiones. La solución del ejemplo siguiente ilustra un método que puede usarse en tres dimensiones.

EJEMPLO 4 Demostrar que si $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos x\mathbf{i} + (2y \operatorname{sen} x + e^{2z})\mathbf{j} + 2ye^{2z}\mathbf{k}$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria y encontrar una función de potencial f para $\mathbf{F}$. Suponiendo que $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza, calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C de $(0, 1, \frac{1}{2})$ a $(\pi/2, 3, 2)$.

Solución La integral es independiente de la trayectoria si existe una función diferenciable f de x, y, z tal que $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$, es decir,

(a)
$$f_x(x, y, z) = y^2 \cos x$$
$$f_y(x, y, z) = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z}$$
$$f_z(x, y, z) = 2ye^{2z}.$$

Si integramos (parcialmente) $f_x(x, y, z)$ con respecto a x, vemos que

(b)
$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + g(y, z)$$

para alguna función g de y y z. (Debemos usar $g(y, z)$ para obtener la expresión *más general* $f(x, y, z)$ tal que $f_x(x, y, z) = y^2 \cos x$.)

Derivando f en la ecuación (b) con respecto a y, y comparando el resultado con la ecuación para f_y en (a), obtenemos

$$f_y(x, y, z) = 2y \operatorname{sen} x + g_y(y, z) = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z}$$

y por lo tanto,
$$g_y(y, z) = e^{2z}.$$

Integrando parcialmente con respecto a y, obtenemos

$$g(y, z) = ye^{2z} + k(z)$$

donde k es una función sólo de z. Por consiguiente, de la ecuación (b),

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + k(z).$$

Derivando con respecto a z y usando la ecuación para f_z en (a),

$$f_z(x, y, z) = 2ye^{2z} + k'(z) = 2ye^{2z}.$$

Por lo tanto, $k'(z) = 0$ o bien $k(z) = c$ para una constante c y

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + c$$

define una función de potencial para $\mathbf{F}$.

Según la generalización del Teorema (18.14) a tres dimensiones, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C cualquiera de $(0, 1, \frac{1}{2})$ a $(\pi/2, 3, 2)$ es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} \Big]_{(0, 1, 1/2)}^{(\pi/2, 3, 2)}$$
$$= (9 + 3e^4) - (0 + e) = 9 + 3e^4 - e \approx 170 \quad \bullet$$

Para concluir esta sección se consideran algunas aplicaciones de la independencia de la trayectoria. La siguiente definición se usa en la física.

DEFINICIÓN (18.17)

Sea $\mathbf{F}(x, y, z)$ un campo vectorial de fuerza que es conservativo y que tiene una función de potencial f. Se define como la **energía potencial** $p(x, y, z)$ de una partícula en un punto (x, y, z) a

$$p(x, y, z) = -f(x, y, z).$$

Como la energía potencial es el *negativo* del potencial $f(x, y, z)$, se tiene que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla p(x, y, z).$$

Si A y B son dos puntos, entonces como en el Teorema (18.14), el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva regular C con extremos A y B es

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -p(x, y, z)\Big]_A^B = p(A) - p(B)$$

donde $p(A)$ y $p(B)$ denotan la energía potencial en A y B, respectivamente. De modo que el trabajo W es la diferencia de las energías potenciales en A y B. En particular si B es un punto en el que el potencial es 0, entonces $W = p(A)$. Esto concuerda con la descripción física clásica de la energía potencial como la energía que un cuerpo tiene debido a su posición.

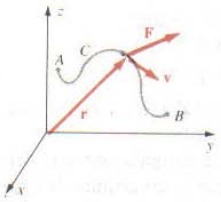
Si una partícula tiene masa m y rapidez v, entonces su *energía cinética* es $\frac{1}{2}mv^2$. Por lo tanto la energía cinética es la energía de un cuerpo debido a su velocidad (rapidez) y a su masa.

A continuación se enuncia la ley fundamental de la física que señala la razón principal por la que ciertos campos vectoriales se llaman *conservativos*.

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA (18.18)

Si una partícula se mueve de un punto a otro en un campo vectorial de fuerza conservativo, entonces la suma de las energías potencial y cinética permanece constante, es decir, la energía total no cambia (se conserva).

FIGURA 18.27



Demostración Sea $\mathbf{F}$ un campo conservativo y supongamos que una partícula se mueve de A a B a lo largo de una curva regular parte por parte C de manera que su posición al tiempo t está dada por $x = g(t), y = h(t), z = k(t); a \leq t \leq b$. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es el vector de posición de la partícula (véase la Figura 18.27), entonces la velocidad y la aceleración al tiempo t son

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

952

porcional a la distancia al origen. Demuestre que **F** es conservativa y encuentre una función de potencial para **F**.

16. Sea $\mathbf{F}(x, y, z)$ una fuerza dirigida desde el origen cuya magnitud es directamente proporcional a la distancia al origen. Demuestre que **F** es conservativa y encuentre una función de potencial para **F**.

17. Haga la demostración de que si $\int_C M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$ es independiente de la trayectoria y M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

18. Demuestre el teorema para integrales de línea en tres dimensiones análogo al Teorema (18.13).

Ejercicios 19-20: Use el Ejercicio 17 para demostrar que la integral de línea no es independiente de la trayectoria.

19. $\int_C 2xy\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + yz\,dz$

20. $\int_C e^y \cos z\,dx + xe^y \cos z\,dy + xe^y \operatorname{sen} z\,dz$

21. Demuestre que si **F** es una fuerza constante, el trabajo realizado a lo largo de cualquier curva que va de P a Q es $\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

22. Demuestre que si $\mathbf{F}(x, y, z) = g(x)\mathbf{i} + h(y)\mathbf{j} + k(z)\mathbf{k}$, donde g, h y k son funciones continuas de una variable, entonces **F** es conservativo.

23. Sea $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, donde

$$M(x, y) = -y/(x^2 + y^2) \quad \text{y} \quad N(x, y) = x/(x^2 + y^2).$$

Demuestre que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ para todo (x, y) en el dominio D de **F** pero que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ no es independiente de la trayectoria en D. (*Sugerencia:* Considere dos medias circunferencias con extremos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.) ¿Por qué esto no contradice el Teorema (18.16)?

24. Un satélite de masa m gira alrededor de la Tierra a una altura constante de h kilómetros y que da una vuelta completa cada k minutos. Tomando el radio de la Tierra como de 6400 km, calcule el trabajo realizado por el campo gravitacional terrestre durante cualquier intervalo de tiempo.

25. Sea **F** un campo del tipo de variación inversa al cuadrado, tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = (c/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y c es una constante. Sean P_1 y P_2 dos puntos cualesquiera cuyas distancias al origen son d_1 y d_2, respectivamente. Exprese el trabajo realizado por **F** a lo largo de cualquier curva regular parte por parte que va de P_1 a P_2, en términos de d_1 y d_2.

26. Cuando una partícula se mueve por un campo vectorial conservativo, su energía potencial disminuye a razón de k unidades por segundo. ¿Cuál es la rapidez de variación de su energía cinética?

18.4 TEOREMA DE GREEN

Sea C una curva regular plana con parametrización $x = g(t)$, $y = h(t)$; $a \le t \le b$. Recordemos si $A = (g(a), h(a)) = (g(b), h(b)) = B$, entonces C es una curva regular *cerrada*. Si C no se corta a sí misma entre A y B, se dice que es *simple*. La circunferencia y la elipse son ejemplos comunes de curvas regulares cerradas simples. Una *curva regular parte por parte y cerrada simple* es una unión finita de curvas regulares C_k tales que cuando t varía de a a b, el punto $P(t)$ que se obtiene de las parametrizaciones de las C_k traza o recorre C exactamente una vez, con la excepción de que $P(a) = P(b)$. Una curva de este tipo es la frontera de una región R del plano xy y, por definición, la dirección positiva a lo largo de C es tal que R se encuentra a la izquierda cuando $P(t)$ recorre C. Esto se ilustra en la Figura 18.28, en donde las flechas indican el sentido positivo a lo largo de C. La expresión

$$\oint_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

FIGURA 18.28



denota una integral de línea a lo largo de una curva cerrada simple C recorrida una vez en la dirección positiva.

El siguiente teorema, que lleva el nombre del físico matemático inglés George Green (1793-1841), exhibe una relación entre la integral de línea alrededor de C y cierta integral doble sobre R. Para simplificar el enunciado se usan los símbolos M, N, $\partial M/\partial x$ y $\partial N/\partial y$ en los integrandos para denotar los valores de estas funciones en (x, y).

TEOREMA DE GREEN (18.19)

Sea C una curva regular parte por parte y cerrada simple, y sea R la región que consta de C y su interior. Si M y N son funciones continuas que tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta D que contiene a R, entonces

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

Demostración para un caso especial Se demostrará el teorema para una región R que es tanto del Tipo I como del Tipo II (véase la página 871). Entonces puede escribirse

$$R = \{(x, y): a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

y

$$R = \{(x, y): c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

donde g_1, g_2, h_1 y h_2 son funciones regulares o alisadas. Basta demostrar las siguientes dos igualdades:

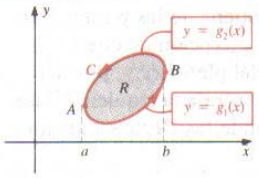
(a) $$\oint_C M\,dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dA$$

(b) $$\oint_C N\,dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dA$$

porque sumando estas integrales se obtiene la conclusión deseada.

Para demostrar (a) hacemos referencia a la Figura 18.29 y observamos que C consta de dos curvas C_1 y C_2 que tienen ecuaciones $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$, respectivamente. La integral de línea $\oint_C M\,dx$ se puede escribir

FIGURA 18.29



$$\oint_C M\,dx = \int_{C_1} M(x, y)\,dx + \int_{C_2} M(x, y)\,dx$$

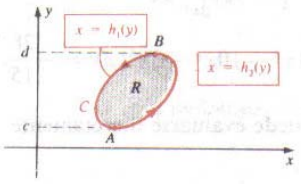
$$= \int_a^b M(x, g_1(x))\,dx + \int_b^a M(x, g_2(x))\,dx$$

$$= \int_a^b M(x, g_1(x))\,dx - \int_a^b M(x, g_2(x))\,dx.$$

Aplicando el Teorema (17.8) (i) a la integral doble $\iint_R (\partial M/\partial y)\, dA$ se obtiene

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy\, dx$$
$$= \int_a^b M(x, y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx$$
$$= \int_a^b [M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))]\, dx.$$

FIGURA 18.30

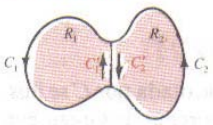


Comparando la expresión anterior con la que se obtuvo para $\oint_C M\, dx$, se llega a (a).

La fórmula en (b) se puede demostrar de manera parecida haciendo referencia a la Figura 18.30. • •

Aunque no se demostrará aquí, el Teorema de Green es válido para regiones cuyas fronteras incluyen segmentos horizontales o verticales. Entonces el teorema puede generalizarse al caso en que R es una unión finita de tales regiones. Por ejemplo, si, como se ilustra en la Figura 18.31, $R = R_1 \cup R_2$ y si la frontera de R_1 es $C_1 \cup C_1'$ y la de R_2 es $C_2 \cup C_2'$, entonces

FIGURA 18.31



$$\iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy\, dx = \oint_{C_1 \cup C_1'} M\, dx + N\, dy$$

$$\iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy\, dx = \oint_{C_2 \cup C_2'} M\, dx + N\, dy.$$

La suma de las dos integrales dobles es igual a una integral doble sobre R. La integral de línea a lo largo de C_1' en el sentido indicado en la Figura 18.31 es igual al negativo de la integral a lo largo de C_2' porque las curvas son iguales pero con orientación opuesta. Por lo tanto, la suma de las dos integrales de línea se reduce a una integral de línea a lo largo de $C_1 \cup C_2$ que es la frontera C de R. Entonces,

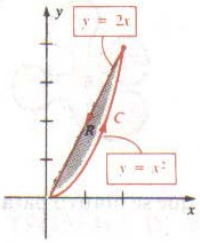
$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy\, dx = \oint_C M\, dx + N\, dy.$$

Ahora se puede demostrar el resultado por inducción matemática para cualquier unión finita. La demostración del Teorema de Green para el caso más general está fuera del alcance de este libro.

EJEMPLO 1 Aplicar el Teorema de Green para evaluar $\oint_C 5xy\, dx + x^3\, dy$, donde C es la curva cerrada que consta de las gráficas de $y = x^2$ y $y = 2x$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$.

Solución La región R acotada por C se ilustra en la Figura 18.32. Aplicando el Teorema de Green con $M(x, y) = 5xy$ y $N(x, y) = x^3$,

FIGURA 18.32



$$\oint_C 5xy\,dx + x^3\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(5xy)\right] dA$$

$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 3x^2y - 5xy\Big]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 (11x^3 - 10x^2 - 3x^4)\,dx = -\frac{28}{15}.$$

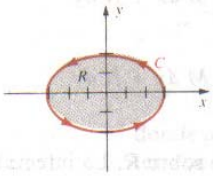
La integral de línea también puede evaluarse directamente.

EJEMPLO 2 Usar el Teorema de C p ara evaluar la integral de línea

$$\oint_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$$

donde C es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

FIGURA 18.33



Solución La región R delimitada o acotada por C se ilustra en la Figura 18.33. Aplicando el Teorema de Green con $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = x^2 + y^2$,

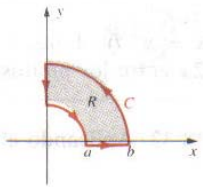
$$\oint_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = \iint_R (2x - 2x)\,dA$$

$$= \iint_R 0\,dA = 0.$$

Nótese que no usamos la curva C en la evaluación. Se puede demostrar que la integral de línea es independiente de la trayectoria y por lo tanto, es cero para *cualquier* curva cerrada simple C (véase el Teorema (18.14)). •

EJEMPLO 3 Evaluar $\oint_C (4 + e^{\sqrt{x}})\,dx + (\operatorname{sen} y + 3x^2)\,dy$, donde C es la frontera de la región R entre dos cuartos de circunferencia de radios a y b, y dos segmentos sobre los ejes coordenados, que se muestra en la Figura 18.34.

FIGURA 18.34



Solución Si aplicamos el Teorema de Green y luego se cambia la integral doble a coordenadas polares, obtenemos que la integral de línea es igual a

$$\iint_R (6x - 0)\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_a^b (6r\cos\theta) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2r^3\cos\theta\Big]_a^b d\theta = \int_0^{\pi/2} 2(b^3 - a^3)\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2(b^3 - a^3)\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2(b^3 - a^3).$$

Puede llegarse a tener una mayor apreciación del teorema si se trata de evaluar la integral de línea de este ejemplo directamente.

El Teorema de Green sirve para deducir una fórmula para calcular el área A de una región R acotada por una curva regular parte por parte y cerrada simple C. Definiendo $M = 0$ y $N = x$ y usando (18.19) se obtiene

$$A = \iint_R dA = \oint_C x\,dy$$

Sin embargo, definiendo $M = -y$ y $N = 0$ el resultado es

$$A = \iint_R dA = -\oint_C y\,dx.$$

Se pueden combinar estas dos fórmulas para A sumando las dos ecuaciones y dividiendo entre 2. Esto da el siguiente resultado.

TEOREMA (18.20)

Si la frontera de una región R en el plano xy es una curva regular parte por parte y cerrada simple C, entonces el área A de R es

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$

Aunque las dos primeras fórmulas en (18.20) parecen más fáciles de aplicar, se enuncia la tercera porque para ciertas curvas lleva a una integración más sencilla. Si el lector tiene dudas de esto, debe tratar de calcular el área en el Ejercicio 16 usando $\oint_C x\,dy$ o $-\oint_C y\,dx$.

EJEMPLO 4 Usar el Teorema (18.20) para calcular el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución La elipse C tiene las ecuaciones paramétricas $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$; $0 \le t \le 2\pi$. Aplicando la tercera fórmula en el Teorema (18.20),

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \text{sen}^2\,t)\,dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}(2\pi) = \pi ab \end{aligned}$$

FIGURA 18.35



El Teorema de Green puede generalizarse a una región R con hoyos siempre que se integre sobre *toda* la frontera manteniendo la región R a la izquierda de C. Esto se ilustra con la región de la Figura 18.35 en donde la integral doble sobre R es igual a la suma de las integrales de línea sobre C_1 y C_2 en las direcciones indicadas. La demostración se hace cortando R como se ilustra en la figura y observando que es cero la suma de dos integrales de línea a lo largo de una misma curva recorrida en direcciones opuestas. Se puede usar un argumento similar para regiones con varios hoyos. En el siguiente ejemplo se usa esta observación.

EJEMPLO 5 Sean C_1 y C_2 dos curvas regulares parte por parte y cerradas simples que no se cortan y que tienen al origen O como un punto interior. Demostrar que si $M = -y(x^2 + y^2)$ y $N = x/(x^2 + y^2)$, entonces

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy = \oint_{C_2} M\,dx + N\,dy.$$

Solución Si R denota la región entre C_1 y C_2, entonces se tiene una situación como la que se ilustra en la Figura 18.35 con O dentro de C_2. De acuerdo con los comentarios anteriores a este ejemplo,

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy + \oint_{C_2} M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

Hemos utilizado el símbolo $\circlearrowleft$ para indicar la orientación positiva a lo largo de C_2 *con respecto a* R. Como

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(1) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial M}{\partial y},$$

la integral doble sobre R es cero. Por lo tanto,

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy = -\oint_{C_2} M\,dx + N\,dy.$$

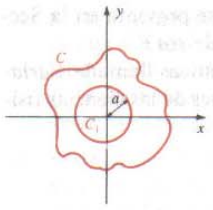
Como la orientación positiva a lo largo de C_2 *con respecto a la región dentro de* C_2 es opuesta a la indicada en la integral anterior,

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy = \oint_{C_2} M\,dx + N\,dy,$$

que es lo que se quería probar. •

EJEMPLO 6 Demostrar que si $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para toda curva regular parte por parte y cerrada simple C que tiene el origen en su interior.

FIGURA 18.36



Solución Si definimos $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, entonces M y N son las mismas que en el Ejemplo 5. Entonces si se toma una circunferencia C_1 de radio a con centro en el origen que se encuentra dentro de C (véase la Figura 18.36), usando el Ejemplo 5,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Como C_1 tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\text{sen}\,t; \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

entonces

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{C_1} \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-a\,\text{sen}\,t}{a^2}(-a\,\text{sen}\,t)\,dt + \frac{a\cos t}{a^2}(a\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\text{sen}^2\,t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\end{aligned}$$

La conclusión del Teorema de Green (18.19) se puede expresar en forma vectorial. Primero observamos que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en dos dimensiones, puede escribirse

$$\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

donde $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$. El rotacional de $\mathbf{F}$ es

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

El coeficiente de $\mathbf{k}$ tiene la forma del integrando de la integral doble en el Teorema de Green (18.19). Sea s la longitud de arco a lo largo de C y sea

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}.$$

el vector unitario tangente. Usando esta notación el Teorema de Green puede expresarse como sigue.

FORMA VECTORIAL DEL TEOREMA DE GREEN (18.21)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\,dA$$

Como $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ es la componente de rot $\mathbf{F}$ en la dirección del eje z, se le llama **componente normal** (a R) de rot $\mathbf{F}$. En otras palabras (18.21) dice: *La integral de línea de*

la componente tangencial de **F** *tomada una vez a lo largo de C en la dirección positiva es igual a la integral doble sobre R de la componente normal de* rot **F**. El resultado análogo a éste en tres dimensiones es el *Teorema de Stokes* que se presenta en la Sección 18.7. Ahí mismo se estudiarán las interpretaciones físicas de rot **F**.

El Teorema de Green es importante en la rama de las matemáticas llamada *Variable Compleja* que es un tema fundamental para muchas aplicaciones de las ciencias físicas y la ingeniería.

EJERCICIOS 18.4

Ejercicios 1-14: Use el Teorema de Green para evaluar la integral de línea.

1. $\oint_C (x^2 + y)\,dx + xy^2\,dy$; C es la curva cerrada dada por $y^2 = x$ y $y = -x$ de $(0, 0)$ a $(1, -1)$.
2. $\oint_C (x + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy$; C es la curva cerrada dada por $y = x^3$ y $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
3. $\oint_C x^2y^2\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$; C es el cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.
4. $\oint_C \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$; C es el triángulo con vértices $(1, 1)$, $(3, 1)$ y $(2, 2)$.
5. $\oint_C xy\,dx + (y + x)\,dy$; C es la circunferencia unitaria con centro en $(0, 0)$.
6. $\oint_C e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x \cos y\,dy$; C es la elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$.
7. $\oint_C xy\,dx + \operatorname{sen} y\,dy$; C es el triángulo con vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$.
8. $\oint_C \tan^{-1} x\,dx + 3x\,dy$; C es el rectángulo con vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$ y $(3, 2)$.
9. $\oint_C y^2(1 + x^2)^{-1}\,dx + 2y \tan^{-1} x\,dy$; C es la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
10. $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$; C es la frontera de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$.
11. $\oint_C (x^4 + 4)\,dx + xy\,dy$; C es la cardioide $r = 1 + \cos\theta$.
12. $\oint_C xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$; C es el rizo en el primer cuadrante de $r = \operatorname{sen} 2\theta$.
13. $\oint_C (x + y)\,dx + (y + x^2)\,dy$; C es la frontera de la región entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.
14. $\oint_C (1 - x^2y)\,dx + \operatorname{sen} y\,dy$; C es la frontera de la región que se localiza dentro del cuadrado con vértices $(\pm 2, \pm 2)$ y fuera del cuadrado con vértices $(\pm 1, \pm 1)$.

Ejercicios 15-16: Use el Teorema (18.20) para calcular el área de la región acotada por la curva C.

15. C es la hipocicloide $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$; $0 \le t \le 2\pi$.
16. C es la curva regular parte por parte que consta del folio de Descartes $x = 3t/(1 + t^3)$, $y = 3t^2/(1 + t^3)$; $0 \le t \le 1$ y el segmento de recta de $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ a $(0, 0)$.

Ejercicios 17-18: Use el Teorema (18.20) para calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

17. $y = 4x^2$, $y = 16x$
18. $y = x^3$, $y^2 = x$
19. Sea $\mathbf{F}(x, y)$ un campo vectorial en dos dimensiones tal que $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en una región D. Use el Teorema de Green para demostrar que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva regular parte por parte y cerrada simple en D.
20. Sean f y g dos funciones derivables de una variable. Demuestre que $\oint_C f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$ para toda curva regular parte por parte y cerrada simple C.
21. Sean $M = y/(x^2 + y^2)$ y $N = -x/(x^2 + y^2)$. Demuestre que si R es la región acotada por la circunferencia unitaria C con centro en el origen, entonces

$$\oint_C M\,dx + N\,dy \neq \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

Explique por qué el Teorema de Green no se cumple en este caso.

22. Sea $\mathbf{F}(x, y)$ un campo vectorial con primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa R. Demuestre que si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en R, entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva regular parte por parte y cerrada simple C en R.

23. Sea R la región acotada por una curva regular parte por parte y cerrada simple C en el plano xy. Use el Teorema de Green para demostrar que si el área de R es A, entonces el centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y})$ está dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx.$$

24. Una lámina homogénea de densidad k tiene la forma de la región en el plano xy acotada por una curva C regular parte por parte y cerrada simple. Demuestre que los momentos de inercia con respecto al eje x y al eje y son

$$I_x = -\frac{k}{3}\oint_C y^3\,dx, \quad I_y = \frac{k}{3}\oint_C x^3\,dy.$$

25. Use el Ejercicio 23 para encontrar el centro de gravedad de una región semicircular de radio a.

26. Use el Ejercicio 24 para calcular el momento de inercia de una región circular homogénea de radio a con respecto a uno de sus diámetros.

18.5 INTEGRALES DE SUPERFICIE

Las integrales de línea se evalúan a lo largo de curvas. Las integrales dobles y triples se definen sobre regiones en dos y tres dimensiones, respectivamente. También se puede considerar una integral de una función sobre una superficie. Para simplificar la discusión esta sección se restringe a superficies que son las gráficas de ecuaciones muy sencillas y las demostraciones quedarán a un nivel intuitivo. En libros de Cálculo avanzado puede encontrarse una exposición rigurosa.

Si la proyección de una superficie S sobre un plano coordenado es una región como las que se consideraron para las integrales dobles, entonces se dice que S tiene una **proyección regular** sobre el plano coordenado. Si S tiene una proyección regular sobre el plano xy, el plano xz o el plano yz, la región se denota por R_{xy}, R_{xz} o R_{yz}, respectivamente. Para tales proyecciones se supone que S es la gráfica de una ecuación de la forma $z = f(x, y)$, $y = h(x, z)$ o $x = k(y, z)$, respectivamente, como se muestra en la Figura 18.37. Además se supone que la función f, g o k tiene primeras derivadas parciales continuas en la región respectiva.

FIGURA 18.37

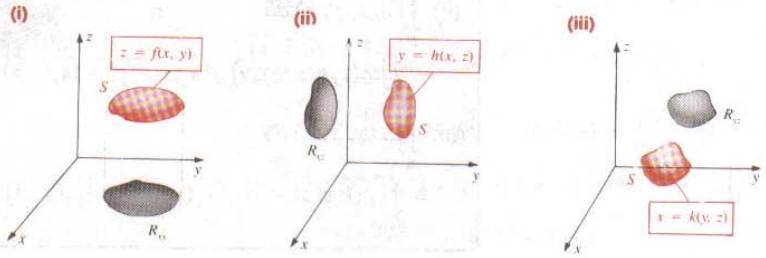
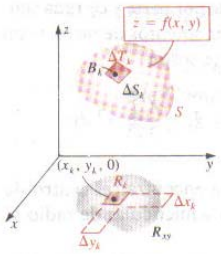


FIGURA 18.38



Se considerará sólo el caso de la gráfica S de $z = f(x, y)$ (véase la Figura 18.37)(i)). En el Capítulo 17 se definió el área A de S. Puede usarse un método semejante para definir una integral de $g(x, y, z)$ sobre la superficie S si la función g es continua en toda una región que contiene a S. Se utilizará la notación de la Sección 17.5. Entonces, como se ilustra en la Figura 18.38, ΔS_k y ΔT_k denotan las áreas de S y del plano tangente a S en $B_k(x_k, y_k, z_k)$, respectivamente, que se proyectan sobre el rectángulo R_k de una partición interior de R_{xy}. Se evalúa g en B_k para todo k y se forma la suma $\sum_k g(x_k, y_k, z_k)\,\Delta T_k$. La **integral de superficie de g sobre S** se define como el límite de estas sumas cuando la norma de las particiones tiende a 0 y se denota como sigue.

INTEGRAL DE SUPERFICIE (18.22)

$$\iint_S g(x, y, z)\,dS = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k g(x_k, y_k, z_k)\,\Delta T_k$$

Si S es la unión de varias superficies del tipo adecuado, entonces la integral de superficie se define como la suma de las integrales de superficie individuales. Si $g(x, y, z) = 1$ para todo (x, y, z), entonces (18.22) se reduce a (17.15) y la integral de superficie es igual al área de la superficie de S.

Una aplicación física de este concepto se refiere a una hoja muy delgada de metal, como el papel de estaño, con la forma de S. Si la densidad superficial de masa en (x, y, z) es $g(x, y, z)$, entonces (18.22) da la masa de la hoja. El centro de masa y los momentos de inercia pueden obtenerse aplicando los métodos usados para sólidos en el Capítulo 17 (véase el Ejercicio 21).

De manera semejante a como se hizo en el desarrollo de la fórmula (17.15) para el área de una superficie, la integral de superficie (18.22) puede evaluarse usando la fórmula (i) del siguiente teorema. Las fórmulas (ii) y (iii) se usan para superficies del tipo ilustrado en la Figura 18.37 (ii) y (iii).

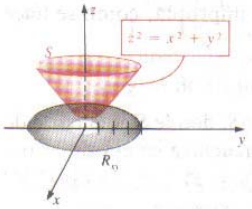
TEOREMA DE EVALUACIÓN PARA INTEGRALES DE SUPERFICIE (18.23)

(i) $$\iint_S g(x, y, z)\,dS = \iint_{R_{xy}} g(x, y, f(x, y))\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\,dA$$

(ii) $$\iint_S g(x, y, z)\,dS = \iint_{R_{xy}} g(x, h(x, z), z)\sqrt{[h_x(x, z)]^2 + [h_z(x, z)]^2 + 1}\,dA$$

(iii) $$\iint_S g(x, y, z)\,dS = \iint_{R_{xy}} g(k(y, z), y, z)\sqrt{[k_y(y, z)]^2 + [k_z(y, z)]^2 + 1}\,dA$$

FIGURA 18.39



EJEMPLO 1 Evaluar $\iint_S x^2 z\, dS$ suponiendo que S es la parte del cono circular $z^2 = x^2 + y^2$ que se encuentra entre los planos $z = 1$ y $z = 4$.

Solución Como se muestra en la Figura 18.39, la proyección R_{xy} de S sobre el plano xy es la región anular acotada por las circunferencias de radios 1 y 4 con centro en el origen. Si escribimos la ecuación para S en la forma

$$z = (x^2 + y^2)^{1/2} = f(x, y),$$

entonces

$$f_x(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Aplicando (18.23) (i) y observando que el radical se reduce a $\sqrt{2}$, obtenemos

$$\iint_S x^2 z\, dS = \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{1/2} \sqrt{2}\, dA.$$

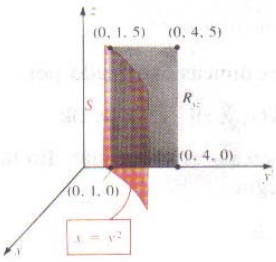
Usando coordenadas polares para evaluar la integral doble,

$$\iint_S x^2 z\, dS = \int_0^{2\pi} \int_1^4 (r^2 \cos^2\theta) r\sqrt{2} r\, dr\, d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \frac{r^5}{5}\Big]_1^4 d\theta$$

$$= \frac{1023\sqrt{2}}{5} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1023\sqrt{2}}{10}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1023\sqrt{2}\pi}{5} \approx 909$$

FIGURA 18.40



EJEMPLO 2 Evaluar $\iint_S (xz/y)\, dS$, donde S es la parte del cilindro $x = y^2$ que se encuentra en el primer octante entre los planos $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ y $y = 4$.

Solución La superficie S está en la Figura 18.40 (con una escala diferente en el eje x). La proyección R_{yz} de S sobre el plano yz es el rectángulo con vértices (0, 1, 0), (0, 4, 0), (0, 4, 5) y (0, 1,5). Entonces, por el Teorema (18.23) (iii) con $k(y, z) = y^2$.

$$\iint_S \frac{xz}{y}\, dS = \int_1^4 \int_0^5 \frac{y^2 z}{y} \sqrt{(2y)^2 + 0^2 + 1}\, dz\, dy$$

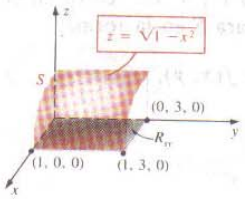
$$= \int_1^4 \int_0^5 yz\sqrt{4y^2 + 1}\, dz\, dy = \int_1^4 y\sqrt{4y^2 + 1}\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^5 dy$$

$$= \tfrac{25}{2} \int_1^4 y\sqrt{4y^2 + 1}\, dy = \tfrac{25}{24}(4y^2 + 1)^{3/2}\Big]_1^4$$

$$= \tfrac{25}{24}[65^{3/2} - 5^{3/2}] \approx 534.2$$

Las fórmulas en el Teorema (18.23) presuponen que las funciones f, h y k tienen primeras derivadas parciales continuas sobre R_{xy}, R_{xz} y R_{yz}, respectivamente. El algunos casos puede quitarse esta restricción usando una integral impropia, como se hace en el siguiente ejemplo.

FIGURA 18.41



EJEMPLO 3 Evaluar $\iint_S (z + y)\, dS$, donde S es la parte de la gráfica de $z = \sqrt{1 - x^2}$ que se encuentra en el primer octante entre el plano xz y el plano $y = 3$.

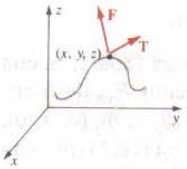
Solución La superficie S es la parte que se encuentra en el primer octante del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ entre $y = 0$ y $y = 3$. La gráfica está en la Figura 18.41. La proyección R_{xy} de S sobre el plano xy es la región rectangular con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 3, 0)$ y $(0, 3, 0)$. Si usamos el Teorema (18.23) (i) con $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$,

$$\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2 + (0)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Observamos que $f_x(x, y)$ no está definida en $x = 1$ y por lo tanto no es continua en todo R_{xy}. Sin embargo, puede aplicarse el Teorema (18.23) (i) con $0 \le x < 1$ y usar luego una integral impropia como sigue.

$$\begin{aligned}
\iint_S (z + y)\, dS &= \iint_{R_{xy}} (\sqrt{1 - x^2} + y) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dA \\
&= \int_0^1 \int_0^3 \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[y + \frac{1}{2}\frac{y^2}{\sqrt{1 - x^2}}\right]_0^3 dx = \int_0^1 \left[3 + \frac{1}{2}\frac{9}{\sqrt{1 - x^2}}\right] dx \\
&= \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \left[3 + \frac{9}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right] dx \\
&= \lim_{t \to 1^-} [3t + \tfrac{9}{2} \operatorname{arcsen} t] = 3 + \tfrac{9}{4}\pi \approx 10.1
\end{aligned}$$

FIGURA 18.42



Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en tres dimensiones dado por

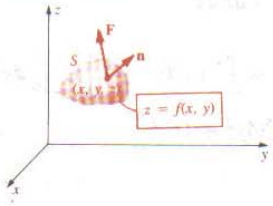
$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

donde M, N y P son funciones (escalares) continuas. En la Sección 18.2 se consideró la integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

donde $\mathbf{T}$ es un vector unitario tangente a una curva regular parte por parte C en el punto (x, y, z) (véase la Figura 18.42). Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza, entonces según (18.12), el valor de esta integral es el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de C.

FIGURA 18.43



Sea S una superficie y $\mathbf{n}$ un vector unitario normal a S en (x, y, z), como se ilustra en la Figura 18.43. Si las componentes de $\mathbf{n}$ son funciones continuas de x, y, z, entonces $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ es una función (escalar) continua y se puede considerar la siguiente integral de superficie sobre S que (por razones que se discuten al final de la sección) se llama **integral de flujo** (integral de superficie) de $\mathbf{F}$ sobre S.

INTEGRAL DE FLUJO DE F SOBRE S (18.24)

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Para evaluar (18.24) es necesario precisar las propiedades del vector unitario $\mathbf{n}$. Si la superficie S es la gráfica de una ecuación $z = f(x, y)$, y se define $g(x, y, z) = z - f(x, y)$, entonces S es también la gráfica de la ecuación $g(x, y, z) = 0$. Como el gradiente $\nabla g(x, y, z)$ es un vector normal a la gráfica de $g(x, y, z) = 0$ en el punto (x, y, z), el vector *unitario* normal $\mathbf{n}$ se puede obtener como sigue:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} = \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}.$$

Se pueden establecer fórmulas semejantes cuando S está dada por $y = h(x, z)$ o por $x = k(y, z)$. Obsérvese que para el caso $z = f(x, y)$ el vector unitario $\mathbf{n}$ es el vector **normal superior** a S porque su componente $\mathbf{k}$ es positiva. El vector **normal inferior** es $-\mathbf{n}$.

Por el resto de este capítulo se supone que toda superficie S está **orientada** (o es **orientable**) en el sentido de que existe un vector normal unitario $\mathbf{n}$ en todos los puntos (x, y, z) que no están en la frontera, y las componentes de $\mathbf{n}$ son funciones continuas de x, y, z. En este caso se dice que $\mathbf{n}$ *varía continuamente* sobre la superficie S. También se supone que S tiene dos lados, tales como el "lado de arriba" y el "lado de abajo" de la gráfica de $z = f(x, y)$ en la Figura 18.43. Para una superficie *cerrada* S como una esfera, pueden considerarse la "parte de afuera" y la "parte de adentro" de S. En este último caso, $\mathbf{n}$ se llama **vector unitario normal exterior**, o **vector unitario normal interior** (véanse las Figuras 18.44 y 18.45).

FIGURA 18.44

Vectores unitarios normales exteriores

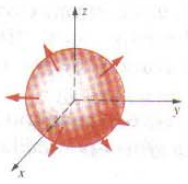
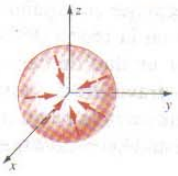


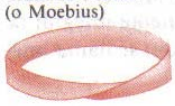
FIGURA 18.45

Vectores unitarios normales interiores



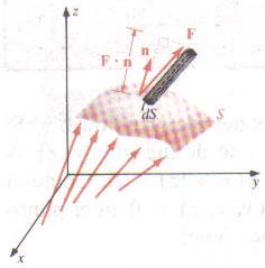
Las restricciones impuestas sobre S eliminan las *superficies unilaterales* como la *cinta* (o *banda*) *de Möbius*, superficie que lleva el nombre del matemático alemán A. F. Möbius (1790-1868). Se puede tener materialmente una cinta de Möbius tomando una tira rectangular larga de papel y uniendo sus dos extremos después de torcerla una

FIGURA 18.46
Cinta de Möbius (o Moebius)



vez, como se ilustra en la Figura 18.46. Si un pintor comenzara a pintar la cinta desde uno de sus puntos, y se propusiera cubrir sólo un lado de la banda, a la larga regresará al punto de partida, habiendo pintado toda la cinta sin cruzar por las orillas. Ésta es una superficie unilateral no orientable.

FIGURA 18.47



Para dar una interpretación física a la integral de flujo (18.24), consideremos a S como una membrana delgada a través de la cual se filtra un líquido o un gas. Supongamos que S está sumergida en un fluido que tiene un campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y, z)$. En la parte inferior de la Figura 18.47 se muestran algunos vectores típicos del campo. Cada vector es la velocidad de una partícula (o molécula) del fluido.

Sea dS un pequeño elemento de área de S. Si $\mathbf{F}$ es continuo, entonces es casi constante sobre dS y la cantidad de fluido que atraviesa dS por unidad de tiempo es aproximadamente igual al volumen de un prisma con área en la base dS y altura $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, como se ilustra en la Figura 18.47. Si dV denota el volumen del prisma de la figura, entonces $dV = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$. Como dV representa la cantidad de fluido que cruza dS por unidad de tiempo, la integral de flujo es el límite de las sumas de los elementos de volumen y por lo tanto, da el volumen de fluido que cruza S por unidad de tiempo. Esta cantidad es el *flujo* de $\mathbf{F}$ *a través de* S. Si $\mathbf{F}$ y S satisfacen las condiciones impuestas, entonces se tiene lo siguiente.

DEFINICIÓN (18.25)

El **flujo** de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de (o sobre) una superficie S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Si en la discusión anterior el fluido tiene densidad $\delta = \delta(x, y, z)$, entonces el valor de la integral de flujo $\iint_S \delta\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ es la *masa* de fluido que atraviesa S por unidad de tiempo.*

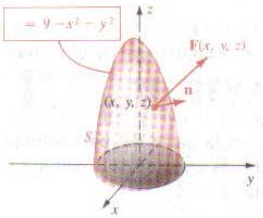
El campo vectorial $\mathbf{F}$ de la Definición (18.25) también podría representar flujo térmico estacionario, un gas que se expande uniformemente, una corriente eléctrica (u otros campos que aparecen en la teoría de la electricidad). En estos casos, "flujo" corresponde a cantidad (por unidad de tiempo) de calor que cruza S, de gas a través de S, o de carga eléctrica a través de S, respectivamente.

Para una superficie cerrada como una esfera, si $\mathbf{n}$ es el vector unitario *normal exterior*, entonces el flujo mide el *desplazamiento neto hacia afuera* por unidad de tiempo.

* **(N. del R.)** El concepto de *flujo* se extiende de la mecánica de fluidos a la electricidad (flujo eléctrico o magnético, donde no se considera el tiempo). Cuando $\mathbf{F}$ es velocidad el producto $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ (componente normal de la velocidad) es propiamente la *intensidad de flujo* (o volumen que fluye por unidad de tiempo y *por unidad de área*). La integral de flujo da, como se indica, el volumen total que fluye por unidad de tiempo a través de S.

Si la integral de flujo es positiva, el flujo hacia afuera de S es mayor que el flujo hacia adentro y se dice entonces que hay una **fuente** de $\mathbf{F}$ dentro de S. Si la integral es negativa, entonces el flujo hacia adentro de S es mayor que el flujo hacia afuera de S y se dice que hay un **sumidero** dentro de S. Si la integral es 0, entonces el flujo hacia adentro y el flujo hacia afuera de S son iguales, es decir, las fuentes y los sumideros se compensan.

FIGURA 18.48



EJEMPLO 4 Sea S la parte de la gráfica de $z = 9 - x^2 - y^2$ tal que $z \geq 0$ y sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

Solución La gráfica está en la Figura 18.48 junto con el vector unitario normal superior $\mathbf{n}$ y el vector $\mathbf{F}(x, y, z)$. Como se dijo anteriormente, para obtener $\mathbf{n}$ definimos

$$g(x, y, z) = z - (9 - x^2 - y^2) = z - 9 + x^2 + y^2,$$

y se toma

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Según (18.25), el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, dS.$$

Aplicando el Teorema (18.23) (i),

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_{B_{xy}} \frac{6x^2 + 6y^2 + 9 - x^2 - y^2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA \\ &= \iint_{R_{xy}} (5x^2 + 5y^2 + 9)\, dA\end{aligned}$$

donde R_{xy} es la región circular en el plano xy acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$. Cambiando a coordenadas polares,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (5r^2 + 9) r\, dr\, d\theta = \frac{567\pi}{2} \approx 890.6.$$

Si, por ejemplo, $\mathbf{F}$ es el campo de velocidad de un gas en expansión y $\|\mathbf{F}\|$ se mide en cm/s, entonces la unidad de flujo es cm^3/s. Por lo tanto, el flujo de gas a través de la superficie S en la Figura 18.48 sería aproximadamente de $890.6\,\text{cm}^3/\text{s}$. •

En la siguiente sección se presenta un resultado que recibe el nombre de *Teorema de la Divergencia* que permite evaluar el flujo a través de una superficie cerrada usando una integral triple.

EJERCICIOS 18.5

Ejercicios 1-4: Evalúe $\iint_S g(x, y, z)\, dS$.

1. $g(x, y, z) = x^2$; S es la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
2. $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; S es la parte del plano $z = y + 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
3. $g(x, y, z) = x + y$; S es la parte del plano $2x + 3y + z = 6$ contenida en el primer octante.
4. $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1)^{1/2}$; S es la parte del paraboloide $2z = x^2 + y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

Ejercicios 5-8: Plantee, pero no evalúe, la integral de superficie usando la proyección de S sobre (a) el plano yz y (b) el plano xz.

5. $\iint_S xy^2z^3\, dS$; S es la parte del plano $2x + 3y + 4z = 12$ contenida en el primer octante.
6. $\iint_S (xz + 2y)\, dS$; S es la parte de la gráfica de $y = x^3$ que se encuentra entre los planos $y = 0$, $y = 8$, $z = 2$ y $z = 0$.
7. $\iint_S (x^2 - 2y + z)\, dS$; S es la parte de la gráfica de $4x + y = 8$ acotada por los planos coordenados y por el plano $z = 6$.
8. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$; S es la parte en el primer octante de la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ acotada por los planos coordenados y el plano $x + z = 2$.
9. Interprete $\iint_S g(x, y, z)\, dS$ en términos geométricos suponiendo que f es la función constante $g(x, y, z) = c$ con $c > 0$ y S tiene una proyección regular sobre el plano xy.
10. Demuestre que la integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ es un caso especial de una integral de superficie.

Ejercicios 11-14: Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal superior de S.

11. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
12. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$; S es la parte en el primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
13. $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S es la parte del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
14. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la parte del plano $3x + 2y + z = 12$ acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ y $y = 2$.

Ejercicios 15-16: Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la parte del plano $2x + 3y + z = 6$ contenida en el primer octante.
16. En este caso $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + z)\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z)\mathbf{k}$; S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ contenida en el primer octante y acotada por el plano $z = 4$.

Ejercicios 17-18: Determine el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie cerrada S. (Utilice la normal *exterior* a S.)

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; S es la superficie del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la superficie del sólido acotada por las gráficas de $z = x^2 + y^2$ y $z = 4$.
19. Demuestre que si S está dada por $x = k(y, z)$ y $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R_{yz}} [M - Nk_y(y, z) - Pk_z(y, z)]\, dy\, dz.$$

20. Según la ley de Coulomb, si se coloca en el origen una carga puntual de q coulombs, entonces la fuerza ejercida sobre una carga unitaria en (x, y, z) está dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = (cq/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$ donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que si S es cualquier esfera con centro en el origen, entonces el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S es $4\pi cq$.
21. Si una hoja delgada de metal T tiene la forma de una superficie S y una densidad superficial $\delta(x, y, z)$, entonces los *momentos* de T con respecto a los planos coordenados se definen como

$$M_{xy} = \iint_S z\delta(x, y, z)\, dS, \quad M_{xz} = \iint_S y\delta(x, y, z)\, dS,$$

y

$$M_{yz} = \iint_S x\delta(x, y, z)\, dS.$$

Use límites de sumas para demostrar que estas definiciones son "naturales". El *centro de masa* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ está dado por

$$\bar{x}m = M_{yz}, \quad \bar{y}m = M_{xz}, \quad \bar{z}m = M_{xy}$$

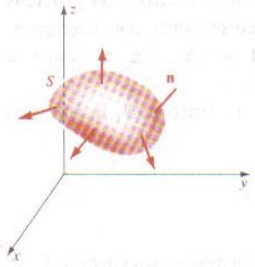
donde m es la masa de T. Un embudo de metal tiene la forma de la superficie S descrita en el Ejemplo 1 (véase la Figura 18.39). La unidad de longitud es el centímetro y la densidad superficial (o masa por unidad de área) en el punto (x, y, z) es z^2 g/cm^2. Calcule la masa y localice el centro de masa del embudo. Determine el momento de inercia del embudo con respecto al eje z.

22. Consulte el Ejercicio 21. Una hoja delgada de metal que tiene densidad constante k, tiene la forma del hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Encuentre su centro de masa.

18.6 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Uno de los teoremas más importantes del Cálculo vectorial es el *Teorema de la Divergencia*. A veces se le llama *Teorema de Gauss* en honor de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), a quienes muchos consideran el matemático más grande de todos los tiempos. El teorema se refiere al flujo de un campo vectorial a través de una **superficie cerrada** S que es la frontera de una región Q en tres dimensiones. Por ejemplo, S podría ser una esfera, un elipsoide, un cubo o un tetraedro. El Teorema de la Divergencia puede demostrarse para regiones muy complicadas, pero hacerlo así implica incursionar en el Cálculo avanzado. En lugar de eso, *a lo largo de toda esta sección*, se supone que Q es una región sobre la cual las integrales triples pueden evaluarse usando los métodos desarrollados en el Capítulo 17. También se supone que las integrales de superficie se pueden evaluar sobre S. En esta sección $\mathbf{n}$ denota un vector unitario normal *exterior* a S, como los que se ilustran en la Figura 18.49.

FIGURA 18.49



Con las restricciones impuestas a Q y S, el Teorema de la Divergencia se puede enunciar como sigue.

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA (18.26)

Sea Q una región en tres dimensiones acotada por una superficie cerrada S y sea $\mathbf{n}$ un vector unitario normal exterior a S en (x, y, z). Si $\mathbf{F}$ es una función vectorial que tiene derivadas parciales continuas en Q, entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

El Teorema de la Divergencia (18.26) afirma que *el flujo de* $\mathbf{F}$ *a través de* S *es igual a la integral triple de la divergencia de* $\mathbf{F}$ *sobre* Q. Si

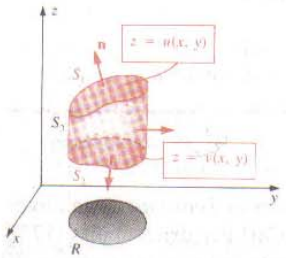
$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k},$$

se usará la notación simplificada $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$. Usando las propiedades del producto escalar y la definición de $\mathbf{F}$, la fórmula en el Teorema de la Divergencia se puede escribir

$$\iint_S (M\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} + N\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} + P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) dV.$$

Para demostrar esta igualdad basta probar que

FIGURA 18.50



$$\iint_S M\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x}\, dV$$

$$\iint_S N\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y}\, dV$$

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\, dV$$

Como las demostraciones de las tres fórmulas son semejantes, sólo se probará la tercera. Más aún, la demostración se restringe al caso que se ilustra en la Figura 18.50, donde la superficie S es la frontera de una región Q que se encuentra entre las gráficas de $z = v(x, y)$ y $z = u(x, y)$ sobre una región R apropiada en el plano xy. La superficie superior se denota por S_1, la inferior por S_2 y la lateral por S_3. En la figura se muestran algunos vectores unitarios normales exteriores típicos.

En S_3, la componente $\mathbf{k}$ de $\mathbf{n}$ es 0 y por lo tanto, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$. Entonces, la integral de flujo sobre S_3 es 0 y se puede escribir

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Como en la Sección 18.5, para encontrar el vector unitario normal (superior) a S_1 se define

$$g_1(x, y, z) = z - u(x, y)$$

y se calcula

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g_1(x, y, z)}{\| \nabla g_1(x, y, z) \|} = \frac{-u_x(x, y)\mathbf{i} - u_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[u_x(x, y)]^2 + [u_y(x, y)]^2 + 1}}.$$

Entonces $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 1/\sqrt{[u_x(x, y)]^2 + [u_y(x, y)]^2 + 1}$. Aplicando el Teorema (18.23) (i) con $R = R_{xy}$ y $u(x, y) = f(x, y)$, los radicales se cancelan y se obtiene

$$\iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R P(x, y, u(x, y))\, dA.$$

En S_2 se define

$$g_2(x, y, z) = z - v(x, y)$$

y se usa el vector unitario normal *inferior* $\mathbf{n}$ dado por

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla g_2(x, y, z)}{\| \nabla g_2(x, y, z) \|} = \frac{v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{[v_x(x, y)]^2 + [v_y(x, y)]^2 + 1}}$$

Aplicando de nuevo (18.23) (i), se obtiene la integral de flujo sobre S_2:

$$\iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_R P(x, y, v(x, y))\, dA$$

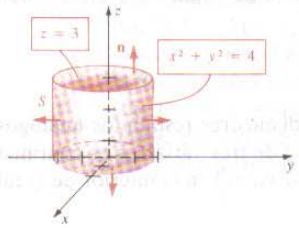
Sumando las integrales de flujo sobre S_1 y S_2,

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R [P(x, y, u(x, y)) - P(x, y, v(x, y))]\, dA$$

$$= \iint_R \left[\int_{v(x,y)}^{u(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\, dz \right] dA = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\, dV,$$

que es lo que se quería poner de manifiesto. No es difícil generalizar esta demostración a uniones finitas de regiones del tipo considerado. Las demostraciones de las fórmulas para $\iint_S M\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS$ y $\iint_S N\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS$ son semejantes si Q y S cumplen las condiciones adecuadas.

FIGURA 18.51



EJEMPLO 1 Sean Q la región acotada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y de $z = 3$, S la frontera de Q y $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$. Use el Teorema de la Divergencia para evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

Solución En la Figura 18.51 se representan la superficie S y algunas posiciones típicas del vector $\mathbf{n}$. Como

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

por el Teorema de la Divergencia (18.26) tenemos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 3 \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2)\, dV.$$

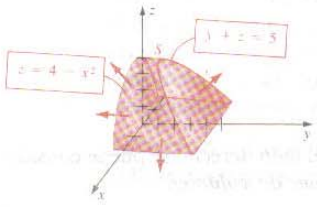
Usando coordenadas cilíndricas para evaluar la integral triple, se tiene

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + z^2) r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[r^2 z + \tfrac{1}{3} z^3 \right]_0^3 r\, dr\, d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^2 + 9) r\, dr\, d\theta$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{3}{4} r^4 + \tfrac{9}{2} r^2 \right]_0^2 d\theta = 3 \int_0^{2\pi} 30\, d\theta = 90\theta \Big]_0^{2\pi} = 180\pi$$

FIGURA 18.52



EJEMPLO 2 Sea Q la región acotada por el cilindro $z = 4 - x^2$, el plano $y + z = 5$, el plano xy y el plano xz. Llevar a cabo la evaluación de $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ para $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x^2 y + \cos z)\mathbf{j} + e^{x^2+y^2}\mathbf{k}$, donde la superficie S es la superficie de Q.

Solución La región Q está en la Figura 18.52 junto con varios vectores unitarios exteriores. Sería muy difícil evaluar

la integral de superficie directamente. Sin embargo, usando el Teorema de la Divergencia puede calcularse el valor de la integral triple

$$\iiint_Q (3x^2 + x^2)\, dV = \iiint_Q 4x^2\, dV.$$

Consultando la Figura 18.52 para obtener los límites de integración y usando (17.18), vemos que esta integral es igual a

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{0}^{5-z} 4x^2\, dy\, dz\, dx &= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} 4x^2(5-z)\, dz\, dx \\ &= \int_{-2}^{2}\left[20x^2z - 2x^2z^2\right]_0^{4-x^2} dx \\ &= \int_{-2}^{2}(48x^2 - 4x^4 - 2x^6)\, dx \\ &= \frac{4608}{35} \approx 131.7\end{aligned}$$

El Teorema de la Divergencia puede usarse para dar una interpretación física a la divergencia de un campo vectorial. Por el Teorema del Valor Medio para Integrales Definidas (5.20), si una función f de una variable es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)L$$

donde $L = b - a$ es la longitud de $[a, b]$. Se pueden demostrar resultados análogos para las integrales dobles y triples. Así, si una función f de tres variables es continua en una región esférica Q, entonces existe un punto $A(x_1, y_1, z_1)$ en el interior de Q tal que

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = [f(x, y, z)]_A\, V$$

donde V es el volumen de Q y $[f(x, y, z)]_A = f(x_1, y_1, z_1)$. Este resultado se llama **Teorema del Valor Medio para Integrales Triples**. Resulta que si $\mathbf{F}$ es una función vectorial continua, entonces

$$\iiint_Q \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = [\nabla \cdot \mathbf{F}]_A\, V$$

o bien

$$[\nabla \cdot \mathbf{F}]_A = \frac{1}{V}\iiint_Q \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia,

$$[\nabla \cdot \mathbf{F}]_A = \frac{1}{V}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

donde la superficie S es la frontera de Q. El término del lado derecho se puede considerar como *el flujo de* $\mathbf{F}$ *a través de la esfera por unidad de volumen.*

FIGURA 18.53



Ahora sea P un punto arbitrario y $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo en una región que contiene a P en su interior. Sea S_k la frontera de una esfera de radio k con centro en P. De acuerdo con la discusión anterior, para todo k existe un punto P_k dentro de S_k tal que

$$[\nabla \cdot \mathbf{F}]_{P_k} = \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

donde V_k es el volumen de la esfera (véase la Figura 18.53). Si $k \to 0$, entonces $P_k \to P$ y se obtiene lo siguiente.

LA DIVERGENCIA COMO UN LÍMITE (18.27)

$$[\operatorname{div} \mathbf{F}]_P = \lim_{k \to 0} \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Así, *la divergencia de* $\mathbf{F}$ *en* P *es el límite del flujo por unidad de volumen a través de una esfera con centro en* P, *cuando el radio de dicha esfera tiende a* 0. En particular, si $\mathbf{F}$ representa la velocidad del fluido, entonces $[\operatorname{div} \mathbf{F}]_P$ se puede interpretar como la tasa de pérdida o ganancia de fluido en P por unidad de volumen y por unidad de tiempo. Si $\delta = \delta(x, y, z)$ es la densidad en (x, y, z), entonces $[\operatorname{div} \delta\mathbf{F}]_P$ es el cambio de *masa* por unidad de volumen y por unidad de tiempo. De los comentarios al final de la Sección 18.5 se concluye que hay una fuente o un sumidero en P si $[\operatorname{div} \mathbf{F}]_P > 0$ o $[\operatorname{div} \mathbf{F}]_P < 0$, respectivamente. Si el fluido es incompresible y no hay fuentes ni sumideros, entonces no puede haber ganancia o pérdida dentro del elemento de volumen V_k, y por lo tanto, en todo punto P,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

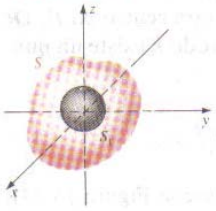
Esta fórmula se llama **ecuación de continuidad** para los fluidos incompresibles.

La expresión de la divergencia como un límite (18.27) también se puede aplicar a otros conceptos físicos como el flujo eléctrico o magnético ya que tienen muchas características semejantes a las del movimiento de un fluido. Análogamente, si $\mathbf{F}$ representa el flujo de calor o térmico en una región y si $[\nabla \cdot \mathbf{F}]_P > 0$, entonces hay una fuente de calor en P (*sale* energía térmica por P y por lo tanto la temperatura en P disminuye). Si $[\nabla \cdot \mathbf{F}]_P < 0$, entonces P *absorbe* calor (o la temperatura en P aumenta).

EJEMPLO 3 Sea S una superficie cerrada que es la frontera de una región Q que tiene al origen O como un punto interior. Demuestre que si se tiene un campo de variación inversa al cuadrado (o de tipo gravitacional) dado por $\mathbf{F} = (q/r^3)\mathbf{r}$, donde q es una constante, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = \|\mathbf{r}\|$, entonces el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S es $4\pi q$ independientemente de la forma de Q.

Solución Como $\mathbf{F}$ no es continuo en O, el Teorema de la Divergencia no se puede aplicar directamente; sin embargo, podemos proceder como sigue. Sea S_1 una esfera

FIGURA 18.54



de radio a con centro en O completamente contenida dentro de S (véase la Figura 18.54) y sea Q_1 la región *fuera de* S_1 y *dentro de* S. Como $\mathbf{F}$ es continuo en Q_1, podemos aplicar el Teorema de la Divergencia y obtenemos

$$\iiint_{Q_1} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Es posible demostrar que si $\mathbf{F}$ es un campo de tipo gravitacional, entonces $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ (véase el Ejercicio 21 de la Sección 18.1) y por lo tanto,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Como $\mathbf{n}$, el vector unitario normal a S_1 es *exterior*, apunta hacia *afuera* de la región Q_1 que tiene a S_1 como una parte de su frontera. Por lo tanto, en S_1 el vector unitario normal $\mathbf{n}$ apunta *hacia* el origen. Entonces $\mathbf{n} = (-1/r)\mathbf{r}$ con $r = a$ y

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= -\iint_{S_1} \left(\frac{q}{r^3}\right)\mathbf{r} \cdot \left(-\frac{1}{r}\mathbf{r}\right) dS \\ &= \iint_{S_1} \frac{q}{r^4}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\, dS = \iint_{S_1} \frac{q}{r^2}\, dS \\ &= \frac{q}{a^2}\iint_{S_1} dS = \frac{q}{a^2}(4\pi a^2) = 4\pi q \quad \bullet\end{aligned}$$

El Ejemplo 3 tiene una aplicación importante en la teoría de la electricidad. Según la ley de Coulomb, si se coloca una carga de q coulombs en el origen, entonces la fuerza sobre una carga unitaria en (x, y, z) es $\mathbf{F}(x, y, z) = (cq/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y c es una constante. Resulta que el *flujo* (o *flujo eléctrico*) de $\mathbf{F}$ a través de cualquier superficie cerrada que contiene al origen es $4\pi cq$. Por lo tanto, el flujo eléctrico es independiente del tamaño y de la forma de S y sólo depende de q. No es difícil generalizar esto al caso de varias cargas puntuales dentro de S. Este resultado, que se llama *ley de Gauss*, tiene consecuencias importantes en el estudio de los campos eléctricos.

EJERCICIOS 18.6

Ejercicios 1-4: Utilice el Teorema de la Divergencia (18.26) para evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

1. $\mathbf{F} = y \operatorname{sen} x\mathbf{i} + y^2 z\mathbf{j} + (x + 3z)\mathbf{k}$; la superficie S es la frontera de la región acotada por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.
2. $\mathbf{F} = y^3 e^z\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + x \arctan y\mathbf{k}$; la superficie S es la frontera de la región acotada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.
3. $\mathbf{F} = (x^2 + \operatorname{sen} yz)\mathbf{i} + (y - xe^{-z})\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; la superficie S es la frontera de la región acotada

por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 2$ y $z = 0$.

4. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + z\cosh x\mathbf{j} + (z^2 + y\,\text{sen}^{-1}x)\mathbf{k}$; la superficie S es la frontera de la región acotada por las gráficas de $z = x^2 + y^2$ y $z = 1$.

Ejercicios 5-10: Use el Teorema de la Divergencia para determinar el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; S es la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$.

6. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + z^2)\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (4z - 2yz)\mathbf{k}$; la superficie S es la frontera de la región acotada por el cono $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ y el plano $x = 9$.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; la superficie S es la frontera de la región acotada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy.

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$; la superficie S es la frontera de la región que se encuentra entre los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$ y entre los planos $z = -1$ y $z = 2$.

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$; la superficie S es la frontera de la región acotada por los planos coordenados y las gráficas de $x + 2z = 4$ y $y = 2$.

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; la superficie S es la frontera (superficie) de la región que se encuentra dentro del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Ejercicios 11-14: Verifique el Teorema de la Divergencia (18.26) evaluando la integral de superficie y la integral triple.

11. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

12. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la frontera del cubo acotado por los planos coordenados y los planos $x = a$, $y = a$, $z = a$, donde $a > 0$.

13. $\mathbf{F} = (x + z)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; S corresponde a la frontera de la región designada como $Q = \{(x, y, z): 0 \le y^2 + z^2 \le 1, 0 \le x \le 2\}$.

14. $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^2\mathbf{r}$ para $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

15. Demuestre que si $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$ para todas las superficies cerradas del tipo considerado en el Teorema de la Divergencia, entonces div $\mathbf{F} = 0$.

16. Sírvase del Teorema de la Divergencia para demostrar que si una función escalar f tiene segundas derivadas parciales continuas, se tiene que $\iiint_Q \nabla^2 f\,dV = \iint_S D_{\mathbf{n}} f\,dS$, donde $D_{\mathbf{n}} f$ es la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario normal $\mathbf{n}$ exterior a S.

Ejercicios 17-18: Suponiendo que S y Q satisfacen las condiciones del Teorema de la Divergencia y que f y g son funciones escalares que tienen segundas derivadas parciales continuas, demuestre la identidad dada.

17. $\iiint_Q (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dV = \iint_S (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\,dS$
(*Sugerencia:* Sea $\mathbf{F} = f\nabla g$ en (18.26).)

18. $\iiint_Q (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\,dS$
(*Sugerencia:* Use la identidad del Ejercicio 17 junto con la que se obtiene intercambiando f y g.)

Ejercicios 19-22: Suponga que S y Q satisfacen las condiciones del Teorema de la Divergencia.

19. Pruebe que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo con función de potencial f, y si div $\mathbf{F} = 0$, entonces $\iiint_Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}\,dV = \iint_S f\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$.

20. Demuestre que si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y V es el volumen de Q, entonces $V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\,dS$.

21. Demuestre que si $\mathbf{F}$ tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$.

22. Demuestre que si $\mathbf{a}$ es un vector constante, entonces $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$.

Ejercicios 23-24: La integral de superficie (o la integral triple) de una función vectorial se define como la suma de las integrales de superficie (o las integrales triples) de las componentes de la función. Use este hecho y suponga que S y Q satisfacen las condiciones del Teorema de la Divergencia para demostrar el resultado enunciado.

23. $\iint_S \mathbf{F} \times \mathbf{n}\,dS = -\iiint_Q \nabla \times \mathbf{F}\,dV$. (*Sugerencia:* Aplique el Teorema de la Divergencia y el Ejercicio 26 de la Sección 18.1 a $\mathbf{c} \times \mathbf{F}$ para un vector constante arbitrario $\mathbf{c}$.)

24. $\iint_S f\mathbf{n}\,dS = \iiint_Q \nabla f\,dV$. (*Sugerencia:* Aplique el Teorema de la Divergencia a $f\mathbf{c}$ para un vector constante arbitrario $\mathbf{c}$.)

25. Demuestre que si en cualquier punto (x, y, z) $\mathbf{F}$ es ortogonal a S, entonces $\iiint_Q \text{rot}\,\mathbf{F}\,dV = \mathbf{0}$.

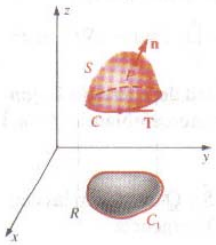
26. Demuestre que si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de (x, y, z) y $r = \|\mathbf{r}\|$, se tiene que $\iiint_Q \mathbf{r}\,dV = \frac{1}{2}\iint_S r^2\mathbf{n}\,dS$.

18.7 TEOREMA DE STOKES

En (18.21) se presentó la siguiente forma vectorial del Teorema de Green:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_R (\text{rot}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA$$

FIGURA 18.55



en donde la curva plana C es la frontera de R. Este resultado se puede generalizar a una curva regular parte por parte y cerrada simple C en tres dimensiones que es la frontera de una superficie S. El croquis de la Figura 18.55 ilustra el caso en que S es la gráfica de $z = f(x, y)$, f tiene primeras derivadas parciales continuas y la proyección C_1 de C sobre el plano xy es una curva que es la frontera de una región R del *tipo considerado en el Teorema de Green. En la figura,* $\mathbf{n}$ *es* un vector unitario normal *superior* respecto a S. Se toma como sentido positivo a lo largo de C el que corresponde a la orientación positiva a lo largo de C_1. El vector $\mathbf{T}$ es un vector unitario tangente a C que apunta en la dirección positiva. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región que contiene a S, entonces se tiene el siguiente teorema, que lleva el nombre del físico matemático inglés George G. Stokes (1819-1903).

TEOREMA DE STOKES (18.28)

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\text{rot}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

El Teorema de Stokes se puede enunciar como sigue: *La integral de línea de la componente tangencial de* $\mathbf{F}$ *a lo largo de* C *recorrida una vez en la orientación positiva es igual a la integral de superficie sobre* S *de la componente normal de* rot $\mathbf{F}$. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza, el teorema afirma que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de C es igual al flujo de rot $\mathbf{F}$ a través de S. La integral de línea en (18.28) también se puede expresar como $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición del punto (x, y, z) de C. Para analizar situaciones más generales que la ilustrada en la Figura 18.55, hay que considerar una superficie *orientada* S y definir un sentido positivo a lo largo de C de manera adecuada. (La demostración del Teorema de Stokes se puede encontrar en libros de Cálculo más avanzados.)

EJEMPLO 1 Sea S la parte del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$, y sea C la traza de S en el plano xy. Verificar el Teorema de Stokes (18.28) para el campo vectorial $\mathbf{F} = 3z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$.

Solución Queremos demostrar que las dos integrales en el Teorema (18.28) tienen el mismo valor.

La superficie es la misma que consideramos en el Ejemplo 4 de la Sección 18.5 (véase la Figura 18.48) donde obtuvimos que

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Según (18.6),

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 4x & 2y \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, dS.$$

Usando (18.23) (i) para evaluar esta integral de superficie, resulta que

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R (4x + 6y + 4)\, dA$$

donde R es la región en el plano xy acotada por la circunferencia de radio 3 con centro en el origen. Cambiando a coordenadas polares, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4r\cos\theta + 6r\,\text{sen}\,\theta + 4)r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 [r^2(4\cos\theta + 6\,\text{sen}\,\theta) + 4r]\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (36\cos\theta + 54\,\text{sen}\,\theta + 18)\, d\theta \\ &= \Big[36\,\text{sen}\,\theta - 54\cos\theta + 18\theta\Big]_0^{2\pi} = 36\pi. \end{aligned}$$

La integral de línea en el Teorema de Stokes (18.28) se puede escribir

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 3z\, dx + 4x\, dy + 2y\, dz$$

donde C es la circunferencia en el plano xy con ecuación $x^2 + y^2 = 9$. Como $z = 0$ en C, esto se reduce a

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 4x\, dy = 4 \oint_C x\, dy.$$

De acuerdo con el Teorema (18.20), $\oint_C x\,dy$ es el área de la región acotada por C (el círculo de radio 3) y por lo tanto,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4(9\pi) = 36\pi,$$

que es el mismo valor que el de la integral de superficie. •

Se puede usar el Teorema de Stokes para dar una interpretación física a rot $\mathbf{F}$. Para un punto cualquiera P, sea S_k el disco circular de radio k con centro en P y sea C_k la frontera de S_k (véase la Figura 18.56). Aplicando el Teorema de Stokes y el teorema del valor medio para integrales dobles se llega a

FIGURA 18.56



$$\oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \iint_{S_k} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS = [(\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}]_{P_k} (\pi k^2)$$

donde P_k es cualquier punto interior de S_k y πk^2 es el área de S_k. Por lo tanto,

$$[(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}]_{P_k} = \frac{1}{\pi k^2} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds.$$

Si $k \to 0$, entonces $P_k \to P$ y se tiene el siguiente resultado.

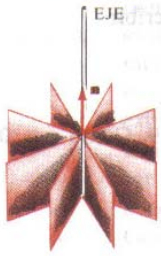
(rot F) · n COMO UN LÍMITE (18.29)

$$[(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}]_P = \lim_{k \to 0} = \frac{1}{\pi k^2} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$$

Si $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades de un fluido, entonces la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$ es la **circulación alrededor de** C. Mide la tendencia media del fluido a *circular* o moverse alrededor de la curva. De (18.29) se ve que $[(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}]_P$ proporciona información acerca del movimiento del fluido alrededor del borde de un disco circular perpendicular a $\mathbf{n}$, cuando el disco se contrae a un punto. Como $[(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}]_P$ alcanza su valor máximo cuando $\mathbf{n}$ es paralelo a rot $\mathbf{F}$, la dirección de rot $\mathbf{F}$ en P es aquélla para la que la circulación alrededor de la frontera de un disco perpendicular a rot $\mathbf{F}$ alcanza su valor máximo cuando el disco se contrae a un punto.

FIGURA 18.57

Medidor de rotacional (rotacionómetro)

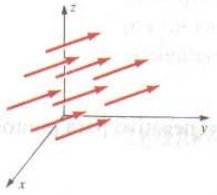


Para visualizar estas ideas, consideremos un "medidor de rotacional" imaginario; por ejemplo, un molinete cuyas paletas están en planos que pasan por el eje, como se ilustra en la Figura 18.57. Un campo de velocidad que rodee las paletas puede hacer girar el molinete sobre su eje. Tomando un vector unitario $\mathbf{n}$ en la dirección del eje, se tiene que el "rotacionómetro" gira más rápidamente cuando $\mathbf{n}$ es paralelo a rot $\mathbf{F}$.

El escalar (rot $\mathbf{F}$) · $\mathbf{n}$ se llama la **rotacionalidad de F alrededor de n** porque permite apreciar la tendencia del campo

vectorial a *rotar* o girar alrededor de P.* Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en una región, entonces (rot $\mathbf{F}$) $\cdot$ $\mathbf{n} = 0$ y la circulación alrededor de cualquier curva cerrada C es 0. También la rotacionalidad de $\mathbf{F}$ alrededor de $\mathbf{n}$ es 0. Por eso se dice que $\mathbf{F}$ es un **campo vectorial irrotacional** cuando rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

FIGURA 18.58



EJEMPLO 2 Sea $\mathbf{F}(x, y) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, donde a, b y c son constantes. Analizar las propiedades rotacionales del campo $\mathbf{F}$.

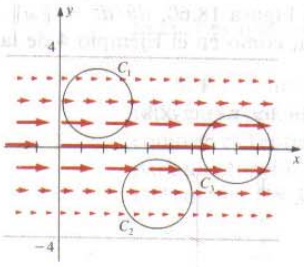
Solución Todos los vectores del campo $\mathbf{F}$ tienen la misma magnitud y dirección, como se ilustra en la Figura 18.58 para a, b y c positivos. Si se introduce un medidor de rotacional (o molinete) en cualquier punto de este campo vectorial, las paletas no giran. Observamos que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{F}$ es irrotacional. •

EJEMPLO 3 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 3(y^2 + 1)^{-1}\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ para $|y| \leq 4$. Describir el campo vectorial $\mathbf{F}$ y analizar la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de varias circunferencias C_k en el plano xy. ¿Dónde tiene (rot $\mathbf{F}$) $\cdot$ $\mathbf{n}$ su valor máximo?

FIGURA 18.59



Solución Si restringimos nuestra atención al plano xy, los vectores de $\mathbf{F}$ forman el patrón que se muestra en la Figura 18.59. (Verificar este hecho.) En cualquier plano paralelo al plano xy se repite el mismo patrón.

Consideremos a $\mathbf{F}$ como el campo de velocidades de un fluido que se desplaza por un tubo. Observamos que la velocidad del fluido es mayor a lo largo del eje x y disminuye a medida que el punto (x, y) se acerca a las rectas $y = \pm 4$. Si consideramos la circunferencia C_1, entonces evidentemente $\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$ porque cuando se recorre C_1 en el sentido positivo, la componente tangencial $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ es grande y positiva en la parte inferior de C_1, y es negativa (pero cercana a 0) en la mitad superior. Si se introduce un medidor

* **(N. del R.)** Aunque en inglés se le llamó *rotation* al producto (rot $\mathbf{F}$) $\cdot$ $\mathbf{n}$ no es conveniente traducir este término por "rotación", ya que resultaría confuso. El nombre *rotacionalidad* adoptado en esta versión expresa mejor el concepto y corresponde a los calificativos rotacional e irrotacional aplicados a los campos en los que rot $\mathbf{F}$ es diferente de cero o igual a cero, respectivamente. Una posible notación es rotn. De modo que se tendría rotn $\mathbf{F}$ = (rot $\mathbf{F}$) $\cdot$ $\mathbf{n}$.

de rotacional en el centro de C_1 con su eje perpendicular al plano xy, las paletas girarán en el sentido contrario al del reloj.

Considerando otra vez los valores de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$, vemos que $\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$ y $\oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$. Un medidor de rotacional en C_2 giraría en el sentido del reloj y en C_3 no giraría.

Podemos demostrar que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{6y}{(y^2 + 1)^2}\,\mathbf{k}.$$

Como el vector unitario normal $\mathbf{n}$ es $\mathbf{k}$,

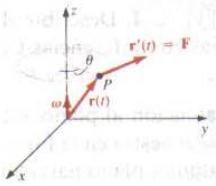
$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{6y}{(y^2 + 1)^2}.$$

Observamos que $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ es positivo para puntos arriba del eje x, negativo para puntos abajo del eje x y 0 para los puntos en el eje x. Derivando,

$$D_y[(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}] = \frac{6(1 - 3y^2)}{(y^2 + 1)^3}$$

y por lo tanto, los números críticos de $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ son $y = \pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0.577$. Con el criterio de la primera derivada vemos que se trata de un máximo y un mínimo. Por lo tanto el valor máximo del $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ se alcanza en cualquier punto de la recta horizontal $y = \pm 1/\sqrt{3}$. •

FIGURA 18.60



Para ilustrar otra relación entre rot $\mathbf{F}$ y los aspectos rotacionales del movimiento, consideremos un fluido que gira uniformemente alrededor del eje z como si fuera un cuerpo rígido. Concentrando la atención sobre una partícula del fluido que se encuentra en el punto $P(x, y, z)$, donde x, y, z son funciones del tiempo t, se llega a una situación semejante a la que se ilustra en la Figura 18.60, donde $\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es el vector de posición de P y $\omega = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$ es la velocidad angular (constante). Con referencia a la Figura 18.60, $d\theta/dt = \|\omega\|$. Denotando la velocidad (lineal) $\mathbf{r}'(t)$ de P por $\mathbf{F}$ resulta, como en el Ejemplo 4 de la Sección 15.3, que

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega_2 z - \omega_3 y)\mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\mathbf{k}.$$

Según (18.6),

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix}$$

Usando el hecho de que ω es un vector constante se puede verificar que

$$\text{rot } \mathbf{F} = 2\omega_1\mathbf{i} + 2\omega_2\mathbf{j} + 2\omega_3\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Esto demuestra que la magnitud de rot $\mathbf{F}$ es el doble que la de la velocidad angular y la dirección de rot $\mathbf{F}$ es a lo largo del eje de rotación.

En la discusión sobre integrales de línea independientes de la trayectoria se introdujo el concepto de una región simplemente conexa en el plano. Este concepto se puede generalizar a tres dimensiones, sin embargo, la definición acostumbrada requiere de propiedades de las curvas y las superficies que se estudian en cursos más avanzados. Para los propósitos de este libro se dice que una región D en tres dimensiones es **simplemente conexa** si toda curva cerrada simple C en D es la frontera de una superficie S en D que satisface las condiciones del Teorema de Stokes. En regiones de este tipo cualquier curva cerrada simple se puede contraer continuamente a un punto en D sin cruzar la frontera de D. Por ejemplo, la región dentro de una esfera o de un paralelepípedo rectangular es simplemente conexa. La región dentro de un toroide (o toro) (una superficie en forma de rosca) no es simplemente conexa. Usando esta restricción se puede demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA (18.30)

Si $\mathbf{F}(x, y, z)$ tiene derivadas parciales continuas en toda una región simplemente conexa D, entonces rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en D si y sólo si $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva cerrada simple C en D.

Demostración Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces por el Teorema de Stokes (18.28),

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0.$$

Inversamente, supongamos que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva cerrada simple C. Si en algún punto P, rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, entonces por continuidad existe una subregión de D que contiene a P y dentro de la cual rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$. Escogiendo un disco circular del tipo ilustrado en la Figura 18.56 contenido en esta subregión y para el cual $\mathbf{n}$ es paralelo a rot $\mathbf{F}$, entonces

$$\oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_k} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS > 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en todo D. • •

Si $\mathbf{F}$ es continuo en una región apropiada, la condición de que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva cerrada simple es equivalente a la independencia de la trayectoria. Además, como en el Teorema (18.13), la independencia de la trayectoria es equivalente a $\mathbf{F} = \nabla f$ para una función escalar f (es decir, $\mathbf{F}$ es conservativo). Combinando estos hechos con el Teorema (18.30) se obtiene lo siguiente.

TEOREMA (18.31)

Si $\mathbf{F}(x, y, z)$ tiene primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa D, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) $\mathbf{F}$ es conservativo, es decir, $\mathbf{F} = \nabla f$ para una f.

(ii) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D.

(iii) $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva cerrada simple C en D.

(iv) $\mathbf{F}$ es irrotacional, es decir, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 4 Demostrar que si $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - 3z^2\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

Solución La función $\mathbf{F}$ tiene primeras derivadas parciales continuas para todo (x, y, z). Como

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 + y^2 & 2xy & -3z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (2y - 2y)\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

$\mathbf{F}$ es conservativo de acuerdo con el Teorema (18.31) (iv). •

EJERCICIOS 18.7

Ejercicios 1-8: Verifique el Teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ y S.

1. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$; S es la parte del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante.
2. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S es la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
3. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S es el hemisferio $z = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$.
4. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la parte del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ acotada por el plano $z = 1$.
5. Suponga que $\mathbf{F} = (3z - \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + (x^2 + e^y)\mathbf{j} + (y^3 - \cos z)\mathbf{k}$. Use el Teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva dada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 1$; $0 \le t \le 2\pi$.
6. Sean $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ y C el cuadrado con vértices (0, 0, 2), (1, 0, 2), (1, 1, 2), (0, 1, 2). Use el Teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
7. Sean $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + e^z\mathbf{j} - \arctan x\mathbf{k}$ y S la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ recortada por el plano xy. Use el Teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.
8. Sean $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$ y S el triángulo con vértices (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3). Use el Teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

Ejercicios 9-12: Trace algunos de los vectores de $\mathbf{F}(x, y, z)$ y analice las propiedades rotacionales de $\mathbf{F}$ usando un medidor de rotacional y rot $\mathbf{F}$. ¿Dónde alcanza (rot $\mathbf{F}$) $\cdot$ $\mathbf{n}$ su valor máximo?

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2y)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$; $|y| \le 2$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = 0\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$; $0 \le x \le \pi$
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ (véanse el Ejemplo 1 de la Sección 18.1 y la discusión que sigue al Ejemplo 3 en la página 980).
12. El campo de tipo gravitacional de la Definición (18.2).
13. Pruebe que si $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + (x + e^z)\mathbf{j} + (1 + ye^z)\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{F}$ es irrotacional.
14. Un campo vectorial $\mathbf{F}$ es un *campo de fuerza central* si $\mathbf{F} = f\mathbf{r}$ donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y f es una función escalar. Demuestre que si f es diferenciable, entonces $\mathbf{F}$ es irrotacional.

15. Sea $\mathbf{n}$ el vector unitario normal exterior en cualquier punto P en la frontera S de una esfera. Demuestre que si $\mathbf{F}$ tiene primeras derivadas parciales continuas en S y dentro de S, entonces $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$. Utilice (a) el Teorema de la Divergencia; (b) el Teorema de Stokes.

16. Utilice (18.28) para demostrar que si S y C satisfacen las condiciones del Teorema de Stokes y $\mathbf{F}$ es una función vectorial constante, entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = 0$.

Ejercicios 17-19: Demuestre la identidad bajo la hipótesis de que C y S satisfacen las condiciones del Teorema de Stokes.

17. $\oint_C f \nabla g \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\,dS$, donde f y g son funciones escalares.

18. $\oint_C \mathbf{a} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 2\mathbf{a} \cdot \iint_S \mathbf{n}\,dS$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante.

19. $\oint_C f\,d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \times \nabla f\,dS$, donde f es una función escalar.

20. Sean M, N y P funciones de x, y, z que tienen primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa. Demuestre que

$$\int_C M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$$

es independiente de la trayectoria si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

18.8 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Campos vectoriales en dos y en tres dimensiones.
2. Campo de tipo gravitacional (o de variación inversa al cuadrado de la distancia).
3. Campo vectorial conservativo.
4. Función de potencial.
5. Rotacional.
6. Divergencia.
7. Integral de línea.
8. Aplicaciones de la integral de línea.
9. Independencia de la trayectoria.
10. Teorema de Green.
11. Integrales de superficie.
12. Integral de flujo.
13. Superficie orientada.
14. Teorema de la Divergencia.
15. La divergencia como un límite.
16. Teorema de Stokes.
17. La rotacionalidad (rot $\mathbf{F}$) $\cdot$ $\mathbf{n}$ como un límite.
18. Campo vectorial irrotacional.

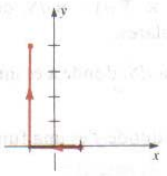
EJERCICIOS 18.8

Ejercicios 1-4: Dé una descripción geométrica del campo vectorial $\mathbf{F}$.

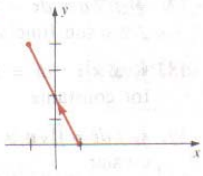
1. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = -\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$
5. Encuentre un campo vectorial conservativo en dos dimensiones que tenga la función de potencial $f(x, y) = y^2 \tan x$.
6. Encuentre un campo vectorial conservativo en tres dimensiones que tenga la función de potencial $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$.

Ejercicios 7-10: Evalúe $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$, a lo largo de la curva C entre $(1, 0)$ y $(-1, 4)$ que se muestra en la figura.

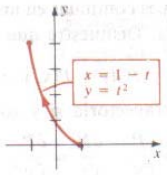
7.



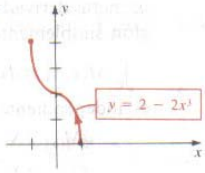
8.



9.



10.



11. Evalúe $\int_C xy\,ds$; C es la gráfica de $y = x^4$ de $(-1, 1)$ a $(2, 16)$.

Ejercicios 12-14: Evalúe

$$\int_C x\,dx + (x + y)\,dy + (x + y + z)\,dz$$

a lo largo de la curva dada C de $A(0, 0, 0)$ a $B(2, 4, 8)$.

12. C consta de tres segmentos, el primero paralelo al eje z, el segundo paralelo al eje x y el tercero paralelo al eje y.

13. C es el segmento de A a B.

14. C tiene la parametrización $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

15. Sean $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ y C dada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; $-\pi \le t \le 0$. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

16. La fuerza $\mathbf{F}$ en un punto (x, y, z) en tres dimensiones se encuentra dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$; C es el cuadrado con vértices $A_1(1, 1, 1)$, $A_2(-1, 1, 1)$, $A_3(-1, -1, 1)$ y $A_4(1, -1, 1)$. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ cuando su punto de aplicación da una vuelta a lo largo de C en el sentido determinado por el incremento del subíndice de A_k.

Ejercicios 17-18: Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y calcule su valor.

17. $\int_{(1,-1)}^{(2,3)} (x + y)\,dx + (x + y)\,dy$

18. $\int_{(0,0,0)}^{(2,1,3)} (8x^3 + z^2)\,dx - 3z\,dy + (2xz - 3y)\,dz$

19. Considérese el caso de $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xe^{2y}\mathbf{i} + 2(x^2e^{2y} + y\cot z)\mathbf{j} - y^2\csc^2 z\mathbf{k}$. Demuestre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria y encuentre una función de potencial f para $\mathbf{F}$.

Ejercicios 20-22: Use el Teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\oint_C xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$$

donde C es la curva dada.

20. C es la curva cerrada determinada por $y = x^2$ y $y - x = 2$ entre $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.

21. C es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

22. C es la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

23. Calcule div $\mathbf{F}$ y rot $\mathbf{F}$ para $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3z^4\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}$.

24. Demuestre que si f y g son funciones escalares de tres variables, $\nabla \cdot (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$.

25. Evalúe $\iint_S xyz\,dS$; S es la parte del plano $z = x + y$ que se encuentra arriba de la región triangular del plano xy con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, 2, 0)$.

26. Evalúe $\iint_S x^2z^2\,dS$; S es la mitad superior del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

27. Sea Q la región acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 1$. Si $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, use el Teorema de la Divergencia para evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$ donde la superficie S es la frontera de Q y $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal exterior a S.

28. Verifique el Teorema de la Divergencia para $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$; la superficie S es la frontera del paralelepípedo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 2$, $z = \pm 3$.

Ejercicios 29-30: Verifique el Teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ y S.

29. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$; S es el hemisferio $z = (4 - x^2 - y^2)^{1/2}$.

30. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$; S es la región acotada por el triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

CAPÍTULO **19**

ECUACIONES DIFERENCIALES

*Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que aparecen derivadas o diferenciales. Si una ecuación contiene sólo derivadas de una función de una variable, entonces se dice que es **ordinaria**. Una **ecuación diferencial parcial** contiene derivadas parciales. En este capítulo se desarrollan algunos métodos para resolver los tipos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. La intención de este análisis no es una disertación sobre el tema sino más bien servir de introducción a esta área tan vasta y a la vez tan importante de las matemáticas.*

19.1 ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES

Una ecuación en la que aparecen x, y, y', y'', ... y $y^{(n)}$, donde y es una función de x y $y^{(n)}$ es la n-ésima derivada de y con respecto a x, es una **ecuación diferencial ordinaria de orden n**. Los siguientes ejemplos son ecuaciones diferenciales ordinarias del orden especificado:

Orden 1: $y' = 2x$

Orden 2: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 15y = 0$

Orden 3: $(y''')^4 - x^2(y'')^5 + 4xy = xe^x$

Orden 4: $\left(\dfrac{d^4y}{dx^4}\right)^2 - 1 = x^3\dfrac{dy}{dx}$

En las Secciones 4.7 y 7.6 se consideraron brevemente las ecuaciones diferenciales. Recordemos que una función f (o $f(x)$) es una **solución** de una ecuación diferencial si al sustituir y por $f(x)$ se obtiene una identidad para todo x en un intervalo. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y' = 6x^2 - 5$$

tiene como solución

$$f(x) = 2x^3 - 5x + C$$

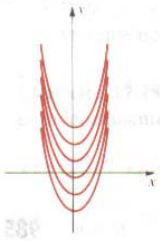
para todo número real C, porque al sustituir y por $f(x)$ se llega a la identidad $6x^2 - 5 = 6x^2 - 5$. Se dice que $f(x) = 2x^3 - 5x + C$ es la **solución general** de $y' = 6x^2 - 5$ porque todas las soluciones son de esta forma. Se obtiene una **solución particular** asignando valores específicos a C. Por ejemplo, tomando $C = 0$ se obtiene la solución particular $y = 2x^3 - 5x$. A veces se dan **condiciones iniciales** para determinar una solución particular, como se ilustra en el siguiente ejemplo (véase también el Ejemplo 2 de la Sección 4.7).

EJEMPLO 1

(a) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2x$ e ilustrarla gráficamente.

(b) Obtener una solución particular de $y' = 2x$ que satisfaga la siguiente condición: $y = 3$ cuando $x = 0$.

FIGURA 19.1



Solución

(a) Si f es una solución de $y' = 2x$, entonces $f'(x) = 2x$. La integral indefinida lleva a la solución general

$$y = f(x) = x^2 + C.$$

Podemos encontrar soluciones particulares asignando valores específicos a C. Así obtenemos la familia de parábolas $y = x^2 + C$ que se ilustra en la Figura 19.1.

(b) Si $y = 3$ cuando $x = 0$, entonces sustituyendo en $y = x^2 + C$ obtenemos $3 = 0 + C$, o bien $C = 3$. Por lo tanto, la solución particular es $y = x^2 + 3$. La gráfica es la parábola de la Figura 19.1, cuya intercepción y (ordenada en el origen) es 3. •

Ecuaciones diferenciales como la del siguiente ejemplo aparecen en el análisis de las vibraciones y se consideran con detalle en las Secciones 19.3-19.5.

EJEMPLO 2 Demostrar que la ecuación diferencial $y'' - 25y = 0$ tiene como solución

$$f(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{-5x}$$

donde C_1 y C_2 son números reales.

Solución Derivando obtenemos

$$f'(x) = 5C_1e^{5x} - 5C_2e^{-5x}$$

y

$$f''(x) = 25C_1e^{5x} + 25C_2e^{-5x}$$

Sustituyendo y por $f(x)$ en la ecuación diferencial $y'' - 25y = 0$, llegamos a

$$(25C_1e^{5x} + 25C_2e^{-5x}) - 25(C_1e^{5x} + C_2e^{-5x}) = 0$$

o bien

$$(25C_1e^{5x} - 25C_1e^{5x}) + (25C_2e^{-5x} - 25C_2e^{-5x}) = 0.$$

Como el lado izquierdo de la ecuación es 0 para todo x, resulta que $f(x)$ es solución de $y'' - 25y = 0$. •

La solución $C_1e^{5x} + C_2e^{-5x}$ del Ejemplo 2 es la solución general de $y'' - 25y = 0$. Obsérvese que la ecuación diferencial es de orden 2 y la solución general tiene dos constantes arbitrarias (llamadas **parámetros**) C_1 y C_2. La definición precisa de solución general involucra el concepto de **parámetros independientes** y se estudia en cursos de Cálculo más avanzados. Las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden tienen n parámetros independientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Las soluciones particulares se obtienen asignando valores específicos a cada parámetro. Algunas ecuaciones diferenciales tienen soluciones que no son casos especiales de la solución general. Tales **soluciones singulares** no se discuten en este libro.

En las soluciones de los Ejemplos 1 y 2 se expresa y explícitamente en términos de x. Las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales se dan en forma implícita, y para verificar tales soluciones hay que derivar implícitamente, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Demostrar que $x^3 + x^2y - 2y^3 = C$ es una solución implícita de

$$(x^2 - 6y^2)y' + 3x^2 + 2xy = 0.$$

Solución Si $y = f(x)$ satisface la primera ecuación, entonces derivando implícitamente,

$$3x^2 + 2xy + x^2y' - 6y^2y' = 0$$

o bien

$$(x^2 - 6y^2)y' + 3x^2 + 2xy = 0.$$

Por lo tanto, $f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial. •

Una de las clases más sencillas de ecuaciones diferenciales es

$$M(x) + N(y)y' = 0 \quad \text{o bien} \quad M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

donde M y N son funciones continuas. Si $y = f(x)$ es una solución, entonces

$$M(x) + N(f(x))f'(x) = 0.$$

Si $f'(x)$ es continua, entonces la integral indefinida lleva a

$$\int M(x)\,dx + \int N(f(x))f'(x)\,dx = C$$

o bien

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

La última ecuación es una solución (implícita) de la ecuación diferencial. Se dice que la ecuación diferencial $M(x) + N(y)y' = 0$ es **separable** porque las variables x y y se pueden separar, como se indicó.

Una manera fácil de recordar el método de separación de variables es cambiar la ecuación

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

a la *forma diferencial*

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

y luego integrar cada término.

EJEMPLO 4 Resolver la ecuación diferencial $y^4e^{2x} + \dfrac{dy}{dx} = 0$.

Solución Escribiendo la ecuación en la forma diferencial y separando luego las variables, obtenemos

$$y^4e^{2x}\,dx + dy = 0$$

y si $y \neq 0$,

$$e^{2x}\,dx + \frac{1}{y^4}\,dy = 0.$$

Integrando cada término, obtenemos la solución (implícita)

$$\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3y^3} = C.$$

Multiplicando por 6 ambos lados de la ecuación, la solución adquiere la forma

$$3e^{2x} - \frac{2}{y^3} = K$$

donde $K = 6C$. Si se quiere una forma explícita hay que despejar y y así se obtiene

$$y = \left(\frac{2}{3e^{2x} - K}\right)^{1/3}.$$

Hemos supuesto que $y \neq 0$; sin embargo, $y = 0$ *es* una solución de la ecuación diferencial. En los siguientes ejemplos no se mencionan estas soluciones singulares. •

EJEMPLO 5 Resolver la ecuación diferencial $2y + (xy + 3x)\dfrac{dy}{dx} = 0$ con $x \neq 0$.

Solución Podemos expresar la ecuación en forma diferencial como

$$2y\,dx + (xy + 3x)\,dy = 0$$

o bien

$$2y\,dx + x(y + 3)\,dy = 0.$$

Es posible separar las variables dividiendo entre xy ambos lados de la última ecuación. Esto da

$$\frac{2}{x}dx + \left(\frac{y+3}{y}\right)dy = 0$$

o bien

$$\frac{2}{x}dx + \left(1 + \frac{3}{y}\right)dy = 0.$$

Integrando cada término llegamos a las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$2\ln|x| + y + 3\ln|y| = c$$
$$\ln|x|^2 + \ln|y|^3 = c - y$$
$$\ln|x|^2|y|^3 = c - y.$$

Cambiando a la forma exponencial,

$$|x|^2|y|^3 = e^{c-y} = e^c e^{-y} = ke^{-y}$$

donde $k = e^c$. Derivando puede demostrarse que

$$x^2y^3 = ke^{-y} \quad \text{o bien} \quad x^2y^3e^y = k$$

es una solución implícita de la ecuación diferencial. •

EJEMPLO 6 Resolver la ecuación diferencial

$$(1 + y^2) + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Solución Escribiendo la ecuación en forma diferencial y luego separando las variables,

$$(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$$

$$\frac{1}{1 + x^2}\,dx + \frac{1}{1 + y^2}\,dy = 0.$$

Integrando cada término obtenemos la solución (implícita)

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = C.$$

Para encontrar una solución explícita se despeja y como sigue:

$$\tan^{-1} y = C - \tan^{-1} x$$

$$y = \tan\,(C - \tan^{-1} x)\,.$$

Podemos cambiar la forma de esta ecuación usando la fórmula para la tangente de la diferencia de dos ángulos y así

$$y = \frac{\tan C - \tan\,(\tan^{-1} x)}{1 + \tan C \tan\,(\tan^{-1} x)}.$$

Definiendo $k = \tan C$ y usando el hecho de que $(\tan^{-1} x) = x$, puede escribirse

$$y = \frac{k - x}{1 + kx}.$$

FIGURA 19.2

$y = 2x + b;\ y = -\frac{1}{2}x + c$

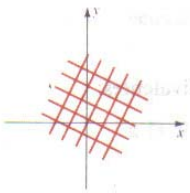
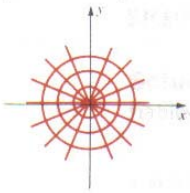


FIGURA 19.3

$y = mx;\ x^2 + y^2 = a^2$



Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas es una curva que corta perpendicularmente a todas las curvas de la familia. La discusión se restringe a curvas en el plano. Por ejemplo, dada la familia $y = 2x + b$ de todas las rectas de pendiente 2, todas las rectas $y = -\frac{1}{2}x + c$ con pendiente $-\frac{1}{2}$ son trayectorias ortogonales. En la Figura 19.2 aparecen varias curvas de ambas familias. Se dice que estas dos familias de curvas son **mutuamente ortogonales**. Como otro ejemplo, la familia $y = mx$ de todas las rectas que pasan por el origen y la familia $x^2 + y^2 = a^2$ de todas las circunferencias con centro en el origen son mutuamente ortogonales (véase la Figura 19.3).

Los pares de familias de curvas mutuamente ortogonales aparecen muchas veces en las aplicaciones de las matemáticas a la física. En la teoría del electromagnetismo las líneas de fuerza asociadas a un campo dado son trayectorias ortogonales a las correspondientes curvas equipotenciales. De manera parecida, las líneas de corriente que se estudian en aerodinámica e hidrodinámica son trayectorias ortogonales a las curvas *equipotenciales del campo de velocidades*. Como un último ejemplo, en el estudio de la termodinámica el flujo de calor a través de una superficie plana es ortogonal a las isotermas.

En el siguiente ejemplo se ilustra un método para encontrar las trayectorias ortogonales de una familia de curvas.

EJEMPLO 7 Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de elipses $x^2 + 3y^2 = c$, y trazar varias curvas de cada familia.

Solución Derivando implícitamente la ecuación dada, obtenemos

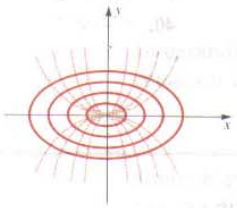
$$2x + 6yy' = 0 \quad \text{o bien} \quad y' = -\frac{x}{3y}.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en un punto (x, y) de alguna de las elipses es $y' = -x/(3y)$. Si dy/dx es la pendiente de la recta tangente en una trayectoria ortogonal correspondiente, entonces debe ser igual al negativo del recíproco de y'. Esto lleva a la siguiente ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}.$$

FIGURA 19.4

$x^2 + 3y^2 = c$; $y = kx^3$



Separando las variables,

$$\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}.$$

Integrando y escribiendo la constante de integración como $\ln |k|$, obtenemos

$$\ln |y| = 3 \ln |x| + \ln |k| = \ln |kx^3|.$$

Resulta que $y = kx^3$ es una ecuación de la familia de trayectorias ortogonales. En la Figura 19.4 aparecen varias curvas de la familia de elipses (en tono oscuro) y las correspondientes trayectorias ortogonales (en tono claro). •

EJERCICIOS 19.1

Ejercicios 1-4: (a) Obtenga la solución general de la ecuación diferencial e ilústrela gráficamente. (b) Encuentre la solución particular que satisface la condición $y = 2$ cuando $x = 0$.

1. $y' = 3x^2$
2. $y' = x - 1$
3. $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$
4. $y' = 3$

Ejercicios 5-10: Demuestre que y es una solución de la ecuación diferencial dada.

5. $y'' - 3y' + 2y = 0; \quad y = C_1e^x + C_2e^{2x}$
6. $y' + 3y = 0; \quad y = Ce^{-3x}$
7. $2xy^3 + 3x^2y^2\dfrac{dy}{dx} = 0; \quad y = Cx^{-2/3}$
8. $x^3y''' + x^2y'' - 3xy' - 3y = 0; \quad y = Cx^3$
9. $(x - 2y)\dfrac{dy}{dx} + 2x + y = 0; \quad y^2 - x^2 - xy = C$
10. $y\dfrac{dy}{dx} = x; \quad x^2 - y^2 = C$

Ejercicios 11-26: Resuelva la ecuación diferencial.

11. $\sec x\, dy - 2y\, dx = 0$
12. $x^2\, dy - \csc 2y\, dx = 0$
13. $x\, dy - y\, dx = 0$
14. $(4 + y^2)\, dx + (9 + x^2)\, dy = 0$
15. $3y\, dx + (xy + 5x)\, dy = 0$
16. $(xy - 4x)\, dx + (x^2y + y)\, dy = 0$
17. $y' = x - 1 + xy - y$
18. $(y + yx^2)\, dy + (x + xy^2)\, dx = 0$

19. $e^{x+2y}\,dx - e^{2x-y}\,dy = 0$
20. $\cos x\,dy - y\,dx = 0$
21. $y(1 + x^3)y' + x^2(1 + y^2) = 0$
22. $x^2y' - yx^2 = y$
23. $x \tan y - y' \sec x = 0$
24. $xy + y'e^{(x^2)} \ln y = 0$
25. $e^y \operatorname{sen} x\,dx - \cos^2 x\,dy = 0$
26. $\operatorname{sen} y \cos x\,dx + (1 + \operatorname{sen}^2 x)\,dy = 0$

Ejercicios 27-34: Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial que satisface la condición dada.

27. $2y^2y' = 3y - y'$; $y = 1$ cuando $x = 3$.
28. $\sqrt{x}y' - \sqrt{y} = x\sqrt{y}$; $y = 4$ cuando $x = 9$.
29. $x\,dy - (2x + 1)e^{-y}\,dx = 0$; $y = 2$ cuando $x = 1$.
30. $\sec 2y\,dx - \cos^2 x\,dy = 0$; $y = \pi/6$ cuando $x = \pi/4$.
31. $(xy + x)\,dx + \sqrt{4 + x^2}\,dy = 0$; $y = 1$ cuando $x = 0$.
32. $x\,dy - \sqrt{1 - y^2}\,dx = 0$; $y = \frac{1}{2}$ cuando $x = 1$.
33. $\cot x\,dy - (1 + y^2)\,dx = 0$; $y = 1$ cuando $x = 0$.
34. $\csc y\,dx - e^x\,dy = 0$; $y = 0$ cuando $x = 0$.

Ejercicios 35-40: Determine las trayectorias ortogonales a la familia de curvas. Trace las gráficas.

35. $x^2 - y^2 = c$
36. $xy = c$
37. $y^2 = cx$
38. $y = cx^2$
39. $y^2 = cx^3$
40. $y = ce^{-x}$

19.2 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Las ecuaciones diferenciales del siguiente tipo aparecen muchas veces en el estudio de los fenómenos físicos.

DEFINICIÓN (19.1)

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es una ecuación de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas.

Si en la Definición (19.1), $Q(x) = 0$ para todo x, se obtiene $y' + P(x)y = 0$ que es separable. Concretamente, se puede escribir

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P(x) \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{y}\,dy = -P(x)\,dx,$$

siempre que $y \neq 0$. Integrando se obtiene

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln|C|.$$

La constante de integración se ha expresado como $\ln|C|$ para cambiar la forma de la última ecuación, como sigue:

$$\ln|y| - \ln|C| = -\int P(x)\,dx$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)\,dx$$

$$\frac{y}{C} = e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$ye^{\int P(x)\,dx} = C.$$

Ahora se observa que

$$\begin{aligned} D_x\left[ye^{\int P(x)\,dx}\right] &= y'e^{\int P(x)\,dx} + P(x)ye^{\int P(x)\,dx} \\ &= e^{\int P(x)\,dx}[y' + P(x)y]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se multiplican por $e^{\int P(x)\,dx}$, ambos lados de $y' + P(x)y = Q(x)$, la ecuación resultante puede escribirse como

$$D_x\left[ye^{\int P(x)\,dx}\right] = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}.$$

Integrando ambos lados de la ecuación se obtiene la siguiente solución implícita de la ecuación diferencial lineal de primer orden en la Definición (19.1):

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + K$$

donde K es una constante. Despejando y de esta ecuación se obtiene una solución explícita. Se dice que la expresión $e^{\int P(x)\,dx}$ es un **factor de integración** (o **integrativo**) de la ecuación diferencial. Quedó demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA (19.2) La ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + P(x)y = Q(x)$ se puede transformar en una ecuación diferencial separable multiplicando ambos lados de la ecuación por el factor de integración $e^{\int P(x)\,dx}$.

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} - 3x^2y = x^2$.

Solución La ecuación diferencial tiene la forma en la Definición (19.1) con $P(x) = -3x^2$ y $Q(x) = x^2$. Según el Teorema (19.2),

$$e^{\int -3x^2\,dx} = e^{-x^3}.$$

es un factor integrativo. No necesitamos introducir una constante de integración porque $e^{-x^3+c} = e^ce^{-x^3}$, que difiere de e^{-x^3} en un factor constante e^c. Multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial por el factor de integración e^{-x^3}, obtenemos

$$e^{-x^3}\frac{dy}{dx} - 3x^2e^{-x^3}y = x^2e^{-x^3}$$

o bien

$$D_x(e^{-x^3}y) = x^2e^{-x^3}.$$

Integrando ambos lados de la última ecuación,

$$e^{-x^3}y = \int x^2e^{-x^3}\,dx = -\tfrac{1}{3}e^{-x^3} + C.$$

Finalmente, multiplicando por e^{x^3} obtenemos la solución explícita

$$y = -\tfrac{1}{3} + Ce^{x^3}. \quad \bullet$$

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación diferencial $x^2y' + 5xy + 3x^5 = 0$ si $x \neq 0$.

Solución Para encontrar un factor de integración, comenzamos expresando la ecuación diferencial en la forma típica de (19.1) con el coeficiente de y' igual a 1. Así, dividiendo ambos lados entre x^2, obtenemos

$$y' + \frac{5}{x}y = -3x^3.$$

que tiene la forma de (19.1) con $P(x) = 5/x$. Según el Teorema (19.2),

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{5\ln|x|} = e^{\ln|x|^5} = |x|^5$$

es un factor de integración. Si $x > 0$, entonces $|x|^5 = x^5$, y si $x < 0$, entonces $|x|^5 = -x^5$. En los dos casos, multiplicando ambos lados de la fórma típica por $|x|^5$, obtenemos

$$x^5y' + 5x^4y = -3x^8$$

o bien $$D_x(x^5y) = -3x^8.$$

Integrando ambos miembros de la última ecuación llegamos a la solución

$$x^5y = \int -3x^8\,dx = -\frac{x^9}{3} + C$$

o bien $$y = -\frac{x^4}{3} + \frac{C}{x^5} \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Resolver la ecuación diferencial

$$y' + y\tan x = \sec x + 2x\cos x.$$

Solución Se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden (véase la Definición (19.1)). Según el Teorema (19.2),

$$e^{\int \tan x\,dx} = e^{\ln|\sec x|} = |\sec x|.$$

es un factor de integración. Multiplicando por $|\sec x|$ ambos lados de la ecuación diferencial y quitando el valor absoluto, obtenemos

$$y'\sec x + y\sec x\tan x = \sec^2 x + 2x\cos x\sec x$$

o bien

$$D_x(y\sec x) = \sec^2 x + 2x.$$

Integrando ambos lados llegamos a la solución (implícita)

$$y\sec x = \tan x + x^2 + C.$$

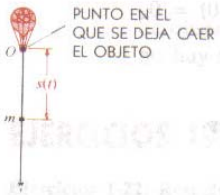
Finalmente, multiplicando ambos lados de esta última ecuación por $1/\sec x = \cos x$, se obtiene la solución explícita

$$y = \operatorname{sen} x + (x^2 + C)\cos x. \quad \bullet$$

Anteriormente se utilizó la antiderivación para deducir leyes del movimiento de un cuerpo en caída, suponiendo que puede despreciarse la fricción del aire (véase el Ejemplo 4 de la Sección 4.7). Esta suposición es válida para cuerpos pequeños que se mueven lentamente; sin embargo, en muchos casos hay que tomar en cuenta la fricción del aire. Esta fuerza a menudo crece cuando la velocidad del objeto aumenta. En el siguiente ejemplo se deduce la ley del movimiento para la caída de un cuerpo suponiendo que el rozamiento del aire es directamente proporcional a la velocidad del cuerpo.

EJEMPLO 4 Se deja caer un objeto de masa m desde un globo de aire caliente. Calcular la distancia que recorre en t segundos suponiendo que la fuerza de fricción debida al aire es directamente proporcional a la velocidad del objeto.

FIGURA 19.5



Solución Introducimos un eje vertical con la dirección positiva hacia abajo y el origen en el punto donde se deja caer el objeto, como se ilustra en la Figura 19.5. Se desea calcular la distancia $s(t)$ del origen al objeto al tiempo t. La velocidad del cuerpo es $v = s'(t)$ y la magnitud de la aceleración es $a = dv/dt = s''(t)$. Si g es la aceleración de la gravedad, entonces el objeto es atraído hacia la Tierra con una fuerza de magnitud mg. Por hipótesis, la fuerza de fricción debida al aire es kv para una constante k, y su dirección es opuesta al movimiento. Resulta que la fuerza F hacia abajo sobre el objeto es $mg - kv$. Como la segunda ley del movimiento de Newton afirma que $F = ma = m(dv/dt)$, llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

o equivalentemente,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g.$$

Si denotamos por c la constante k/m, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{dv}{dt} + cv = g,$$

que es una ecuación diferencial de primer orden con t como variable independiente. Según (19.2),

$$e^{\int c\,dt} = e^{ct}$$

es un factor de integración. Multiplicando por e^{ct} ambos lados de esta última ecuación, obtenemos

$$e^{ct}\frac{dv}{dt} + ce^{ct}v = ge^{ct}$$

o bien

$$D_t(ve^{ct}) = ge^{ct}.$$

Integrando en ambos miembros,

$$ve^{ct} = \frac{g}{c}e^{ct} + K \quad \text{o bien} \quad v = \frac{g}{c} + Ke^{-ct}$$

donde K es una constante.

Si tomamos $t = 0$, entonces $v = 0$ y por lo tanto,

$$0 = \frac{g}{c} + K \quad \text{y} \quad K = -\frac{g}{c}.$$

Por consiguiente,

$$v = \frac{g}{c} - \frac{g}{c}e^{-ct}.$$

Integrando con respecto a t en ambos lados de esta ecuación y usando el hecho de que $v = s'(t)$, vemos que

$$s(t) = \frac{g}{c}t + \frac{g}{c^2}e^{-ct} + E.$$

Podemos calcular la constante E considerando $t = 0$. Como $s(0) = 0$,

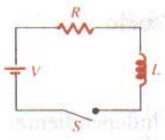
$$0 = 0 + \frac{g}{c^2} + E \quad \text{o bien} \quad E = -\frac{g}{c^2}.$$

Por lo tanto, la distancia que el objeto recorre en t segundos es

$$s(t) = \frac{g}{c}t + \frac{g}{c^2}e^{-ct} - \frac{g}{c^2}.$$

Es interesante comparar esta fórmula para $s(t)$ con la que se obtuvo cuando se despreció la fricción del aire. En este caso la ecuación diferencial $m(dv/dt) = mg - kv$ se reduce a $dv/dt = g$. y por lo tanto, $s'(t) = v = gt$. Integrando en ambos lados se obtiene la fórmula $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, que es mucho más simple. •

FIGURA 19.6



EJEMPLO 5 Un circuito eléctrico sencillo consta de una resistencia R y una inductancia L conectadas en serie, como se ilustra esquemáticamente en la Figura 19.6, y se aplica una tensión (o voltaje) constante V. Si el interruptor S se cierra cuando $t = 0$, entonces puede deducirse por una de las leyes de Kirchhoff para los circuitos eléctricos, que para $t > 0$, la corriente I satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V.$$

Expresar I como una función de t.

Solución La ecuación diferencial puede escribirse

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L},$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. De acuerdo con el Teorema (19.2), multiplicamos ambos lados por el factor de integración $e^{\int (R/L)\,dt} = e^{(R/L)t}$ y obtenemos

$$e^{(R/L)t}\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}e^{(R/L)t}I = \frac{V}{L}e^{(R/L)t}$$

o bien

$$D_t\left[Ie^{(R/L)t}\right] = \frac{V}{L}e^{(R/L)t}$$

Integrando con respecto a t,

$$Ie^{(R/L)t} = \int \frac{V}{L}e^{(R/L)t}\,dt = \frac{V}{R}e^{(R/L)t} + C.$$

Como $I = 0$ cuando $t = 0$, resulta que $C = -V/R$. Sustituyendo C llegamos a

$$Ie^{(R/L)t} = \frac{V}{R}e^{(R/L)t} - \frac{V}{R}.$$

Finalmente, multiplicando por $e^{-(R/L)t}$ ambos lados de la igualdad, tenemos que

$$I = \frac{V}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t}\right].$$

Se observa que cuando t tiende a infinito, I tiende a V/R que es la corriente cuando no hay inductancia. •

EJERCICIOS 19.2

Ejercicios 1-22: Resuelva la ecuación diferencial.

1. $y' + 2y = e^{2x}$
2. $y' - 3y = 2$
3. $xy' - 3y = x^5$
4. $y' + y\cot x = \csc x$
5. $xy' + y + x = e^x$
6. $xy' + (1 + x)y = 5$
7. $x^2\,dy + (2xy - e^x)\,dx = 0$
8. $x^2\,dy + (x - 3xy + 1)\,dx = 0$
9. $y' + y\cot x = 4x^2\csc x$
10. $y' + y\tan x = \operatorname{sen} x$
11. $(y\operatorname{sen} x - 2)\,dx + \cos x\,dy = 0$
12. $(x^2y - 1)\,dx + x^3\,dy = 0$
13. $(x^2\cos x + y)\,dx - x\,dy = 0$
14. $y' + y = \operatorname{sen} x$
15. $xy' + (2 + 3x)y = xe^{-3x}$
16. $(x + 4)y' + 5y = x^2 + 8x + 16$
17. $x^{-1}y' + 2y = 3$
18. $y' - 5y = e^{5x}$
19. $\tan x\,dy + (y - \operatorname{sen} x)\,dx = 0$
20. $\cos x\,dy - (y\operatorname{sen} x + e^{-x})\,dx = 0$
21. $y' + 3x^2y = x^2 + e^{-x^3}$
22. $y' + y\tan x = \cos^3 x$

Ejercicios 23-26: Encuentre la solución particular de la ecuación que satisface la condición dada.

23. $xy' - y = x^2 + x$; $y = 2$ cuando $x = 1$.
24. $y' + 2y = e^{-3x}$; $y = 2$ cuando $x = 0$.
25. $xy' + y + xy = e^{-x}$; $y = 0$ cuando $x = 1$.
26. $y' + 2xy - e^{-x^2} = x$; $y = 1$ cuando $x = 0$.

Ejercicios 27-28: Resuelva la ecuación diferencial (a) usando un factor de integración; (b) separando las variables.

27. La ecuación diferencial

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

describe la carga Q en un condensador eléctrico de capacidad C durante el proceso de carga, cuando hay una resistencia R y una tensión aplicada V. Suponiendo que la carga es 0 cuando $t = 0$, exprese Q como una función de t.

28. La ecuación diferencial

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}$$

describe un circuito eléctrico en el que se tienen una tensión aplicada V, una resistencia R y una capacitancia C conectadas en serie. Exprese I como una función de t suponiendo que $I = I_0$ cuando $t = 0$, y que V es constante.

29. Al tiempo $t = 0$, un tanque contiene K kilogramos de sal disuelta en 80 litros (L) de agua. Se vierte al tanque, agua con 1/12 de kilogramo de sal por litro a razón de 6 L/min y la solución bien mezclada se saca del tanque con la misma intensidad. Encuentre una fórmula para la cantidad $f(t)$ de sal que hay en el tanque al tiempo t.

30. Un objeto de masa m que se mueve sobre una recta coordenada está sujeto a una fuerza dada por $F(t) = e^{-t}$ al tiempo t. Al movimiento se opone una fuerza de fricción cuya magnitud es igual al doble de la velocidad (rapidez) del objeto. Suponiendo que $v = 0$ cuando $t = 0$, encuentre una fórmula que determine v a cualquier tiempo $t > 0$.

31. Para describir la rapidez con que se adquiere una habilidad se usa una *curva de aprendizaje*. Por ejemplo, supongamos que un fabricante calcula que un nuevo operario producirá A objetos el primer día de trabajo y que cuando va adquiriendo experiencia, producirá los objetos más rápidamente hasta que produzca un máximo de M objetos por día. Sea $f(t)$ la cantidad de artículos producidos el día t para $t \geq 1$, y suponga que el ritmo de producción $f'(t)$ es proporcional a $M - f(t)$.

(a) Obtenga una fórmula para $f(t)$.

(b) Suponiendo que $M = 30$, $f(1) = 5$ y $f(2) = 8$, estime el número de objetos producidos en el vigésimo día.

32. Una habitación mide 3.5 m × 5 m × 3 m y contiene originalmente 0.001% de monóxido de carbono (CO) en el aire ambiente. Al tiempo $t = 0$, entran a la habitación humos con 5% de CO a razón de 0.004 m^3/min. El aire bien mezclado se extrae del cuarto con la misma intensidad.

(a) Encuentre una fórmula para el volumen $f(t)$ de CO que hay en la habitación al tiempo t.

(b) El mínimo nivel de CO que se considera peligroso para la salud es 0.015%. ¿Después de aproximadamente cuántos minutos contendrá la habitación este nivel de CO?

33. El modelo de von Bertalanffy para el crecimiento de un animal considera que hay una cota superior de y_L cm de longitud para la longitud y a la edad de t años. Se supone que la tasa de crecimiento es proporcional a la longitud ya alcanzada. Obtenga la solución general de la ecuación diferencial resultante.

34. Una célula está en un líquido que contiene un soluto, como el potasio, con una concentración constante c_0. Si $c(t)$ es la concentración del soluto dentro de la célula al tiempo t, el *principio de Fick* para difusión pasiva a través de la membrana celular establece que la rapidez con que varía la concentración es proporcional al *gradiente de la concentración* $c_0 - c(t)$. Determine $c(t)$ para $c(0) = 0$.

35. Muchos medicamentos comunes (como algunos tipos de penicilina) se eliminan de la corriente sanguínea con una rapidez proporcional a la cantidad y presente.

(a) Demuestre que si se inyectan y_0 miligramos (mg) directamente a la corriente sanguínea, entonces $y = y_0 e^{-kt}$ para $k > 0$.

(b) Si el medicamento se administra por vía intravenosa a razón de I mg/min, entonces $y' = -ky + I$. Suponiendo que $y = 0$ cuando $t = 0$, exprese y como una función de t, y calcule $\lim_{t \to \infty} y$.

(c) La semivida (o "vida media") del medicamento en la sangre es de 2 h. Estime la frecuencia con que hay que inyectar para que a la larga haya 100 mg en la sangre.

36. En la figura se muestra un sistema de dos tanques por los que el agua entra y sale a razón de 5 L/min. Cada tanque contiene 50 litros (L) de agua.

EJERCICIO 36



(a) Se mezcla 1 kg de tinte con el agua del Tanque 1. Sea $x(t)$ la cantidad de tinte en el tanque t minutos después. Demuestre que $x'(t) = -0.1x(t)$ y que $x(t) = e^{-0.1t}$.

(b) De acuerdo con el resultado de la parte (a), el tinte entra en el Tanque 2 a razón de $5 \cdot \frac{1}{50} x(t) = 0.1e^{-0.1t}$ kg/min. Demuestre que

si $y(t)$ es la cantidad de tinte en el Tanque 2 después de t minutos, entonces $y'(t) = -0.1y(t) + 0.1e^{-0.1t}$. Suponga que $y(0) = 0$, encuentre $y(t)$.

(c) ¿Cuál es la cantidad máxima de tinte en el Tanque 2?

(d) Resuelva la parte (b) suponiendo que el Tanque 2 tiene un volumen de 40 L.

19.3 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

La siguiente definición es una generalización de (19.1).

DEFINICIÓN (19.3)

Una **ecuación diferencial lineal de orden n** es una ecuación de la forma

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = k(x)$$

donde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ y k son funciones de una variable que tienen el mismo dominio. Si $k(x) = 0$ para todo x, se dice que la ecuación es **homogénea**. Si $k(x) \neq 0$ para algún x, se dice que la ecuación es **no homogénea**.

Se puede encontrar un análisis a fondo de (19.3) en textos de ecuaciones diferenciales. En este libro la discusión se restringe a ecuaciones de segundo orden en las que f_1 y f_2 son funciones constantes. En esta sección se considera el caso homogéneo. Las ecuaciones no homogéneas se discutirán en la siguiente sección. Las aplicaciones se consideran en la Sección 19.5.

La forma general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es

$$y'' + by' + cy = 0$$

donde b y c son constantes. Antes de tratar de obtener soluciones particulares se demuestra el siguiente resultado.

TEOREMA (19.4)

Si $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son soluciones de $y'' + by' + cy = 0$, entonces

$$y = C_1 f(x) + C_2 g(x)$$

es una solución para todos los números reales C_1 y C_2.

Demostración Como $f(x)$ y $g(x)$ son soluciones de $y'' + by' + cy = 0$,

$$f''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$$

y

$$g''(x) + bg'(x) + cg(x) = 0.$$

Si se multiplica la primera ecuación por C_1, la segunda por C_2 y se suman, el resultado es

$$[C_1 f''(x) + C_2 g''(x)] + b[C_1 f'(x) + C_2 g'(x)] + c[C_1 f(x) + C_2 g(x)] = 0.$$

Por lo tanto, $C_1 f(x) + C_2 g(x)$ es una solución. • •

Se puede demostrar que si las soluciones f y g en el Teorema (19.4) tienen la propiedad de que $f(x) \neq Cg(x)$ para todo número real C, y si $g(x)$ no es idénticamente 0, entonces $y = C_1 f(x) + C_2 g(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial $y'' + by' + cy = 0$. Por tanto, para encontrar la solución general basta obtener dos de estas funciones f y g y aplicar (19.4).

En la búsqueda de una solución de $y'' + by' + cy = 0$, se usará $y = e^{mx}$ como solución de prueba. Como $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2 e^{mx}$, resulta que $y = e^{mx}$ es una solución si y sólo si

$$m^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

o bien, como $e^{mx} \neq 0$, si y sólo si

$$m^2 + bm + c = 0.$$

La última ecuación es muy importante para encontrar las soluciones de $y'' + by' + cy = 0$, y se le da el siguiente nombre especial.

DEFINICIÓN (19.5) La **ecuación auxiliar** de una ecuación diferencial $y'' + by' + cy = 0$ es $m^2 + bm + c = 0$.

Obsérvese que la ecuación auxiliar se puede obtener a partir de la ecuación diferencial reemplazando y'' por m^2, y por m y y por 1. En los casos más sencillos las raíces de la ecuación auxiliar pueden encontrarse factorizando. Si no es evidente la factorización, entonces aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado se obtiene que las raíces son

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

De modo que la ecuación auxiliar tiene dos raíces distintas m_1 y m_2, una raíz real doble m, o dos raíces complejas conjugadas si $b^2 - 4c$ es positivo, cero o negativo, respectivamente. El siguiente teorema es consecuencia del comentario que sigue a la demostración del Teorema (19.4).

TEOREMA (19.6) Si las raíces m_1 y m_2 de la ecuación auxiliar son reales y distintas, entonces la solución general de $y'' + by + cy = 0$ es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}.$$

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación diferencial $y'' - 3y' - 10y = 0$.

Solución Resulta que la ecuación auxiliar es $m^2 - 3m - 10 = 0$, o equivalentemente, $(m - 5)(m + 2) = 0$. Como las raíces $m_1 = 5$ y $m_2 = -2$ son reales y distintas, resulta del Teorema (19.6) que la solución general es

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}. \quad \bullet$$

TEOREMA (19.7)

Si la ecuación auxiliar tiene una raíz doble m, entonces la solución general de $y'' + by' + cy = 0$ es

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}.$$

Demostración Las raíces de $m^2 + bm + c = 0$ son $m = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})/2$. Si $b^2 - 4c = 0$, se obtiene $m = -b/2$ o bien $2m + b = 0$. Como m satisface la ecuación auxiliar, $y = e^{mx}$ es una solución de la ecuación diferencial. De acuerdo con el comentario que siguió a la demostración del Teorema (19.4), basta probar que $y = xe^{mx}$ también es solución. Sustituyendo y por xe^{mx} en la ecuación $y'' + by' + cy = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}(2me^{mx} + m^2 xe^{mx}) + b(mxe^{mx} + e^{mx}) + cxe^{mx} \\ &= (m^2 + bm + c)xe^{mx} + (2m + b)e^{mx} \\ &= 0xe^{mx} + 0e^{mx} = 0,\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. $\bullet\bullet$

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar $m^2 - 6m + 9 = 0$, o equivalentemente, $(m - 3)^2 = 0$, tiene una raíz doble, 3. Por lo tanto, según el Teorema (19.7), la solución general es

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = e^{3x}(C_1 + C_2 x). \quad \bullet$$

Se pueden considerar también ecuaciones diferenciales de la forma

$$ay'' + by' + cy = 0$$

donde $a \neq 1$. Es posible llegar a la forma en los Teoremas (19.6) y (19.7) dividiendo

entre a ambos lados de la ecuación, sin embargo, normalmente es más fácil utilizar la ecuación auxiliar

$$am^2 + bm + c = 0$$

como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Resolver la ecuación diferencial $6y'' - 7y' + 2y = 0$.

Solución La ecuación auxiliar $6m^2 - 7m + 2 = 0$ puede factorizarse como sigue:

$$(2m - 1)(3m - 2) = 0.$$

Por lo tanto, las raíces son $m_1 = \frac{1}{2}$ y $m_2 = \frac{2}{3}$. De acuerdo con el Teorema (19.6), la solución general de la ecuación dada es

$$y = C_1e^{x/2} + C_2e^{2x/3}. \quad \bullet$$

El último caso que se considera es en el que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + bm + c = 0$ de $y'' + by' + cy = 0$ son números complejos. Estos números se pueden representar por expresiones de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales y el símbolo i se trata como un número real, con la propiedad adicional de que $i^2 = -1$. Se dice que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales**, y se escribe $a + bi = c + di$, si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división se definen *como si* todos los símbolos literales denotaran números reales, con la condición adicional de que siempre que aparezca i^2, se debe reemplazar por -1. Por ejemplo, las fórmulas para la suma y el producto de dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Los números reales pueden considerarse como un subconjunto de los números complejos identificando el número real a con el número complejo $a + 0i$. Un número complejo de la forma $0 + bi$ se abrevia por bi.

Los números complejos se necesitan muchas veces para resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, donde $f(x)$ es un polinomio. Por ejemplo, si sólo se permiten números reales, la ecuación $x^2 = -4$ no tiene solución. Sin embargo, si pueden utilizarse los números complejos, entonces la ecuación tiene la solución $2i$ pues

$$(2i)^2 = 2^2i^2 = 4(-1) = -4.$$

Análogamente, $-2i$ también es solución de $x^2 = -4$.

Como $i^2 = -1$, a veces se utiliza el símbolo $\sqrt{-1}$ en vez de i y se escribe

$$\sqrt{-13} = \sqrt{13}i, \quad 2 + \sqrt{-25} = 2 + \sqrt{25}i = 2 + 5i,$$

etcétera. Una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, tiene las raíces dadas por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces las raíces son números complejos. Por ejemplo, si se aplica la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado a la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$, se obtiene

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Por tanto, la ecuación tiene las dos raíces complejas $2 + 3i$ y $2 - 3i$.

Se dice que el número complejo $a - bi$ es el **conjugado** del número complejo $a + bi$. De la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado se ve que si una ecuación cuadrática tiene raíces complejas, éstas son necesariamente conjugadas entre sí.

Resulta de la discusión anterior que si la ecuación auxiliar $m^2 + bm + c = 0$ de la $y'' + by' + cy = 0$ tiene raíces complejas, entonces son de la forma

$$z_1 = s + ti \quad \text{y} \quad z_2 = s - ti$$

donde s y t son números reales. Puede predecirse del Teorema (19.6) que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x} = C_1 e^{(s+ti)x} + C_2 e^{(s-ti)x}.$$

Para definir exponentes complejos hay que generalizar algunos de los conceptos del cálculo incluyendo funciones cuyo dominio tenga números complejos. Como un desarrollo completo requiere métodos más avanzados, solamente se esbozarán las ideas principales.

En la Sección 11.8 se vio cómo ciertas funciones pueden representarse mediante series de potencias. Las definiciones y los teoremas del Capítulo 11 se pueden generalizar fácilmente a series infinitas en las que aparecen números complejos. Por este motivo, se usarán las representaciones en series de potencias (11.43) para *definir* e^z, $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ para todo número complejo z como sigue.

FUNCIONES DE $z = a + bi$ (19.8)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Usando la primera fórmula en (19.8) se obtiene

$$e^{iz} = 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + iz + i^2 \frac{z^2}{2!} + i^3 \frac{z^3}{3!} + i^4 \frac{z^4}{4!} + i^5 \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

Como $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etcétera, se ve que

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \cdots$$

que se puede escribir en la forma

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right).$$

Si se usan ahora las fórmulas para cos z y sen z en (19.8), se obtiene el siguiente resultado que lleva el nombre del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

FÓRMULA DE EULER (19.9)

Para todo número complejo z,

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

Las Leyes de los Exponentes se satisfacen para los números complejos. Además, las fórmulas para derivadas se pueden generalizar a las funciones de una variable *compleja* z. Por ejemplo, $D_z e^{kz} = ke^{kz}$ para todo número complejo k. Si la ecuación auxiliar $y'' + by' + cy = 0$ tiene raíces complejas $s \pm ti$, entonces la solución general de la ecuación diferencial puede escribirse como

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(s+ti)x} + C_2 e^{(s-ti)x} \\ &= C_1 e^{sx+txi} + C_2 e^{sx-txi} \\ &= C_1 e^{sx} e^{txi} + C_2 e^{sx} e^{-txi} \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$y = e^{sx}(C_1 e^{itx} + C_2 e^{-itx}).$$

Esto se simplifica más usando la Fórmula de Euler. Concretamente, de (19.9) se ve que

$$\begin{aligned} e^{itx} &= \cos tx + i \operatorname{sen} tx, \\ e^{-itx} &= \cos tx - i \operatorname{sen} tx \end{aligned}$$

de lo cual se deduce que

$$\cos tx = \frac{e^{itx} + e^{-itx}}{2}, \quad \operatorname{sen} tx = \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{2i}.$$

Tomando $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ en la discusión anterior y usando luego la fórmula para cos tx, se obtiene

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2} e^{sx}(e^{itx} + e^{-itx}) \\ &= \tfrac{1}{2} e^{sx}(2 \cos tx) = e^{sx} \cos tx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = e^{sx} \cos tx$ es una solución particular de $y'' + by' + cy = 0$. Toman-

do $C_1 = -C_2 = i/2$ se llega a la solución particular $y = e^{sx}\operatorname{sen} tx$. Ésta es una demostración parcial del siguiente teorema.

TEOREMA (19.10)

Si la ecuación auxiliar $m^2 + bm + c = 0$ tiene dos raíces complejas distintas $s \pm ti$, entonces la solución general de $y'' + by' + cy = 0$ es

$$y = e^{sx}(C_1 \cos tx + C_2 \operatorname{sen} tx).$$

EJEMPLO 4 Resolver la ecuación diferencial $y'' - 10y' + 41y = 0$.

Solución Las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 - 10m + 41 = 0$ son

$$m = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 164}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{10 \pm 8i}{2} = 5 \pm 4i.$$

De acuerdo con el Teorema (19.10), la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = e^{5x}(C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x). \quad \bullet$$

EJERCICIOS 19.3

Ejercicios 1-22: Resuelva la ecuación diferencial.

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y'' - y' - 2y = 0$
3. $y'' - 3y' = 0$
4. $y'' + 6y' + 8y = 0$
5. $y'' + 4y' + 4y = 0$
6. $y'' - 4y' + 4y = 0$
7. $y'' - 4y' + y = 0$
8. $6y'' - 7y' - 3y = 0$
9. $y'' + 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$
10. $4y'' + 20y' + 25y = 0$
11. $8y'' + 2y' - 15y = 0$
12. $y'' + 4y' + y = 0$
13. $9y'' - 24y' + 16y = 0$
14. $4y'' - 8y' + 7y = 0$
15. $2y'' - 4y' + y = 0$
16. $2y'' + 7y' = 0$
17. $y'' - 2y' + 2y = 0$
18. $y'' - 2y' + 5y = 0$
19. $y'' - 4y' + 13y = 0$
20. $y'' + 4 = 0$
21. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$
22. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

Ejercicios 23-30: Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial que satisface las condiciones dadas.

23. $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y = 0$ y $y' = 2$ cuando $x = 0$.
24. $y'' - 2y' + y = 0$; $y = 1$ y $y' = 2$ cuando $x = 0$.
25. $y'' + y = 0$; $y = 1$ y $y' = 2$ cuando $x = 0$.
26. $y'' - y' - 6y = 0$; $y = 0$ y $y' = 1$ cuando $x = 0$.
27. $y'' + 8y' + 16y = 0$; $y = 2$ y $y' = 1$ cuando $x = 0$.
28. $y'' + 5y = 0$; $y = 4$ y $y' = 2$ cuando $x = 0$.
29. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$; $y = 0$ y $\dfrac{dy}{dx} = 1$ cuando $x = 0$.
30. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0$; $y = 2$ y $\dfrac{dy}{dx} = 3$ cuando $x = 0$.

1006

lo cual significa que $y_p + y_c$ es una solución de $L(y) = k(x)$. Más aún, si $y = f(x)$ es cualquier otra solución, entonces

$$L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = k(x) - k(x) = 0.$$

Por lo tanto, $y - y_p$ es una solución de la ecuación complementaria. De modo que, $y - y_p = y_c$ para alguna y_c, que es lo que se quería demostrar. • •

Usando los resultados de la Sección 19.3 para encontrar la solución general y_c de $L(y) = 0$, entonces de acuerdo con el Teorema (19.12), lo único que se necesita para determinar la solución general de $L(y) = k(x)$ es *una* solución particular y_p.

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación diferencial $y'' - 4y = 6x - 4x^3$.

Solución Por inspección vemos que $y_p = x^3$ es una solución particular de la ecuación dada. La ecuación complementaria es $y'' - 4y = 0$, que según el Teorema (19.6), tiene la solución general

$$y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

Aplicando el Teorema (19.12), la solución general de la ecuación no homogénea dada es

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + x^3. \quad \bullet$$

Si no puede encontrarse ninguna solución particular de $y'' + by' + cy = k(x)$ por inspección, entonces es posible utilizar el siguiente método, llamado **variación de parámetros**. Dada la ecuación diferencial $L(y) = k(x)$, sean y_1 y y_2 las expresiones que aparecen en la solución general $y = C_1y_1 + C_2y_2$ de la ecuación complementaria $L(y) = 0$. Por ejemplo, pueden ser como en (19.6), $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = e^{m_2x}$. Ahora se trata de encontrar una solución particular de $L(y) = k(y)$ con la forma

$$y_p = uy_1 + vy_2$$

donde $u = g(x)$ y $v = h(x)$ para funciones g y h. La primera y segunda derivadas de y_p son

$$y_p' = (uy_1' + vy_2') + (u'y_1 + v'y_2)$$

$$y_p'' = (uy_1'' + vy_2'') + (u'y_1' + v'y_2') + (u'y_1 + v'y_2)'.$$

Sustituyendo estas expresiones en $L(y_p) = y_p'' + by_p' + cy_p$ y ordenando los términos, se obtiene

$$L(y_p) = u(y_1'' + by_1' + cy_1) + v(y_2'' + by_2' + cy_2) + b(u'y_1 + v'y_2) + (u'y_1 + v'y_2)' + (u'y_1' + v'y_2').$$

Como y_1 y y_2 son soluciones de $y'' + by' + cy = 0$, los dos primeros términos del lado derecho son 0. Por lo tanto, para obtener $L(y_p) = k(x)$ basta escoger u y v que satisfagan

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

$$u'y_1' + v'y_2' = k(x).$$

Puede demostrarse que este sistema de ecuaciones siempre tiene una solución única para u' y v'. Entonces, pueden determinarse u y v integrando y usar el hecho de que $y_p = uy_1 + vy_2$ para tener una solución particular de la ecuación diferencial. La discusión puede resumirse como sigue.

VARIACIÓN DE PARÁMETROS (19.13)

Si $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es la solución general de la ecuación complementaria $L(y) = 0$ de $y'' + by' + cy = k(x)$, entonces una solución particular de $L(y) = k(x)$ es $y_p = uy_1 + vy_2$, donde $u = g(x)$ y $v = h(x)$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$
$$u'y_1' + v'y_2' = k(x).$$

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = \cot x$.

Solución La ecuación complementaria es $y'' + y = 0$. Como la ecuación auxiliar $m^2 + 1 = 0$ tiene raíces $\pm i$, vemos del Teorema (19.10) que la solución general de la ecuación diferencial homogénea $y'' + y = 0$ es $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. Ahora buscamos una solución particular de la ecuación diferencial de la forma $y_p = uy_1 + vy_2$ con $y_1 = \cos x$ y $y_2 = \operatorname{sen} x$. El sistema de ecuaciones del Teorema (19.13) es por tanto

$$u' \cos x + v' \operatorname{sen} x = 0$$
$$-u' \operatorname{sen} x + v' \cos x = \cot x.$$

Despejando u' y v', resulta

$$u' = -\cos x, \qquad v' = \csc x - \operatorname{sen} x.$$

Si integramos cada una de estas expresiones (y eliminamos las constantes de integración), obtenemos

$$u = -\operatorname{sen} x, \qquad v = \ln|\csc x - \cot x| + \cos x.$$

Según el Teorema (19.13), una solución particular de la ecuación dada es

$$y_p = -\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \ln|\csc x - \cot x| + \operatorname{sen} x \cos x$$

o bien

$$y_p = \operatorname{sen} x \ln|\csc x - \cot x|.$$

Finalmente, de acuerdo con el Teorema (19.12), la solución general de $y'' + y = \cot x$ es

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \ln|\csc x - \cot x|. \quad \bullet$$

Dada la ecuación diferencial

$$L(y) = y'' + by' + cy = e^{nx}$$

donde e^{nx} no es una solución de $L(y) = 0$, parece razonable esperar que exista una solución particular de la forma $y_p = Ae^{nx}$, pues e^{nx} es el resultado de encontrar $L(Ae^{nx})$. Esto sugiere usar Ae^{nx} como una solución de prueba en la ecuación dada y tratar de hallar el valor del coeficiente A. Éste es el llamado **método de coeficientes indeterminados** y se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Resolver la ecuación diferencial $y'' + 2y' - 8y = e^{3x}$.

Solución La ecuación auxiliar $m^2 + 2m - 8 = 0$ de la ecuación diferencial $y'' + 2y' - 8y = 0$ tiene las raíces 2 y -4. Según el Teorema (19.6), la solución general de la ecuación complementaria es

$$y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x}.$$

De acuerdo con los comentarios anteriores, se busca una solución particular de la forma $y_p = Ae^{3x}$. Como $y_p' = 3Ae^{3x}$ y $y_p'' = 9Ae^{3x}$, sustituyendo en la ecuación dada, llegamos a

$$9Ae^{3x} + 6Ae^{3x} - 8Ae^{3x} = e^{3x}.$$

Dividiendo ambos lados entre e^{3x}, obtenemos

$$9A + 6A - 8A = 1 \quad \text{o bien} \quad A = \tfrac{1}{7}.$$

Entonces $y_p = \frac{1}{7}e^{3x}$, y por el Teorema (19.12), la solución general es

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + \tfrac{1}{7}e^{3x}. \quad \bullet$$

En el siguiente teorema se enuncian, sin demostrar, tres reglas para obtener soluciones de prueba de ecuaciones diferenciales de segundo orden no homogéneas con coeficientes constantes. (Consúltense textos de ecuaciones diferenciales para un análisis más profundo de estos temas.)

TEOREMA (19.14)

(i) Si $y'' + by' + cy = e^{nx}$ y n no es una raíz de la ecuación auxiliar $m^2 + bm + c = 0$, entonces existe una solución particular de la forma $y_p = Ae^{nx}$.

(ii) Si $y'' + by' + cy = xe^{nx}$ y n no es una solución de la ecuación auxiliar $m^2 + bm + c = 0$, entonces existe una solución particular de la forma $y_p = (A + Bx)e^{nx}$.

(iii) Si

$$y'' + by' + cy = e^{sx}\operatorname{sen} tx$$

o bien

$$y'' + by' + cy = e^{sx}\cos tx$$

y el número complejo $s + ti$ no es solución de la ecuación auxiliar $m^2 + bm + c = 0$, entonces existe una solución particular de la forma

$$y_p = Ae^{sx}\cos tx + Be^{sx}\operatorname{sen} tx.$$

La regla (i) del Teorema (19.14) se utilizó en la solución del Ejemplo 3. En los siguientes ejemplos se ilustra el empleo de las reglas (ii) y (iii).

EJEMPLO 4 Resolver $y'' - 3y' - 18y = xe^{4x}$.

Solución Como la ecuación auxiliar $m^2 - 3m - 18 = 0$ tiene las raíces 6 y -3, de la sección anterior resulta que la solución general de $y'' - 3y' - 18y = 0$ es

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{-3x}.$$

Como 4 no es una raíz de la ecuación auxiliar, según el Teorema (19.14) (ii) vemos que existe una solución particular de la forma

$$y_p = (A + Bx)e^{4x}.$$

Derivando, obtenemos

$$y_p' = (4A + 4Bx + B)e^{4x}$$
$$y_p'' = (16A + 16Bx + 8B)e^{4x}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial llegamos a

$$(16A + 16Bx + 8B)e^{4x} - 3(4A + 4Bx + B)e^{4x} - 18(A + Bx)e^{4x} = xe^{4x},$$

que se simplifica a

$$-14A + 5B - 14Bx = x.$$

Entonces, y_p es una solución siempre que

$$-14A + 5B = 0 \quad \text{y} \quad -14B = 1.$$

Esto da $B = -\frac{1}{14}$ y $A = -\frac{5}{196}$. Por lo tanto,

$$y_p = (-\tfrac{5}{196} - \tfrac{1}{14}x)e^{4x} = -\tfrac{1}{196}(5 + 14x)e^{4x}.$$

De acuerdo con el Teorema (19.12), la solución general es

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{-3x} - \tfrac{1}{196}(5 + 14x)e^{4x}. \quad \bullet$$

EJEMPLO 5 Resolver $y'' - 10y' + 41y = \operatorname{sen} x$.

Solución En el Ejemplo 4 de la sección anterior encontramos que la solución general de la ecuación complementaria es $y_c = e^{5x}(C_1\cos 4x + C_2\operatorname{sen} 4x)$. Según el Teo-

rema (19.14) (iii) con $s = 0$ y $t = 1$, buscamos una solución particular de la forma

$$y_p = A\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

Como

$$y_p' = -A\operatorname{sen} x + B\cos x \quad \text{y} \quad y_p'' = -A\cos x - B\operatorname{sen} x,$$

sustituyendo en la ecuación dada, resulta que

$$-A\cos x - B\operatorname{sen} x + 10A\operatorname{sen} x - 10B\cos x + 41A\cos x + 41B\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x,$$

que se puede escribir

$$(40A - 10B)\cos x + (10A + 40B)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x.$$

Entonces, y_p es una solución siempre y cuando

$$40A - 10B = 0 \quad \text{y} \quad 10A + 40B = 1.$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $A = \frac{1}{170}$ y $B = \frac{4}{170}$. Por lo tanto,

$$y_p = \tfrac{1}{170}\cos x + \tfrac{4}{170}\operatorname{sen} x = \tfrac{1}{170}(\cos x + 4\operatorname{sen} x)$$

y la solución general es

$$y = e^{5x}(C_1\cos 4x + C_2\operatorname{sen} 4x) + \tfrac{1}{170}(\cos x + 4\operatorname{sen} x). \quad \bullet$$

EJERCICIOS 19.4

Ejercicios 1-10: Resuelva la ecuación diferencial mediante el método de variación de parámetros.

1. $y'' + y = \tan x$
2. $y'' + y = \sec x$
3. $y'' - 6y' + 9y = x^2e^{3x}$
4. $y'' + 3y' = e^{-3x}$
5. $y'' - y = e^x\cos x$
6. $y'' - 4y' + 4y = x^{-2}e^{2x}$
7. $y'' - 9y = e^{3x}$
8. $y'' + y = \operatorname{sen} x$
9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 2$
10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = x + 1$

Ejercicios 11-18: Resuelva la ecuación diferencial usando coeficientes indeterminados.

11. $y'' - 3y' + 2y = 4e^{-x}$
12. $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$
13. $y'' + 2y' = \cos 2x$
14. $y'' + y = \operatorname{sen} 5x$
15. $y'' - y = xe^{2x}$
16. $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$
17. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 13y = e^x\cos x$
18. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}\operatorname{sen} 2x$

Ejercicios 19-20: Demuestre la identidad, donde L es el operador diferencial lineal definido en (19.11) y y, y_1 y y_2 representan funciones de x.

19. $L(Cy) = CL(y)$
20. $L(y_1 \pm y_2) = L(y_1) \pm L(y_2)$

19.5 VIBRACIONES

FIGURA 19.7

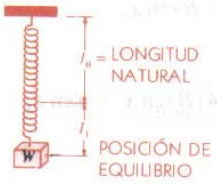


FIGURA 19.8



Las vibraciones en los sistemas mecánicos son causadas por fuerzas externas. Una cuerda de violín vibra por la acción del arco, una viga de acero vibra si se golpea con un martillo y un puente vibra si lo cruza un contingente de soldados marchando con cierta cadencia. En esta sección se utilizan las ecuaciones diferenciales para analizar las vibraciones de un resorte.

Según la ley de Hooke, la fuerza que se necesita para estirar un resorte y unidades a partir de su longitud natural es ky, para algún número real positivo k, que se llama *constante de fuerza* del resorte (véase (6.17)). La **fuerza restauradora** del resorte es $-ky$. Supongamos que se sujeta al resorte un cuerpo de peso W, y que en la posición de equilibrio el resorte se alarga una distancia l_1 más allá de su longitud natural l_0, como se ilustra en la Figura 19.7. Si g es la aceleración de la gravedad, y m, la masa del cuerpo, entonces $W = mg$ y en la posición de equilibrio

$$mg = kl_1 \quad \text{o bien} \quad mg - kl_1 = 0$$

suponiendo que la masa del resorte es despreciable comparada con m.

Supongamos que el cuerpo se tira hacia abajo y se suelta. Se introduce una recta coordenada como la de la Figura 19.8, donde y denota la distancia (con signo) desde el punto de equilibrio hasta el centro de masa del cuerpo a los t segundos. La fuerza F que actúa sobre el cuerpo cuando la aceleración es a, de acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, está dada por $F = ma$ (véase (15.12)). Suponiendo que el movimiento es **no amortiguado**, es decir que no hay ninguna fuerza externa en contra del movimiento, y que el cuerpo se mueve en un medio sin fricción, se ve que

$$F = mg - k(l_1 + y) = mg - kl_1 - ky = -ky.$$

Como $F = ma$ y $a = d^2y/dt^2$, esto implica que

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky.$$

Dividiendo ambos lados de esta ecuación entre m se obtiene la siguiente ecuación diferencial.

VIBRACIÓN SIN AMORTIGUAMIENTO (LIBRE) **(19.15)**

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0.$$

EJEMPLO 1 Demostrar que si un cuerpo de masa m se encuentra en movimiento vibratorio no amortiguado, el movimiento es armónico simple. Calcular el desplazamiento

si el cuerpo en la Figura 19.8 se desplaza a una distancia l_2 y luego se suelta desde velocidad cero.

Solución Si denotamos k/m por ω^2, entonces puede escribirse (19.15) como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$$

Las soluciones de la ecuación auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$ son $\pm\omega i$. Por lo tanto, según el Teorema (19.10), la solución general es

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t.$$

Resulta que el cuerpo se encuentra en movimiento armónico simple (véase el Ejercicio 84 de la Sección 8.3).

Si el cuerpo se lleva a una distancia l_2 y luego se suelta desde velocidad cero, entonces a $t = 0$,

$$l_2 = C_1(1) + C_2(0) \quad \text{o bien} \quad C_1 = l_2.$$

Como

$$\frac{dy}{dt} = -\omega C_1 \operatorname{sen} \omega t + \omega C_2 \cos \omega t,$$

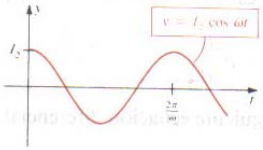
tenemos también (en $t = 0$) que

$$0 = -\omega C_1(0) + \omega C_2(1) \quad \text{o bien} \quad C_2 = 0.$$

Por lo tanto, el desplazamiento y del cuerpo al tiempo t es

$$y = l_2 \cos \omega t.$$

FIGURA 19.9
Movimiento armónico simple



Esta clase de movimiento ya se analizó anteriormente (véase el Ejemplo 9 de la Sección 8.3). La *amplitud* (el desplazamiento máximo) es l_2 y el *periodo* (el tiempo que tarda una oscilación completa) es $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$. En la Figura 19.9 aparece una gráfica que representa este tipo de movimiento.

EJEMPLO 2 Un cuerpo que pesa 8 lbf estira a un resorte vertical 2 pie más allá de su longitud natural. Luego el cuerpo tiene otro desplazamiento de $\frac{1}{2}$ pie y se suelta con una velocidad inicial de 6 pie/s. Encontrar una fórmula para el desplazamiento del cuerpo en cualquier tiempo t.

Solución De la ley de Hooke, $8 = k(2)$ o bien $k = 4$. Si y es el desplazamiento del cuerpo con respecto a su posición de equilibrio al tiempo t, entonces según (19.15),

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{4}{m} y = 0.$$

Como $W = mg$, se tiene que $m = W/g = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0.$$

Como en la solución del Ejemplo 1, esto implica que

$$y = C_1 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t.$$

En $t = 0$, tenemos $y = \frac{1}{2}$ y por lo tanto,

$$\tfrac{1}{2} = C_1(1) + C_2(0) \quad \text{o bien} \quad C_1 = \tfrac{1}{2}.$$

Como

$$\frac{dy}{dt} = -4C_1 \operatorname{sen} 4t + 4C_2 \cos 4t$$

y $dy/dt = -6$ en $t = 0$, obtenemos

$$-6 = -4C_1(0) + 4C_2(1) \quad \text{o bien} \quad C_2 = -\tfrac{3}{2}.$$

Por lo que, el desplazamiento al tiempo t está dado por

$$y = \tfrac{1}{2} \cos 4t - \tfrac{3}{2} \operatorname{sen} 4t \quad \bullet$$

FIGURA 19.10



Consideremos ahora el movimiento del resorte cuando hay una fuerza de *amortiguamiento* (o de fricción), como en el caso en que el cuerpo se mueve sumergido en un fluido (véase la Figura 19.10). Los amortiguadores de un automóvil son un buen ejemplo de este caso. Se supondrá que la dirección de la fuerza amortiguadora es opuesta a la del movimiento y que la magnitud es directamente proporcional a la velocidad del cuerpo. Por lo tanto, la fuerza de amortiguamiento está dada por $-c(dy/dt)$ para una constante positiva c. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial que describe el movimiento es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - c\frac{dy}{dt}.$$

Dividiendo entre m y ordenando los términos, se obtiene la siguiente ecuación diferencial.

VIBRACIÓN AMORTIGUADA (LIBRE) (19.16)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0$$

EJEMPLO 3 Analizar el movimiento de un cuerpo de masa m en movimiento vibratorio amortiguado.

Solución Como en el Ejemplo 1, sea $k/m = \omega^2$. Para simplificar las raíces de la ecuación auxiliar, definimos también $c/m = 2p$. Usando esta notación, (19.16) puede escribirse

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2p\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0$$

Las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 2pm + \omega^2 = 0$ son

$$\frac{-2p \pm \sqrt{4p^2 - 4\omega^2}}{2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega^2}.$$

Las tres siguientes posibilidades para las raíces corresponden a tres tipos posibles de movimiento del cuerpo:

$$p^2 - \omega^2 > 0, \quad p^2 - \omega^2 = 0, \quad \text{o bien} \quad p^2 - \omega^2 < 0.$$

A continuación se da una clasificación de estos tres tipos de movimiento.

Caso (i) $p^2 - \omega^2 > 0$: Vibración sobreamortiguada

Según el Teorema (19.6), la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = e^{-pt}(C_1 e^{\sqrt{p^2-\omega^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{p^2-\omega^2}\,t}).$$

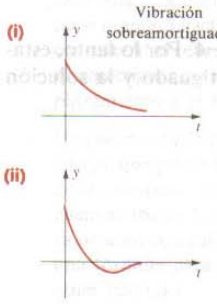
En el caso en consideración,

$$p^2 - \omega^2 = \frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4mk}{4m^2} > 0$$

de manera que $c^2 > 4mk$. Esto demuestra que c es grande con respecto a k; es decir, la fuerza amortiguadora domina a la fuerza de restauración del resorte y el cuerpo regresa a su posición de equilibrio más o menos rápidamente. Este caso se da cuando el fluido tiene viscosidad alta, como sucede con el aceite pesado y la grasa.

La forma en que y tiende a 0 depende de las constantes C_1 y C_2 de la solución general. Si ambas constantes son positivas, la gráfica tiene la forma general que se ilustra en la Figura 19.11(i), y si tienen signos opuestos, la gráfica se asemeja a la que se muestra en (ii) de la figura.

FIGURA 19.11



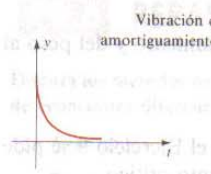
Caso (ii) $p^2 - \omega^2 = 0$: Vibración con amortiguamiento crítico

En este caso la ecuación auxiliar tiene una raíz doble $-p$, y según el Teorema (19.7), la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = e^{-pt}(C_1 + C_2 t).$$

La Figura 19.12 muestra una gráfica típica de este caso, que es parecida a la de la Figura 19.11(i). Sin embargo, en este caso, una disminución en la fuerza de amortiguamiento por pequeña que sea lleva al movimiento oscilatorio del siguiente tipo.

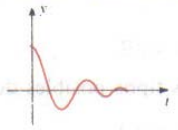
FIGURA 19.12



Caso (iii) $p^2 - \omega^2 < 0$: Vibración subamortiguada

Las raíces de la ecuación auxiliar son complejas conjugadas $a \pm bi$ y de acuerdo con el Teorema (19.10), la solución general de la ecuación diferencial es

FIGURA 19.13
Vibración subamortiguada



$$y = e^{-at}(C_1 \operatorname{sen} bt + C_2 \cos bt).$$

En este caso c es pequeño con respecto a k, y el resorte oscila al regresar a su posición de equilibrio, como se ilustra en la Figura 19.13. Cuando los amortiguadores de un automóvil se desgastan se producen vibraciones subamortiguadas. •

EJEMPLO 4 Un cuerpo que pesa 24 lbf estira un resorte vertical 1 pie más allá de su longitud natural. El resorte se empuja hacia abajo desde su posición de equilibrio con una velocidad inicial de 2 pie/s. Suponiendo que la fuerza de amortiguamiento es $-9(dy/dt)$, encontrar una fórmula para el desplazamiento y del cuerpo en cualquier tiempo t.

Solución Según la ley de Hooke, $24 = k(1)$ o bien $k = 24$. La masa del cuerpo es $m = W/g = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$. Usando la notación definida en el Ejemplo 3,

$$2p = \frac{c}{m} = \frac{9}{\frac{3}{4}} = 12 \quad \text{y} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{24}{\frac{3}{4}} = 32.$$

La ecuación (19.16) es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 32y = 0.$$

Podemos verificar que las raíces de la ecuación auxiliar son -8 y -4. Por lo tanto, estamos en el Caso (i) del Ejemplo 3 de un movimiento sobreamortiguado y la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = C_1e^{-4t} + C_2e^{-8t}.$$

Tomando $t = 0$,

$$0 = C_1 + C_2 \quad \text{o bien} \quad C_2 = -C_1.$$

Como

$$\frac{dy}{dt} = -4C_1e^{-4t} - 8C_2e^{-8t}$$

tenemos en $t = 0$,

$$2 = -4C_1 - 8C_2 = -4C_1 - 8(-C_1) = 4C_1.$$

Por lo tanto, $C_1 = \frac{1}{2}$ y $C_2 = -C_1 = -\frac{1}{2}$. Entonces el desplazamiento y del peso al tiempo t es

$$y = \tfrac{1}{2}e^{-4t} - \tfrac{1}{2}e^{-8t} = \tfrac{1}{2}e^{-4t}(1 - e^{-4t}).$$

La gráfica tiene un aspecto parecido al de la Figura 19.11(i). En el Ejercicio 9 se pide calcular la fuerza amortiguadora que produce un amortiguamiento crítico. •

EJERCICIOS 19.5

1. Un cuerpo que pesa 5 kgf estira un resorte vertical 6 cm más allá de su longitud natural. El cuerpo se eleva 4 cm y luego se suelta con velocidad cero. Encuentre una fórmula para el desplaza-

miento del cuerpo en cualquier tiempo t.

2. Un cuerpo que pesa 10 kgf estira un resorte vertical 8 cm más allá de su longitud natural. El cuerpo se desplaza hacia abajo otros 3 cm y desde ahí se empuja hacia abajo con una velocidad de 6 cm/s. Encuentre una fórmula para el desplazamiento en cualquier tiempo t.

3. Un cuerpo que pesa 10 lbf estira un resorte vertical 1 pie más allá de su longitud natural. El cuerpo se empuja desde su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 2 pie/s. Suponiendo que la fuerza de fricción es $-5(dy/dt)$, encuentre una fórmula para el desplazamiento del cuerpo.

4. Un cuerpo que pesa 6 kgf está colgado de un resorte cuya constante de fuerza es 48 kgf/cm. Inicialmente el cuerpo tiene una velocidad hacia abajo de 4 cm/s y está 5 cm abajo del punto de equilibrio. Obtenga una fórmula para el desplazamiento.

5. Un cuerpo que pesa 4 lbf estira un resorte vertical 3 pulg más allá de su longitud natural. El cuerpo se desplaza hacia abajo otras 4 pulg y se suelta con velocidad cero en un medio en el que la fuerza de amortiguamiento es $-2(dy/dt)$. Calcule el desplazamiento y al tiempo t.

6. Un resorte se estira $\frac{1}{2}$ cm cuando se le cuelga un cuerpo que pesa 8 kgf. El cuerpo se empuja desde su posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 1 cm/s. Suponiendo que la fuerza de amortiguamiento es $-4(dy/dt)$, encuentre una fórmula para el desplazamiento y en cualquier tiempo t.

7. Describa un sistema formado por un resorte vertical con una pesa cuyo movimiento está descrito por la siguiente ecuación diferencial, con los valores iniciales dados:

$$\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 6y = 0;$$

$$y = -2 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = -1 \quad \text{en } t = 0.$$

8. Un cuerpo que pesa 4 kgf estira un resorte 1 cm. El cuerpo se mueve en un medio en el que la fuerza de amortiguamiento es $-c(dy/dt)$, donde $c > 0$. ¿Para qué valores de c el movimiento es (a) sobreamortiguado? (b) ¿crítico? (c) ¿subamortiguado?

9. En el Ejemplo 4 de esta sección, calcule la fuerza amortiguadora para la cual el amortiguamiento es crítico.

10. En un medio sin amortiguamiento, un cuerpo de masa m se fija a un resorte con constante k y se le aplica una fuerza externa periódica dada por $F \operatorname{sen} \alpha t$.
 (a) Demuestre que la ecuación diferencial que describe el movimiento del cuerpo es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{F}{m} \operatorname{sen} \alpha t$$

donde $\omega^2 = k/m$.

(b) Demuestre que el desplazamiento y del cuerpo está dado por

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + C \operatorname{sen} \alpha t$$

donde $C = F/m(\omega^2 - \alpha^2)$. Este tipo de movimiento se llama *vibración forzada*.

19.6 REPASO

Discuta los métodos para resolver los siguientes tipos de ecuaciones diferenciales.

1. Separable.
2. Lineal de primer orden.
3. Lineal de segundo orden.

EJERCICIOS 19.6

Ejercicios 1-34: Resuelva la ecuación diferencial.

1. $xe^y\,dx - \csc x\,dy = 0$
2. $x\,dy - (x+1)y\,dx = 0$
3. $x(1+y^2)\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

4. $y' + 4y = e^{-x}$
5. $y' + (\sec x)y = 2 \cos x$
6. $(x^2y + x^2)\,dy + y\,dx = 0$
7. $y \tan x + y' = 2 \sec x$
8. $y' + (\tan x)y = 3$
9. $y\sqrt{1 - x^2}\,y' = \sqrt{1 - y^2}$
10. $(2y + x^3)\,dx - x\,dy = 0$
11. $e^x \cos y\,dy - \operatorname{sen}^2 y\,dx = 0$
12. $(\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 3 \cos^2 x$
13. $y' + (2 \cos x)y = \cos x$
14. $y'' + y' - 6y = 0$
15. $y'' - 8y' + 16y = 0$
16. $y'' - 6y' + 25y = 0$
17. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = 0$
18. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y + \operatorname{sen} x$
19. $y'' - y = e^x \operatorname{sen} x$
20. $y'' - y' - 6y = e^{2x}$
21. $y' + y = e^{4x}$
22. $y'' + 2y' = 0$
23. $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$
24. $xe^y\,dx - (x + 1)y\,dy = 0$
25. $xy' + y = (x - 2)^2$
26. $\sec^2 y\,dx = \sqrt{1 - x^2}\,dy - x \sec^2 y\,dx$
27. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 7y = 0$
28. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \csc x$
29. $e^{x+y}\,dx - \csc x\,dy = 0$
30. $y'' + 10y' + 25y = 0$
31. $\cot x\,dy = (y - \cos x)\,dx$
32. $y'' + y' + y = e^x \cos x$
33. $y' + y \csc x = \tan x$
34. $y'' - y' - 20y = xe^{-x}$

35. La población de aves en una isla tiene un crecimiento que se puede describir con la ecuación diferencial $dy/dt = (3 \operatorname{sen} 2\pi t)y$, donde t es el tiempo en años y $t = 0$ corresponde al principio de la primavera. La migración hacia la isla o desde la isla se da por estaciones. La intensidad de la migración está dada por $M(t) = 2000 \operatorname{sen} 2\pi t$ aves por año. Por lo tanto, la ecuación diferencial completa para la población es

$$\frac{dy}{dt} = (3 \operatorname{sen} 2\pi t)y + 2000 \operatorname{sen} 2\pi t.$$

Calcule y suponiendo que la población en $t = 0$ es 500. Determine la población máxima.

36. Un recipiente contiene 10 moles de un gas A que al calentarse sus moléculas aumentan su velocidad y se forma un segundo gas B. Cuando hay una colisión entre dos moléculas del gas A, se forman dos moléculas del gas B. La rapidez dy/dt con la que se forma el gas B es proporcional a $(10 - y)^2$, que es el número de pares de moléculas del gas A. Encuentre una fórmula para y suponiendo que $y = 2$ moles a los 30 segundos.

37. En química se usa la notación A + B → Y para indicar que debido a la interacción de dos sustancias A y B se forma una sustancia Y. Sean a y b las cantidades iniciales de A y B, respectivamente. Si al tiempo t la concentración de Y es $y = f(t)$, entonces las concentraciones de A y B son $a - f(t)$ y $b - f(t)$, respectivamente. Encuentre $f(t)$ suponiendo que la rapidez con la que se produce Y está dada por $dy/dt = k(a - y)(b - y)$ para alguna constante positiva k y que $f(0) = 0$.

38. Sea $y = f(t)$ la población al tiempo t de una colección de insectos o bacterias. Si la rapidez (o tasa) de crecimiento de la población dy/dt es proporcional a y; es decir, si $dy/dt = cy$ para una constante positiva c, por lo tanto $f(t) = f(0)e^{ct}$ (véase el Teorema (7.26)). En la mayoría de los casos, la rapidez de crecimiento depende de las fuentes disponibles de alimento, y cuando t aumenta $f'(t)$ comienza a disminuir. Para describir este tipo de comportamiento en una población, a menudo se usa la ecuación $dy/dt = y(c - by)$, donde c y b son constantes positivas, llamada la *ley del crecimiento logístico*.
 (a) Encuentre $f(t)$ suponiendo que $f(0) = k$.
 (b) Determine $\lim_{t\to\infty} f(t)$.
 (c) Compruebe que $f'(t)$ es creciente cuando $f(t) < c/(2b)$, y decreciente cuando $f(t) > c/(2b)$.
 (d) Trace una gráfica típica de f. (Una gráfica de este tipo se llama *curva logística*.)

39. Aplique una ecuación diferencial para describir

todas las funciones para las que la recta tangente a su gráfica en cualquier punto $P(x, y)$ es perpendicular al segmento que va de P al origen. ¿Cuál es la gráfica de una solución típica de esta ecuación diferencial?

40. La siguiente ecuación diferencial aparece en el estudio de los potenciales electrostáticos en regiones esféricas:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{dV}{d\theta}\right) = 0.$$

Encuentre una solución $V(\theta)$ que satisfaga las condiciones $V(\pi/2) = 0$ y $V(\pi/4) = V_0$.

1020

APÉNDICES

I Inducción matemática

II Teoremas sobre límites e integrales

III Tablas

IV Tablas de integrales

1022

Demostración Supongamos que (i) y (ii) de (B) son válidas y sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que P_n es verdadero. Por hipótesis, P_1 es verdadero y por lo tanto, 1 está en S. Entonces S satisface la propiedad (i) de (A). Cuando S contiene un entero positivo k, por la definición de S, P_k es verdadero y por la hipótesis (ii) de (B), P_{k+1} también es verdadero. Esto quiere decir que $k + 1$ pertenece a S. Se demostró que cuando S contiene a un entero positivo k, entonces S contiene a $k + 1$. Por consiguiente, la propiedad (ii) de (A) es verdadera. De modo que según (A), S contiene a todos los enteros positivos, es decir, P_n es verdadero para todo entero positivo n. • •

Existen otras variantes del principio de inducción matemática. En (D) aparece una de ellas. En la mayoría de los casos, el enunciado P_n se dará generalmente en forma de una ecuación que depende de un entero positivo arbitrario n, como en el ejemplo $(xy)^n = x^n y^n$.

Al aplicar (B), siempre se siguen los siguientes dos pasos.

(C)

Paso (i) Demostrar que P_1 es verdadero.

Paso (ii) Suponer que P_k es verdadero y demostrar que P_{k+1} lo es también.

El paso (ii) generalmente es muy confuso para el alumno principiante. No se *demuestra* que P_k es verdadero (excepto para $k = 1$). En lugar de eso, se prueba que *si* P_k es verdadero, entonces el enunciado P_{k+1} es verdadero. Según (B), esto es todo lo que se necesita. La suposición de que P_k es verdadero se conoce como la **hipótesis de inducción**.

EJEMPLO 1 Demostrar que para todo entero positivo n, la suma de los primeros n enteros positivos es $n(n + 1)/2$.

Solución Para cualquier entero positivo n, sea P_n el enunciado

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Por convención, cuando $n \leq 4$, el lado izquierdo se ajusta para que haya exactamente n términos en la suma. Los siguientes son algunos casos especiales de P_n:

Si $n = 2$, entonces P_2 es

$$1 + 2 = \frac{2(2 + 1)}{2} \quad \text{o bien} \quad 3 = 3.$$

Si $n = 3$, entonces P_3 es

$$1 + 2 + 3 = \frac{3(3 + 1)}{2} \quad \text{o bien} \quad 6 = 6.$$

Si $n = 5$, entonces P_5 es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5 + 1)}{2} \quad \text{o bien} \quad 15 = 15.$$

Queremos demostrar que P_n es verdadero para todo n. Aunque resulta instructivo verificar P_n para varios valores de n, como lo hemos hecho, no es necesario hacerlo. Únicamente necesitamos seguir los pasos (i) y (ii) de (C).

(i) Si sustituimos $n = 1$ en P_n, entonces, por convención, el lado izquierdo se reduce a 1 y el lado derecho es $\frac{1(1+1)}{2}$, que es también igual a 1. Esto demuestra que P_1 es verdadero.

(ii) *Supongamos* que P_k es verdadero. Entonces la hipótesis de inducción es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Nuestro objetivo es demostrar que P_{k+1} es verdadero, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Por la hipótesis de inducción tenemos ya una fórmula para la suma de los primeros k enteros positivos. Se puede encontrar una fórmula para la suma de los primeros $k + 1$ enteros positivos simplemente sumando $(k + 1)$ a ambos lados de la hipótesis de inducción. Haciendo esto y simplificando,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}. \end{aligned}$$

Hemos demostrado que P_{k+1} es verdadero y por lo tanto, la demostración por inducción matemática queda completa.

Sea j un entero positivo y supongamos que a todo $n \geq j$ se asocia un enunciado P_n. Por ejemplo, si $j = 6$, los enunciados se numeran P_6, P_7, P_8, etcétera. El principio de inducción matemática puede generalizarse para incluir esta situación. Igual que antes, se siguen dos pasos. Concretamente, *para demostrar que los enunciados S_n son* ciertos para $n \geq j$, se siguen las siguientes dos etapas.

(D)

Paso (i′) Demostrar que S_j es verdadero.

Paso (ii′) *Suponer* que S_k es verdadero para $k \geq j$ y *demostrar* que S_{k+1} es verdadero.

EJEMPLO 2 Sea a un número real distinto de cero tal que $a > -1$. Demostrar que $(1 + a)^n > 1 + na$ para todo entero $n \geq 2$.

Solución Para cualquier entero positivo n, denotemos por P_n la desigualdad $(1 + a)^n > 1 + na$. Obsérvese que P_1 es *falso* ya que $(1 + a)^1 = 1 + (1)(a)$. Sin embargo, podemos demostrar que P_n es verdadero para $n \geq 2$ usando (D) con $j = 2$.

(i′) Notemos primero que $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$. Como $a \neq 0$, se tiene que $a^2 > 0$ y por lo tanto $1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$. Entonces $(1 + a)^2 > 1 + 2a$ y por consiguiente P_2 es verdadero.

(ii′) Supongamos que P_k es verdadero para $k \geq 2$. Entonces, la hipótesis de inducción es

$$(1 + a)^k > 1 + ka.$$

Queremos demostrar que P_{k+1} es verdadero, es decir,

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

Como $a > -1$, tenemos que $a + 1 > 0$, y por lo tanto, al multiplicar ambos lados de la hipótesis de inducción por $1 + a$ no se altera la desigualdad. Por consiguiente,

$$(1 + a)^k(1 + a) > (1 + ka)(1 + a)$$

que se puede escribir como

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + ka + a + ka^2$$

o como

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a + ka^2.$$

Puesto que $ka^2 > 0$, tenemos que

$$1 + (k + 1)a + ka^2 > 1 + (k + 1)a$$

y por lo tanto

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

Entonces, P_{k+1} es verdadero. Esto completa la demostración. •

EJERCICIOS APÉNDICE I

Ejercicios 1-18: Demuestre que la fórmula es verdadera para todo entero positivo n.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$
2. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$
3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
4. $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n - 3) = 3n^2$
5. $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n - 3) = \dfrac{n}{2}(5n - 1)$
6. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$
7. $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n - 1) \cdot 2^n$
8. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$

9. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

10. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

11. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

12. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

13. $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

14. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

15. $n < 2^n$

16. $1 + 2n \leq 3^n$

17. $1 + 2 + 3 + \cdots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$

18. Si $0 < a < b$, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} < \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Ejercicios 19-26: Demuestre que el enunciado es verdadero para todo entero positivo n.

19. 3 es un factor de $n^3 - n + 3$.

20. 2 es un factor de $n^2 + n$.

21. 4 es un factor de $5^n - 1$.

22. 9 es un factor de $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$.

23. Si a es cualquier número real mayor que 1, entonces $a^n > 1$.

24. Si $a \neq 0$, entonces

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

25. $a - b$ es un factor de $a^n - b^n$.
(*Sugerencia:* $a^{k+1} - b^{k+1} = a^k(a-b) + (a^k - b^k)b$.)

26. $a + b$ es un factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$.

27. Demuestre que

$$\log(a_1 a_2 \cdots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n$$

para todo $n \geq 2$, donde cada a_k es un número real positivo.

28. Demuestre la *Ley Generalizada de la Distributividad*

$$a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n$$

para todo $n \geq 2$, donde a y todos los b_k son números reales.

29. Demuestre que

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

donde n es un entero positivo arbitrario y a y r son números reales con $r \neq 1$.

30. Demuestre que

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (n-1)d] = (n/2)[2a + (n-1)d]$$

donde n es un entero positivo arbitrario y a y d son números reales.

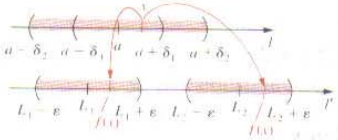
II TEOREMAS SOBRE LÍMITES E INTEGRALES

Este apéndice contiene las demostraciones de algunos de los teoremas enunciados en el texto. El sistema de numeración corresponde al utilizado en los capítulos anteriores.

TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE

Si $f(x)$ tiene un límite cuando x tiende a a, entonces el límite es único.

FIGURA 1



Demostración Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y que $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ con $L_1 \neq L_2$. Se puede suponer que $L_1 < L_2$. Sea ε tal que $\varepsilon < \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$ y consideremos los intervalos abiertos $(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$ y $(L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$ sobre la recta coordenada l' (véase la Figura 1). En vista de que $\varepsilon < \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$, estos dos intervalos no se intersecan. Por la Definición (2.11), existe un $\delta_1 > 0$ tal que cuando x está en $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ está en $(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$. Análogamente, existe un $\delta_2 > 0$ tal que cuando x está en $(a - \delta_2, a + \delta_2)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ está en $(L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$. Esto se ilustra en la Figura 1, con $\delta_1 < \delta_2$. Si se escoge x en $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ y en $(a - \delta_2, a + \delta_2)$, entonces $f(x)$ está en $(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$ y también en $(L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$, lo cual contradice el hecho de que estos dos intervalos no se intersecan. Por lo tanto la suposición inicial es falsa y por consiguiente, $L_1 = L_2$. • •

TEOREMA (2.15)

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces

(i) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

(ii) $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

(iii) $\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}$, si $M \neq 0$.

Demostración

(i) De acuerdo con la Definición (2.10) hay que demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

(a) si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$.

Comenzamos por escribir

(b) $$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)|.$$

Usando la Desigualdad del Triángulo (1.4),

$$|(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|.$$

Combinando la última desigualdad con (b) se tiene que

(c) $$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|.$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, los números $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$ pueden hacerse arbitrariamente pequeños escogiendo x suficientemente cercano a a. En particular, pueden hacerse menores que $\varepsilon/2$. Por lo tanto, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

(d) $$\begin{aligned} &\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon/2, \quad \text{y} \\ &\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Si δ denota el *menor* de los números δ_1 y δ_2, entonces cuando $0 < |x - a| < \delta$, las desigualdades en (d) que involucran a $f(x)$ y $g(x)$ son ambas verdaderas. Por lo tanto si $0 < |x - a| < \delta$, entonces por (c) y (d),

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

que es el enunciado deseado (a).

(ii) Primero se demuestra que si k es una función y

(e) $$\text{si} \quad \lim_{x \to a} k(x) = 0, \quad \text{entonces} \quad \lim_{x \to a} f(x)k(x) = 0.$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, de la Definición (2.10) (con $\varepsilon = 1$) resulta que existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < 1$, y por lo tanto también

$$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|.$$

En consecuencia,

(f) $$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad |f(x)k(x)| < (1 + |L|)|k(x)|.$$

Como $\lim_{x \to a} k(x) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que

(g) $$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{entonces} \quad |k(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{1 + |L|}.$$

Si δ denota al menor de los números δ_1 y δ_2, entonces cuando $0 < |x - a| < \delta$ ambas desigualdades (f) y (g) se satisfacen y así,

$$|f(x)k(x)| < (1 + |L|) \cdot \frac{\varepsilon}{1 + |L|}.$$

Por consiguiente,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x)k(x) - 0| < \varepsilon,$$

lo cual demuestra (e).

Ahora consideremos la identidad

(h) $$f(x)g(x) - LM = f(x)[g(x) - M] + M[f(x) - L].$$

En virtud de que $\lim_{x \to a} [g(x) - M] = 0$, se deduce de (e) con $k(x) = g(x) - M$, que $\lim_{x \to a} f(x)[g(x) - M] = 0$. Por añadidura, $\lim_{x \to a} M[f(x) - L] = 0$ y por lo tanto,

de (h), $\lim_{x\to a}[f(x)g(x) - LM] = 0$. La última afirmación expuesta es equivalente a $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$.

(iii) Es suficiente demostrar que $\lim_{x\to a} 1/(g(x)) = 1/M$, ya que una vez hecho esto, el resultado deseado puede obtenerse aplicando (ii) al producto $f(x) \cdot 1/(g(x))$. Consideremos

(i) $$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{g(x)M}\right| = \frac{1}{|M||g(x)|}|g(x) - M|.$$

Debido a que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|g(x) - M| < |M|/2$. Por lo tanto, para todo x tal,

$$\begin{aligned} |M| &= |g(x) + (M - g(x))| \\ &\leq |g(x)| + |M - g(x)| \\ &< |g(x)| + |M|/2 \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{|M|}{2} < |g(x)| \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}.$$

Sustituyendo en la ecuación (i) se llega a

(j) $$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \frac{2}{|M|^2}|g(x) - M|, \qquad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Usando otra vez el hecho de que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, se deduce que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que

(k) $$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \frac{|M|^2}{2}\varepsilon.$$

Si δ denota el menor de los números δ_1 y δ_2, entonces ambas desigualdades (j) y (k) se satisfacen. Por lo tanto

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \varepsilon,$$

lo cual quiere decir que $\lim_{x\to a} 1/(g(x)) = 1/M$. • •

TEOREMA (2.20) Si $a > 0$ y n es un entero positivo o si $a \leq 0$ y n es un entero positivo impar, entonces $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

Demostración Supongamos que $a > 0$ y n es un entero positivo cualquiera. Debe demostrarse que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon$$

o equivalentemente,

(a) si $-\delta < x - a < \delta,\ x \neq a,$ entonces $-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \varepsilon.$

Basta demostrar (a) para $\varepsilon < \sqrt[n]{a}$, ya que si existe un δ bajo estas condiciones, entonces el mismo δ se puede usar para cualquier valor *mayor* de ε. Por lo tanto, en el resto de la demostración $\sqrt[n]{a} - \varepsilon$ se considera como un número positivo menor que ε. Las desigualdades de la siguiente lista son todas equivalentes:

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \varepsilon$$
$$\sqrt[n]{a} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{a} + \varepsilon$$
$$(\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n < x < (\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n$$
$$(\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n - a < x - a < (\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n - a$$
$$-[a - (\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n] < x - a < (\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n - a.$$

Si δ denota el menor de los dos números positivos $a - (\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n$ y $(\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n - a$, entonces cuando $-\delta < x - a < \delta$ la última desigualdad de la lista es verdadera, y por lo tanto también lo es la primera. Esto da (a).

Ahora supongamos que $a < 0$ y n es un entero positivo impar. En este caso $-a$ y $\sqrt[n]{-a}$ son positivos y por la primera parte de la demostración, se puede escribir

$$\lim_{-x \to -a} \sqrt[n]{-x} = \sqrt[n]{-a}.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |-x - (-a)| < \delta, \quad \text{entonces } |\sqrt[n]{-x} - \sqrt[n]{-a}| < \varepsilon$$

o equivalentemente,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces } |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon.$$

Las últimas desigualdades implican que $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$. ••

TEOREMA DE INTERCALACIÓN (2.22)

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a, y si $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$, entonces tenemos que $\lim_{x \to a} h(x) = L$.

Demostración Para todo $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

(a)
$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{entonces } |f(x) - L| < \varepsilon,$$
$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{entonces } |g(x) - L| < \varepsilon.$$

Si δ denota el menor de los números δ_1 y δ_2, entonces cuando $0 < |x - a| < \delta$, ambas desigualdades que dependen de ε en (a) se satisfacen, es decir,

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \quad \text{y} \quad -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon.$$

Por lo tanto si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $L - \varepsilon < f(x)$ y $g(x) < L + \varepsilon$. Puesto que $f(x) \le h(x) \le g(x)$, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$, o equivalentemente, $|h(x) - L| < \varepsilon$, que es lo que se quería demostrar. • •

TEOREMA (2.26)

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to a} g(x) = b$, y f es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

FIGURA 2

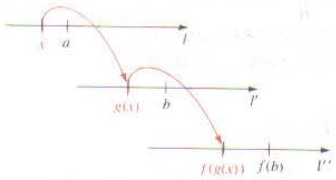


FIGURA 3

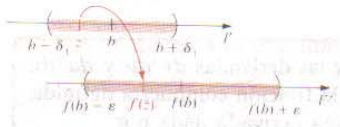
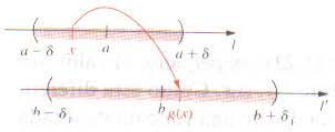


FIGURA 4



Demostración La función compuesta $f(g(x))$ puede representarse geométricamente por medio de tres rectas reales, l, l', y l'', como se ilustra en la Figura 2. A cada coordenada x en l le corresponde una coordenada $g(x)$ en l', y luego una coordenada $f(g(x))$ en l''. Se quiere demostrar que $f(g(x))$ tiene límite $f(b)$ cuando x tiende a a. En términos de la Definición (2.10) se debe demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

(a) si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$.

Procederemos inicialmente considerando el intervalo $(f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon)$ en l'', ilustrado en la Figura 3. Como f es continua en b, $\lim_{z \to b} f(z) = f(b)$ y por lo tanto, como se ilustra en la figura, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

(b) si $|z - b| < \delta_1$, entonces $|f(z) - f(b)| < \varepsilon$.

En particular, tomando $z = g(x)$ en (b) resulta que

(c) si $|g(x) - b| < \delta_1$, entonces $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$.

Ahora, prestando atención al intervalo $(b - \delta_1, b + \delta_1)$ en l' y usando la definición de $\lim_{x \to a} g(x) = b$, se obtiene el hecho ilustrado en la Figura 4 de que existe un $\delta > 0$ tal que

si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - b| < \delta_1$.

Finalmente, combinando (c) y (d), se ve que

si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$

que es la conclusión buscada (a). • •

DEFINICIONES (3.1) Y (3.1)′

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

siempre y cuando alguno de los dos límites exista.

Demostración Supongamos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

para algún número L. De acuerdo con la definición de límite (2.10), esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| < \varepsilon.$$

Tomando $h = x - a$, entonces $x = a + h$ y la última afirmación puede escribirse como

$$\text{si} \quad 0 < |h| < \delta, \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - L \right| < \varepsilon$$

lo que significa que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = L.$$

Inversamente, empezando con el último límite e invirtiendo los pasos se llega al primer límite. • •

REGLA DE LA CADENA (3.26)

Si $y = f(u)$, $u = g(x)$ y las derivadas dy/du y du/dx existen ambas, entonces la función compuesta definida por $y = f(g(x))$ tiene una derivada dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Demostración Si $y = f(x)$ y $\Delta x \approx 0$, entonces por (3.23), es pequeño el valor absoluto de la diferencia entre la derivada $f'(x)$ y el cociente $\Delta y/\Delta x$. Como esta diferencia depende del tamaño de Δx, se debe representar por medio de una función denotada por $\eta(\Delta x)$. Por lo tanto, para cada $\Delta x \neq 0$,

(a) $$\eta(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x).$$

Debe notarse que $\eta(\Delta x)$ *no* representa el producto de η y Δx, sino que η *es una función de* Δx, cuyos valores están dados por (a). Más aún, aplicando (3.23) se ve que

(b) $$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right] = 0.$$

La función η se ha definido solamente para valores de Δx diferentes de cero. Es conveniente generalizar la definición de η para que incluya el caso en que $\Delta x = 0$ definiendo $\eta(0) = 0$. Entonces se deduce de (b) que η *es continua en* 0.

Multiplicando ambos lados de (a) por Δx y ordenando los términos se obtiene

(c) $$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \eta(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

lo cual es cierto si $\Delta x \neq 0$ o bien $\Delta x = 0$. Como $f'(x)\,\Delta x = dy$, se deduce de (c) que

(d) $$\Delta y - dy = \eta(\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Consideremos ahora la situación enunciada en la hipótesis del teorema

$$y = f(u) \quad \text{y} \quad u = g(x).$$

Si $g(x)$ está en el dominio de f, se puede escribir

$$y = f(u) = f(g(x)),$$

es decir, y es una función de x. Si se da a x un incremento Δx, se obtiene un incremento Δu de u, y éste a su vez produce un incremento Δy de $y = f(u)$. Entonces

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$
$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Como dy/du existe, se puede usar (c) con u como variable independiente para escribir

(e) $$\Delta y = f'(u)\,\Delta u + \eta(\Delta u)\ \ \Delta u$$

donde η es una función de Δu tal que según (b),

(f) $$\lim_{\Delta u \to 0} \eta(\Delta u) = 0.$$

Además, η es continua en $\Delta u = 0$ y (e) se satisface si $\Delta u = 0$. Dividiendo ambos lados de (e) entre Δx se obtiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \eta(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Tomando el límite cuando Δx tiende a cero y aplicando

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx},$$

se ve que

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} + \lim_{\Delta x \to 0}\eta(\Delta u)\cdot\frac{du}{dx}.$$

Como $f'(u) = dy/du$, la demostración se puede completar probando que el límite indicado en la última ecuación es 0. Para lograr esto primero se observa que como g es derivable, es continua, y por lo tanto

$$\lim_{\Delta x \to 0}[g(x + \Delta x) - g(x)] = 0$$

o equivalentemente,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u = 0.$$

En otras palabras, Δu tiende a 0 cuando Δx tiende a 0. Usando este hecho, junto con (f) se tiene que

(g) $$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta u) = \lim_{\Delta u \to 0} \eta(\Delta u) = 0$$

y el teorema queda demostrado. El hecho de que $\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta u) = 0$ también puede demostrarse por medio de un argumento del tipo ε-δ usando (2.10). • •

TEOREMA (5.14)

Si f es integrable en $[a, b]$ y c es un número arbitrario, entonces cf es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración Si $c = 0$, el resultado se deduce del Teorema (5.13). Supongamos entonces que $c \neq 0$. Como f es integrable, $\int_a^b f(x)\,dx = I$ para algún número I. Si P es una partición de $[a, b]$, entonces cada suma de Riemann R_P para la función cf tiene la forma $\sum_k cf(w_k)\,\Delta x_k$, de manera que para cada k, w_k está en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de P. Se quiere demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cuando $\|P\| < \delta$, entonces

(a) $$\left|\sum_k cf(w_k)\,\Delta x_k - cI\right| < \varepsilon$$

para todo w_k en $[x_{k-1}, x_k]$. Tomando $\varepsilon' = \varepsilon/|c|$, como f es integrable existe un $\delta > 0$ tal que cuando $\|P\| < \delta$,

$$\left|\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k - I\right| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Multiplicando por $|c|$ ambos lados de la desigualdad se llega a (a). Por lo tanto,

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_k cf(w_k)\,\Delta x_k = cI = c\int_a^b f(x)\,dx \quad \bullet\ \bullet$$

TEOREMA (5.15)

Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demostración Por hipótesis, existen números reales I_1 y I_2 tales que

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_1 \quad \text{y} \quad \int_a^b g(x)\,dx = I_2.$$

Sea P una partición de $[a, b]$ y sea R_P una suma de Riemann arbitraria para $f + g$ correspondiente a P, es decir,

(a) $$R_P = \sum_k [f(w_k) + g(w_k)]\,\Delta x_k$$

donde w_k está en $[x_{k-1}, x_k]$ para todo k. Se quiere demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cuando $\|P\| < \delta$, entonces $|R_P - (I_1 + I_2)| < \varepsilon$. Usando el Teorema (5.3) (i), (a) se puede escribir en la forma

$$R_P = \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k + \sum_k g(w_k)\,\Delta x_k.$$

Ordenando los términos y aplicando la Desigualdad del Triángulo (1.4),

(b) $$\begin{aligned} |R_P - (I_1 + I_2)| &= \left|\left(\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k - I_1\right) + \left(\sum_k g(w_k)\,\Delta x_k - I_2\right)\right| \\ &\le \left|\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k - I_1\right| + \left|\sum_k g(w_k)\,\Delta x_k - I_2\right|. \end{aligned}$$

Como f y g son integrables, si $\varepsilon' = \varepsilon/2$, entonces existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que cuando $\|P\| < \delta_1$ y $\|P\| < \delta_2$,

(c) $$\left|\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k - I_1\right| < \varepsilon' = \varepsilon/2,$$

y

$$\left|\sum_k g(w_k)\,\Delta x_k - I_2\right| < \varepsilon' = \varepsilon/2$$

para todo w_k en $[x_{k-1}, x_k]$. Si δ denota el menor de los números δ_1 y δ_2, entonces cuando $\|P\| < \delta$, ambas desigualdades en (c) se satisfacen y por lo tanto, de (b),

$$|R_P - (I_1 + I_2)| < (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon,$$

que es lo que se quería demostrar. • •

TEOREMA (5.16) Si $a < c < b$ y f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Demostración Por hipótesis, existen números reales I_1 y I_2 tales que

(a) $$\int_a^c f(x)\,dx = I_1 \quad \text{y} \quad \int_c^b f(x)\,dx = I_2.$$

Sea P_1 una partición de $[a, c]$, P_2, una partición de $[c, b]$, y P una partición de $[a, b]$. Las sumas de Riemann correspondientes a P_1, P_2 y P se denotan por R_{P_1}, R_{P_2} y R_P,

respectivamente. Se debe demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$, entonces $|R_P - (I_1 + I_2)| < \varepsilon$.

Tomando $\varepsilon' = \varepsilon/4$, por (a) existen números positivos δ_1 y δ_2 tales que si $\|P_1\| < \delta_1$ y $\|P_2\| < \delta_2$, entonces

(b) $$|R_{P_1} - I_1| < \varepsilon' = \varepsilon/4 \quad \text{y} \quad |R_{P_2} - I_2| < \varepsilon' = \varepsilon/4.$$

Si δ denota el menor de los números δ_1 y δ_2, entonces las dos desigualdades en (b) se satisfacen cuando $\|P\| < \delta$. Además, como f integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$, está acotada en ambos intervalos y por lo tanto, existe un número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x en $[a, b]$. Supongamos ahora que además de lo anterior también se tiene que $\delta < \varepsilon/(4M)$.

Sea P una partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$. Si los números que determinan P son

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b,$$

entonces existe un único intervalo semiabierto de la forma $(x_{d-1}, x_d]$ que contiene a c. Si $R_P = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k$, puede escribirse

(c) $$R_P = \sum_{k=1}^{d-1} f(w_k)\,\Delta x_k + f(w_d)\,\Delta x_d + \sum_{k=d+1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k.$$

Sean P_1 la partición de $[a, c]$ determinada por $\{a, x_1, \ldots, x_{d-1}, c\}$, P_2 la partición de $[c, b]$ determinada por $\{c, x_d, \ldots, x_{n-1}, b\}$, y consideremos las sumas de Riemann

(d) $$R_{P_1} = \sum_{k=1}^{d-1} f(w_k)\,\Delta x_k + f(c)(c - x_{d-1})$$

$$R_{P_2} = f(c)(x_d - c) + \sum_{k=d+1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k.$$

Usando la Desigualdad del Triángulo (1.4) y (b),

(e) $$\begin{aligned} |(R_{P_1} + R_{P_2}) - (I_1 + I_2)| &= |(R_{P_1} - I_1) + (R_{P_2} - I_2)| \\ &\leq |R_{P_1} - I_1| + |R_{P_2} - I_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

De (c) y (d) se deduce que

$$|R_P - (R_{P_1} + R_{P_2})| = |f(w_d) - f(c)|\,\Delta x_d.$$

Usando la Desigualdad del Triángulo y la elección de δ se tiene que

(f) $$\begin{aligned} |R_P - (R_{P_1} + R_{P_2})| &\leq \{|f(w_d)| + |f(c)|\}\,\Delta x_d \\ &\leq (M + M)[\varepsilon/(4M)] = \varepsilon/2, \end{aligned}$$

siempre que $\|P\| < \delta$ Escribiendo

$$\begin{aligned} |R_P - (I_1 + I_2)| &= |R_P - (R_{P_1} + R_{P_2}) + (R_{P_1} + R_{P_2}) - (I_1 + I_2)| \\ &\leq |R_P - (R_{P_1} + R_{P_2})| + |(R_{P_1} + R_{P_2}) - (I_1 + I_2)| \end{aligned}$$

de (f) y (e) se deduce que siempre que $\|P\| < \delta$,

$$|R_P - (I_1 + I_2)| < (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon$$

para cualquier suma de Riemann R_P. Esto completa la demostración. • •

TEOREMA (5.18)

Si f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Demostración Se dará una demostración indirecta. Sea $\int_a^b f(x)\,dx = I$ y suponga-mos que $I < 0$. Sea P una partición de $[a, b]$, y sea $R_P = \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k$ una suma de Riemann arbitraria correspondiente a P. Como $f(w_k) \geq 0$ para todo w_k en $[x_{k-1}, x_k]$, resulta que $R_P \geq 0$. Tomando $\varepsilon = -(I/2)$, entonces de acuerdo con la Definición (5.7), cuando $\|P\|$ es suficientemente pequeño,

$$|R_P - I| < \varepsilon = -(I/2).$$

Resulta que $R_P < I - (I/2) = I/2 < 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la premisa $I < 0$ es falsa y por tanto $I \geq 0$. • •

TEOREMA (17.31)

Si $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ es una transformación de coordenadas, entonces

$$\iint_R F(x, y)\,dx\,dy =$$

$$\pm \iint_S F\big(f(u, v), g(u, v)\big)\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Se escoge el signo + o − según si cuando (u, v) recorre la frontera K de S una vez en el sentido positivo, el punto correspondiente (x, y) traza la frontera C de R una vez en la dirección positiva o en la negativa, respectivamente.

Demostración Comenzamos escogiendo $G(x, y)$ tal que $\partial G/\partial x = F$. Aplicando el Teorema de Green (18.19) con $G = N$, se tiene que

(a)
$$\iint_R F(x, y)\,dx\,dy = \iint_R \frac{\partial}{\partial x}\,[G(x, y)]\,dx\,dy = \oint_C G(x, y)\,dy.$$

Supongamos que la curva K en el plano uv tiene una parametrización

$$u = \varphi(t),\ v = \psi(t); \qquad a \leq t \leq b.$$

De las hipótesis sobre la transformación, la curva C en el plano xy tiene ecuaciones paramétricas

(b)
$$x = f(u, v) = f(\varphi(t), \psi(t))$$
$$y = g(u, v) = g(\varphi(t), \psi(t))$$

para $a \le t \le b$. Por lo tanto, se debe evaluar la integral de línea $G(x, y)\,dy$ en (a) sustituyendo formalmente x y y. Para simplificar la notación, sea

$$H(t) = G[f(\varphi(t), \psi(t)), g(\varphi(t), \psi(t))].$$

Aplicando la Regla de la Cadena a y en (b) se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\varphi'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}\psi'(t).$$

Por lo tanto,

$$\oint_C G(x, y)\,dy = \oint_C H(t)\frac{dy}{dt}\,dt$$
$$= \int_a^b H(t)\left[\frac{\partial y}{\partial u}\varphi'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}\psi'(t)\right]dt.$$

Como $du = \varphi'(t)\,dt$ y $dv = \psi'(t)\,dt$, puede considerarse a la última integral como una integral de línea alrededor de la curva K en el plano uv. Entonces

(c)
$$\oint_C G(x, y)\,dy = \pm\oint_K G\frac{\partial y}{\partial u}\,du + G\frac{\partial y}{\partial v}\,dv.$$

Por sencillez se usó G para abreviar $G(f(u, v), g(u, v))$. La elección del signo + o − se determina haciendo variar t de a a b y observando si (x, y) traza C en la misma dirección en que (u, v) recorre K o en el sentido opuesto, respectivamente.

La integral de línea al lado derecho de (c) tiene la forma

$$\oint_K M\,du + N\,dv$$

con
$$M = G\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{y} \quad N = G\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Aplicando el Teorema de Green, se obtiene

$$\oint_K M\,du + N\,dv = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}\right)du\,dv$$
$$= \iint_S \left(G\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - G\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u} - \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv$$
$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v} - \left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right]du\,dv$$
$$= \iint_S \frac{\partial G}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)du.dv.$$

Usando el hecho de que $\partial G/\partial x = F(x, y)$, junto con la definición del jacobiano (17.30) se obtiene

$$\oint_K M\,du + N\,dv = \iint_S F(f(u, v), g(u, v))\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Combinando esta fórmula con (a) y (c) se llega al resultado deseado. • •

III TABLAS

TABLA A FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Grados	Radianes	sen	tan	cot	cos		
0	0.000	0.000	0.000		1.000	1.571	90
1	0.017	0.017	0.017	57.29	1.000	1.553	89
2	0.035	0.035	0.035	28.64	0.999	1.536	88
3	0.052	0.052	0.052	19.081	0.999	1.518	87
4	0.070	0.070	0.070	14.301	0.998	1.501	86
5	0.087	0.087	0.087	11.430	0.996	1.484	85
6	0.105	0.105	0.105	9.514	0.995	1.466	84
7	0.122	0.122	0.123	8.144	0.993	1.449	83
8	0.140	0.139	0.141	7.115	0.990	1.431	82
9	0.157	0.156	0.158	6.314	0.988	1.414	81
10	0.175	0.174	0.176	5.671	0.985	1.396	80
11	0.192	0.191	0.194	5.145	0.982	1.379	79
12	0.209	0.208	0.213	4.705	0.978	1.361	78
13	0.227	0.225	0.231	4.331	0.974	1.344	77
14	0.244	0.242	0.249	4.011	0.970	1.326	76
15	0.262	0.259	0.268	3.732	0.966	1.309	75
16	0.279	0.276	0.287	3.487	0.961	1.292	74
17	0.297	0.292	0.306	3.271	0.956	1.274	73
18	0.314	0.309	0.325	3.078	0.951	1.257	72
19	0.332	0.326	0.344	2.904	0.946	1.239	71
20	0.349	0.342	0.364	2.747	0.940	1.22	70
21	0.367	0.358	0.384	2.605	0.934	1.20	69
22	0.384	0.375	0.404	2.475	0.927	1.187	68
23	0.401	0.391	0.424	2.356	0.921	1.169	67
24	0.419	0.407	0.445	2.246	0.914	1.152	66
25	0.436	0.423	0.466	2.144	0.906	1.134	65
26	0.454	0.438	0.488	2.050	0.899	1.117	64
27	0.471	0.454	0.510	1.963	0.891	1.100	63
28	0.489	0.469	0.532	1.881	0.883	1.082	62
29	0.506	0.485	0.554	1.804	0.875	1.065	61
30	0.524	0.500	0.577	1.732	0.866	1.047	60
31	0.541	0.515	0.601	1.664	0.857	1.030	59
32	0.559	0.530	0.625	1.600	0.848	1.012	58
33	0.576	0.545	0.649	1.540	0.839	0.995	57
34	0.593	0.559	0.675	1.483	0.829	0.977	56
35	0.611	0.574	0.700	1.428	0.819	0.960	55
36	0.628	0.588	0.727	1.376	0.809	0.942	54
37	0.646	0.602	0.754	1.327	0.799	0.925	53
38	0.663	0.616	0.781	1.280	0.788	0.908	52
39	0.681	0.629	0.810	1.235	0.777	0.890	51
40	0.698	0.643	0.839	1.192	0.766	0.873	50
41	0.716	0.656	0.869	1.150	0.755	0.855	49
42	0.733	0.669	0.900	1.111	0.743	0.838	48
43	0.750	0.682	0.933	1.072	0.731	0.820	47
44	0.768	0.695	0.966	1.036	0.719	0.803	46
45	0.785	0.707	1.000	1.000	0.707	0.785	45
		cos	cot	tan	sen	Radianes	Grados

TABLA B FUNCIONES EXPONENCIALES

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000	2.50	12.182	0.0821
0.05	1.0513	0.9512	2.60	13.464	0.0743
0.10	1.1052	0.9048	2.70	14.880	0.0672
0.15	1.1618	0.8607	2.80	16.445	0.0608
0.20	1.2214	0.8187	2.90	18.174	0.0550
0.25	1.2840	0.7788	3.00	20.086	0.0498
0.30	1.3499	0.7408	3.10	22.198	0.0450
0.35	1.4191	0.7047	3.20	24.533	0.0408
0.40	1.4918	0.6703	3.30	27.113	0.0369
0.45	1.5683	0.6376	3.40	29.964	0.0334
0.50	1.6487	0.6065	3.50	33.115	0.0302
0.55	1.7333	0.5769	3.60	36.598	0.0273
0.60	1.8221	0.5488	3.70	40.447	0.0247
0.65	1.9155	0.5220	3.80	44.701	0.0224
0.70	2.0138	0.4966	3.90	49.402	0.0202
0.75	2.1170	0.4724	4.00	54.598	0.0183
0.80	2.2255	0.4493	4.10	60.340	0.0166
0.85	2.3396	0.4274	4.20	66.686	0.0150
0.90	2.4596	0.4066	4.30	73.700	0.0136
0.95	2.5857	0.3867	4.40	81.451	0.0123
1.00	2.7183	0.3679	4.50	90.017	0.0111
1.10	3.0042	0.3329	4.60	99.484	0.0101
1.20	3.3201	0.3012	4.70	109.95	0.0091
1.30	3.6693	0.2725	4.80	121.51	0.0082
1.40	4.0552	0.2466	4.90	134.29	0.0074
1.50	4.4817	0.2231	5.00	148.41	0.0067
1.60	4.9530	0.2019	6.00	403.43	0.0025
1.70	5.4739	0.1827	7.00	1096.6	0.0009
1.80	6.0496	0.1653	8.00	2981.0	0.0003
1.90	6.6859	0.1496	9.00	8103.1	0.0001
2.00	7.3891	0.1353	10.00	22026.0	0.00005
2.10	8.1662	0.1225			
2.20	9.0250	0.1108			
2.30	9.9742	0.1003			
2.40	11.0232	0.0907			

TABLA C LOGARITMOS NATURALES

n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0*		7.697	8.391	8.796	9.084	9.307	9.489	9.643	9.777	9.895
1	0.000	0.095	0.182	0.262	0.336	0.405	0.470	0.531	0.588	0.642
2	0.693	0.742	0.788	0.833	0.875	0.916	0.956	0.993	1.030	1.065
3	1.099	1.131	1.163	1.194	1.224	1.253	1.281	1.308	1.335	1.361
4	1.386	1.411	1.435	1.459	1.482	1.504	1.526	1.548	1.569	1.589
5	1.609	1.629	1.649	1.668	1.686	1.705	1.723	1.740	1.758	1.775
6	1.792	1.808	1.825	1.841	1.856	1.872	1.887	1.902	1.917	1.932
7	1.946	1.960	1.974	1.988	2.001	2.015	2.028	2.041	2.054	2.067
8	2.079	2.092	2.104	2.116	2.128	2.140	2.152	2.163	2.175	2.186
9	2.197	2.208	2.219	2.230	2.241	2.251	2.262	2.272	2.282	2.293
10	2.303	2.313	2.322	2.332	2.342	2.351	2.361	2.370	2.380	2.389

* Restar 10 si $n < 1$; por ejemplo, $\ln 0.3 = 8.796 - 10 = -1.204$.

IV TABLAS DE INTEGRALES

FÓRMULAS BÁSICAS

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
2. $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
4. $\int e^u\,du = e^u + C$
5. $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$
6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$
13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$
17. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$
20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

FÓRMULAS CON $\sqrt{a^2 + u^2}$

21. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$
22. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$
23. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$
24. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$
25. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$
26. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$
27. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$
28. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$
29. $\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

FÓRMULAS CON $\sqrt{a^2 - u^2}$

30. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u}\sqrt{a^2 - u^2} + C$

37. $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\, du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

FÓRMULAS CON $\sqrt{u^2 - a^2}$

39. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

40. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{u} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$

FÓRMULAS CON $a + bu$

47. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a + bu - a\ln|a+bu|) + C$

48. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|] + C$

49. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

50. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

52. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

54. $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a+bu}$

56. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a+bu}$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \quad \text{si } a > 0$

$\displaystyle= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \quad \text{si } a < 0$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$

61. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

62. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

FÓRMULAS PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

63. $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64. $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

66. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

67. $\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71. $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

72. $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

74. $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75. $\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$

76. $\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$

77. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78. $\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$

79. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\int u \cos u\,du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

85. $\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

86. $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\,du$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\,du$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\,du$$

FÓRMULAS PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

87. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u\operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\int u\cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\int u\tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

93. $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

94. $\int u^n \cos^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

95. $\int u^n \tan^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$

FÓRMULAS PARA FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS NATURALES

96. $\int ue^{au}\, du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

97. $\int u^n e^{au}\, du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\, du$

98. $\int e^{au}\operatorname{sen} bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

99. $\int e^{au}\cos bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

100. $\int \ln u\, du = u\ln u - u + C$

101. $\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

102. $\int \frac{1}{u\ln u}\, du = \ln|\ln u| + C$

FÓRMULAS PARA FUNCIONES HIPERBÓLICAS

103. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

104. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

105. $\int \tanh u\, du = \ln\cosh u + C$

106. $\int \coth u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

107. $\int \operatorname{sech} u\, du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

108. $\int \operatorname{csch} u\, du = \ln|\tanh \tfrac{1}{2}u| + C$

109. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

110. $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

111. $\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

112. $\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

FÓRMULAS CON $\sqrt{2au - u^2}$

113. $\int \sqrt{2au-u^2}\, du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

114. $\int u\sqrt{2au-u^2}\, du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

115. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\, du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

116. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\, du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

117. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

118. $\int \frac{u\, du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

119. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

120. $\int \frac{du}{u\sqrt{2ua-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE NÚMERO IMPAR

CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1, PÁGINA 9

1. (a) $>$ (b) $<$ (c) $=$ (d) $>$ (e) $=$ (f) $<$

3. (a) 3 (b) 7 (c) 7 (d) 3 (e) $\frac{22}{7} - \pi$ (f) -1 (g) 0 (h) 9 (i) $x - 5$ (j) $b - a$

5. (a) 4 (b) 8 (c) 8 (d) 12 **7.** $(\frac{17}{5}, \infty)$

9. $[-2, \infty)$ **11.** $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$ **13.** $(5, \infty)$

15. $(-\frac{4}{3}, 3]$ **17.** $[-3, 1)$ **19.** $(-\infty, \frac{7}{2})$

21. (9.7, 10.3) **23.** $[\frac{5}{3}, 3]$ **25.** $(-\infty, \frac{1}{25}) \cup (\frac{3}{5}, \infty)$

27. $(-2, \frac{1}{3})$ **29.** $(-\infty, -4] \cup [-\frac{1}{2}, \infty)$

31. $(-\infty, -\frac{1}{10}) \cup (\frac{1}{10}, \infty)$ **33.** $[-\frac{2}{3}, \frac{7}{2})$

35. $\frac{140}{9} \le C \le \frac{80}{3}$ **37.** $\frac{20}{9} \le x \le 4$ **39.** $5 < p < \frac{60}{7}$

EJERCICIOS 1.2, PÁGINA 20

1. (a) 5 (b) $(4, -\frac{1}{2})$ **3.** (a) $\sqrt{26}$ (b) $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$

5. (a) 5 (b) $(-\frac{11}{2}, -2)$ **7.** 35

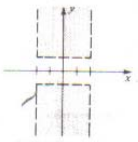
9.



11.



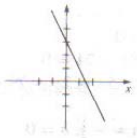
13.



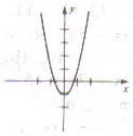
15.



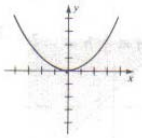
17.



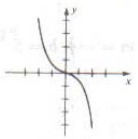
19. Simetría: respecto al eje y



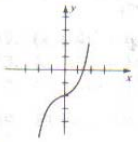
21. Simetría: respecto al eje y



23. Simetría: respecto al origen



25.



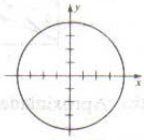
27.



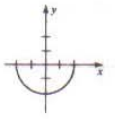
29.



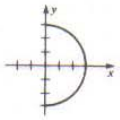
31.



33.



35.



37. $(x-3)^2+(y+2)^2=16$ **39.** $x^2+y^2=34$
41. $(x+4)^2+(y-2)^2=4$
43. $(x-1)^2+(y-2)^2=34$ **45.** $(-2, 3)$, 3
47. $(-3, 0)$, 3 **49.** $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, $\sqrt{26}/4$

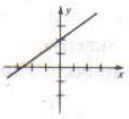
EJERCICIOS 1.3, PÁGINA 28

1. 4 **3.** No existe

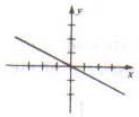
5. Las pendientes de los lados opuestos son iguales

7. *Sugerencia:* Demuestre que los lados opuestos son paralelos y que dos lados adyacentes son perpendiculares.

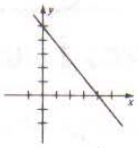
9. $(-12, 0)$ **11.** $x-2y-14=0$
13. $3x-8y-41=0$ **15.** $x-8y-24=0$
17. (a) $x=10$ (b) $y=-6$ **19.** $5x+2y-29=0$
21. $5x-7y+15=0$
23. $m=\frac{3}{4}$, $b=2$



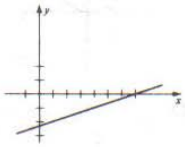
25. $m=-\frac{1}{2}$, $b=0$



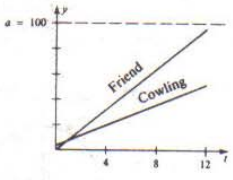
27. $m=-\frac{5}{4}$, $b=5$



29. $m=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{7}{3}$



31. -3 **33.** $x/(3/2)+y/(-3)=1$
35. (a)



(b) Aproximadamente 13 meses

37. (a) R_0 es la resistencia cuando $T=0°C$
(b) $\frac{1}{273}$ (c) 273 °C

39. (a) $L=\frac{29}{7}t+24$ para t en meses; 0.138 pie $\approx$ 1.66 pulg.
(b) $W=\frac{20}{7}t+3$; 0.095 ton/día o 190.476 lb/día

EJERCICIOS 1.4, PÁGINA 37

1. $2, -8, -3, 6\sqrt{2}-3$
3. (a) $3a^2-a+2$ (b) $3a^2+a+2$
(c) $-3a^2+a-2$
(d) $3a^2+6ah+3h^2-a-h+2$
(e) $3a^2+3h^2-a-h+4$ (f) $6a+3h-1$
5. (a) $a^2/(1+4a^2)$ (b) a^2+4 (c) $1/(a^4+4)$
(d) $1/(a^2+4)^2$ (e) $1/(a+4)$ (f) $1/\sqrt{a^2+4}$
7. $[\frac{5}{3}, \infty)$ **9.** $[-2, 2]$

11. Todos los números reales excepto 0, 3 y -3

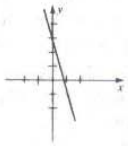
13. Sí **15.** No **17.** Sí **19.** No

21. Impar **23.** Par **25.** Par

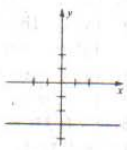
27. Ninguna de las dos cosas

29. Ninguna de las dos cosas

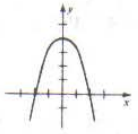
31. $(-\infty, \infty)$; $(-\infty, \infty)$



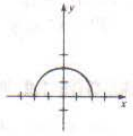
33. $(-\infty, \infty)$; $\{-3\}$



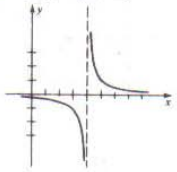
35. $(-\infty, \infty)$; $(-\infty, 4]$



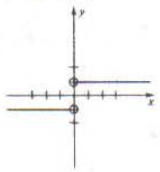
37. $[-2, 2]$; $[0, 2]$



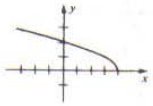
39. $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$; $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



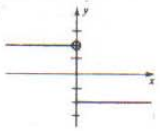
41. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; $\{-1, 1\}$

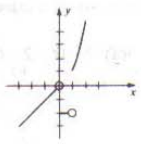


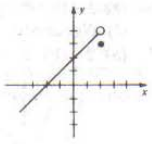
43. $(-\infty, 4]$; $[0, \infty)$



45.



47. 

49. 

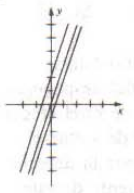
51. Si $-1 < x < 1$, entonces dos puntos diferentes de la gráfica tienen abscisa x.

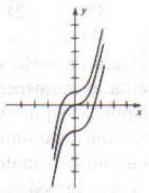
53. $V = 4x^3 - 100x^2 + 600x$ **55.** $d = 2\sqrt{t^2 + 2500}$

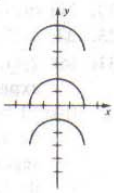
57. (a) $y = \sqrt{2rh + h^2}$ (b) 1280.6 mi

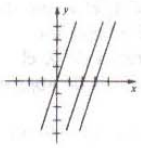
59. $d = \sqrt{90{,}400 + x^2}$

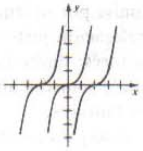
EJERCICIOS 1.5, PÁGINA 47

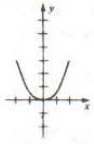
1. 

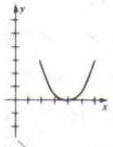
3. 

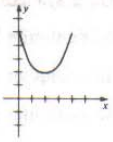
5. 

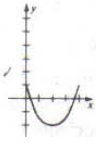
7. 

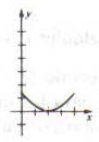
9. 

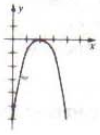
11. (a) 

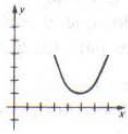
(b) 

(c) 

(e) 

(f) 

(g) 

(h) 

13. $3x^2 + 1/(2x - 3)$; $3x^2 - 1/(2x - 3)$; $3x^2/(2x - 3)$; $3x^2(2x - 3)$

15. $2x$; $2/x$; $x^2 - (1/x^2)$; $(x^2 + 1)/(x^2 - 1)$

17. $2x^3 + x^2 + 7$; $2x^3 - x^2 - 2x + 3$; $2x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 10$; $(2x^3 - x + 5)/(x^2 + x + 2)$

19. $98x^2 - 112x + 37$; $-14x^2 - 31$

21. $(x + 1)^3$; $x^3 + 1$

23. $3/(3x^2 + 2)^2 + 2$; $1/(27x^4 + 36x^2 + 14)$

25. $\sqrt{2x^2 + 7}$; $2x + 4$ **27.** 5; -5 **29.** $1/x^4$; $1/x^4$

31. x; x **35.** $A = 36\pi t^2$ **37.** $h = 5\sqrt{t^2 + 8t}$

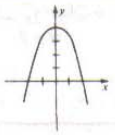
39. $d = \sqrt{90{,}400 + (500 + 150t)^2}$

EJERCICIOS 1.6, PÁGINA 49

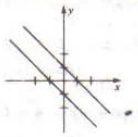
1. $(-\infty, -\frac{3}{5})$ **3.** [3.495, 3.505] **5.** $(1, \frac{3}{2})$

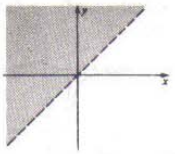
7. $(-5, \frac{1}{3}) \cup (\frac{7}{3}, \infty)$ **9.** (a) 12 (b) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (c) 7

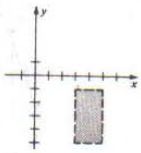
11. Simetría: con respecto al eje y



13. Simetría: con respecto al origen



15. 

17. 

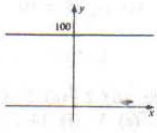
19. $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 81$ **21.** $(5, -7)$; 9

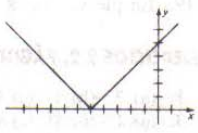
23. $6x - 7y + 24 = 0$ **25.** $x = -4$

27. $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

29. El intervalo $(5, 7)$

31. (a) $1/\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) $1/\sqrt[4]{2}$ (e) $1/\sqrt{1 - x}$ (f) $-1/\sqrt{x + 1}$ (g) $1/\sqrt{x^2 + 1}$ (h) $1/(x + 1)$

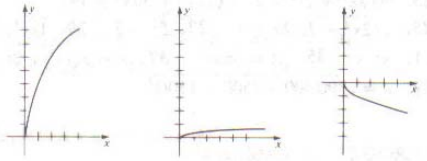
33. 

35. 

37. (a) (b) (c)



(d) (e) (f)



39. Si $a \neq b$, entonces $5 - 7a \neq 5 - 7b$; es decir, $f(a) \neq f(b)$.

41. $x^2 + 4 + \sqrt{2x+5}$; $x^2 + 4 - \sqrt{2x+5}$; $(x^2+4)\sqrt{2x+5}$; $(x^2+4)/\sqrt{2x+5}$; $2x + 9$; $\sqrt{2x^2+13}$

CAPÍTULO 2

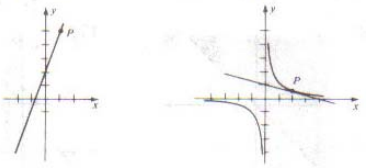
EJERCICIOS 2.1, PÁGINA 58

1. (a) $10a - 4$ (b) $y = 16x - 20$

3. (a) $3a^2$ (b) $y = 12x - 16$

5. (a) 3
(b) $y = 3x + 2$

7. (a) $-1/a^2$
(b) $x + 4y - 4 = 0$



11. *Sugerencia:* Demuestre que la ecuación de la recta tangente es $y = 3x + 2$.

13. Ser en $x = 3$; no alcanza a ninguna

15. (a) En cm/s: 11.8, 11.4, 11.04, 11.004
(b) 11 cm/s (c) $(-\frac{3}{8}, \infty)$ (d) $(-\infty, -\frac{3}{8})$

17. En pie/s: (a) -32 (b) $-32\sqrt{10} \approx -101$

19. En pie/s: (a) 8 (b) 10 (c) $2\sqrt{29} \approx 10$

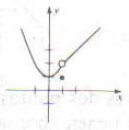
EJERCICIOS 2.2, PÁGINA 65

1. (a) 3 (b) 1 (c) No existe (d) 2 (e) 2 (f) 2

3. (a) 1 (b) 1 (c) 1 (d) 3 (e) 3 (f) 3

5. (a) 1 (b) 0 (c) No existe (d) 1 (e) 0 (f) No existe

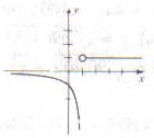
7. (a) 2 (b) 2 (c) 2



9. (a) 2 (b) 2 (c) 2



11. (a) No existe
(b) 1
(c) No existe



13. (a) -1 (b) 1 (c) No existe **15.** -6

17. No existe **19.** 4 **21.** $\frac{1}{9}$ **23.** $\frac{17}{13}$

25. 32 **27.** $2x$ **29.** 12

31. (a) 2 G, el efecto de aceleración que se experimenta al momento del despegue.
(b) El límite por la izquierda de 8; el efecto de aceleración justo antes de soltar el segundo impulsor; límite por la derecha de 1, el efecto inmediatamente después de soltar el segundo impulsor.
(c) Límite por la izquierda de 3, el efecto de aceleración justo antes de apagar los motores; límite por la derecha de 0, el efecto inmediatamente después de apagar los motores.

EJERCICIOS 2.3, PÁGINA 72

1. Dado cualquier ε, se escoge $\delta \leq \varepsilon/3$.

3. Dado cualquier ε, se escoge $\delta \leq \varepsilon/5$.

5. Dado cualquier ε, se elige $\delta \leq \varepsilon/9$.

7,9. Dado cualquier ε, sea δ cualquier número positivo.

11. Dado cualquier ε, se escoge $\delta \leq \varepsilon$.

19. Todo intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$ contiene números para los que el cociente es igual a 1 y otros números para los que el cociente es igual a -1.

21. Todo intervalo $(-1 - \delta, -1 + \delta)$ contiene números para los que el cociente es igual a 3 y otros números para los que el cociente es igual a -3.

23. $1/x^2$ se puede hacer tan grande como se

quiera escogiendo x suficientemente cercano a 0.

25. $1/(x + 5)$ se puede hacer tan grande como se quiera escogiendo x suficientemente cercano a -5.

27. Hay muchos ejemplos; uno de ellos es $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ para $x \neq 1$ y con $f(1) = 3$.

29. Todo intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ contiene números tales que $f(x) = 0$ y otros números tales que $f(x) = 1$.

EJERCICIOS 2.4, PÁGINA 81

1. -13 **3.** $5\sqrt{2} - 20$ **5.** -2 **7.** 0 **9.** 15
11. -7 **13.** $\frac{1}{12}$ **15.** 8 **17.** -23 **19.** 2
21. $\frac{7}{7}$ **23.** -2 **25.** $-\frac{1}{8}$ **27.** 0 **29.** -810
31. (a) 0 (b) No existe (c) No existe
33. (a) 0 (b) 0 (c) 0 **35.** 3 **37.** 1 **39.** $\frac{1}{8}$
41. $(-1)^{n-1}$; $(-1)^n$ **43.** 0; 0



45. 1; 0

51. (a) 0 (b) La temperatura no puede ser menor que el cero absoluto.

53. (a) No existe b) Cuando $p \to f^+$, la imagen se mueve cada vez más a la derecha.

EJERCICIOS 2.5, PÁGINA 89

11. $\{x: x \neq \frac{3}{2}, x \neq -1\}$ **13.** $[\frac{3}{2}, \infty)$
15. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ **17.** $\{x: x \neq -9\}$
19. $\{x: x \neq 0, x \neq 1\}$
21. $[-5, -3] \cup [3, 4) \cup (4, 5]$

23. Discontinuidad evitable en $x = 1$

25. No hay discontinuidades

27. Discontinuidad infinita en $x = 1$

29. $\frac{5}{2}$ **31.** $c = d = 8$

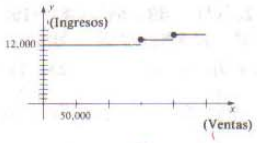
33. $f \circ g$ es continua en 0; $g \circ f$ no es continua en 0.

35. f es discontinua en cualquier intervalo abierto que contenga al origen.

37. No; $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe

39. Si; todas las condiciones de (2.23) se satisfacen.

41. Discontinua en 50,000 $(3 + x)$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$



43. $c = \sqrt[3]{w - 1}$ **45.** $c = \sqrt{w} - 2$

49. (a) $T > 0°$ para $0 < t < 12$; $T < 0°$ para $12 < t < 24$
(b) $T = 32.4$ al mediodía y $T = 29.75$ a la 1 P.M.

51. (a) $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$
(b) El intervalo $(1, 3)$

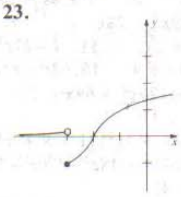
EJERCICIOS 2.6, PÁGINA 92

1. 13 **3.** $-4 - \sqrt{14}$ **5.** $\frac{7}{8}$ **7.** $\frac{32}{3}$
9. No existe **11.** 3 **13.** -1 **15.** $4a^3$
17. $-\frac{3}{16}$ **19.** -1
21. (a) 6 (b) 4 (c) No existe
23. (a) $\frac{1}{11}$ (b) -1 (c) No existe
25. (a) 1 (b) 3 (c) No existe

21.



23.



25.



27. -6 **31.** $\mathbb{R}$

33. $[-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3]$

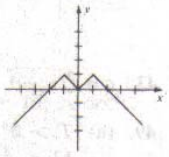
35. En 4, -4 **37.** En 0, 2 **39.** $c = 1/\sqrt{w}$

CAPÍTULO 3

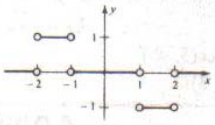
EJERCICIOS 3.1, PÁGINA 100

1. (a) 0 (b) $\mathbb{R}$ (c) $y = 37$
3. (a) 9 (b) $\mathbb{R}$ (c) $y = 9x - 2$
5. (a) $8 - 10x$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $y = -2x + 7$
7. (a) $-1/(x-2)^2$ (b) $\{x: x \neq 2\}$ (c) $y = -x$
9. (a) $3/(2\sqrt{3x+1})$ (b) $(-\frac{1}{3}, \infty)$ (c) $4y = 3x + 5$
11. $-7/(2\sqrt{x^3})$ 13. $6x^2 - 4$ 15. $2a$
17. $-12/a^3$ 19. $-1/(a+5)^2$
23. $\{x: x \neq 0\}$ 25. $\{x: x \neq 0, x \neq \pm 1\}$





27. f no es derivable en ± 1, ± 2



31. Si $f(x) = ax + b$, entonces $f'(x) = a$ tiene grado 0. Si $f(x)$ tiene grado 2, entonces $f'(x)$ tiene grado 1. Si $f(x)$ tiene grado 3, entonces $f'(x)$ tiene grado 2.

EJERCICIOS 3.2, PÁGINA 109

1. $20x + 9$ 3. $-1 + 8s - 20s^3$
5. $10x^4 + 9x^2 - 28x$ 7. $18r^5 - 21r^2 + 4r$
9. $23/(3x+2)^2$ 11. $(-27z^2 + 12z + 70)/(2 - 9z)^2$
13. $9x^2 - 4x + 4$ 15. $2t - (2/t^3)$
17. $416x^3 - 195x^2 + 64x - 20$
19. $6v^2/(v^3 + 1)^2$
21. $-(1 + 2x + 3x^2)/(1 + x + x^2 + x^3)^2$
23. $72z^5 - 64z^3 - 18z^2 - 70z - 7$ 25. $-\frac{4}{81}s^{-5}$
27. $10(5x - 4)$
29. $(6 - 20t - 21t^2)/[5(2 + 7t^2)^2]$ para $t \neq 0$
31. $2 - (4/x^2) - (6/x^3)$ 33. $(-3x + 2)/x^3$
35. (a) $y = 5$ (b) $5x + 2y - 10 = 0$
(c) $4x - 5y + 13 = 0$
37. (a) $\frac{2}{3}, -2$ (b) $0, -\frac{4}{3}$ 39. $-\frac{1}{2}$
41. $y - 9 = 2(x - 5)$, el punto de tangencia es $(1, 1)$;
$y - 9 = 18(x - 5)$, el punto de tangencia es $(9, 81)$
43. (a) 1 (b) -3 (c) -4 (d) 11 (e) $-\frac{1}{25}$
45. (a) -4 (b) 1 (c) -20 (d) $-\frac{1}{4}$
49. $(8x - 1)(x^2 + 4x + 7)(3x^2) + (8x - 1)(2x + 4)(x^3 - 5) + 8(x^2 + 4x + 7)(x^3 - 5)$
51. (a) $y = -\frac{38}{6125}x^2 + x + 15$ (b) 55.3 pie
53. $y = \frac{1}{8000}x^2$; $B(800, 80)$
55. En pie/s: (a) 4, 10, 18 (b) $6\sqrt{5} \approx 13.4$
57. (a) El segundo corredor (b) Los corredores empatan (c) El primer corredor

EJERCICIOS 3.3, PÁGINA 120

1. (a) $\frac{1}{4}$ cm/min (b) 36π cm^3/min (c) 12π cm^2/min
3. En (latidos/min)/s: (a) 7 (b) 15 (c) 23
5. En cm^2/s: (a) 3200π (b) 6400π (c) 9600π
7. En $t = \sqrt{6}$; la tasa de crecimiento es positiva para $0 < t < \sqrt{6}$, y negativa para $t > \sqrt{6}$.

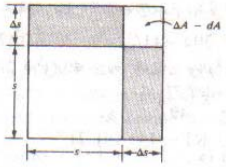
Ejercicios 9-13: Los símbolos $[a, b)$, $(a, b]$ y (a, b) denotan intervalos de tiempo.

9. $v(t) = 6t - 12$, $a(t) = 6$; a la izquierda en $[0, 2)$; a la derecha en $(2, 5]$
11. $v(t) = 3t^2 - 9$, $a(t) = 6t$; a la derecha en $[-3, -\sqrt{3})$; a la izquierda en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$; a la derecha en $(\sqrt{3}, 3]$
13. $v(t) = 8t^3 - 12t$, $a(t) = 24t^2 - 12$; a la izquierda en $[-2, -\sqrt{3}/2)$; a la derecha en $(-\sqrt{3/2}, 0)$; a la izquierda en $(0, \sqrt{3/2})$; a la derecha en $(\sqrt{3/2}, 2]$
15. $v(t) = 144 - 32t$, $a(t) = -32$; $v(3) = 48$, $a(3) = -32$; 324 pie; en $t = 9$
17. -0.12 unidades/pie
21. $-2k/d^3$ donde k es la constante de proporcionalidad
23. (a) 806
(b) $c(x) = (800/x) + 0.04 + 0.0002x$;
$C'(x) = 0.04 + 0.0004x$;
$c(100) = 8.06$; $C'(100) = 0.08$
25. (a) 11,250
(b) $c(x) = (250/x) + 100 + 0.001x^2$;
$C'(x) = 100 + 0.003x^2$;
$c(100) = 112.50$; $C'(100) = 130$
27. $C'(5) = 46.00$; $C(6) - C(5) = 46.67$

EJERCICIOS 3.4, PÁGINA 128

1. (a) $(4x - 4)\,\Delta x + 2(\Delta x)^2$ (b) -0.72
3. (a) $-[(2x + \Delta x)\,\Delta x]/[x^2(x + \Delta x)^2]$
(b) $-\frac{189}{9801} \approx -0.019$

5. (a) $(6x + 5)\,\Delta x + 3\,(\Delta x)^2$ (b) $(6x + 5)\,dx$
(c) $-3\,(\Delta x)^2$
7. (a) $-\Delta x/[x(x + \Delta x)]$ (b) $(-dx)/x^2$
(c) $-(\Delta x)^2/[x^2(x + \Delta x)]$
9. (a) $-9\,\Delta x$ (b) $-9\,\Delta x$ (c) 0
11. (a) $4x^3\,(\Delta x) + 6x^2\,(\Delta x)^2 + 4x\,(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4$
(b) $4x^3\,\Delta x$ (c) $-6x^2\,(\Delta x)^2 - 4x\,(\Delta x)^3 - (\Delta x)^4$
13. 0.06 **15.** $dw = (3z^2 - 6z + 2)\,dz$; $\Delta w \approx -1.30$
17. $\pm 1.92\pi \approx \pm 6.03$ pulg^2; ± 0.0075; $\pm 0.75\%$
19. 30 pulg^3; 30.301 pulg^3
21. 3301.661; ± 11.459; ± 0.00347; $\pm 0.347\%$
23. $1/(50\pi) \approx 0.00637$ **25.** -1
27. 0.92; 0.92236816
29. dA es la región sombreada



31. 40% de aumento

EJERCICIOS 3.5, PÁGINA 134

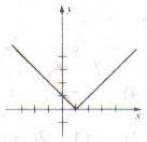
1. $3(x^2 - 3x + 8)^2(2x - 3)$ **3.** $-40(8x - 7)^{-6}$
5. $-(7x^2 + 1)/(x^2 - 1)^5$
7. $5(8x^3 - 2x^2 + x - 7)^4(24x^2 - 4x + 1)$
9. $17{,}000(17v - 5)^{999}$
11. $-2(4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-3}(20t^4 - 9t^2 + 2)$
13. $32x(6x - 7)^3(8x^2 + 9) + 18(8x^2 + 9)^2(6x - 7)^2$
que se reduce a
$(6x - 7)^2(8x^2 + 9)(336x^2 - 224x + 162)$
15. $6[z^2 - (1/z^2)]^5[2z + (2/z^3)]$
17. $-20(u^2 + 1)^3/(4u - 5)^6 + 6u(u^2 + 1)^2/(4u - 5)^5$
que se reduce a
$(u^2 + 1)^2(4u^2 - 30u - 20)/(4u - 5)^6$
19. $124x(3x^2 - 5)/(2x^2 + 7)^3$
21. $-6(s^{-4} + 3s^{-2} + 2)^{-7}(-4s^{-5} - 6s^{-3})$
23. $200(2x + 1)^9[(2x + 1)^{10} + 1]^9$
25. $2(2t + 1)(2t + 3)^2(24t^2 + 26t + 3)$
27. (a) $y - 81 = 864(x - 2)$; $y - 81 = -\frac{1}{864}(x - 2)$
(b) (1, 1), $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{3}{2}, 0)$
29. (a) $y - 1 = 20(x - 1)$; $y - 1 = -\frac{1}{20}(x - 1)$
(b) $(\frac{1}{2}, 0)$
31. $dy = 10(x^4 - 3x^2 + 1)^9(4x^3 - 6x)\,dx$; $\Delta y \approx 0.2$
33. (a) $\dfrac{dw}{ds} = \dfrac{dw}{dz}\dfrac{dz}{ds}$
(b) $dw/ds = [3z^2 + (2/z^2)]5(s^2 + 1)^4 2s$
35. $dK/dt = mv(dv/dt)$ **37.** $dW/dt \approx -0.1819$ lb/s
39. -4; 15 **41.** $-\frac{2}{5}$

EJERCICIOS 3.6, PÁGINA 140

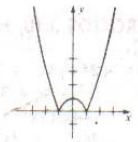
1. $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{4}{3}$, $\mathbb{R}$
3. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $[-4, 4]$. Hay otras respuestas.
5. $f(x) = x + \sqrt{x}$, $[0, \infty)$
7. $f(x) = 1 - 2\sqrt{x} + x$, $[0, 1]$ **9.** $-8x/y$
11. $-(6x^2 + 2xy)/(x^2 + 3y^2)$
13. $(10x - y)/(x + 8y)$ **15.** $-y^3/x^3$
17. $-(2xy^3 + 4y + 1)/(3x^2y^2 + 4x - 6)$
19. $(4x^2 + 3x - 1)(8x + 3)/[4y(y^2 - 9)^3]$
$= (8x + 3)/[4y(4x^2 + 3x - 1)^{1/2}]$
21. $-\sqrt{2}/5$ **23.** -1
25. $4x - y + 16 = 0$ **27.** $y + 3 = -\frac{36}{23}(x - 2)$
29. Si así fuera, entonces $[f(x)]^2 + x^2 = -1$, que es imposible.
31. (a) Una infinidad
(b) Una, $f(x) = 0$ con dominio $x = 0$
(c) Ninguna
33. 0.09

EJERCICIOS 3.7, PÁGINA 145

1. $\frac{2}{3}x^{-1/3} + 6x^{1/2}$ **3.** $8r^2(8r^3 + 27)^{-2/3}$
5. $-5v^4(v^5 - 32)^{-6/5}$ **7.** $1/\sqrt{2x}$
9. $15\sqrt{z} - 1/(z\sqrt[3]{z})$ **11.** $(w^2 + 4w - 9)/(2w^{5/2})$
13. $(8x - 7)/(2\sqrt{4x^2 - 7x + 4})$
15. $-48t/(9t^2 + 16)^{5/3}$
17. $-1/[2\sqrt{(3u + 8)(2u + 5)^3}]$
19. $16(s^2 + 9)^{1/4}(4s + 5)^3 + \frac{1}{2}s(4s + 5)^4(s^2 + 9)^{-3/4}$
21. $\frac{9}{5}x^2(x^2 + 4)^{5/3}(x^3 + 1)^{-2/5}$
$+ \frac{10}{3}x(x^2 + 4)^{2/3}(x^3 + 1)^{3/5}$
23. $6(7x + \sqrt{x^2 + 3})^5[7 + (x/\sqrt{x^2 + 3})]$
25. $2x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ **27.** (4, 2) **29.** $-\sqrt{y/x}$
31. $(12\sqrt{xy} + y)/(6\sqrt{xy} - x)$
33. $dW/dt = (1.644 \times 10^{-4})L^{1.74}\,(dL/dt)$;
7.876 cm/mes
35. 60π cm^2; ± 1.508; $\pm 0.8\%$
37. $f'(x) = \dfrac{x - 1}{|x - 1|}$; $\{x: x \neq 1\}$



39. $f'(x) = \dfrac{2x(x^2 - 1)}{|x^2 - 1|}$; $\{x: x \neq \pm 1\}$



41. $3/(2\sqrt{3z + 1})$; $-9/[4\sqrt{(3z + 1)^3}]$

43. $20(4r+7)^4$; $320(4r+7)^3$
45. $12x^3 - 8x + 1$; $36x^2 - 8$
47. $120x^2 + 18$ **49.** $594/(3x+1)^4$
51. $(2xy^3 - 2x^4)/y^5 = -2x/y^5$
53. $10(y^2 - 3xy + x^2)/(2y - 3x)^3 = 40/(2y - 3x)^3$
55. $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!/x^{n+1}$; $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$
57. El grado de f' es $n-1$, el de f'' es $n-2$, ..., el de $f^{(n)}$ es 0. Como $f^{(n)}$ es una función constante, todas las derivadas de orden mayor son cero.
59. $D_x^2 y = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$

EJERCICIOS 3.8, PÁGINA 150

1. $-3\sqrt{336}/8 \approx -6.9$ pie/s
3. $20/9\pi \approx 0.71$ pie/min
5. $\frac{64}{11}$ pie/s; $\frac{20}{11}$ pie/s
7. $-7442\pi \approx -23{,}368$ pulg^3/h **9.** $\frac{10}{3}$ pie/s
11. Aumenta a razón de 5 pulg^3/min
13. $15\sqrt{3}/32 \approx 0.8$ pie/min
15. $5/(8\pi) \approx 0.1989$ pulg/año
17. $-4\sqrt{\sqrt{3}/600} \approx -0.215$ cm/min **19.** π m/s
21. $\frac{11}{1600}$ Ω/s **23.** $13.37/112\pi \approx 0.38$ pie/min
25. 64 pie/s
27. $(6+\sqrt{2})180/\sqrt{10+3\sqrt{2}} \approx 353.6$ mi/h
29. $-27/(25\pi) \approx 0.344$ pulg/h
31. 70.63 mi/h

EJERCICIOS 3.9, PÁGINA 156

1. 1.2599 **3.** 0.5641 **5.** 1.3315 **7.** -1.7321
9. 4.64575 **11.** ± 3.34 **13.** -1, 1.35
15. -1.88, 0.35, 1.53 **17.** -2.62, -0.38, 0.27, 3.73
19. (a) 3, 3.1425465, 3.1415926, 3.1415926, 3.1415926
(b) Tienden a 2π.

EJERCICIOS 3.10, PÁGINA 157

1. $-24x/(3x^2+2)^2$ **3.** $6x^2 - 7$ **5.** $3/\sqrt{6t+5}$
7. $\frac{1}{3}(7z^2 - 4z + 3)^{-2/3}(14z - 4)$
9. $-144x/(3x^2 - 1)^5$
11. $-2(y^2 - y^{-2})^{-3}(2y + 2y^{-3})$ **13.** $\frac{12}{5}(3x+2)^{-1/5}$
15. $4(8s^2 - 4)^3(72s^4 - 108s^2 + 16s)/(1 - 9s^3)^5$
17. $(x^6+1)^4(3x+2)^2(99x^6 + 60x^5 + 9)$
19. $\frac{4}{3}(7y-2)^{-2}(2y+1)^{-1/3} - 14(7y-2)^{-3}(2y+1)^{2/3}$
21. $2x[(x^2+2)(x^2+3) + (x^2+1)(x^2+3) + (x^2+1)(x^2+2)]$
23. $1/(2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot$
$[1 + (2\sqrt{x}+1)/(4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}})]$
25. $[\frac{2}{3}(3x+2)^{1/2}(2x+3)^{-2/3}$
$-\frac{3}{2}(2x+3)^{1/3}(3x+2)^{-1/2}]/(3x+2)$
27. $3(9z^{5/3} - 5z^{3/5})^2(15z^{2/3} - 3z^{-2/5})$
29. $(9s-1)^3(108s^2 - 139s + 39)$
31. $(4xy^2 - 15x^2)/(12y^2 - 4x^2 y)$
33. $1/[\sqrt{x}(3\sqrt{y}+2)]$
35. $9x - 4y - 12 = 0$; $4x + 9y = 70$
37. $x - y + 4 = 0$; $x + y + 2 = 0$ **39.** $(4 \pm \sqrt{10})/6$
41. $15x^2 + (2/\sqrt{x})$; $30x - (1/\sqrt{x^3})$; $30 + 3/(2\sqrt{x^5})$
43. $5(y^2 - 4xy - x^2)/(y - 2x)^3 = -40/(y-2x)^3$
45. $f^{(n)}(x) = n!/(1-x)^{n+1}$
47. ± 0.06; $\pm 1.5\%$ **49.** -0.57
51. (a) 2 (b) -7 (c) -14 (d) 21
(e) $-\frac{10}{9}$ (f) $-\frac{19}{27}$
53. $C(100) = 116$; $C(101) - C(100) = 116.11$
55. 2%
57. $v(t) = 3(1-t^2)/(t^2+1)^2$; $a(t) = 6t(t^2-3)/(t^2+1)^3$; a la izquierda en $[-2, -1)$; a la derecha en $(-1, 1)$; a la izquierda en $(1, 2]$.
59. $\frac{5}{6}$ pie^3/min **61.** $dp/dv = -p/v$ **63.** -0.7560

CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1, PÁGINA 169

1. 5; -3 **3.** 1; -3
5. (a) Como $f'(x) = 1/(3x^{2/3})$, $f'(0)$ no existe. Si $a \neq 0$, entonces $f'(a) \neq 0$. Por lo tanto, 0 es el único número crítico de f. El número $f(0) = 0$ no es un valor extremo local, porque $f(x) < 0$ si $x < 0$ y $f(x) > 0$ si $x > 0$.
(b) El hecho de que 0 es el único número crítico y de que hay una recta tangente vertical en (0, 0) se deduce como en la parte (a). El número $f(0) = 0$ es un mínimo local porque $f(x) > 0$ si $x \neq 0$.
7. Hay un número crítico 0 pero $f(0)$ no es un valor extremo local, porque $f(x) < f(0)$ si $x < 0$ y $f(x) > f(0)$ si $x > 0$. La función es continua en cualquier número a, porque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Si $0 < x_1 < x_2 < 1$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ y por lo tanto, no

hay un máximo ni un mínimo en (0, 1). Esto no contradice (4.3) porque el intervalo (0, 1) es abierto.

9. $\frac{3}{8}$ **11.** $\frac{5}{3}$ y -2 **13.** 2 **15.** 4 y -4 (no 0)

17. 0, $\frac{15}{7}$ y $\frac{5}{2}$ **19.** Ninguno

21. $0; \pm\sqrt{3}; \pm 3$ **23.** $0; \pm\frac{3}{2}$ **25.** $-5; -\frac{9}{7}; \frac{3}{2}$

27. Si $f(x) = cx + d$ y $c \neq 0$, entonces $f'(x) = c \neq 0$. Por lo tanto, no hay números críticos. En $[a, b]$ la función toma valores extremos en a y b.

29. Si $x = n$ es un entero, entonces $f'(n)$ no existe. Si existiera, $f'(x) = 0$ para todo $x \neq n$.

31. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ en $a \neq 0$, entonces $f'(x) = 2ax + b$. Por lo tanto, $-b/(2a)$ es el único número crítico de f.

33. Como $f'(x) = nx^{n-1}$, el único número crítico posible es $x = 0$ y $f(0) = 0$. Si n es par, entonces $f(x) > 0$ si $x \neq 0$ y por lo tanto, 0 es un mínimo local. Si n es impar, entonces 0 no es un valor extremo porque $f(x) < 0$ si $x < 0$ y $f(x) > 0$ si $x > 0$.

EJERCICIOS 4.2, PÁGINA 174

1. f no es derivable en el número 0 del intervalo $(-1, 1)$.

3. f no es continua en el intervalo $[-1, 4]$.

5. $c = 2$ **7.** $c = 0$ **9.** $c = 2$ **11.** $c = 2$

13. No se satisfacen las hipótesis.

15. $c = 2$

17. $c = (2 - \sqrt{7})/3$

19. Si $f(x) = cx + d$, entonces $f'(x) = c$ para todo x. Además,

$$f(b) - f(a) = (cb + d) - (ca + d) = c(b - a) = f'(x)(b - a).$$

21. Si f es de grado 3, entonces $f'(x)$ es un polinomio de grado 2. Por consiguiente, la ecuación $f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$ tiene a lo más dos soluciones x_1 y x_2. Si f tiene grado 4, entonces a lo más hay tres soluciones. Si f tiene grado n, entonces a lo más hay $n - 1$ soluciones.

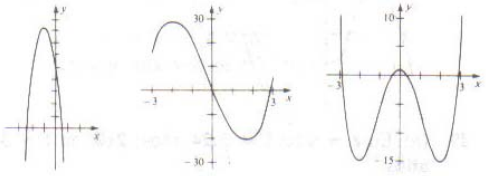
EJERCICIOS 4.3, PÁGINA 182

1. MÁX: $f(-\frac{7}{8}) = \frac{129}{16}$; creciente en $(-\infty, -\frac{7}{8}]$; decreciente en $[-\frac{7}{8}, \infty)$ (*véase la gráfica*).

3. MÁX: $f(-2) = 29$; MÍN: $f(\frac{5}{3}) = -\frac{548}{27}$; creciente en $(-\infty, -2]$ y $[\frac{5}{3}, \infty)$; decreciente en $[-2, \frac{5}{3}]$

5. MÁX: $f(0) = 1$; MÍN: $f(-2) = -15$ y $f(2) = -15$; creciente en $[-2, 0]$ y $[2, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2]$ y $[0, 2]$

1. **3.** **5.**

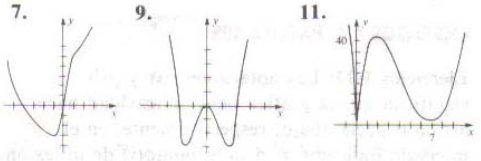


7. MÍN: $f(-1) = -3$; creciente en $[-1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -1]$

9. MÁX: $f(0) = 0$; MÍN: $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = -3$; creciente en $[-\sqrt{3}, 0]$ y $[\sqrt{3}, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -\sqrt{3}]$ y $[0, \sqrt{3}]$

11. MÁX: $f(\frac{7}{4}) \approx 42$; MIN: $f(0) = 2$ y $f(7) = 2$; creciente en $[0, \frac{7}{4}]$ y $[7, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[\frac{7}{4}, 7]$

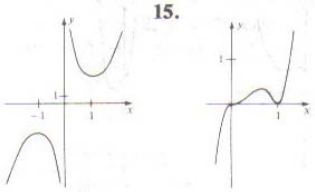
7. **9.** **11.**



13. MÁX: $f(-1) = -4$; MÍN: $f(1) = 4$; creciente en $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$; decreciente en $[-1, 0)$ y $(0, 1]$

15. MÁX: $f(\frac{3}{5}) \approx 0.346$; MÍN: $f(1) = 0$; creciente en $(-\infty, \frac{3}{5}]$ y $[1, \infty)$; decreciente en $[\frac{3}{5}, 1]$

13. **15.**



17. MÁX: $f(-\sqrt{3}) = (6\sqrt{3})^{1/3}$; MÍN: $f(\sqrt{3}) = -(6\sqrt{3})^{1/3}$

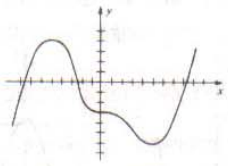
19. MÁX: $f(-1) = 0$; MÍN: $f(\frac{5}{7}) = -9^3 12^4/7^7$

21. No hay

23. (a) MÁX: $f(-\frac{7}{8}) = \frac{129}{16}$; MÍN: $f(1) = -6$
(b) MÁX: $f(-\frac{7}{8}) = \frac{129}{16}$; MÍN: $f(-4) = -31$
(c) MÁX: $f(0) = 5$; MÍN: $f(5) = -130$

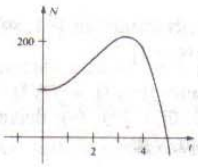
25. (a) MÁX: $f(-1) = 20$; MÍN: $f(1) = -16$
(b) MÁX: $f(-2) = 29$; MÍN: $f(-4) = -31$
(c) MÁX: $f(5) = 176$; MÍN: $f(\frac{5}{3}) = -\frac{548}{27}$

27.



29. (a) En $t = \sqrt{10.5} \approx 3.24$ años; 210; en $t = 5$ años

(b)



33. $x = y = 2$

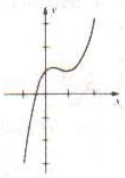
EJERCICIOS 4.4, PÁGINA 192

Ejercicios 1-17: Las notaciones CAR y CAB significan que la gráfica tiene concavidad hacia arriba o hacia abajo, respectivamente, en el intervalo indicado. PI denota punto(s) de inflexión.

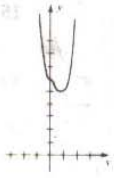
1. MÁX: $f(\frac{1}{3}) = \frac{31}{27}$; MÍN: $f(1) = 1$; CAB en $(-\infty, \frac{2}{3})$; CAR en $(\frac{2}{3}, \infty)$; la abscisa del PI es $\frac{2}{3}$.

3. MÍN: $f(1) = 5$; CAR en $(-\infty, 0)$ y $(\frac{2}{3}, \infty)$; CAB en $(0, \frac{2}{3})$; las abscisas de los PI son 0 y $\frac{2}{3}$.

1.



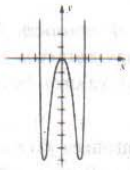
3.



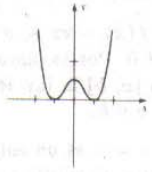
5. MÁX: $f(0) = 0$ (por el Criterio de la Primera Derivada); MÍN: $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -8$; CAR en $(-\infty, -\sqrt{\frac{6}{5}})$ y $(\sqrt{\frac{6}{5}}, \infty)$; CAB en $(-\sqrt{\frac{6}{5}}, \sqrt{\frac{6}{5}})$; las abscisas de los PI son $\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$.

7. MÁX: $f(0) = 1$; MÍN: $f(-1) = f(1) = 0$; CAR en $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ y $(1/\sqrt{3}, \infty)$; CAB en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; las abscisas de los PI son $\pm 1/\sqrt{3}$.

5.



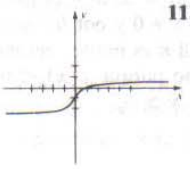
7.



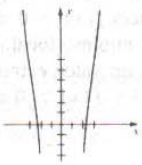
9. No hay máximos ni mínimos locales; CAR en $(-\infty, 0)$; CAB en $(0, \infty)$; PI $(0, -1)$.

11. No hay máximos ni mínimos; CAR en $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$; CAB en $(-3, 0)$ y $(0, 3)$; las abscisas de los PI son ± 3.

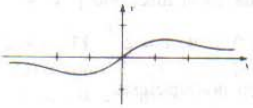
9.



11.



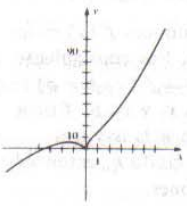
13. MÍN: $f(-1) = -\frac{1}{2}$; MÁX: $f(1) = \frac{1}{2}$; CAR en $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, \infty)$; CAB en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(0, \sqrt{3})$; las abscisas de los PI son 0, $\pm\sqrt{3}$.



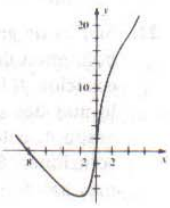
15. MÁX: $f(-\frac{4}{3}) \approx 7.27$; MÍN: $f(0) = 0$; CAB en $(-\infty, 0)$ y $(0, \frac{2}{3})$; CAR en $(\frac{2}{3}, \infty)$; el PI es $(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\sqrt[3]{12})$ *(véase la gráfica)*

17. MÍN: $f(-2) \approx -7.55$; CAR en $(-\infty, 0)$ y $(4, \infty)$; CAB en $(0,4)$; las abscisas de los PI son 0 y 4.

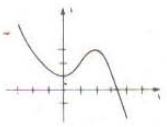
15.



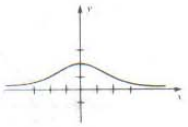
17.



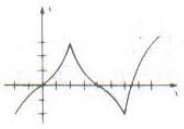
19.



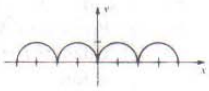
21.



23.



25.



27. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $f''(x) = 2a$.
(a) CAr si $a > 0$ (b) CAb si $a < 0$

29. Si f tiene grado n, entonces f'' tiene grado $n - 2$.

31. (a) $-\frac{1}{10}$ (b) $50x - \frac{1}{10}x^2$ (c) $48x - \frac{1}{10}x^2 - 10$
(d) $48 - \frac{1}{5}x$ (e) 5750 (f) 2

33. (a) $1800x - 2x^2$
(b) $1799x - 2.01x^2 - 1000$
(c) 100
(d) \$158,800

35. 3990 unidades; \$15,420.10

EJERCICIOS 4.5, PÁGINA 201

1. Lado de la base = 2 pie; altura = 1 pie

3. Radio de la base = altura = $1/\sqrt[3]{\pi}$

5. 25 pie por $\frac{50}{7}$ pie **7.** 2:23:05 P.M.

9. $5\sqrt{5} \approx 11.2$ pie

11. Longitud = $2\sqrt[3]{300} \approx 13.38$ pie;
Anchura = $\frac{3}{2}\sqrt[3]{300} \approx 10.04$ pie;
Altura = $\sqrt[3]{300} \approx 6.69$ pie

15. 55

17. Radio = $\sqrt[3]{15}/2$; longitud del cilindro = $2\sqrt[3]{15}$

19. Longitud de la base = $\sqrt{2}a$; altura = $a/\sqrt{2}$

21. $\frac{32}{81}\pi a^3$ **23.** (1, 2)

25. Anchura = $2a/\sqrt{3}$; profundidad = $2\sqrt{2}a/\sqrt{3}$

27. 500

29. (a) Se usa $36\sqrt{3}/(2 + \sqrt{3}) \approx 16.71$ cm para el rectángulo
(b) Se usa todo el alambre para el rectángulo

31. Anchura = $12/(6 - \sqrt{3}) \approx 2.81$ pie;
Altura = $(18 - 6\sqrt{3})/(6 - \sqrt{3}) \approx 1.78$ pie

35. 37 **37.** 18 pulg, 18 pulg, 36 pulg

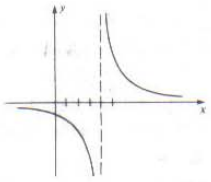
39. $4/(1 + \sqrt[4]{\frac{1}{2}}) \approx 2.17$ mi desde A

43. (c) 21.9 mi/h

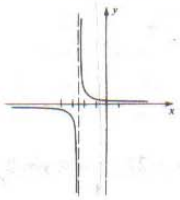
EJERCICIOS 4.6, PÁGINA 216

1. $\frac{5}{2}$ **3.** $-\frac{7}{3}$ **5.** 1 **7.** 0

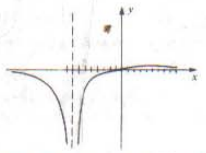
9. ∞; $-\infty$; $x = 4$; $y = 0$;
no hay máximos ni mínimos



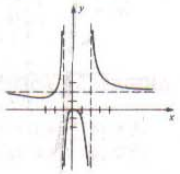
11. ∞; $-\infty$; $x = -\frac{5}{2}$; $y = 0$
no hay máximos ni mínimos



13. $-\infty - \infty$; $x = -8$; $y = 0$; MÁX: $f(8) = \frac{3}{32}$



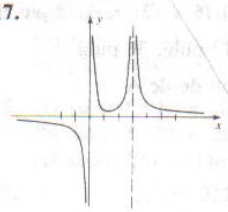
15. $-\infty$, ∞ para $a = -1$; ∞, $-\infty$ para $a = 2$;
$x = -1$, $x = 2$, $y = 2$; MÁX:
$f(0) = 0$; MÍN: $f(-4) = \frac{16}{9}$



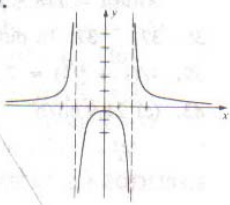
17. $\infty, -\infty$ para $a = 0$; ∞, ∞ para $a = 3$; $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$; MÍN: $f(1) = \frac{1}{4}$

19. $x = 2, x = -2, y = 0$

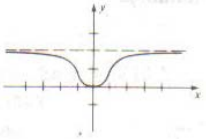
17.



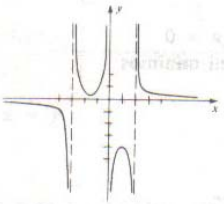
19.



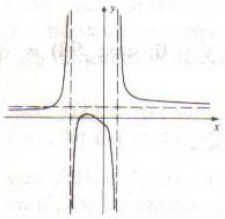
21. $y = 2$



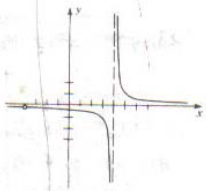
23. $x = -3, x = 0, x = 2, y = 0$



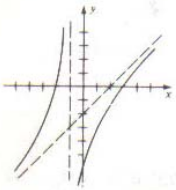
25. $x = -3, x = 1, y = 1$



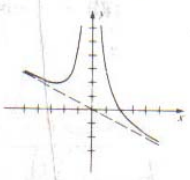
27. $x = 4, y = 0$



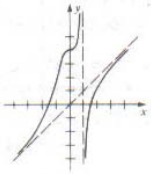
29. $x = -1; y = x - 2$



31. $x = 0; y = -\frac{1}{2}x$



33. $x = 1; y = x$

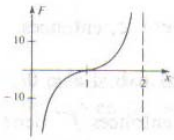


35. $(-2, 0)$ **37.** $(\frac{4}{3}, 3), (-\frac{4}{3}, 3)$

39. (a) $V(t) = 50 + 5t$; $Q(t) = 0.5t$

(c) Cuando $t \to \infty$, $c(t) \to 0.1$ lb de sal por galón.

41. (b)



EJERCICIOS 4.7, PÁGINA 224

1. $3x^3 - 2x^2 + 3x + C$

3. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 7x + C$

5. $-\frac{1}{2}x^{-2} + 3x^{-1} + C$ **7.** $2x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$

9. $9x^{2/3} - \frac{1}{8}x^{4/3} + 7x + C$

11. $\frac{8}{9}x^{9/4} + \frac{24}{5}x^{5/4} - x^{-3} + C$

13. $-(27x^2 + 36x + 16)/(3x^3) + C$

15. $3x^3 - 3x^2 + x + C$ **17.** $\frac{24}{5}x^{5/3} - \frac{15}{2}x^{2/3} + C$

19. $\frac{10}{9}x^{9/5} + C$ **21.** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$ $(x \neq 1)$

23. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 3$

25. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 8x + \frac{65}{6}$

27. $f(t) = \frac{8}{5}t^{5/2} + t^2 - 4t + \frac{27}{5}$

29. $-t^3 + t^2 - 5t + 4$

31. $s(t) = -16t^2 + 80t + 240$

33. $s(t) = -16t^2 + 1600t$; $s(50) = 40{,}000$

35. (a) $s(t) = -16t^2 - 16t + 96$

(b) $t = 2$ (c) 80 pie/s

39. $a(t) = 10$ pie/s^2 **41.** $F = \frac{9}{5}C + 32$

43. $V = 2t^{3/2} + \frac{1}{8}t^2 + 2$

45. Después de 19.6 años

47. $C(x) = 20x - (0.015/2)x^2 + 5.0075$; \$986.26

49. $R(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 15x$; $p'(x) = \frac{2}{3}x - 3$

EJERCICIOS 4.8, PÁGINA 226

1. $(\sqrt{61} - 1)/3$

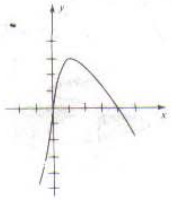
3. MÁX: $f(2) = 28$; MÍN: $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{13}{4}$; decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ y $[2, \infty)$; creciente en $[-\frac{1}{2}, 2]$ (*véase la gráfica*)

5. MÁX: $f(1) = 3$; creciente en $(-\infty, 1]$; decreciente en $[1, \infty)$

3.



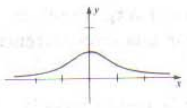
5.



7. MÁX: $f(0) = 1$; CAR en $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ y $(1/\sqrt{3}, \infty)$; CAB en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; las abscisas de los PI son $\pm 1/\sqrt{3}$

9. MÁX: $f(-1) = 13$; MÍN: $f(-3) = -3$; las abscisas de los PI son $a = (-3 - 2\sqrt{3})/3$ y $b = (-3 + 2\sqrt{3})/3$; CAR en $(-\infty, a)$ y (b, ∞); CAB en (a, b)

7.



9.

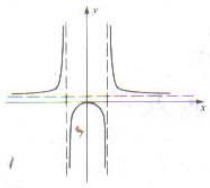


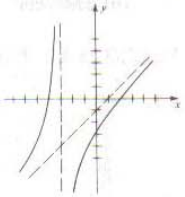
11. 125 yardas por 250 yardas

15. El radio de la semicircunferencia es $1/(8\pi)$ mi, la longitud del rectángulo es $\frac{1}{8}$ mi

17. (a) Se usa todo el alambre para la circunferencia
(b) Se usa una longitud de $5\pi/(4 + \pi) \approx 2.2$ pie para la circunferencia y el resto para el cuadrado.

19. $\frac{3}{2}$ **21.** 0 **23.** $-\infty$ **25.** $-\infty$
27. $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{5}{3}$, $x = -\frac{5}{3}$ **29.** $x = -3$, $y = x - 1$





33. $-8x^{-1} + 2x^{-2} - \frac{5}{3}x^{-3} + C$ **35.** $100x + C$
37. $\frac{1}{8}(2x + 1)^4 + C$
39. $f(x) = \frac{9}{28}x^{7/3} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{25}{4}x - \frac{169}{14}$

CAPÍTULO 5

EJERCICIOS 5.1, PÁGINA 237

1. -5 **3.** 34 **5.** 40 **7.** 510 **9.** 500
13. $\frac{1}{3}(n^3 + 6n^2 + 20n)$ **15.** $\frac{1}{3}(4n^3 - 12n^2 + 11n)$
17. 28 **19.** $\frac{125}{3}$ **21.** 78 **23.** 18 **25.** $\frac{19}{4}$

EJERCICIOS 5.2, PÁGINA 244

1. 1.1, 1.5, 1.1, 0.4, 0.9; $\|P\| = 1.5$
3. 0.3, 1.7, 1.4, 0.5, 0.1; $\|P\| = 1.7$
5. (a) 40 (b) 32 (c) 36 **7.** $\frac{49}{4}$ **9.** 79
11. $\int_{-1}^{2} (3x^2 - 2x + 5)\,dx$ **13.** $\int_{0}^{4} 2\pi x(1 + x^3)\,dx$
15. $-\frac{14}{3}$ **17.** 30 **19.** 25 **21.** $9\pi/4$ **23.** $\frac{1}{4}b^4$
25. Cualquier función no acotada. Por ejemplo, $f(x) = 1/x$ o bien $f(x) = 1/\sqrt{1 - x}$. No hay contradicción porque el intervalo en (5.12) es cerrado.

EJERCICIOS 5.3, PÁGINA 251

1. 30 **3.** -12 **5.** 2 **7.** 78 **9.** $-\frac{291}{2}$
13. $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$ **15.** $\int_{h}^{c+h} f(x)\,dx$
17. (a) $\sqrt{3}$ (b) 9
19. (a) 3 (b) 6 **21.** (a) $\sqrt[3]{15/4}$ (b) 14
25. *Sugerencia:* $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

EJERCICIOS 5.4, PÁGINA 258

1. -18 **3.** $\frac{265}{2}$ **5.** 5 **7.** $\frac{31}{256}$ **9.** $\frac{20}{3}$
11. $\frac{352}{5}$ **13.** $-\frac{37}{6}$ **15.** $\frac{13}{3}$ **17.** $-\frac{7}{2}$ **19.** 0
21. $\frac{10}{3}$ **23.** $\frac{53}{2}$ **25.** $8\sqrt{3} + 16$
29. $1/(x + 1)$ **31.** 6 **37.** $\frac{16}{9}$
39. $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ **41.** $\frac{1}{2}$ **51.** $4x^7/\sqrt{x^{12} + 2}$
53. $3x^2(x^9 + 1)^{10} - 3(27x^3 + 1)^{10}$

EJERCICIOS 5.5, PÁGINA 266

1. $\frac{1}{15}(3x + 1)^5 + C$ **3.** $\frac{2}{9}(t^3 - 1)^{3/2} + C$
5. $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3)^{-2} + C$ **7.** $-\frac{3}{8}(1 - 2s^2)^{2/3} + C$
9. $\frac{2}{5}(\sqrt{u} + 3)^5 + C$ **11.** $\frac{14}{3}$ **13.** 0 **15.** $\frac{1}{3}$
17. $\frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{5}x^5 + x^3 + x + C$
19. $\frac{5}{12}(8x + 5)^{3/2} + C$ **21.** $\frac{5}{36}$
23. (a) $\frac{1}{3}(x + 4)^3 + C_1$
(b) $\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + C_2$; $C_2 = C_1 + \frac{64}{3}$
25. (a) $\frac{2}{3}(\sqrt{x} + 3)^3 + C_1$
(b) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 6x + 18x^{1/2} + C_2$; $18 + C_1 = C_2$
29. $1/\sqrt{x^3 + x + 5}$ **31.** 1 **33.** $\frac{14}{3}$
35. (a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ **37.** (a) $\frac{544}{225}$ (b) $\frac{38}{15}$
39. (a) $v_{av} = \frac{6}{7}cD^{1/6}$

EJERCICIOS 5.6, PÁGINA 274

1. (a) 1.41 (b) 1.39 **3.** (a) 0.88 (b) 0.88
5. (a) 0.39 (b) 0.39 **7.** (a) 3.35 (b) 3.35

9. 1.38 **11.** 0.88 **15.** (a) 8.65 (b) 8.59
17. (a) 128 (b) 132 (c) 128 **19.** $\bar{v}_x \approx 0.174$ m/s
21. (a) 41 (b) 8

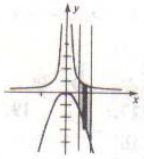
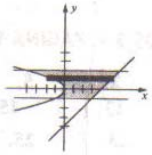
EJERCICIOS 5.7, PÁGINA 276

1. 70 **3.** $\frac{11}{4}$ **5.** -10 **7.** $\frac{3}{5}$ **9.** $\frac{1}{6}$
11. $-\frac{1}{16}(1-2x^2)^4 + C$ **13.** $\sqrt{8} - \sqrt{3} \approx 1.10$
15. $-2/(1+\sqrt{x}) + C$ **17.** $3x - x^2 - \frac{5}{4}x^4 + C$
19. $\frac{52}{9}$ **21.** $\frac{1}{6}(4t^2 + 2t - 7)^3 + C$
23. $-x^{-2} + 3x^{-1} + C$ **25.** $\sqrt{3}/2$
27. $\sqrt[5]{y^4 + 2y^2 + 1} + C$ **29.** 0
31. (a) 341.36 (b) 334.42 **33.** $\frac{15}{136}$
35. 81.625 °F

CAPÍTULO 6

EJERCICIOS 6.1, PÁGINA 287

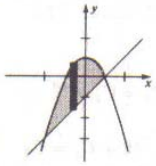
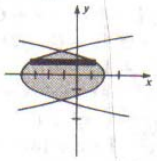
1. $\frac{17}{6}$ **3.** $\frac{33}{2}$

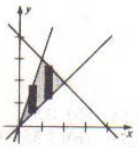
5. $\frac{32}{3}$ **7.** $\frac{32}{5}$



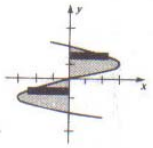
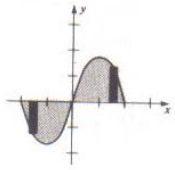

9. $\frac{9}{2}$ **11.** $8\sqrt{3}$

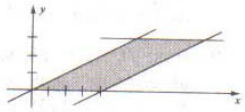
13. 2 **15.** $\frac{1}{2}$




17. 8 **19.** $\frac{16}{3}$

21. Si $g(y) = (2y + 4) - 2y = 4$ en $[0, 3]$, entonces $A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k 4\Delta y_k$.
(a) $A = \int_0^3 4\, dy = 12$
(b) $A = (3)(4) = 12$



23. Sea $f(x) = \sqrt{9 - (x-4)^2}$ en $[1, 7]$. Entonces $A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k 2f(w_k)\,\Delta x_k$. Como la región está acotada por una circunferencia de radio 3, $A = 9\pi$.

25. El límite es el área de la región bajo la gráfica de $y = 4x + 1$ entre 0 y 1. $A = 3$.

27. El límite es el área de la región a la izquierda de la gráfica de $x = 4 - y^2$ y a la derecha del eje y entre $y = 0$ y $y = 1$. $A = \frac{11}{3}$.

29. El área A de $\{(x, y): 2 \le x \le 5,\ 0 \le y \le x(x^2 + 1)^{-2}\}$, $A = \frac{21}{260}$

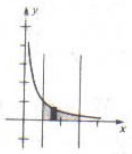
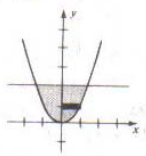
31. El área A de $\{(x, y): 1 \le y \le 4,\ 0 \le x \le (5 + \sqrt{y})/\sqrt{y}\}$, $A = 13$

33. 9 **35.** 12 **37.** (a) 4.25 (b) 4.50

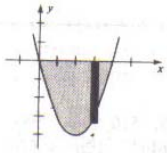
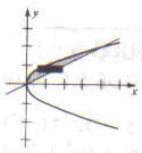
39. (a) Cambia la altura entre $t = 10$ y $t = 15$
(b) 32.05 cm^2

EJERCICIOS 6.2, PÁGINA 296

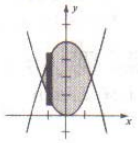
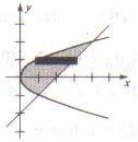
1. $2\pi/3$ **3.** 2π

5. $512\pi/15$ **7.** $64\pi/15$

9. $64\sqrt{2\pi/3}$ **11.** $72\pi/5$

13. $576\pi/7$ **15.** $264\pi/5$

17. (a) $512\pi/15$ (b) $832\pi/15$ (c) $128\pi/3$

19. (a)



(b) $V = \pi \int_{-2}^{0} [(8 - 4x)^2 - (8 - x^3)^2]\, dx + \pi \int_{0}^{2} [(8 - x^3)^2 - (8 - 4x)^2]\, dx$

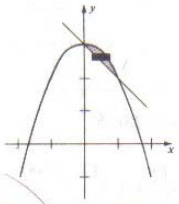
21. (a) *(véase la gráfica)*

(b) $V = \pi \int_{2}^{3} [(y - 1)^2 - (2 - \sqrt{3 - y})^2]\, dy$

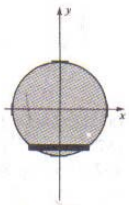
23. (a) *(véase la gráfica)*

(b) $V = \pi \int_{-1}^{1} [(5 + \sqrt{1 - y^2})^2 - (5 - \sqrt{1 - y^2})^2]\, dy = 20\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy$

21.



23.



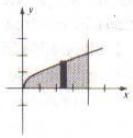
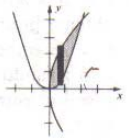
25. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ **27.** $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$

29. El límite es el volumen del sólido que se obtiene al girar la región entre $y = x^2$ y $y = x^3$, $0 \le x \le 1$, alrededor del eje x. $V = 2\pi/35$.

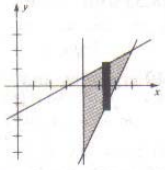
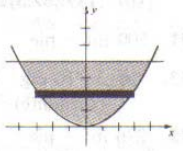
31. $63\pi/2 \approx 99$

EJERCICIOS 6.3, PÁGINA 300

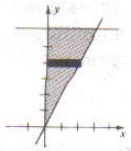
1. $128\pi/5$ **3.** $24\pi/5$

5. $135\pi/2$ **7.** $512\pi/5$

9. 72π



11. $64\pi/3$ **13.** (a) 16π (b) $64\pi/3$

15. (a) $512\pi/15$ (b) $832\pi/15$ (c) $128\pi/3$

17. $V = 2\pi \int_{-8}^{0} (8 - y)(\frac{1}{4}y - y^{1/3})\, dy + 2\pi \int_{0}^{8} (8 - y)(y^{1/3} - \frac{1}{4}y)\, dy$

19. $V = 2\pi \int_{0}^{1} (2 - x)(x - x^2)\, dx$

21. $V = 4\pi \int_{-1}^{1} (5 - x)\sqrt{1 - x^2}\, dx$ **23.** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

25. $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$

27. El límite es el volumen del sólido que se obtiene al girar la región entre $y = x$ y $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, alrededor del eje y. $V = \pi/6$.

29. $76\pi \approx 239$

EJERCICIOS 6.4, PÁGINA 303

1. $16a^3/3$ **3.** $\frac{128}{15}$ **5.** $2a^2h/3$ **7.** $128\pi/15$

9. $2a^3/3$ **11.** $\pi a^2 b/2$ **13.** 4 **15.** $\pi a^3/24$

EJERCICIOS 6.5, PÁGINA 312

1. $(4 + \frac{16}{81})^{3/2} - (1 + \frac{16}{81})^{3/2} \approx 7.29$

3. $\frac{8}{27}[10^{3/2} - (13^{3/2}/8)] \approx 7.63$ **7.** $\frac{13}{12}$ **9.** $\frac{353}{240}$

11. $s = \int_{0}^{2} \sqrt{\frac{53}{4} - 21y^2 + 9y^4}\, dy$ **13.** 6

15. $s(x) = (x^{2/3} + \frac{4}{9})^{3/2} - (1 + \frac{4}{9})^{3/2}$;
$\Delta s = \frac{1}{27}[(9(1.1)^{2/3} + 4)^{3/2} - 13^{3/2}] \approx 0.1196$;
$ds = \sqrt{13}/30 \approx 0.1202$

17. $ds = \sqrt{17}(0.1) \approx 0.412$; $d(A, B) = \sqrt{0.1781} \approx 0.422$

19. 1.44 **21.** 8.61 **23.** $\frac{8}{3}\pi(2^{3/2} - 1) \approx 15.3$

25. $16{,}911\pi/1024 \approx 51.9$

27. $(\pi/27)(8 \cdot 37^{3/2} - 13^{3/2}) \approx 204$ **29.** 10π

EJERCICIOS 6.6, PÁGINA 318

1. (a) $\frac{128}{3}$ lbf · pulg (b) $\frac{64}{3}$ lbf · pulg **3.** $F_2 = 3F_1$

5. 2250 lbf · pie **7.** 44,660 J

9. (a) $81(62.5)\pi/2 \approx 7952$ lbf · pie
(b) $(189)(62.5)\pi/2 \approx 18{,}555$ lbf · pie

11. 500 lbf · pie

13. (a) $3c/10$ erg (b) $9c/40$ erg (c es una constante)

15. 276 lbf · pie

17. $575(\frac{1}{2} - 1/\sqrt[5]{40}) \approx 12.55$ lbf · pulg

19. $W = gm_1m_2h/[4000(4000 + h)]$

21. 36.85 lbf · pie

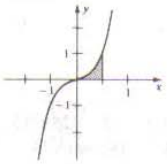
EJERCICIOS 6.7, PÁGINA 323

1. (a) 31.25 lbf (b) 93.75 lbf
3. (a) $62.5/\sqrt{3}$ lbf (b) $62.5\sqrt{3}/24$ lbf
5. 320 lbf **7.** 303,356.25 lbf
9. $(592)(62.5)/3$ lbf $\approx 12{,}333.3$ lbf
11. $\frac{3200}{3}$ lbf **13.** 4500 lbf
15. (a) 1516 lbf (b) 1614.6 lbf

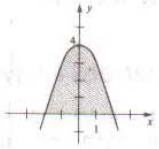
EJERCICIOS 6.8, PÁGINA 332

1. $M_x = -27$; $M_y = -46$; $\bar{x} = -\frac{23}{7}$; $\bar{y} = -\frac{27}{14}$

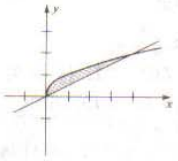
3. $(\frac{4}{5}, \frac{2}{7})$



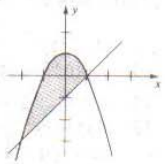
5. $(0, \frac{8}{5})$



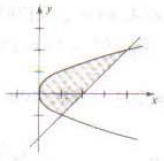
7. $(\frac{8}{5}, 1)$



9. $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5})$



11. $(\frac{8}{5}, \frac{1}{2})$



13. $\bar{x} = \bar{y} = 4a/(3\pi)$

15. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = -20a/[3(8 + \pi)]$. La figura se coloca verticalmente con el origen en el centro de la circunferencia.

EJERCICIOS 6.9, PÁGINA 340

1. 11 (Regla del Trapecio)

3. (a) 150 din · cm (b) 150 din · cm

5. $(27 - 5\sqrt{5})/3 \approx 5.27$ gal **7.** 1.56 L/min

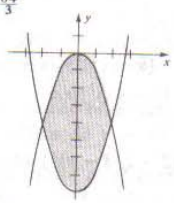
9. 1.45 coulomb

11. (a) $9[(601)^{2/3} - 1] \approx 632$ min
(b) $2 \cdot 9[(301)^{2/3} - 1] \approx 790$ min

13. En minutos: (a) 18.16 (b) 66.22
(c) 115.24 (d) 197.12

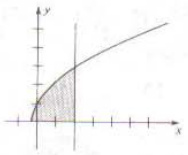
EJERCICIOS 6.10, PÁGINA 342

1. $\frac{64}{3}$

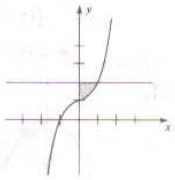


3. $\frac{5}{6}\sqrt{5}$ **5.** $\frac{253}{12}$

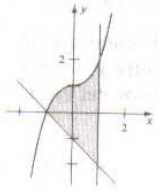
7. 10π



9. $3\pi/5$



11. (a) $1152\pi/5$ (b) 54π (c) $1728\pi/5$
13. $(37^{3/2} - 10^{3/2})/27 \approx 7.16$
15. $432(62.5)\pi \approx 84{,}823$ lbf · pie **17.** 6,000 lbf
19. $(\frac{4}{15}, -\frac{1}{21})$



21. $515\pi/64 \approx 25.3$

23. 900 pie (Regla del Trapecio) **25.** $\pi/5$

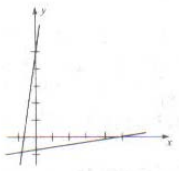
27. Hay dos posibilidades: al sólido se puede obtener girando la región bajo la gráfica de $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje x, o girando la región bajo la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y.

CAPÍTULO 7

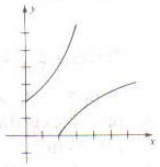
EJERCICIOS 7.1, PÁGINA 349

1,3 Hay que demostrar que $f(g(x)) = x = g(f(x))$.

1.



3.



5. $f^{-1}(x) = (x + 3)/4$

7. $f^{-1}(x) = (1 - 5x)/(2x),\ x > 0$

9. $f^{-1}(x) = \sqrt{9 - x},\ x \le 9$

11. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x + 2)/5}$

13. $f^{-1}(x) = (x^2 + 5)/3,\ x \ge 0$

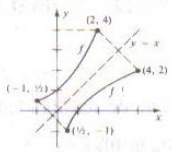
15. $f^{-1}(x) = (x - 8)^3$

17. $f^{-1}(x) = x$

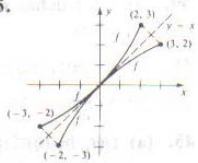
19. (a) $f^{-1}(x) = (x - b)/a$
(b) No (no es uno a uno)

21. Si g y h son ambas funciones inversas de f, entonces $f(g(x)) = x = f(h(x))$ para todo x. Como f es uno a uno, esto implica que $g(x) = h(x)$ para todo x, es decir, $g = h$.

23.



25.



EJERCICIOS 7.2, PÁGINA 357

1. $9/(9x + 4)$ **3.** $-15/(2 - 3x)$

5. $-3x^2/(7 - 2x^3)$ **7.** $(6x - 2)/(3x^2 - 2x + 1)$

9. $(8x + 7)/[3(4x^2 + 7x)]$ **11.** $1 + \ln x$

13. $\dfrac{1}{2x}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}\right)$ **15.** $-\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{(\ln x)^2} + 1\right)$

17. $\dfrac{20}{5x - 7} + \dfrac{6}{2x + 3}$ **19.** $\dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{18}{9x - 4}$

21. $\dfrac{2x}{x^4 - 1}$ **23.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

25. $[x/(x^2 + 1)] \ln (x^2 + 1)$

27. $x/[(x^2 + 1)\sqrt{\ln (x^2 + 1)}]$

29. $\dfrac{(2x^2 - 1)y}{x(3y + 1)}$ **31.** $\dfrac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x}$

33. $1/(x + y - 1)$ **35.** $y = 8x - 15$

37. $(1, 1), (2, 4 + 4 \ln 2) \approx (2, 6.8)$

39. $(10, 5 \ln 10 - 5) \approx (10, 6.51)$

41. $v(t) = 2t - [4/(t - 1)]$; $a(t) = 2 + [4/(t + 1)^2]$; a la izquierda en $[0, 1)$; a la derecha en $(1, 4]$.

43. ± 0.73 años

45. (a) $s'(0) = 0$; $s''(0) = bc/(m_1 + m_2)$
(b) $s'(m_2/b) = -c \ln [m_1/(m_1 + m_2)]$; $s''(m_2/b) = bc/m_1$

47. $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$; la pendiente tiende a 0; la pendiente tiende a infinito

49. Las gráficas coinciden si $x > 0$; sin embargo, la gráfica de $y = \ln (x^2)$ contiene puntos con abscisa negativa.

51. $(-1)^{n-1}(n - 1)!x^{-n}$

EJERCICIOS 7.3, PÁGINA 366

1. $-5e^{-5x}$ **3.** $6xe^{3x^2}$ **5.** $e^{2x}/\sqrt{1 + e^{2x}}$

7. $e^{\sqrt{x+1}}/(2\sqrt{x + 1})$ **9.** $(-2x^2 + 2x)e^{-2x}$

11. $\dfrac{e^x(x^2 + 1) - 2xe^x}{(x^2 + 1)^2}$ o bien $\dfrac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$

13. $12(e^{4x} - 5)^2e^{4x}$ **15.** $(-e^{1/x}/x^2) - e^{-x}$

17. $\dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$ o bien $\dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

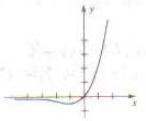
19. $e^{-2x}[(1/x) - 2 \ln x]$ **21.** $\dfrac{e^x}{e^x + 1} - \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

23. $\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{(e^{2x} + e^{-2x})\sqrt{\ln (e^{2x} + e^{-2x})}}$ **25.** $\dfrac{3x^2 - ye^{xy}}{xe^{xy} + 6y}$

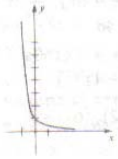
27. $\dfrac{6x - e^y}{3y^2 + xe^y}$ **29.** $y = (e + 3)x - e - 1$

31. (b) $x \ln x < 1$ si $x = 1/e$, $x \ln x > 1$ si $x = e$ y $x \ln x$ es creciente en $[1/e, e]$; 1.76

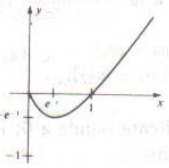
33. MÍN: $f(-1) = -e^{-1}$; decreciente en $(-\infty, -1]$; creciente en $[-1, \infty)$; CAR en $(-2, \infty)$; CAB en $(-\infty, -2)$; PI en $(-2, -2e^{-2})$.



35. No hay máximos ni mínimos locales; decreciente en $(-\infty, \infty)$; CAR en $(-\infty, \infty)$; no hay PI.



37. MÍN: $f(1/e) = -1/e$; decreciente en $(0, 1/e]$; creciente en $[1/e, \infty)$; CAR en $(0, \infty)$; no hay PI.

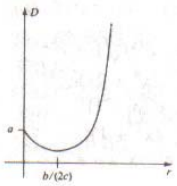


41. (a) $(\ln a - \ln b)/(a - b)$ (b) $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$

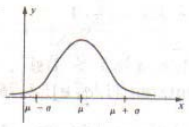
43. (a) 75.8 cm; 15.98 cm/año (b) 3 meses ($t = \frac{1}{4}$); 6 años

45. (a) $f(n/a)$ (b) En $x = 2/a$

47.



51. MÁX: $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$; creciente en $(-\infty, \mu]$; decreciente en $[\mu, \infty)$; CAR en $(-\infty, \mu - \sigma)$ y $(\mu + \sigma, \infty)$; CAB en $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$; PI en $(\mu \pm \sigma, c)$ donde $c = e^{-1/2}/(\sigma\sqrt{2\pi})$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$



53. $r/R = e^{-1/2} \approx 0.607$

EJERCICIOS 7.4, PÁGINA 373

1. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$ **3.** $-\frac{1}{5}\ln|7 - 5x| + C$
5. $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 4x + 9| + C$ **7.** $\frac{1}{3}\ln|x^3 + 1| + C$
9. $\frac{1}{2}(\ln 9 - \ln 3)$, o bien $\ln\sqrt{3}$
11. $4(\ln 6 - \ln 5)$, o bien $4\ln\frac{6}{5}$
13. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}e^{5x} + C$ **15.** $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$
17. $-\frac{1}{4}(e^{-12} - e^{-4})$ **19.** $2e^{\sqrt{x}} + C$
21. $e^x + 2x - e^{-x} + C$ **23.** $\ln(e^x + e^{-x}) + C$
25. $-1/(x + 1) + C$ **27.** $x^2 + x - 4\ln|x - 3| + C$
29. 4 **31.** $\ln 2 + e^{-2} - e^{-1} \approx 0.46$
33. $\pi(1 - e^{-1})$ **35.** $(5x + 2)^2(6x + 1)(150x + 39)$
37. $(19x^2 + 20x - 3)(x^2 + 3)^4/[2(x + 1)^{3/2}]$
39. $\left[\dfrac{3x}{3x^2 + 2} + \dfrac{3}{2(6x - 7)}\right]\sqrt{(3x^2 + 2)\sqrt{6x - 7}}$
41. $-2/(3 - 2x)$
43. $\Delta S = c\ln(T_2/T_1)$
45. (a) $Q(t) = 2.5 - 2.5e^{-4t}$ (b) 2.5 coulomb
47. (a) $s(t) = kv_0(1 - e^{-t/k})$
(b) kv_0 (*Sugerencia:* Hacer $t \to \infty$ en (a).)
49. $2/\ln(3.25)$

EJERCICIOS 7.5, PÁGINA 380

1. $7^x \ln 7$ **3.** $8^{x^2+1}(2x \ln 8)$
5. $(4x^3 + 6x)/[(\ln 10)(x^4 + 3x^2 + 1)]$
7. $5^{3x-4}3\ln 5$
9. $[-(x^2 + 1)10^{1/x}\ln 10]/x^2 + (2x10^{1/x})$
11. $[(2x^3(\ln 7)7^{\sqrt{x^4+9}})]/\sqrt{x^4 + 9}$
13. $30x/[(3x^2 + 2)\ln 10]$
15. $\left(\dfrac{6}{6x + 4} - \dfrac{2}{2x - 3}\right)\dfrac{1}{\ln 5}$ **17.** $1/(x \ln x \ln 10)$
19. $ex^{e-1} + e^x$ **21.** $(x + 1)^x\left(\dfrac{x}{x + 1} + \ln(x + 1)\right)$
23. $[1/(3\ln 10)]10^{3x} + C$
25. $[-1/(2\ln 3)]3^{-x^2} + C$
27. $(1/\ln 2)\ln(2^x + 1) + C$ **29.** $24/(1250\ln 5)$
31. $2^{x^3}/(3\ln 2) + C$
33. $2x + (3^{2x} - 3^{-2x})/(2\ln 3) + C$ **35.** $(1/\ln 2) - \frac{1}{2}$
37. (a) \$0.05/año (b) \$0.95
39. (a) En truchas por año: 95; 62; 53 (b) 9.36 años
41. pH ≈ 2.201; $\pm 0.1\%$
43. (b) $S(x) = 2S(2x)$ (el doble de sensibilidad)
45. (a) $1/(I_0 \ln 10)$ (b) $1/(100I_0 \ln 10)$
(c) $1/(1000I_0 \ln 10)$

EJERCICIOS 7.6, PÁGINA 387

1. $q(t) = 5000(3)^{t/10}$; 45,000; $(10\ln 10)/\ln 3 \approx 21$ horas
3. $30(\frac{29}{30})^5 \approx 25.3$ pulg
5. Aproximadamente 109.24 años después del 1 de enero, 1980 (29 de marzo, 2089)
9. Se determina I tal que en $t = 0$, $RI + L(dI/dt) = 0$ e $I = I_0$. Procediendo de manera similar a la solución del Ejemplo 1, $(1/I)dI = (-R/L)\,dt$; $\ln I = (-R/L)t + C$ e $I = e^C e^{(-R/L)t}$. Como $I = I_0$ en $t = 0$, $I = I_0 e^{-Rt/L}$.
11. $P = [(288 - 0.01z)/288]^{3.42}$ **13.** $38\frac{1}{3}$ años
15. 683.3 mg **17.** $v = [2k(y^{-1} - y_0^{-1}) + v_0^2]^{1/2}$

19. 13,235 años

23. $V = \frac{1}{27}(kt + c)^3$ donde c y k son constantes y $k > 0$.

EJERCICIOS 7.7, PÁGINA 392

1. $(x^2 - 3)/2$; $[\sqrt{5}, 5]$; x
3. $\sqrt{4 - x}$; $[-45, 4]$; $-1/(2\sqrt{4 - x})$
5. $1/x$; $(0, \infty)$; $-1/x^2$
7. $\sqrt{-\ln x}$; $(0, 1]$; $-1/(2x\sqrt{-\ln x})$
9. $\ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) - \ln 2$; $\mathbb{R}$; $1/\sqrt{x^2 + 4}$
11. f es creciente porque $f'(x) > 0$ para todo x; $\frac{1}{16}$.
13. f es creciente porque $f'(x) \geq 0$ para todo x; 1.
15. Como f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$, no tiene función inversa. Si el dominio se restringiera a un subconjunto de uno de estos intervalos, entonces f tendría una función inversa.
17. f es creciente en $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[0, \infty)$. Si el dominio se restringiera a un subconjunto de uno de estos intervalos, entonces f^{-1} existiría.

EJERCICIOS 7.8, PÁGINA 393

1. $-2(1 + \ln|1 - 2x|)$
3. $12/(3x + 2) + 3/(6x - 5) - 8/(8x - 7)$
5. $-4x/(2x^2 + 3)[\ln(2x^2 + 3)]^2$ **7.** $2x$
9. $(\ln 10)10^x \log x + 10^x/(x \ln 10)$
11. $(1/x)(2 \ln x)x^{\ln x}$ **13.** $2x(1 - x^2)e^{1-x^2}$
15. $2^{-1/x}[(x^3 + 4) \ln 2 - 3x^4]/x^2(x^3 + 4)^2$
17. $e(1 + \sqrt{x})^{e-1}/(2\sqrt{x})$ **19.** $(10^{\ln x} \ln 10)/x$
21. $(2x - 5)/(x^2 - 5x - 3)$
23. $(1/x)[1 + \ln(\ln x)](\ln x)^{\ln x}$
25. $-y/x$ **27.** $-\frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} + x + C$
29. $2(e^{-1} - e^{-2})$ **31.** $-\ln|1 - \ln x| + C$
33. $\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{4}{27}\ln|3x + 2| + C$ **35.** $3/(2 \ln 4)$
37. $2 \ln 10\sqrt{\log x} + C$
39. $\frac{1}{2}x^2 - x + 2 \ln|x + 1| + C$
41. $(5e)^x/(1 + \ln 5) + C$ **43.** $x^{e+1}/(e + 1) + C$
45. $4e^2 + 12$ cm **47.** $y - e = -2(1 + e)(x - 1)$
49. $(\pi/8)(e^{-16} - e^{-24})$
51. Aproximadamente 33.2 días
53. La cantidad en la solución en cualquier tiempo t después de la 1:00 P.M. es $10(1 - 2^{-t/3})$.
(a) 2.21 horas (aproximadamente a las 6:14 P.M.) (b) $10(1 - 2^{-7/3}) \approx 8.016$ lb
55. 6,400,000 **57.** $-\frac{1}{8}$

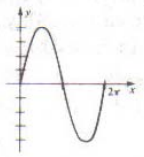
CAPÍTULO 8

EJERCICIOS 8.1, PÁGINA 408

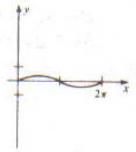
3. (a) *II* (b) *III* (c) *IV*

Ejercicios 5, 9: El orden es sen, cos, tan, csc, sec, cot.

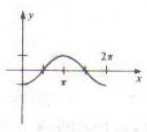
5. (a) 1, 0, —, 1, —, 0
(b) $\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1$
(c) 0, 1, 0, —, 1, —
(d) $-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/3, -2, 2\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}$
7. 810°, −120°, 315°, 900°, 36°
9. (a) $-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{3}{4}$
(b) $2\sqrt{13}/13, -3\sqrt{13}/13, -\frac{2}{3}, \sqrt{13}/2, -\sqrt{13}/3, -\frac{3}{2}$
(c) −1, 0, —, −1, —, 0
31. (a) $\pi/2, 3\pi/2, \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$
(b) 90°, 270°, 45°, 135°, 225°, 315°
33. (a) $0, \pi$ (b) 0°, 180°
35. (a) $0, \pi, 2\pi/3, 4\pi/3$ (b) 0°, 180°, 120°, 240°
37. (a) $\pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$ (b) 90°, 210°, 330°
39. (a) $2\pi/3, \pi, 4\pi/3$ (b) 120°, 180°, 240°
41. (a) $\pi/3, 5\pi/3$ (b) 60°, 300° **43.** $\frac{84}{85}$ **45.** $-\frac{36}{77}$
47. $\frac{240}{289}$ **49.** $\frac{24}{7}$ **51.** $\frac{1}{3}$ **53.** No; $|\text{sen } t| \leq 1$
55. (a) $\sqrt{2}/2$ (b) $-\frac{1}{4}$
57. (a)



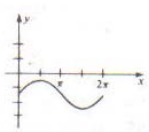
(b)



59. (a)



(b)



EJERCICIOS 8.2, PÁGINA 413

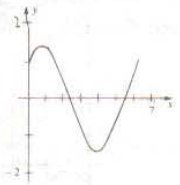
1. 1 **3.** $\frac{1}{8}$ **5.** $\frac{2}{3}$ **7.** 0 **9.** $-\frac{3}{4}$ **11.** 0
13. 7 **15.** 1 **17.** 0 **19.** 2 **21.** 1 **23.** 1
25. −1

EJERCICIOS 8.3, PÁGINA 421

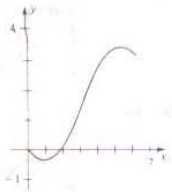
1. $-4 \text{ sen } x$ **3.** $2x \cos(x^2 + 2)$
5. $-25 \cos^4 5x \text{ sen } 5x$
7. $x \text{ sen}(1/x) + 3x^2 \cos(1/x)$
9. $8 \sec^2(8x + 3)$
11. $[1/(2\sqrt{x - 1})] \sec(\sqrt{x - 1}) \tan(\sqrt{x - 1})$
13. $-(3x^2 - 2) \csc^2(x^3 - 2x)$
15. $-6x \text{ sen } 3x^2 - 6 \cos 3x \text{ sen } 3x$
17. $-4 \csc^2 2x \cot 2x$
19. $-5x^2 \csc 5x \cot 5x + 2x \csc 5x$

21. $3\tan^3 x\sec^3 x + 2\tan x\sec^5 x$
23. $5(\operatorname{sen}5x - \cos 5x)^4(5\cos 5x + 5\operatorname{sen}5x)$
25. $-9\cot^2(3x+1)\csc^2(3x+1)$
27. $\dfrac{-4(1-\operatorname{sen}4x)\operatorname{sen}4x + 4\cos^2 4x}{(1-\operatorname{sen}4x)^2}$ o bien $\dfrac{4}{1-\operatorname{sen}4x}$
29. $\dfrac{-\csc x\cot x - \csc^2 x}{\csc x + \cot x}$ o bien $-\csc x$
31. $\dfrac{e^{-3x}\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - 3e^{-3x}\tan\sqrt{x}$ **33.** $\dfrac{2\tan 2x}{\ln\sec 2x}$
35. $6\tan^2 2x\sec^2 2x - 6\tan 2x\sec^3 2x$
37. $-3\csc 3x[(x^3+1)\cot 3x + x^2]/(x^3+1)^2$
39. $x^{\cot x}[(\cot x)/x - \csc^2 x\ln x]$
41. $y' = 6\sec^2 3x\tan 3x$; $y'' = 18\sec^4 3x + 36\sec^2 3x\tan^2 3x$
43. $y' = x\operatorname{sen}x$, $y'' = x\cos x + \operatorname{sen}x$
45. $y' = \dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$; $y'' = \sec^2 x\sqrt{\tan x} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan^3 x}}$
47. $(\cos y)/(2y + x\operatorname{sen}y)$
49. $(e^x\cot y - e^{2y})/(2xe^{2y} + e^x\csc^2 y)$
51. MÁX: $f(\pi/4) = \sqrt{2}$; MÍN: $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$; creciente en $[0, \pi/4]$ y $[5\pi/4, 2\pi]$; decreciente en $[\pi/4, 5\pi/4]$
53. MÁX: $f(5\pi/3) = (5\pi + 3\sqrt{3})/6$; MÍN: $f(\pi/3) = (\pi - 3\sqrt{3})/6$; decreciente en $[0, \pi/3]$ y $[5\pi/3, 2\pi]$; creciente en $[\pi/3, 5\pi/3]$

51.

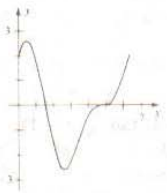


53.



55. MÁX: $f(\pi/6) = 3\sqrt{3}/2$; MÍN: $f(5\pi/6) = -3\sqrt{3}/2$; creciente en $[0, \pi/6]$ y $[5\pi/6, 2\pi]$; decreciente en $[\pi/6, 5\pi/6]$
57. MÁX: $f(\pi/4) = -e^{-\pi/4}/\sqrt{2} \approx 0.32$, $f(\pi/4 + 2\pi) = e^{-9\pi/4}/\sqrt{2} \approx 6\times 10^{-4}$; MÍN: $f(5\pi/4) = -e^{-5\pi/4}/\sqrt{2} \approx -0.014$, $f(5\pi/4 + 2\pi) = e^{-3.25\pi}/\sqrt{2} \approx -3\times 10^{-5}$

55.



57.



59. MÍN: $f(0) = -\sqrt{2}$; MÁX: $f(\pi/4) = -1$

61. $y - 1 = -3\sqrt{3}(x - \pi/6)$; $y - 1 = (\sqrt{3}/9)(x - \pi/6)$
63. $\frac{1000}{3}\pi$ pie/s $\approx$ 714 mi/h **65.** $40\sqrt{3}$ pie
67. −0.31 rad/s **69.** $\theta = 60°$ **71.** 176 mi
73. (b) $\theta = \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 48.2°$
75. $L = (4/\operatorname{sen}\theta) + (3/\cos\theta)$ donde $\tan\theta = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$. $L = (4^{2/3} + 3^{2/3})^{3/2} \approx 9.87$ pie
77. 5; 8; $\frac{1}{8}$; la partícula oscila sobre una recta coordenada entre 5 y −5 completando una oscilación cada 8 s.
79. 6; 3; $\frac{1}{3}$; la partícula oscila sobre una recta coordenada entre 6 y −6 completando una oscilación cada 3 s.
81. (a) $y = 25\cos\frac{1}{15}\pi t$
(b) $dy/dt = 4.8$ pie/min cuando $y = 10$ pie
85. 1.4958 **87.** 2.71
89. (a) 3, 3.1425465, 3.1415926, 3.1415926, 3.1415926
(b) Tienden a 2π

EJERCICIOS 8.4, PÁGINA 430

1. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x + C$ **3.** $\frac{1}{3}\sec 3x + C$
5. $\frac{1}{3}(\ln|\sec 3x| + \ln|\sec 3x + \tan 3x|) + C$
7. $\frac{1}{2}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + C$
9. $-\frac{1}{2}\cot(x^2+1) + C$ **11.** $\frac{1}{6}\operatorname{sen}6x + C$
13. $\frac{1}{4}(\operatorname{sen}3x)^{4/3} + C$
15. $-\cos x - \frac{4}{3}(\cos x)^{3/2} - \frac{1}{2}\cos^2 x + C$
17. $(1/\cos x) + C = \sec x + C$
19. $\frac{1}{2}\tan^2 x]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$
21. $\frac{1}{2}(\ln|\sec 2x + \tan 2x| - \operatorname{sen}2x) + C$
23. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x]_{\pi/6}^{\pi} = -\frac{1}{8}$ **25.** $\ln|x + \cos x| + C$
27. $\tan x + \sec x]_{\pi/4}^{\pi/3} = \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1$
29. $e^x + \ln|\sec e^x| + C$ **31.** $-e^{\cos x} + C$
33. $\frac{1}{2}\ln|2\tan x + 1| + C$ **35.** 2
37. $\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln(3 + 2\sqrt{2}) = 2\ln(1 + \sqrt{2})$
39. $2\pi\sqrt{3}$ **45.** (a) 2.24 (b) 2.34
47. (a) $L = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{4 + \sec^2(x/2)\tan^2(x/2)}\,dx$
(b) Si $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 + \sec^2(x/2)\tan^2(x/2)}$, entonces $L \approx$ $(\pi/24)[f(0) + 4f(\pi/8) + 2f(\pi/4) + 4f(3\pi/8) + f(\pi/2)]$
(c) $L \approx 1.65$
49. (b) $q(t) = q_0 e^u$ donde $u = [k/(2\pi)](1 - \cos 2\pi t)$

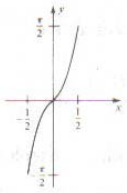
EJERCICIOS 8.5, PÁGINA 437

1. (a) $\pi/3$ (b) $-\pi/3$ **3.** (a) $\pi/4$ (b) $3\pi/4$
5. (a) $\pi/3$ (b) $-\pi/3$ **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{4}{5}$
11. $\pi - \sqrt{5}$ **13.** 0 **15.** No está definido

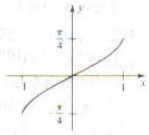
17. $-\frac{24}{25}$ **19.** $x/\sqrt{x^2+1}$ **21.** $\sqrt{2+2x}/2$

31. $\cot^{-1} x = y$ si y sólo si $\cot y = x$ para $0 < y < \pi$

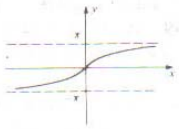
33.



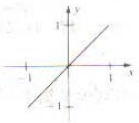
35.



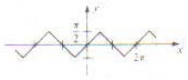
37.



39.



41.



45. (a) $\arctan(-9 \pm \sqrt{57})/4$ (b) -0.3478; -1.3337

47. (a) $\arccos(\pm\sqrt{15}/5)$; $\arccos(\pm\sqrt{3}/3)$ (b) 0.6847; 2.4569; 0.9553; 2.1863

49. (a) $\text{arcsen}(\pm\sqrt{30}/6)$ (b) ± 1.1503

51. sen^{-1} (sen 2) está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ y 2 no está en $[-\pi/2, \pi/2]$. $\cos^{-1}$ (cos 2) se encuentra entre 0 y π. Por lo tanto $\cos^{-1}$ (cos 2) = 2.

53. Se evita el mensaje de error si $-\text{sen } 1 \le x \le \text{sen } 1$.

55. $\text{sen}^{-1} x = \tan^{-1}(x/\sqrt{1-x^2})$ para $-1 < x < 1$; $\cos^{-1} x = \tan^{-1}(\sqrt{1-x^2}/x)$ para $0 < x < 1$; $\cot^{-1} x = \tan^{-1}(1/x)$ para $0 < x < \infty$

EJERCICIOS 8.6, PÁGINA 443

1. $3/(9x^2 - 30x + 26)$ **3.** $1/(2\sqrt{x}\sqrt{1-x})$

5. $(-e^{-x}/\sqrt{e^{-2x}-1}) - e^{-x}\,\text{arcsec}\,e^{-x}$

7. $2x^3/(1+x^4) + 2x \arctan x^2$

9. $-[9(1+\cos^{-1} 3x)^2]/\sqrt{1-9x^2}$

11. $2x/[(1+x^4)\arctan x^2]$

13. $-1/[(\text{sen}^{-1} x)^2\sqrt{1-x^2}]$

15. $x/[(x^2-1)\sqrt{x^2-2}]$

17. $(1 - 2x \arctan x)/(x^2+1)^2$

19. $[1/(2\sqrt{x})]\sec^{-1}\sqrt{x} + 1/(2\sqrt{x}\sqrt{x-1})$

21. $(1-x^6)^{-1/2}(3 \ln 3)x^2 3^{\text{arcsen } x^3}$

23. $(\tan x)^{\arctan x}[\cot x \sec^2 x \arctan x + (\ln \tan x)/(1+x^2)]$

25. $(ye^x - \text{sen}^{-1} y - 2x)/[(x/\sqrt{1-y^2}) - e^x]$

27. $\pi/16$ **29.** $\pi/12$ **31.** $-\arctan(\cos x) + C$

33. $2 \arctan\sqrt{x} + C$ **35.** $\text{sen}^{-1}(e^x/4) + C$

37. $\frac{1}{6}\sec^{-1}(x^3/2) + C$ **39.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+9) + C$

41. $\frac{1}{5}\sec^{-1}(e^x/5) + C$ **43.** $4\pi/3$

45. $\pm\frac{7}{3576} \approx \pm 0.002$ **47.** $-\frac{25}{1044}$ rad/s

49. $40\sqrt{3}$ **51.** $y - (\pi/6) = (2/\sqrt{3})(x - \frac{3}{2})$; $y - (\pi/6) = (-\sqrt{3}/2)(x - \frac{3}{2})$

53. (a) $(-\infty, 0)$ (b) $(0, \infty)$

55. $(\pi e^2/2) - (\pi^2/4) - (\pi/2) \approx 7.57$

57. $2\pi/27 \approx 0.233$ mi/s

EJERCICIOS 8.7, PÁGINA 449

15. $5 \cosh 5x$

17. $[1/(2\sqrt{x})](\sqrt{x}\,\text{sech}^2\sqrt{x} + \tanh\sqrt{x})$

19. $-2x \text{ sech } x^2[(x^2+1)\tanh x^2 + 1]/(x^2+1)^2$

21. $3x^2 \text{senh } x^3$ **23.** $3\cosh^2 x \text{senh } x$

25. $2 \coth 2x$ **27.** $-e^{3x}\text{sech } x \tanh x + 3e^{3x}\text{sech } x$

29. $-\text{sech}^2 x/(\tanh x + 1)^2$ **31.** $\dfrac{y(e^x - \cosh xy)}{(x\cosh xy - e^x)}$

33. $2\cosh\sqrt{x} + C$ **35.** $\ln|\text{senh } x| + C$

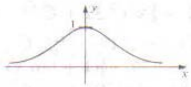
37. $\frac{1}{2}\text{senh}^2 x + C$ (o bien $\frac{1}{2}\cosh^2 x + C$, o bien $\frac{1}{4}\text{senh } 2x + C$)

39. $-\frac{1}{3}\text{sech } 3x + C$ **41.** $\frac{1}{9}\tanh^3 3x + C$

43. $-\frac{1}{2}\ln|1 - 2\tanh x| + C$ **45.** $\frac{1}{3}(-1 + \cosh 3)$

47. $(\ln(2+\sqrt{3}), \sqrt{3})$, $(\ln(2-\sqrt{3}), -\sqrt{3})$

51.

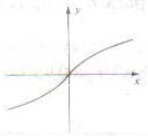


53. Se define $A = \frac{1}{2}\text{sen } t \cos t - \int_1^{\cosh t}\sqrt{x^2-1}\,dx$ y se demuestra que $dA/dt = \frac{1}{2}$.

55. (a) 286,574 pie^2 (b) 1494 pie

EJERCICIOS 8.8, PÁGINA 455

7.



9.



11. $5/\sqrt{25x^2+1}$ **13.** $1/(2\sqrt{x}\sqrt{x-1})$

15. $2x/(2x^2 - x^4)$

17. $-|x|/(x\sqrt{x^2+1}) + \text{senh}^{-1}(1/x)$

19. $4/(\sqrt{16x^2-1}\cosh^{-1} 4x)$ **21.** $\frac{1}{4}\text{senh}^{-1}\frac{4}{9}x + C$

23. $\frac{1}{14}\tanh^{-1}\frac{2}{7}x + C$ **25.** $\cosh^{-1}(e^x/4) + C$

27. $-\frac{1}{6}\text{sech}^{-1}(x^2/3) + C$ **31.** $y = \text{senh } 3t$

EJERCICIOS 8.9, PÁGINA 456

1. 0 **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** $\frac{3}{5}$
7. $-(6x+1)(\operatorname{sen}\sqrt{3x^2+x})/(2\sqrt{3x^2+x})$
9. $5\sec x\,(\sec x+\tan x)^5$
11. $2x\,\operatorname{arcsec} x^2 + 2x/\sqrt{x^4-1}$
13. $\dfrac{12(3x+7)^3\operatorname{sen}^{-1}5x - 5(3x+7)^4(1-25x^2)^{-1/2}}{(\operatorname{sen}^{-1}5x)^2}$
15. $(\cos x)^{x+1}[\ln\cos x - (x+1)\tan x]$
17. $(2x - 2\operatorname{sech} 4x\tanh 4x)/\sqrt{2x^2+\operatorname{sech} 4x}$
19. $-6\cot 2x$
21. $-(2+2\sec^2 x\tan x)/(2x+\sec^2 x)^2$
23. $(-\operatorname{sen} x)e^{\cos x} - e^{\operatorname{sen} x}(\cos x)^{e-1}$
25. $-5e^{-5x}\operatorname{senh} e^{-5x}$ **27.** $\frac{1}{3}x^{-2/3}$
29. $2^{\arctan 2x}(2\ln 2)/(1+4x^2)$
31. $-6e^{-2x}\operatorname{sen}^2 e^{-2x}\cos e^{-2x}$
33. $-2xe^{-x^2}(\csc^2 x^2 + \cot x^2)$
35. $2x/[(1+x^4)\tan^{-1}(x^2)]$
37. $-x/\sqrt{x^2(1-x^2)}$ **39.** $3(\sec^2\operatorname{sen} 3x)\cos 3x$
41. $4(\tan x + \tan^{-1} x)^3[(\sec^2 x) + 1/(1+x^2)]$
43. $(1+x^2)^{-1}[1+(\tan^{-1}x)^2]^{-1}$
45. $-e^{-x}(e^{-x}\cosh e^{-x} + \operatorname{senh} e^{-x})$
47. $(\cosh x - \operatorname{senh} x)^{-2}$, or e^{2x}
49. $2x/\sqrt{x^4+1}$ **51.** $-\frac{1}{3}\operatorname{sen}(5-3x)+C$
53. $2\tan\sqrt{x}+C$
55. $\frac{1}{9}\ln|\operatorname{sen} 9x| + \frac{1}{6}\ln|\csc 9x - \cot 9x| + C$
57. $-\ln|\cos e^x| + C$
59. $-\frac{1}{3}\cot 3x + \frac{2}{3}\ln|\csc 3x - \cot 3x| + x + C$
61. $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + C$ **63.** $\frac{1}{6}\operatorname{sen}(2x^3)+C$
65. $\frac{2}{15}(16\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$ **67.** $-\frac{1}{6}\csc^2 3x + C$
69. $\frac{1}{18}\ln(4+9x^2)+C$ **71.** $-\sqrt{1-e^{2x}}+C$
73. $\frac{1}{2}\operatorname{senh} x^2 + C$ **75.** $\pi/3$ **77.** $\frac{1}{3}(1+\tan x)^3 + C$
79. $-\ln|2+\cot x| + C$ **81.** $\cosh(\ln x)+C$
83. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(2x/3)+C$ **85.** $-\frac{1}{3}\operatorname{sech}^{-1}|2x/3| + C$
87. $\frac{1}{25}\sqrt{25x^2+36}+C$
89. $(\frac{4}{15}, \operatorname{sen}^{-1}(\frac{4}{5}))$, $(-\frac{4}{15}, \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{4}{5}))$
91. MÍN: $f(\tan^{-1}\frac{1}{2}) = 5\sqrt{5}$; decreciente en $(0, c)$; creciente en $(c, \pi/2)$ donde $c = \tan^{-1}(\frac{1}{2})$.
93. $\pi(4-\pi)/4$
95. (a) $x = \frac{1}{2}\tan^{-1}4 + n(\pi/2)$ para $n = 0, 1, 2, 3$
(b) 0.66, 2.23, 3.80, 5.38
97. $\frac{1}{260}$ rad/s
99. (a) $dV/dt = 0.6\operatorname{sen}(\frac{2}{3}\pi t)$ (b) $3/\pi \approx 0.95$ litros

CAPÍTULO 9

EJERCICIOS 9.1, PÁGINA 465

1. $-(x+1)e^{-x}+C$ **3.** $e^{3x}(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}) + C$
5. $\frac{1}{25}\cos 5x + \frac{1}{5}x\operatorname{sen} 5x + C$
7. $x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$
9. $(x^2-2)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C$
11. $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$
13. $\frac{2}{9}x^{3/2}(3\ln x - 2) + C$
15. $-x\cot x + \ln|\operatorname{sen} x| + C$
17. $-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x) + C$
19. $\cos x(1 - \ln\cos x) + C$
21. $-\frac{1}{2}\csc x\cot x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| + C$
23. $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$ **25.** $\pi/4$
27. $\frac{1}{40400}(2x+3)^{100}(200x-3)+C$
29. $\frac{1}{41}e^{4x}(4\operatorname{sen} 5x - 5\cos 5x) + C$
31. $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$
33. $x^3\cosh x - 3x^2\operatorname{senh} x + 6x\cosh x - 6\operatorname{senh} x + C$
35. $2\cos\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + C$
37. $x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$
43. $e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$
45. 2π **47.** $(\pi/2)(e^2+1)$ **49.** $(62.5\pi)/4 = 125\pi/8$

EJERCICIOS 9.2, PÁGINA 470

1. $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$ **3.** $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$
5. $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$
7. $\frac{1}{8}(\frac{5}{2}x - 2\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x) + C$
9. $\frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + C$
11. $\frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C$
13. $\frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x + C$
15. $\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} x - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^{7/2} x + C$
17. $\tan x - \cot x + C$ **19.** $\frac{2}{3} - 5/(6\sqrt{2})$
21. $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x + C$ **23.** $\frac{3}{5}$
25. $-\frac{1}{5}\cot^5 x - \frac{1}{7}\cot^7 x + C$
27. $-\ln|2 - \operatorname{sen} x| + C$ **29.** $-1/(1+\tan x) + C$
31. $3\pi^2/4$ **33.** $\frac{5}{2}$
35. (b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} mx\cos nx\,dx$
$$= \begin{cases} -\dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C & \text{si } m \neq n \\ -\dfrac{\cos 2mx}{4m} + C & \text{si } m = n \end{cases}$$
$\displaystyle\int \cos mx\cos nx\,dx$
$$= \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + \dfrac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + C & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2mx}{4m} & \text{si } m = n \end{cases}$$

EJERCICIOS 9.3, PÁGINA 476

1. $2\operatorname{sen}^{-1}(x/2) - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C$
3. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{9+x^2}-3}{x}\right| + C$
5. $\sqrt{x^2-25}/(25x) + C$
7. $-\sqrt{4-x^2}+C$ **9.** $-x/\sqrt{x^2-1}+C$
11. $\frac{1}{432}[(\tan^{-1}\frac{1}{6}x) + 6x/(36+x^2)] + C$

13. $\frac{9}{4}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}x) + \frac{1}{2}x\sqrt{9-4x^2} + C$
15. $1/[2(16-x^2)] + C$
17. $\frac{1}{243}(9x^2+49)^{3/2} - \frac{49}{81}(9x^2+49)^{1/2} + C$
19. $(3+2x^2)\sqrt{x^2-3}/(27x^3) + C$
21. $\frac{1}{2}x^2 + 8\ln|x| - 8x^{-2} + C$
29. $25\pi[\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)] \approx 41.849$
31. $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) \approx 2.96$
33. $\frac{3}{2}\sqrt{13} + 2\ln\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$
35. $\sqrt{x^2-16} - 4\tan^{-1}(\frac{1}{4}\sqrt{x^2-16})$
37. $-\sqrt{25+x^2}/(25x) + C$ **39.** $-\sqrt{1-x^2}/x + C$

EJERCICIOS 9.4, PÁGINA 482

1. $3\ln|x| + 2\ln|x-4| + C$, o bien $\ln|x|^3(x-4)^2 + C$
3. $4\ln|x+1| - 5\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$, o bien $\ln[(x+1)^4|x-3|/|x-2|^5] + C$
5. $6\ln|x-1| + 5/(x-1) + C$
7. $3\ln|x-2| - 2\ln|x+4| + C$, o bien $\ln\dfrac{|x-2|^3}{(x+4)^2} + C$
9. $2\ln|x| - \ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C$, o bien $\ln[x^2(x+2)^4/|x-2|] + C$
11. $5\ln|x+1| - 1/(x+1) - 3\ln|x-5| + C$, o bien $\ln[|x+1|^5/|x-5|^3] - 1/(x+1) + C$
13. $5\ln|x| - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2x^3} - \dfrac{1}{3x^2} + 4\ln|x+3| + C$
15. $\frac{1}{6}\ln|x-3| - \dfrac{7}{2(x-3)} + \frac{5}{6}\ln|x+3| - \dfrac{3}{2(x+3)} + C$
17. $3\ln|x+5| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}x + C$, o bien $\ln(x^2+4)|x+5|^3 + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}x + C$
19. $\ln\sqrt{(x^2+1)/(x^2+4)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}x + C$
21. $\ln(x^2+1) - 4/(x^2+1) + C$
23. $\frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln|x| + 2\ln|x-1| + C$, o bien $\frac{1}{2}(x^2+2x) + \ln(x^2-x)^2 + C$
25. $\frac{1}{3}x^3 - 9x - [1/(9x)] - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{728}{27}\tan^{-1}\frac{1}{3}x + C$
27. $2\ln|x+4| + 6(x+4)^{-1} - 5(x-3)^{-1} + C$
29. $2\ln|x-4| + 2\ln|x+1| - \frac{3}{2}(x+1)^{-2} + C$
31. $\frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \ln|x-1| + \frac{1}{2}x^2 + C$
37. $\frac{1}{2}\ln 3$ **39.** $(\pi/27)(4\ln 2 + 3) \approx 0.672$

EJERCICIOS 9.5, PÁGINA 486

1. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}(x-2) + C$ **3.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}(x-2) + C$
5. $-2\sqrt{9-8x-x^2} - 5\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{5}(x+4) + C$
7. $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - (1/\sqrt{3})\tan^{-1}[(2x+1)/\sqrt{3}] + C$
9. $\frac{1}{2}[\tan^{-1}(x+2) + (x+2)/(x^2+4x+5)] + C$
11. $(x+3)/(4\sqrt{x^2+6x+13}) + C$
13. $[2/(3\sqrt{7})]\tan^{-1}[(4x-3)/(3\sqrt{7})] + C$
15. $1 + (\pi/4)$ **17.** $\ln[(1+e^x)/(2+e^x)] + C$
19. $\frac{1}{3}\ln 2 + [2\pi/(6\sqrt{3})] \approx 0.8356$
21. $\pi\ln(1.8) + (2\pi/3)[\tan^{-1}\frac{1}{3} - (\pi/4)] \approx 0.8755$

EJERCICIOS 9.6, PÁGINA 489

1. $\frac{3}{7}(x+9)^{7/3} - \frac{27}{4}(x+9)^{4/3} + C$
3. $\frac{5}{81}(3x+2)^{9/5} - \frac{5}{18}(3x+2)^{4/5} + C$ **5.** $2 + 8\ln\frac{6}{7}$
7. $\frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\arctan x^{1/6} + C$
9. $(2/\sqrt{3})\tan^{-1}\sqrt{(x-2)/3} + C$
11. $\frac{3}{10}(x+4)^{2/3}(2x-7) + C$
13. $\frac{2}{7}(1+e^x)^{7/2} - \frac{4}{5}(1+e^x)^{5/2} + \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$
15. $e^x - 4\ln(e^x+4) + C$
17. $2\operatorname{sen}\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+4}\cos\sqrt{x+4} + C$
19. $\frac{137}{320}$
21. $(2/\sqrt{3})\tan^{-1}[(2\tan\frac{1}{2}x+1)/\sqrt{3}] + C$
23. $\ln|1+\tan\frac{1}{2}x| + C$
25. $\frac{1}{5}\ln|(2+\tan\frac{1}{2}x)/(-1+2\tan\frac{1}{2}x)| + C$
27. $\frac{4}{3}\ln|\operatorname{sen}x - 4| + \frac{2}{3}\ln|\operatorname{sen}x + 2| + C$

EJERCICIOS 9.7, PÁGINA 492

1. $\sqrt{4+9x^2} - 2\ln|(2+\sqrt{4+9x^2})/(3x)| + C$
3. $-\frac{1}{8}x(2x^2-80)\sqrt{16-x^2} + 96\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}x + C$
5. $-\frac{2}{135}(9x+4)(2-3x)^{3/2} + C$
7. $-\frac{1}{18}\operatorname{sen}^5 3x\cos 3x - \frac{5}{72}\operatorname{sen}^3 3x\cos 3x - \frac{5}{48}\operatorname{sen}3x\cos 3x + \frac{5}{16}x + C$
9. $-\frac{1}{3}\cot x\csc^2 x - \frac{2}{3}\cot x + C$
11. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen}^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}x + C$
13. $\frac{1}{13}e^{-3x}(-3\operatorname{sen}2x - 2\cos 2x) + C$
15. $\sqrt{5x-9x^2} + \frac{5}{6}\cos^{-1}\frac{1}{5}(5-18x) + C$
17. $[1/(4\sqrt{15})]\ln|(\sqrt{5}x^2 - \sqrt{3})/(\sqrt{5}x^2 + \sqrt{3})| + C$
19. $\frac{1}{4}(2e^{2x}-1)\cos^{-1}e^x - \frac{1}{4}e^x\sqrt{1-e^{2x}} + C$
21. $\frac{2}{315}(35x^3 - 60x^2 + 96x - 128)(2+x)^{3/2} + C$
23. $\frac{2}{81}(4 + 9\operatorname{sen}x - 4\ln|4+9\operatorname{sen}x|) + C$
25. $2\sqrt{9+2x} + 3\ln|(\sqrt{9+2x}-3)/(\sqrt{9+2x}+3)| + C$
27. $\frac{3}{4}\ln|\sqrt[3]{x}/(4+\sqrt[3]{x})| + C$
29. $\sqrt{16-\sec^2 x} - 4\ln|(4+\sqrt{16-\sec^2 x})/\sec x| + C$

EJERCICIOS 9.8, PÁGINA 493

1. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen}^{-1}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$
3. $2\ln 2 - 1$ **5.** $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x - \frac{1}{10}\operatorname{sen}^5 2x + C$
7. $\frac{1}{5}\sec^5 x + C$ **9.** $x/(25\sqrt{x^2+25}) + C$
11. $2\ln|(2-\sqrt{4-x^2})/x| + \sqrt{4-x^2} + C$

13. $2 \ln|x-1| - \ln|x| - x/(x-1)^2 + C$
15. $\ln[(x+3)^2(x^2+9)^2/|x-3|^5] + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}x + C$
17. $-\sqrt{4+4x-x^2} + 2\operatorname{sen}^{-1}[(x-2)/\sqrt{8}] + C$
19. $3(x+8)^{2/3} + \ln[(x+8)^{1/3}-2]^2$
$-\ln[(x+8)^{2/3} + 2(x+8)^{1/3} + 4]$
$-(6/\sqrt{3})\tan^{-1}[((x+8)^{1/3}+1)/\sqrt{3}] + C$
21. $\frac{1}{13}e^{2x}(2\operatorname{sen}3x - 3\cos 3x) + C$
23. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + C$ 25. $-\sqrt{4-x^2} + C$
27. $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 1/(2x) - \frac{9}{4}\ln|x|$
$-\frac{23}{4}\ln|x+2| + C$
29. $2\tan^{-1}(x^{1/2}) + C$ 31. $\ln|\sec e^x + \tan e^x| + C$
33. $\frac{1}{125}[10x\operatorname{sen}5x - (25x^2-2)\cos 5x] + C$
35. $\frac{2}{7}\cos^{7/2}x - \frac{2}{5}\cos^{3/2}x + C$
37. $\frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$
39. $\frac{1}{16}[2x\sqrt{4x^2+25} - 25\ln(2x+\sqrt{4x^2+25})] + C$
41. $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$
43. $-x\csc x + \ln|\csc x - \cot x| + C$
45. $-\frac{1}{4}(8-x^3)^{4/3} + C$
47. $-2x\cos\sqrt{x} + 4\cos\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + C$
49. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \ln(1+e^x) + C$
51. $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{8}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2} + C$
53. $\frac{1}{3}(16-x^2)^{3/2} - 16(16-x^2)^{1/2} + C$
55. $\frac{11}{2}\ln|x+5| - \frac{15}{2}\ln|x+7| + C$
57. $x\tan^{-1}5x - \frac{1}{10}\ln|1+25x^2| + C$
59. $e^{\tan x} + C$
61. $(1/\sqrt{5})\ln|\sqrt{5}x + \sqrt{7+5x^2}| + C$
63. $-\frac{1}{5}\cot^5 x - \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x - x + C$
65. $\frac{1}{5}(x^2-25)^{5/2} + \frac{25}{3}(x^2-25)^{3/2} + C$
67. $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}\tanh 4x + C$
69. $-\frac{1}{4}x^2e^{-4x} - \frac{1}{8}xe^{-4x} - \frac{1}{32}e^{-4x} + C$
71. $3\operatorname{sen}^{-1}[(x+5)/6] + C$ 73. $-\frac{1}{7}\cos 7x + C$
75. $18\ln|x-2| - 9\ln|x-1| - 5\ln|x-3| + C$
77. $x^3\operatorname{sen}x + 3x^2\cos x - 6x\operatorname{sen}x - 6\cos x + \operatorname{sen}x + C$
79. $(-1/x)\sqrt{9-4x^2} - 2\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}x + C$
81. $24x - \frac{10}{3}\ln|\operatorname{sen}3x| - \frac{1}{3}\cot 3x + C$
83. $-\ln x - (4/\sqrt[4]{x}) + 4\ln(1+\sqrt[4]{x}) + C$
85. $-2\sqrt{1+\cos x} + C$
87. $-x/[2(25+x^2)] + \frac{1}{10}\tan^{-1}\frac{1}{5}x + C$
89. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$
91. $\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}x + (7/\sqrt{5})\tan^{-1}(x/\sqrt{5}) + C$
93. $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4\ln|x| + C$
95. $\frac{2}{5}x^{5/2}\ln x - \frac{4}{25}x^{5/2} + C$
97. $\frac{3}{64}(2x+3)^{8/3} - \frac{9}{20}(2x+3)^{5/3} + \frac{27}{16}(2x+3)^{2/3} + C$
99. $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C$

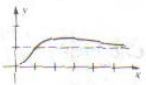
CAPÍTULO 10

EJERCICIOS 10.1, PÁGINA 502

1. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{40}$ 5. $\frac{3}{13}$ 7. 0 9. $-\frac{1}{2}$
11. $-\frac{1}{2}$ 13. $\frac{1}{6}$ 15. ∞ 17. $\frac{1}{3}$ 19. ∞
21. 1 23. 0 25. No existe 27. $\frac{2}{5}$
29. ∞ 31. 0 33. ∞ 35. 2
37. No existe 39. $\frac{3}{5}$ 41. -3 43. 0
45. ∞ 47. ∞ 49. 2 51. 1
55. $\frac{1}{2}A\omega_0 t\operatorname{sen}\omega_0 t$ 57. (a) 1 (b) $-\frac{1}{18}$

EJERCICIOS 10.2, PÁGINA 506

1. 0 3. 0 5. 0 7. 0 9. 1 11. 0
13. e^5 15. 1 17. 1 19. No existe
21. e^2 23. 2 25. 0 27. 1
29. No existe 31. $\frac{1}{2}$ 33. No existe
35. e 37. No existe
39. $e^{1/3}$ 41. ∞
43. $f(e) = e^{1/e}$ es un máximo local; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$; $y = 1$



47. (a) a

EJERCICIOS 10.3, PÁGINA 512

Ejercicios 1-27: C = Converge, D = Diverge.

1. C, 3 3. D 5. D 7. C, $\frac{1}{2}$ 9. C, $-\frac{1}{2}$
11. D 13. D 15. 0 17. D 19. D
21. C, π 23. C, ln 2 25. C 27. D
29. (a) No existe (b) π
31. (a) 1 (b) $\pi/32$ 33. π 35. (b) No
37. Si $F(x) = k/x^2$, entonces $W = k$.
39. (a) $1/k$
(b) No, la integral impropia para el tiempo medio de reparación es divergente.
41. (b) $c = (4/\sqrt{\pi})\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}$ 43. $1/s$, $s > 0$
45. $s/(s^2+1)$, $s > 0$ 47. $1/(s-a)$, $s > a$
49. (a) 1, 1, 2

EJERCICIOS 10.4, PÁGINA 518

Ejercicios 1-33: C = Converge, D = Diverge.

1. C, 6 3. D 5. D 7. D 9. C, $3\sqrt[3]{4}$
11. D 13. C, $\pi/2$ 15. D 17. C, $-\frac{1}{4}$
19. D 21. D 23. D 25. C, 0 27. D
29. D 31. C 33. D 35. $n > -1$
37. (a) 2 (b) No se puede asignar un valor.
39. No se pueden asignar valores ni al área ni al volumen.

41. (b) $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

43. (a) t no está definido en $y = 0$.

EJERCICIOS 10.5, PÁGINA 528

1. $\operatorname{sen} x = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\operatorname{sen} z}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$, z está entre x y $\pi/2$.

3. $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5}{128}z^{-7/2}(x-4)^4$, z está entre x y 4.

5. $\tan x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{g(z)}{5!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$, z está entre x y $\pi/4$ y $g(z) = 16\sec^6 z + 88\sec^4 z\tan^2 z + 16\sec^2 z\tan^4 z$

7. $1/x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{8}(x+2)^2 - \frac{1}{16}(x+2)^3 - \frac{1}{32}(x+2)^4 - \frac{1}{64}(x+2)^5 + z^{-7}(x+2)^6$. z está entre x y -2.

9. $\tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{3z^2 - 1}{3(1+z^2)^3}(x-1)^3$, z está entre 1 y x.

11. $xe^x = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2e}(x-1)^2 + \frac{1}{3e}(x+1)^3 + \frac{1}{8e}(x+1)^4 + \frac{ze^z + 5e^z}{120}(x+1)^5$, z está entre x y -1.

13. $\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^5}{5(z+1)^5}$, z está entre 0 y x.

15. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{\operatorname{sen} z}{9!}x^9$, z está entre x y 0.

17. $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}e^{2z}x^6$, z está entre x y 0.

19. $1/(x-1)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6/(z-1)^8$, z está entre 0 y x.

21. $\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1 + 2z^2}{6(1 - z^2)^{5/2}}x^3$, z está entre 0 y x.

23. $f(x) = 7 - 3x + x^2 - 5x^3 + 2x^4$ **25.** 0.9998

27. 2.0075 **29.** 0.454545; error ≤ 0.0000005

31. 0.223; error ≤ 0.0002

33. 0.8660254; error $\leq (8.1)(10^{-9})$

35. Cinco cifras decimales, porque $|R_3(x)| \leq 4.2 \times 10^{-6} < 0.5 \times 10^{-5}$

37. Tres decimales. **39.** Cuatro decimales.

EJERCICIOS 10.6, PÁGINA 529

1. $\frac{1}{2}\ln 2$ **3.** ∞ **5.** $\frac{8}{3}$ **7.** 0 **9.** $-\infty$

11. e^8 **13.** e **15.** 1 **17.** Diverge

19. Diverge **21.** $-\frac{9}{2}$ **23.** Diverge

25. $\pi/2$ **27.** Diverge **29.** 0

31. (a) $\ln\cos x = \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{4}{9\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 - \frac{1}{12}(\sec^4 z + 2\sec^2 z\tan^2 z)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4$, z está entre x y $\pi/6$.

(b) $\sqrt{x-1} = 1 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{16}(x-2)^3 - \frac{5}{128}(x-2)^4 + \frac{7}{256}(z-1)^{-9/2}(x-2)^5$, z está entre x y 2.

33. 0.4651 (con $n = 3$, $|R_3(x)| \leq 1.6 \times 10^{-6}$)

CAPÍTULO 11

EJERCICIOS 11.1, PÁGINA 543

1. $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}$ **3.** $\frac{3}{5}, -\frac{9}{11}, -\frac{29}{21}, -\frac{57}{35}, -2$

5. $-5, -5, -5, -5; -5$ **7.** $2, \frac{7}{3}, \frac{25}{14}, \frac{7}{5}; 0$

9. $2/\sqrt{10}, 2/\sqrt{13}, 2/\sqrt{18}, \frac{2}{5}; 0$

11. $\frac{3}{10}, -\frac{6}{17}, \frac{9}{26}, -\frac{12}{37}; 0$

13. 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001; 1

15. 2, 0, 2, 0; el límite no existe.

Ejercicios 17-41: C = Converge, D diverge.

17. C, 0 **19.** C, $\pi/2$ **21.** D **23.** C, 0

25. D **27.** D **29.** C, e **31.** C, 0 **33.** C, $\frac{1}{2}$

35. D **37.** C, 1 **39.** C, 0 **41.** C, 0

43. (b) 10 000 en A; 5 000 en B; 20 000 en C.

45. (a) La sucesión aparentemente converge a 1.
(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

47. (a) La sucesión parece converger aproximadamente a 0.739.

49. (a) 3.5; 3.178571429; 3.162319422; 3.162277661; 3.162277660

EJERCICIOS 11.2, PÁGINA 552

Ejercicios 1-27: C = Converge, D = Diverge.

1. C, 4 **3.** C, $\sqrt{5}/(\sqrt{5}+1)$ **5.** C, $\frac{37}{99}$ **7.** D

9. D **11.** C, $\frac{1}{4}$ **13.** C, 5 **15.** D **17.** D

19. C, $\frac{8}{7}$ **21.** D **23.** C **25.** D **27.** D

29. $S_n = \frac{1}{2}[1 - 1/(2n+1)]$; converge a $\frac{1}{2}$

31. $S_n = -\ln(n+1)$; diverge

33. El resultado es falso (encuentre un ejemplo).

35. $\frac{23}{99}$ **37.** $\frac{16181}{4995}$ **39.** 30 m

41. (b) $Q/(1 - e^{-ct})$ (c) $-(1/c)\ln[(M-Q)/M]$

43. (b) 2000

45. (a) $a_{k+1} = \frac{1}{4}\sqrt{10}a_k$; $a_n = (\frac{1}{4}\sqrt{10})^{n-1}a_1$; $A_n = (\frac{5}{8})^{n-1}A_1$; $P_n = (\frac{1}{4}\sqrt{10})^{n-1}P_1$
(b) $[16/(4-\sqrt{10})]a_1$; $\frac{8}{3}a_1^2$

EJERCICIOS 11.3, PÁGINA 561

Ejercicios 1-45: C = Converge, D = Diverge.

1. C 3. D 5. D 7. D 9. C 11. C
13. C 15. D 17. C 19. C 21. D
23. D 25. C 27. C 29. C 31. C
33. C 35. D 37. C 39. C 41. C
43. C 45. C

47. Converge si $k > 1$, diverge si $k \le 1$.
49. (b) $n > e^{100} - 1 \approx 2.688 \times 10^{43}$ 55. 8

EJERCICIOS 11.4, PÁGINA 566

Ejercicios 1-25: C = Convergente, D = Divergente.

1. C 3. D 5. C 7. D 9. C 11. C
13. C 15. C 17. D 19. C 21. C
23. D 25. D

EJERCICIOS 11.5, PÁGINA 574

Ejercicios 1-23: AC = Absolutamente convergente; CC = Condicionalmente convergente; D = Divergente.

1. CC 3. CC 5. D 7. AC 9. AC
11. D 13. CC 15. AC 17. D 19. CC
21. D 23. D 25. 0.368 27. 0.901
29. 0.306 31. 141 33. 5
37. No. Considere $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.

EJERCICIOS 11.6, PÁGINA 580

1. $[-1, 1)$ 3. $(-2, 2)$ 5. $(-1, 1]$
7. $[-1, 1)$ 9. $[-1, 1]$ 11. $(-6, 14)$
13. Converge sólo para $x = 0$. 15. $(-2, 2)$
17. $(-\infty, \infty)$ 19. $[\frac{17}{9}, \frac{19}{9})$ 21. $(-12, 4)$
23. $(0, 2e)$ 25. $(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$ 27. $\frac{3}{2}$ 29. $1/e$
31. ∞

EJERCICIOS 11.7, PÁGINA 585

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $-1 < x < 1$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$; $-1 < x < 1$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2(n+1)}$; $-1 < x < 1$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} (3^n/2^{n+1})x^{n+1}$; $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$
9. $-1 - x - 2\sum_{n=2}^{\infty} x^n$; $-1 < x < 1$ 11. 0.182
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n$ 15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}x^{n+1}$ 19. 0.3333 21. 0.0992
23. 0.9677 25. $\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1}$ 29. $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}x^n$

EJERCICIOS 11.8, PÁGINA 594

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}x^n$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n+2}$; ∞ 7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$; ∞
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+2}$; ∞
11. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$; ∞
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$ 17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 10)^n}{n!}x^n$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2}2^n}{n!}(x+1)^n$
21. $2 + 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 7\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{23\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$
23. $\frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{9\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$
25. $-\frac{1}{e} + \frac{1}{2e}(x+1)^2 + \frac{1}{3e}(x+1)^3 + \frac{1}{8e}(x+1)^4$
27. 1.6487 29. 0.9986 31. 0.0997 33. 0.5211
35. 0.7468 37. 0.4969 39. 0.4864 41. 0.4484
43. $2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right)$ para $|x| < 1$
45. $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots\right)$; usando cinco términos, $\pi \approx 3.34$; se requieren por lo menos 40 000 términos.
47. (c) 16.7 pie

EJERCICIOS 11.9, PÁGINA 598

1. (a) $1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!}x^n$; 1

(b) $1 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^{3n}$; 1

3. $1 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)(-5)\cdots(1-3n)}{3^n n!} x^n$; 1

5. $1 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{25}x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(3)(-2)\cdots(8-5n)}{5^n n!} (-x)^n$; 1

7. $1 - 2x + 3x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)(-3)\cdots(-1-n)}{n!} x^n$; 1

9. $1 - 3x + 6x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n$; 1

11. $2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{288}x^2 + 2\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n 8^n n!} x^n$; 8

13. $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1}$; 1 **15.** 0.508

17. 0.198 **19.** 0.297

EJERCICIOS 11.10, PÁGINA 599

1. Converge a 0 **3.** Diverge

5. Converge a 5

Ejercicios 7-37: C = Convergente, AC = Absolutamente convergente, CC = Condicionalmente convergente, D = Divergente.

7. D **9.** AC **11.** D **13.** D **15.** AC

17. D **19.** D **21.** AC **23.** CC **25.** AC

27. C **29.** C **31.** CC **33.** C **35.** C

37. D **39.** 0.159 **41.** $(-3, 3)$

43. $[-12, -8)$ **45.** $\frac{1}{4}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n-1}$; ∞

49. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$; ∞

51. $1 + \frac{2}{3}x + 2\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-5)}{3^n n!} x^n$; 1

53. $e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x+2)^n$

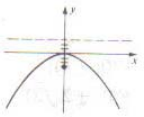
55. $2 + \frac{x-4}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^{3n-1} n!} (x-4)^n$

57. 0.189 **59.** 1.002

CAPÍTULO 12

EJERCICIOS 12.2, PÁGINA 609

1. $V(0, 0)$; $F(0, -3)$; $y = 3$



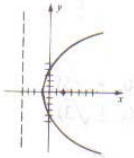
3. $V(0, 0)$; $F(-\frac{3}{8}, 0)$; $x = \frac{3}{8}$



5. $V(0, 0)$; $F(0, \frac{1}{32})$; $y = -\frac{1}{32}$



7. $V(-1, 0)$; $F(2, 0)$; $x = -4$



9. $V(2, -2)$; $F(2, -\frac{7}{4})$; $y = -\frac{9}{4}$



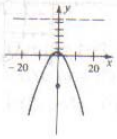
11. $V(-4, 2)$; $F(-\frac{7}{2}, 2)$; $x = -\frac{9}{2}$



13. $V(-5, -6)$; $F(-5, -\frac{97}{16})$; $y = -\frac{95}{16}$



15. $V(0, \frac{1}{2})$; $F(0, -\frac{9}{2})$; $y = \frac{11}{2}$



17. Se toma $y' = 2ax + b = 0$ para obtener la abscisa $-b/(2a)$ del vértice. Dada $x = ay^2 + by + c$, se toma $2ay + b = 0$ para obtener la ordenada $-b/(2a)$ del vértice.

19. $y^2 = 8x$ **21.** $(x-6)^2 = 12(y-1)$

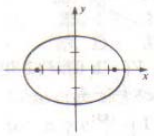
23. $3x^2 = -4y$ **25.** $\frac{9}{16}$ pie del vértice

27. $y = 2x^2 - 3x + 1$

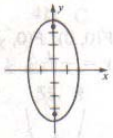
29. (a) $\frac{8}{3}$ (b) 2π (c) $16\pi/5$
31. (b) $p = r^2/(4h)$ **33.** $\frac{200}{3}$ lb
35. (b) 64,968 pie^2
37. $2\sqrt{2}$ rad/s $\approx$ 0.45 rev/s
39. (a) $y = -\frac{7}{160}x^2 + x$ (b) 17.5 pie

EJERCICIOS 12.3, PÁGINA 618

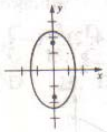
1. $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{5}, 0)$



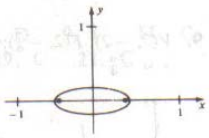
3. $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{3})$



5. $V(0, \pm\sqrt{5})$; $F(0, \pm\sqrt{3})$



7. $V(\pm\frac{1}{2}, 0)$; $F(\pm\sqrt{21}/10, 0)$

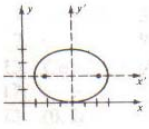


9. Centro (4, 2), vértices (1, 2) y (7, 2); $F(4 \pm \sqrt{5}, 2)$; extremos del eje menor (4, 4) y (4, 0)

11. Centro (−3, 1), vértices (−7, 1) y (1, 1); $F(-3 \pm \sqrt{7}, 1)$; extremos del eje menor (−3, 4) y (−3, −2)

13. Centro (5, 2), vértices (5, 7) y (5, −3); $F(5, 2 \pm \sqrt{21})$; extremos del eje menor (3, 2) y (7, 2)

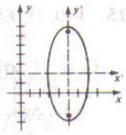
9.



11.



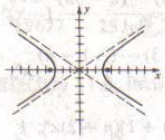
13.



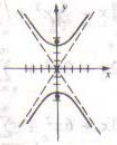
15. $(x^2/64) + (y^2/39) = 1$
17. $(4x^2/9) + (y^2/25) = 1$
19. $(8x^2/81) + (y^2/36) = 1$
21. $(x^2/7) + (y^2/16) = 1$
23. $2\sqrt{21}$ pie **25.** $y - 3 = \frac{5}{6}(x + 2)$
27. (a) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ (b) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$
29. $2a/\sqrt{2}$ y $2b/\sqrt{2}$
33. 94,581,000; 91,419,000
35. (b) $A = E/fm$

EJERCICIOS 12.4, PÁGINA 626

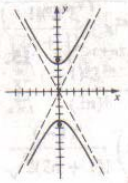
1. $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{13}, 0)$; $y = \pm 2x/3$



3. $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{13})$; $y = \pm 3x/2$



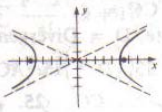
5. $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{5})$; $y = \pm 2x$



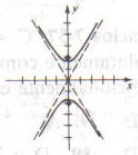
7. $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm\sqrt{2}, 0)$; $y = \pm x$



9. $V(\pm 5, 0)$; $F(\pm\sqrt{30}, 0)$; $y = \pm(\sqrt{5}/5)x$



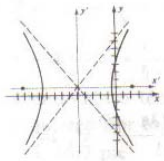
11. $V(0, \pm\sqrt{3})$; $F(0, \pm 2)$; $y = \pm\sqrt{3}x$



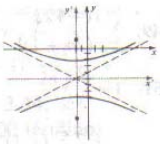
13. Centro (−5, 1), vértices $(-5 \pm 2\sqrt{5}, 1)$; $F(-5 \pm \sqrt{205}/2, 1)$; $y - 1 = \pm\frac{4}{4}(x + 5)$

15. Centro (−2, −5), vértices (−2, −2) y (−2, −8); $F(-2, -5 \pm 3\sqrt{5})$; $y + 5 = \pm\frac{1}{2}(x + 2)$

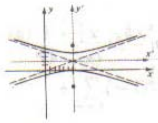
13.



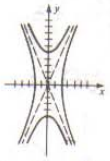
15.



17. Centro (6, 2), vértices (6, 4) y (6, 0); $F(6, 2 \pm 2\sqrt{10})$; $y - 2 = \pm\frac{1}{3}(x - 6)$



19. $15y^2 - x^2 = 15$ **21.** $(x^2/9) - (y^2/16) = 1$
23. $(y^2/21) - (x^2/4) = 1$ **25.** $(x^2/9) - (y^2/36) = 1$
27. Las hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas.

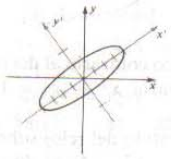


29. $y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2)$ **31.** $(\pm 2\sqrt{2}, -6)$
33. (a) $\frac{1}{3}\pi b^2[\sqrt{a^2 + b^2}(b^2 - 2a^2) + 2a^3]/a^2$
(b) $\frac{4}{3}\pi b^4/a$
35. Introduciendo un sistema coordenado con el eje x a lo largo de AB y el eje y a través del punto medio de AB, entonces resulta que la embarcación está en el punto $(\frac{80}{3}\sqrt{34}, 100) \approx (155.5, 100)$.
39. $\frac{1}{2}$ UA

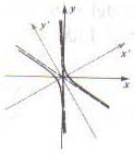
EJERCICIOS 12.5, PÁGINA 632

Ejercicios 1-13: La respuesta consiste en (a) el valor de $B^2 - 4AC$ y el tipo de cónica; (b) una ecuación en x' y y' que se obtiene con una rotación de ejes y un dibujo de la gráfica.

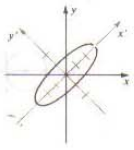
1. (a) -1600, elipse (b) $(x')^2 + 16(y')^2 = 16$



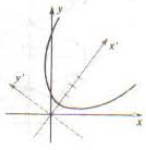
3. (a) 256, hipérbola (b) $4(x')^2 - (y')^2 = 1$



5. (a) -36, elipse
(b) $(x')^2 + 9(y')^2 = 9$

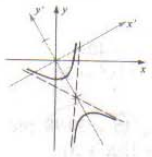


7. (a) 0, parábola
(b) $(y')^2 = 4(x' - 1)$

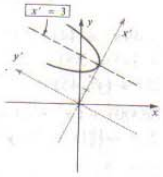


9. (a) 128, hipérbola (*véase la gráfica*)
(b) $2(x')^2 - (y')^2 - 4y' - 3 = 0$
11. (a) 0, parábola (*véase la gráfica*)
(b) $(x')^2 - 6x' - 6y' + 9 = 0$
13. (a) -2704, elipse (*véase la gráfica*)
(b) $(x')^2 + 4(y')^2 - 4x' = 0$

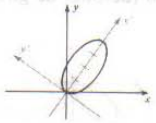
9.



11.

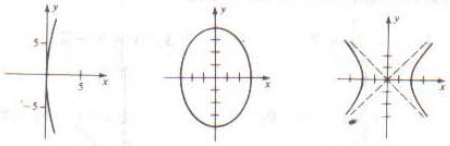


13.

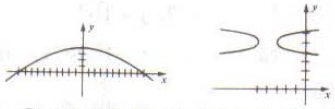


EJERCICIOS 12.6, PÁGINA 633

1. $F(16, 0)$; $V(0, 0)$ **3.** $F(0, \pm\sqrt{7})$; $V(0, \pm 4)$ **5.** $F(\pm 2\sqrt{2}, 0)$; $V(\pm 2, 0)$

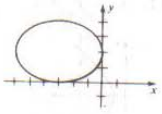


7. $F(0, -\frac{9}{4})$; $V(0, 4)$ **9.** $F(-4 \pm \sqrt{10}/3, 5)$; vértices $(-5, -5)$ y $(-3, 5)$

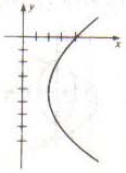


11. Centro $(-3, 2)$; vértices $(-6, 2)$ y $(0, 2)$; extremos del eje menor $(-3, 0)$ y $(-3, 4)$
13. $V(2, -4)$; $F(4, -4)$

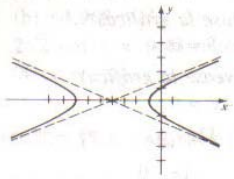
11.



13.



15. Centro $(-4, 0)$; vértices $(-7, 0)$ y $(-1, 0)$; asíntotas $y = \pm(x + 4)/3$



17. $9y^2 - 49x^2 = 441$ **19.** $x^2 = -40y$

21. $4x^2 + 3y^2 = 300$ **23.** $y^2 - 81x^2 = 36$

25. $(x^2/25) + (y^2/45) = 1$

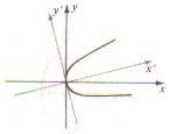
27. $(x^2/10000) + (y^2/960) = 1$; $8\sqrt{15} \approx 30.98$ pie

29. $y - 2 = -\frac{16}{15}(x + 3)$; $y - 2 = \frac{15}{16}(x + 3)$

35. $\frac{64}{3}\pi$

37. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{2}{3}b^3/K$, $K = bc - a^2\,[\ln(c + b) - \ln a]$

39. Parábola; $(y')^2 - 3x' = 0$ (después de girar los ejes).



CAPÍTULO 13

EJERCICIOS 13.1, PÁGINA 643

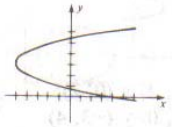
1. $y = 2x + 7$



3. $y = x - 2$



5. $x = y^2 - 6y + 4$



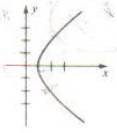
7. $y = 1/x^2$



9. $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$



11. $x^2 - y^2 = 1$



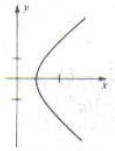
13. $y = \ln x$



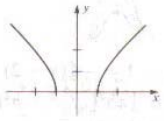
15. $y = 1/x$



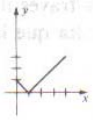
17. $x^2 - y^2 = 1$



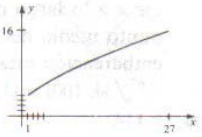
19. $y = \sqrt{x^2 - 1}$



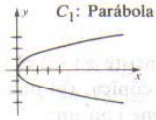
21.

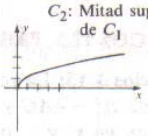


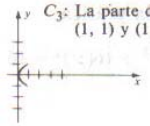
23.

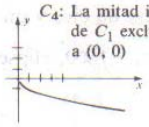


25.









27. (a) P se mueve en sentido contrario al del reloj sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.

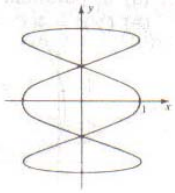
(b) P se mueve en el sentido del reloj sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de $(0,1)$ a $(0, -1)$.

(c) P se mueve en el sentido del reloj sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$.

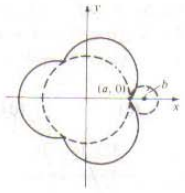
29. $x = (x_2 - x_1)t^n + x_1$, $y = (y_2 - y_1)t^n + y_1$ son ecuaciones paramétricas de l para cualquier entero positivo impar n.

33. (a) Elipse con centro en el origen

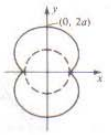
35.



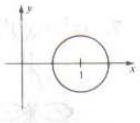
39. $x = 4b\cos t - b\cos 4t$,
$y = 4b\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen} 4t$



41. $x = \frac{1}{2}a(3\cos t - \cos 3t)$,
$y = \frac{1}{2}a(3\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t)$



45. $x = 1 + \frac{1}{2}\cos \omega t$,
$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} \omega t$



EJERCICIOS 13.2, PÁGINA 652

1. 1 **3.** $\frac{1}{4}$ **5.** $-2e^{-3}$ **7.** $-\frac{3}{2}\tan 1$

9. (a) Horizontal en (16, −16) y (16, 16); vertical en (0, 0)
(b) $(3t^2 + 12)/(64t^3)$

11. (a) Vertical en (0, 0) y (−3, 1); no hay horizontales
(b) $(1 - 3t)/[144t^{3/2}(t - 1)^3]$

13. (a) Horizontal en $(\pm 1, 0)$; vertical en $(0, \pm 1)$.
(b) $\frac{1}{3}\sec^4 t \csc t$

15. (a) Horizontal en $(0, \pm 2)$, $(2\sqrt{3}, \pm 2)$, $(-2\sqrt{3}, \pm 2)$ y vertical en $(4, \pm\sqrt{2})$, $(-4, \pm\sqrt{2})$.
(b) 2π

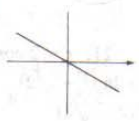
17. $\frac{2}{27}(34^{3/2} - 125)$ **19.** $\sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$ **21.** $\frac{1}{8}\pi^2$
23. $\frac{8}{3}\pi(17^{3/2} - 1)$ **25.** $\frac{11}{9}\pi$ **27.** $\frac{64}{3}\pi a^3$ **29.** $\frac{536}{5}\pi$
31. $\frac{2}{5}\sqrt{2}\pi(2e^{\pi} + 1)$

EJERCICIOS 13.3, PÁGINA 661

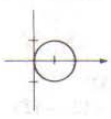
1.



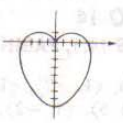
3.



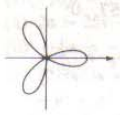
5.



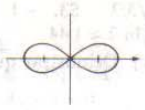
7.



9.



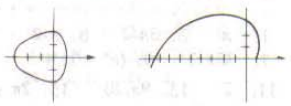
11.



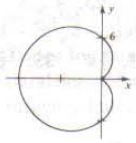
13.



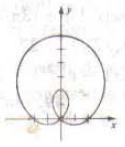
15.



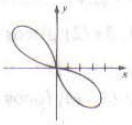
19.



21.



23.



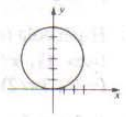
25. $r = -3\sec\theta$

27. $r = 4$ **29.** $r^2 = 16\sec 2\theta$
31. $r\theta = a\operatorname{sen}\theta$

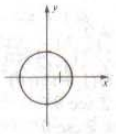
33. $x = 5$



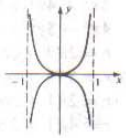
35. $x^2 + y^2 - 6y = 0$



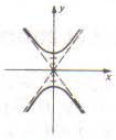
37. $x^2 + y^2 = 4$



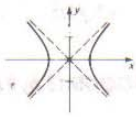
39. $y^2 = x^4/(1 - x^2)$



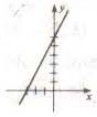
41. $(y^2/9) - (x^2/4) = 1$



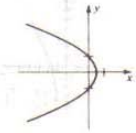
43. $x^2 - y^2 = 1$



45. $y - 2x = 6$



47. $y^2 = 1 - 2x$



51. $\sqrt{3}/3$ **53.** -1 **55.** 2 **57.** 0
59. $1/\ln 2 \approx 1.44$
67. (c) Demostrar que $r = r_0 e^{\pi/4} e^{-\theta}$

EJERCICIOS 13.4, PÁGINA 668

1. π **3.** $3\pi/2$ **5.** $\pi/2$
7. $33\pi/2$ **9.** $(e^{\pi} - 1)/4$
11. 2 **13.** $9\pi/20$ **15.** $2\pi + (9\sqrt{3}/2)$
17. $4\sqrt{3} - (4\pi/3)$ **19.** $(5\pi/24) - \sqrt{3}/4$
21. $11\,\text{sen}^{-1}\frac{1}{4} + (3\pi/4) - \sqrt{15}/4$ **23.** $4/\sqrt{3}$
25. $(64\sqrt{2})/3$ **27.** $a^2 \arccos(b/a) - b\sqrt{a^2 - b^2}$
29. $\sqrt{2}(1 - e^{-2\pi})$ **31.** 2 **33.** $\frac{3}{2}\pi$ **35.** $\frac{128}{5}\pi$
37. $4\pi^2 a^2$ **39.** $4\pi^2 ab$

EJERCICIOS 13.5, PÁGINA 673

1. Elipse; vértices $(\frac{3}{2}, \pi/2)$ y $(3, 3\pi/2)$; focos $(0, 0)$ y $(\frac{3}{2}, 3\pi/2)$

3. Hipérbola; vértices $(-3, 0)$ y $(\frac{3}{2}, \pi)$; focos $(0, 0)$ y $(-\frac{9}{2}, 0)$

5. Parábola; $V(\frac{3}{4}, 0)$; $F(0, 0)$

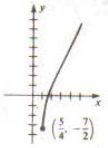
7. Elipse; vértices $(-4, 0)$ y $(-\frac{4}{3}, \pi)$; focos $(0, 0)$ y $(-\frac{8}{3}, 0)$

9. Hipérbola (excepto para los puntos $(\pm 3, 0)$); vértices $(\frac{6}{5}, \pi/2)$ y $(-6, 3\pi/2)$; focos $(0, 0)$ y $(-\frac{36}{5}, 3\pi/2)$

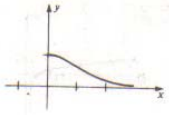
11. $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$
13. $y^2 - 8x^2 - 36x - 36 = 0$ **15.** $4y^2 = 9 - 12x$
17. $3x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0$
19. $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0$, $y \neq 0$
21. $r = 2/(3 + \cos\theta)$ **23.** $r = 12/(1 - 4\,\text{sen}\,\theta)$
25. $r = 5/(1 + \cos\theta)$ **27.** $r = 8/(1 + \text{sen}\,\theta)$
31. $r = 2/(1 + \cos\theta)$; $e = 1$; $r = 2\sec\theta$
33. $r = 4/(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)$; $e = 2$; $r = 2\csc\theta$
35. $r = 2/(3 + \cos\theta)$; $e = \frac{1}{3}$; $r = 2\sec\theta$
37. $-3\sqrt{3}/5$ **39.** 3

EJERCICIOS 13.6, PÁGINA 674

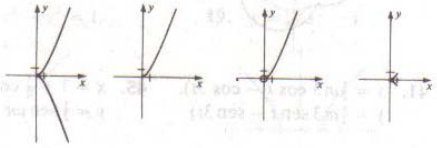
1. $y = 2(x - 1) - 1/(x - 1)$; 3



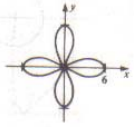
3. $y = e^{-x^2}$; $-2e^{-1}$



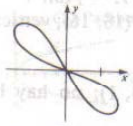
5. (a) (b) (c) (d)



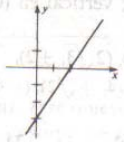
7. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 6(x^2 - y^2)$



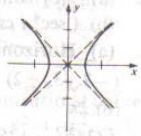
9. $(x^2 + y^2)^2 + 8xy = 0$



11. $3x - 2y = 6$

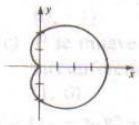


13. $x^2 - y^2 = 1$

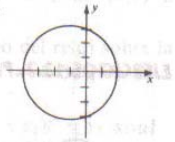


15. $x^2 + y^2 = 2(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$
17. $8x^2 + 9y^2 + 16x - 64 = 0$

15.



17.



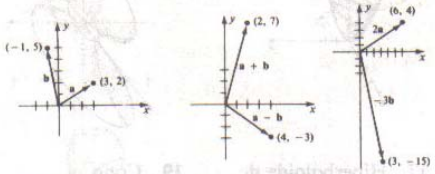
19. -1 **21.** $r = 2\cos\theta\sec 2\theta$ **23.** 2
25. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$ **27.** $2\pi[5\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$
29. $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$

CAPÍTULO 14

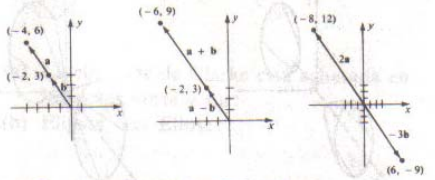
EJERCICIOS 14.1, PÁGINA 687

11. $\langle 3, 1\rangle$, $\langle 1, -7\rangle$, $\langle 13, 8\rangle$, $\langle 3, -32\rangle$
13. $\langle -15, 6\rangle$, $\langle 1, -2\rangle$, $\langle -68, 28\rangle$, $\langle 12, -12\rangle$

15. $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $-2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $19\mathbf{i} - 17\mathbf{j}$, $-11\mathbf{i} + 33\mathbf{j}$
17. $-2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, $-6\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $-6\mathbf{i} - 26\mathbf{j}$, $-26\mathbf{i} + 34\mathbf{j}$
19. $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $-15\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, $15\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
21. $\langle 4, 7\rangle$ **23.** $\langle -6, 0\rangle$ **25.** $\langle 9, -3\rangle$
27. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$; $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $2\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $-3\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 15\mathbf{j}$



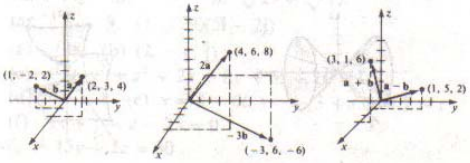
29. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle -6, 9\rangle$; $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle -2, 3\rangle$; $2\mathbf{a} = \langle -8, 12\rangle$; $-3\mathbf{b} = \langle 6, -9\rangle$



31. $3\sqrt{2}$ **33.** 5 **35.** $\sqrt{41}$ **37.** 18
39. (a) $-\frac{8}{17}\mathbf{i} + \frac{15}{17}\mathbf{j}$ (b) $\frac{8}{17}\mathbf{i} - \frac{15}{17}\mathbf{j}$
41. (a) $\langle 2/\sqrt{29}, -5/\sqrt{29}\rangle$ (b) $\langle -2/\sqrt{29}, 5/\sqrt{29}\rangle$
43. (a) $\langle -12, 6\rangle$ (b) $\langle -3, 1.5\rangle$
45. $(24/\sqrt{65})\mathbf{i} - (42/\sqrt{65})\mathbf{j}$ **47.** $\langle 10\sqrt{2}, 10\sqrt{2}\rangle$
49. 301.5 mi/h; 144.3° **51.** arcsen $\frac{2}{5} \approx 23.6°$
53. Si **a** y **b** tienen la misma dirección
57. Una circunferencia de radio c que tiene centro (x_0, y_0).

EJERCICIOS 14.2, PÁGINA 695

1. (a) $\sqrt{104}$ (b) $(3, 1, -1)$ (c) $\langle 2, -6, 8\rangle$
3. (a) $\sqrt{53}$ (b) $(-\frac{1}{2}, -1, 1)$ (c) $\langle 7, -2, 0\rangle$
5. (a) $\sqrt{3}$ (b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (c) $\langle -1, 1, 1\rangle$
9. $\langle 1, 3, 0\rangle$; $\langle -22, 42, 9\rangle$; $\sqrt{41}$; $3\sqrt{41}$; $3\sqrt{41}$; $\langle -5, 9, 2\rangle$; $\sqrt{110}$
11. $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $11\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$; $\sqrt{29}$; $3\sqrt{29}$; $3\sqrt{29}$; $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; $\sqrt{89}$
13. $\mathbf{i} + \mathbf{k}$; $5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; $\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\sqrt{6}$
15. $2\mathbf{a} = \langle 4, 6, 8\rangle$; $-3\mathbf{b} = \langle -3, 6, -6\rangle$; $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 3, 1, 6\rangle$; $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 1, 5, 2\rangle$



17. $(1/\sqrt{30})\langle -2, 5, -1\rangle$
19. (a) $2\mathbf{a} = 28\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$
(b) $-\frac{1}{3}\mathbf{a} = -\frac{14}{3}\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
(c) $(2/\|\mathbf{a}\|)\mathbf{a} = (2/\sqrt{457})(14\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$
21. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$
23. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 40x - 8z + 103 = 0$
25. (a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y + 12z + 52 = 0$
(b) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y + 12z + 40 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y + 12z + 20 = 0$
27. $(-2, 1, -1)$; 2 **29.** $(4, 0, -4)$; 4
31. $(0, -2, 0)$; 2
33. Todos los puntos sobre y dentro de la esfera de radio 1 con centro en el origen.
35. Todos los puntos sobre y dentro de un paralelepípedo rectangular con centro en el origen y lados de longitudes 2, 4 y 6.

EJERCICIOS 14.3, PÁGINA 703

1. 3 **3.** -12 **5.** -99 **7.** $-3/\sqrt{30}$
9. 0 **11.** $-3/\sqrt{534}$ **13.** $\frac{6}{13}$ **15.** 74
17. $\cos^{-1}(37/\sqrt{3081}) \approx 48.20°$ **19.** $-82/\sqrt{126}$
21. 1 **23.** $-12/\sqrt{3}$ lbf · pie
25. $1000\sqrt{3} \approx 1732$ lbf · pie
35. (a) Si **a** y **b** tienen la misma dirección o direcciones opuestas.
(b) Si **a** y **b** tienen la misma dirección.

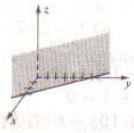
EJERCICIOS 14.4, PÁGINA 712

1. $\langle 5, 10, 5\rangle$ **3.** $-6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$
5. $\langle -4, 2, -1\rangle$
7. $-40\mathbf{i} + 15\mathbf{k}$ **9.** $\mathbf{0}$
11. $\langle 12, -14, 24\rangle$; $\langle 16, -2, -5\rangle$
13. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$
17. (a) $13\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ (b) $9\sqrt{3}/2$
19. (a) $c(5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$ con $c \neq 0$ (b) $\sqrt{141}$
23. 16

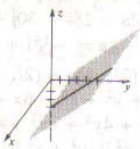
EJERCICIOS 14.5, PÁGINA 721

1. $x = 5 - 3t$, $y = -2 + 8t$, $z = 4 - 3t$; $(1, \frac{26}{3}, 0)$, $(\frac{17}{4}, 0, \frac{13}{4})$, $(0, \frac{34}{3}, -1)$
3. $x = 4 + \frac{1}{3}t$, $y = 2 + 2t$, $z = -3 + \frac{1}{2}t$
5. $x = 0$, $y = t$, $z = 0$
7. $x = -6 - 3s$, $y = 4 + s$, $z = -3 + 9s$
9. $(5, -7, 3)$
11. No se intersecan
13. $\sqrt{5411}/(3\sqrt{10})$

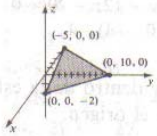
15.



17.



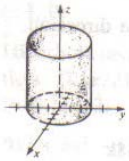
19. 19



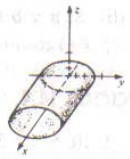
21. (a) $z = 4$ (b) $x = 6$ (c) $y = -7$
23. $6x - 5y - z + 84 = 0$
25. $3x - y + 2z + 11 = 0$
27. $20x - 5y + 2z = 0$
29. $(x - 5)/3 = (y + 2)/(-8) = (z - 4)/3$
31. $(x - 4)/(-7) = (z + 3)/8;\ y = 2$ **33.** $7/\sqrt{59}$
35. $17/(6\sqrt{14})$ **37.** $6x + 11y + 4z = 38$
39. $89/\sqrt{521}$

EJERCICIOS 14.6, PÁGINA 731

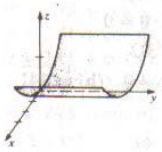
1. Cilindro circular



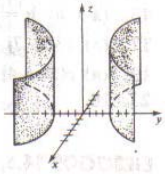
3. Cilindro elíptico



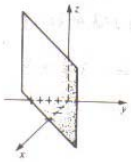
5. Cilindro parabólico



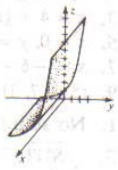
7. Cilindro hiperbólico



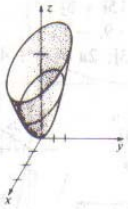
9. Plano



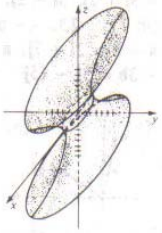
11. Cilindro



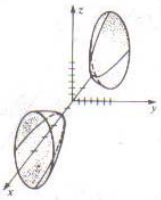
13. Paraboloide



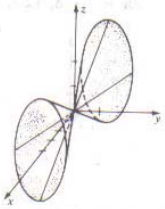
15. Paraboloide de un manto



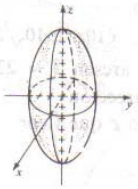
17. Hiperboloide de dos mantos



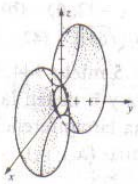
19. Cono



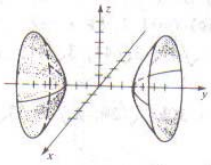
21. Elipsoide



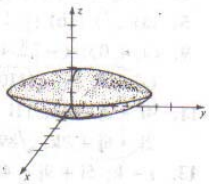
23. Hiperboloide de un manto



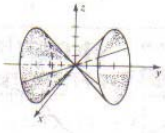
25. Hiperboloide de dos mantos



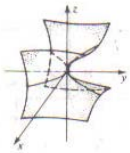
27. Paraboloide



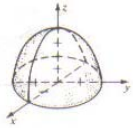
29. Cono



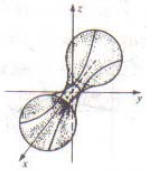
31. Paraboloide hiperbólico



33 $x^2 + z^2 + 4y^2 = 16$ **35.** $z = 4 - x^2 - y^2$

37. $y^2 + z^2 - x^2 = 1$



39. (a) La elipsoide de Clarke está achatada en los polos norte y sur.
(b) Elipses (c) Elipses

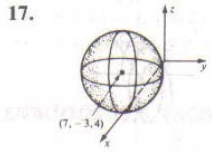
EJERCICIOS 14.7, PÁGINA 735

1. (a) $(0, 5, 3)$ (b) $(3, 3\sqrt{3}, -5)$
3. (a) $(\sqrt{10}, \pi/4, \cos^{-1}(-2/\sqrt{5}))$ (b) $(2, \pi/3, \pi/2)$
5. (a) $(2\sqrt{3}, \pi/3, 2)$ (b) $(1, \pi/4, -\sqrt{3})$
7. $x^2 + y^2 = 16$; cilindro circular
9. $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$; medio cono
11. $x^2 + y^2 = 4x$; cilindro circular
13. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$; esfera **15.** El eje z
17. Un cilindro con una lemniscata como directriz y generatrices paralelas al eje z.
19. Esferas de radios 1 y 2 con centros en el origen.
21. $r^2 + z^2 = 4$, $\rho = 2$
23. $3r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta - 4z = 12$, $\rho(3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta + \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos\phi) = 12$
25. $r^2\mathrm{sen}^2\theta + z^2 = 9$, $\rho^2(\mathrm{sen}^2\phi\,\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\phi) = 9$
27. $r = 6\cos\theta$, $\rho\,\mathrm{sen}\,\phi = 6\cos\theta$
29. $z = \tan\theta$, $\rho\cos\phi = \tan\theta$

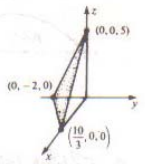
EJERCICIOS 14.8, PÁGINA 736

1. $12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}$ **3.** -8 **5.** $\sqrt{29} - \sqrt{17}$
7. $\tan^{-1}\frac{5}{2}$ **9.** $(1/\sqrt{29})(5\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$
11. (a) $\sqrt{38}$ (b) $(2, -\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$
(c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y - 6z + 10 = 0$
(d) $y = -4$ (e) $x = 5 + 6t$, $y = -3 + t$, $z = 2 - t$
(f) $6x + y - z - 25 = 0$
13. $6x - 15y + 5z = 30$
15. $(x^2/64) + (y^2/9) + z^2 = 1$

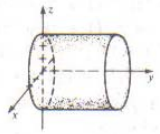
17.



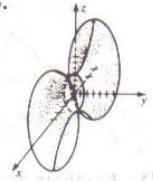
19.



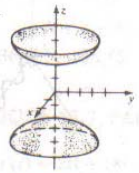
21.



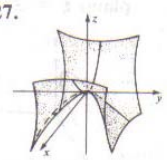
23.



25.



27.

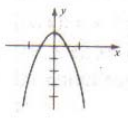


29. 36 **31.** $\sqrt{33} + \sqrt{37}$
33. $3/\sqrt{26}, -1/\sqrt{26}, -4/\sqrt{26}$
35. $22\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$ **37.** $9/\sqrt{33}$ **39.** 26 **41.** 0
43. $-4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
45. (a) $(1/\sqrt{66})\langle 1, 4, 7\rangle$ (b) $x + 4y + 7z - 5 = 0$
(c) $x = 2 + 7t$, $y = -1 - 7t$, $z = 1 + 3t$
(d) 59 (e) $\cos^{-1}(59/\sqrt{3745}) \approx 15.4°$ (f) $\sqrt{66}$
47. $x = 3 + 2t$, $y = -1 - 4t$, $z = 5 + 8t$;
$x = -1 + 7t$, $y = 6 - 2t$, $z = -\frac{7}{2} - 2t$
49. $\cos^{-1}(-25/\sqrt{2295}) \approx 121.46°$
51. $(2\sqrt{2}, -\pi/4, 1)$; $(3, \cos^{-1}\frac{1}{3}, -\pi/4)$
53. $z = -\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)/2}$; mitad inferior de un cono.
55. $x = 1$; plano **57.** $r = 1$; $\rho^2\mathrm{sen}^2\phi = 1$
59. $r^2 + z^2 - 2z = 0$; $\rho - 2\cos\phi = 0$

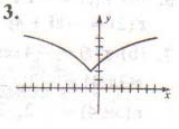
CAPÍTULO 15

EJERCICIOS 15.1, PÁGINA 744

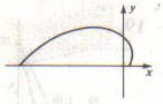
1.



3.



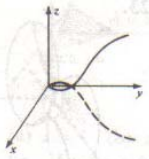
5.



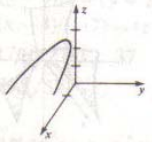
7. Hélice elíptica



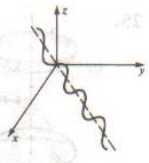
9. Cúbica torcida



11. Parábola en el plano $z = 3$



13.



15. $5[4\sqrt{17} + \ln(4 + \sqrt{17})]/4 \approx 23.23$

17. $\sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)$ **19.** 7

21. (c) $4\sqrt{3}$



23. (b) 19

EJERCICIOS 15.2, PÁGINA 751

1. (a) Continua en todo su dominio $[1, 2]$

(b) $\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2}(t-1)^{-1/2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}(2-t)^{-1/2}\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}''(t) = -\frac{1}{4}(t-1)^{-3/2}\mathbf{i} - \frac{1}{4}(2-t)^{-3/2}\mathbf{j}$

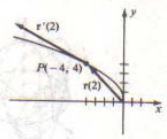
3. (a) Continua en todo su dominio $\{t: t \neq (\pi/2) + n\pi\}$

(b) $\mathbf{r}'(t) = \sec^2 t\,\mathbf{i} + (2t+8)\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}''(t) = 2\sec^2 t \tan t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

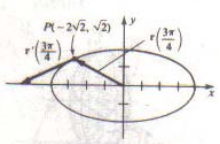
5. (b) $\mathbf{r}'(t) = -t^3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(2) = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$;
$\mathbf{r}'(2) = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$;

7. (b) $\mathbf{r}'(t) = -4\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$;
$\mathbf{r}(3\pi/4) = -2\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$;
$\mathbf{r}'(3\pi/4) = -2\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$

5.



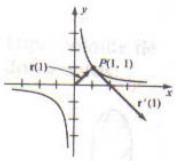
7.



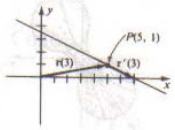
9. (b) $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} - 3t^{-4}\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{r}'(1) = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

11. (b) $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{r}(3) = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{r}'(3) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

9.



11.



13. (a) $D = \{t: t \neq (\pi/2) + k\pi,\ k$ un entero arbitrario$\}$; $\mathbf{r}$ es continua en D.

(b) $2t\mathbf{i} + \sec^2 t\,\mathbf{j}$; $2\mathbf{i} + 2\sec^2 t \tan t\,\mathbf{j}$

15. (a) $D = \{t: t \geq 0\}$; $\mathbf{r}$ es continua en D.

(b) $[1/(2\sqrt{t})]\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $[-1/(4t\sqrt{t})]\mathbf{i} + 4e^{2t}\mathbf{j}$

17. $x = 1 + 6t$, $y = -2 - 10t$, $z = 10 + 8t$

19. $x = 1 + s$, $y = s$, $z = 4$ **21.** $\pm(1/\sqrt{5})\langle 2, -1, 0\rangle$

25. $x = ae^t$, $y = be^t$, $z = ce^t$ donde a, b y c son constantes; la gráfica es una recta que pasa por el origen.

27. $16\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

29. $(1 - 1/\sqrt{2})\mathbf{i} - (1/\sqrt{2})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\ln 2\mathbf{k}$

31. $(\frac{1}{3}t^3 + 2)\mathbf{i} + (3t^2 + t - 3)\mathbf{j} + (2t^4 + 1)\mathbf{k}$

33. $(t^3 + t + 7)\mathbf{i} - (t^4 - 2t)\mathbf{j} + (\frac{1}{2}t^2 - 3t + 1)\mathbf{k}$

35. $x + y - 1 = 0$

49. $(1 + 5t^2)\operatorname{sen} t + (3t + 2t^3)\cos t$;
$[(t^3 + 4t)\operatorname{sen} t - t^2\cos t]\mathbf{i}$
$+ [(3t^2 - 2)\operatorname{sen} t + (t^3 - 2t)\cos t]\mathbf{j}$
$+ [-3t\operatorname{sen} t + (1 - t^2)\cos t]\mathbf{k}$

EJERCICIOS 15.3, PÁGINA 759

Ejercicios 1-15: La respuestas están en el orden $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$, $\|\mathbf{r}'(t)\|$, $\mathbf{r}'(a)$, $\mathbf{r}''(a)$ para el tiempo indicado a.

1. $2\mathbf{i} + 8t\mathbf{j}$, $8\mathbf{j}$, $2\sqrt{1 + 16t^2}$, $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, $8\mathbf{j}$

3. $\dfrac{-2}{t^2}\mathbf{i} - \dfrac{3}{(t+1)^2}\mathbf{j}$, $\dfrac{4}{t^3}\mathbf{i} + \dfrac{6}{(t+1)^3}\mathbf{j}$, $\sqrt{\dfrac{4}{t^4} + \dfrac{9}{(t+1)^4}}$, $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j}$, $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j}$

5. $\cos t\mathbf{i} - 8\operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$, $-\operatorname{sen} t\mathbf{i} - 16\cos 2t\mathbf{j}$, $\sqrt{\cos^2 t + 64\operatorname{sen}^2 2t}$, $(\sqrt{3}/2)\mathbf{i} - 4\sqrt{3}\mathbf{j}$, $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

7. $2e^{2t}\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$, $4e^{2t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$, $\sqrt{4e^{4t} + e^{-2t}}$, $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $4\mathbf{i} + \mathbf{j}$

9. $-\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $-\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $\sqrt{2}$

11. $2t\mathbf{i} + (1\sqrt{t})\mathbf{j} + 6\sqrt{t}\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} - [1/(2\sqrt{t^3})]\mathbf{j} + (3/\sqrt{t})\mathbf{k}$, $\sqrt{4t^2 + (1/t) + 36t}$

13. $e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $-2e^t \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2e^t \cos t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $\sqrt{3}e^t$

15. $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{0}$, $\sqrt{14}$

19. (a) $750\sqrt{3}\mathbf{i} + (-gt + 750)\mathbf{j}$
(b) $(1500)^2/(8g) \approx 8789$ pie
(c) $(1500)^2\sqrt{3}/(2g) \approx 60{,}892$ pie
(d) 1500 pie/s

21. $40\sqrt{5} \approx 89.4$ pie/s

23. (a) 18,054 mi/h (b) 86.7 min

25. $\sqrt{128/15}/(2\pi) \approx 0.46$ rev/s

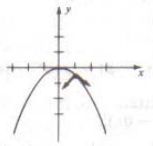
29. 0.52 pie

EJERCICIOS 15.4, PÁGINA 769

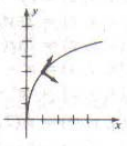
1. $\mathbf{T}(t) = (1 + t^2)^{-1/2}(\mathbf{i} - t\mathbf{j})$;
$\mathbf{N}(t) = -(1 + t^2)^{-1/2}(t\mathbf{i} + \mathbf{j})$;
$\mathbf{T}(1) = (1/\sqrt{2})(\mathbf{i} - \mathbf{j})$; $\mathbf{N}(1) = -(1/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

3. $\mathbf{T}(t) = (t^4 + 1)^{-1/2}(t^2\mathbf{i} + \mathbf{j})$;
$\mathbf{N}(t) = (t^4 + 1)^{-1/2}(\mathbf{i} - t^2\mathbf{j})$;
$\mathbf{T}(1) = (1/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$; $\mathbf{N}(1) = (1/\sqrt{2})(\mathbf{i} - \mathbf{j})$

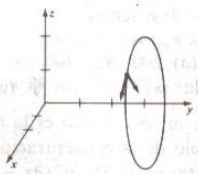
1.



3.



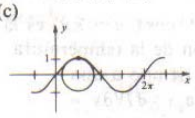
5. $\mathbf{T}(t) = \cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{k}$; $\mathbf{N}(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{k}$;
$\mathbf{T}(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{i} - \mathbf{k})$; $\mathbf{N}(\pi/4) = -(\sqrt{2}/2)(\mathbf{i} + \mathbf{k})$



7. $6/10^{3/2}$ **9.** 2 **11.** 4 **13.** $2/17^{3/2}$

15. 0 **17.** $48/21^{3/2}$

19. (a) 1 (b) $(\pi/2, 0)$
(c)



21. (a) $2\sqrt{2}$ (b) $(-2, 3)$
(c)



23. $(\ln\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ **25.** $(0, \pm 3)$

27. $(\sqrt{2}/2, -\frac{1}{2}\ln 2)$ **33.** $(\pm\sqrt{2}, -20)$ **35.** $(0, 0)$

39. $|8 - 3\operatorname{sen}^2 2\theta|/(1 + 3\cos^2 2\theta)^{3/2}$

43. $(-\frac{14}{3}, \frac{29}{12})$ **45.** $(4, -2)$ **47.** $(0, -4)$

49. $x = \frac{4}{5}s - 3$, $y = \frac{3}{5}s + 5$; $s \geq 0$

51. $x = 4\cos\frac{1}{4}s$, $y = 4\operatorname{sen}\frac{1}{4}s$; $0 \leq s \leq 8\pi$

EJERCICIOS 15.5, PÁGINA 776

1. $4t/(4t^2 + 9)^{1/2}$; $6/(4t^2 + 9)^{1/2}$; $6/(4t + 9)^{3/2}$

3. $6t(t^2 + 2)/(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}$;
$6(t^4 + t^2 + 1)^{1/2}/(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}$;
$2(t^4 + t^2 + 1)^{1/2}/3(t^4 + 4t^2 + 1)^{3/2}$

5. $t/(1 + t^2)^{1/2}$; $(2 + t^2)/(1 + t^2)^{1/2}$;
$(2 + t^2)/(1 + t^2)^{3/2}$

7. $(-65\operatorname{sen} t\cos t)/(16\operatorname{sen}^2 t + 81\cos^2 t + 1)^{1/2}$;
$\dfrac{(81\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 1296)^{1/2}}{(16\operatorname{sen}^2 t + 81\cos^2 t + 1)^{1/2}}$;
$\dfrac{(81\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 1296)^{1/2}}{(16\operatorname{sen}^2 t + 81\cos^2 t + 1)^{3/2}}$

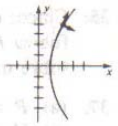
9. $36/\sqrt{5}$; $18/\sqrt{5}$

EJERCICIOS 15.7, PÁGINA 782

1. $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + (8t - 4t^3)\mathbf{j}$; $\mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} + (8 - 12t^2)\mathbf{j}$;
$2|t|\sqrt{17 - 16t^2 + 4t^4}$

3. (a) $(1/\sqrt{3})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
(b) $x = t$, $y = t + 1$, $z = t + 1$
(b) $\sqrt{3}(e - 1) \approx 2.98$

5. (a) $\mathbf{T}(t) = (t^2 + 4)^{-1/2}(t\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$;
$\mathbf{N}(t) = (t^2 + 4)^{-1/2}(2\mathbf{i} - t\mathbf{j})$
(b) $\mathbf{T}(1) = (1/\sqrt{5})(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$;
$\mathbf{N}(1) = (1/\sqrt{5})(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$



7. $(72t^2 + 10t)\mathbf{i} + (2t - 16t^3)\mathbf{j} - (15t^2 + 12t)\mathbf{k}$;
$15t^2 - 60t$

9. $2\mathbf{i} + \frac{1}{4}\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **13.** $\sqrt{2}/2$

15. $(4t^6 + 9t^4 + 1)^{1/2}/[4(t^6 + t^2 + 1)^{3/2}]$

17. $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

19. $(\operatorname{sen} t\cos t - 8\operatorname{sen} 2t\cos 2t)/(4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t)^{1/2}$;
$(2|\cos 2t\cos t + 2\operatorname{sen} 2t\operatorname{sen} t|)/(4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t)^{1/2}$

CAPÍTULO 16

EJERCICIOS 16.1, PÁGINA 792

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; -29, 6, -4

3. $\{(u, v): u \neq 2v\}$; $-\frac{3}{2}$, $\frac{4}{9}$, 0

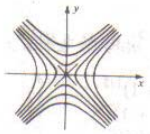
5. $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$; 4, $2\sqrt{3}$

7. La mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

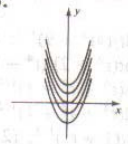
9. El plano cuyos puntos de intersección con los ejes x, y y z tienen coordenadas 3, 2 y 6, respectivamente.

11. La mitad superior de un hiperboloide de un manto con su eje a lo largo del eje x.

13.



15.



17.



19. $y \arctan x = \pi$ **21.** (d) **23.** (a) **25.** (c)

27. El origen y todas las esferas con centro en el origen.

29. Todos los planos con vector normal $\langle 1, 2, 3 \rangle$.

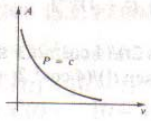
31. El eje z y todos los cilindros circulares cuyo eje coincide con el eje z.

33. (a) Circunferencias con su centro en el origen. (b) $x^2 + y^2 = 100$

35. Cinco; esferas con su centro en el origen; la fuerza F es constante si (x, y, z) se mueve sobre una superficie de nivel

37. (a) $P = kAv^3$ donde $k > 0$

(b) Una curva de nivel típica (véase la figura) muestra las combinaciones de área y velocidad del viento que producen una potencia fija $P = c$.



(c) $Av^3 = \frac{8}{3}\pi \times 10^5$

EJERCICIOS 16.2, PÁGINA 801

1. $-\frac{2}{3}$ **3.** No existe **5.** 0

7. No existe **9.** 0

11. Continua en $\{(x, y): x + y > 1\}$

13. Continua en (x, y, z) si $x^2 + y^2 \neq z^2$

15. Continua en $\{(x, y): x > 0, -1 < y < 1\}$

17. El límite es 0 y por lo tanto f es continua en $(0, 0)$.

19. $(x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 4)/(x^2 - y^2)$; $\{(x, y): y \neq \pm x\}$

21. $x^2 + 2x \tan y + \tan^2 y + 1$;
$\{(x, y): y \neq (\pi/2) + k\pi, k \text{ un entero arbitrario}\}$

23. e^{x^2+2y}; $(x^2 + 2y)(x^2 + 2y - 3)$; $e^{2t} + 2t^2 - 6t$

25. $(x - 2y)(2x + y) - 3(x - 2y) + (2x + y)$

27. $\lim_{(x,y,z,w)\to(a,b,c,d)} f(x, y, z, w) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + (w - d)^2} < \delta$, entonces $|f(x, y, z, w) - L| < \varepsilon$.

EJERCICIOS 16.3, PÁGINA 807

1. $f_x(x, y) = 8x^3y^3 - y^2$; $f_y(x, y) = 6x^4y^2 - 2xy + 3$

3. $f_r(r, s) = r/\sqrt{r^2 + s^2}$; $f_s(r, s) = s/\sqrt{r^2 + s^2}$

5. $f_x(x, y) = e^y + y \cos x$; $f_y(x, y) = xe^y + \operatorname{sen} x$

7. $f_t(t, v) = -v/(t^2 - v^2)$; $f_v(t, v) = t/(t^2 - v^2)$

9. $f_x(x, y) = \cos(x/y) - (x/y)\operatorname{sen}(x/y)$;
$f_y(x, y) = (x/y)^2 \operatorname{sen}(x/y)$

11. $f_r(r, s, t) = 2re^{2s} \cos t$; $f_s(r, s, t) = 2r^2e^{2s} \cos t$;
$f_t(r, s, t) = -r^2e^{2s} \operatorname{sen} t$

13. $f_x(x, y, z) = (y^2 + z^2)^x \ln(y^2 + z^2)$;
$f_y(x, y, z) = 2xy(y^2 + z^2)^{x-1}$;
$f_z(x, y, z) = 2xz(y^2 + z^2)^{x-1}$

15. $f_x(x, y, z) = e^z - ye^x$; $f_y(x, y, z) = -e^x - ze^{-y}$;
$f_z(x, y, z) = xe^z + e^{-y}$

17. $f_q(q, v, w) = v/(2\sqrt{qv}\sqrt{1 - qv})$;
$f_v(q, v, w) = [q/(2\sqrt{qv}\sqrt{1 - qv})] + w \cos vw$;
$f_w(q, v, w) = v \cos vw$

25. $18xy^2 + 16y^3z$ **27.** $t^2(\sec rt)(\sec^2 rt + \tan^2 rt)$

29. $(1 - x^2y^2z^2) \cos xyz - 3xyz \operatorname{sen} xyz$

47. $w_{xx}, w_{xy}, w_{xz}, w_{yx}, w_{yy}, w_{yz}, w_{zx}, w_{zy}, w_{zz}$

49. En grados por cm: (a) 200 (b) 400

51. En volts por pulgada: (a) $-\frac{100}{9}$ (b) $\frac{50}{9}$ (c) $-\frac{50}{9}$

53. $\partial C/\partial x = -36.58\,\mu g/m^3$ por metro es la tasa de variación o cambio de la concentración en la dirección horizontal en (2,5); $\partial C/\partial z = -0.229\,\mu g/m^3$ por metro es la tasa de cambio de la concentración en la dirección vertical en (2,5).

55. (a) $\partial T/\partial t = T_0\omega e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$ es la tasa tasa de variación de la temperatura con respecto al tiempo a una profundidad fija x; $\partial T/\partial x = -T_0\lambda e^{-\lambda x}[\cos(\omega t - \lambda x) + \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)]$ es la tasa de variación de la temperatura con respecto a la profundidad en un tiempo fijo.

57. (a) $\partial V/\partial x = -0.112y$ ml/año es la rapidez con la que disminuye la capacidad pulmonar con la edad para un adulto varón.

(b) $\partial V/\partial y = 27.63 - 0.112x$ ml/cm es difícil de interpretar porque normalmente se piensa en la estatura de un adulto como fija o en la estatura y como una función de la edad x.

59. $x = 1, y = t, z = -4t + 12$

EJERCICIOS 16.4, PÁGINA 816

Ejercicios 1-3: Hay otras respuestas correctas (véase el Ejemplo 2).

1. $\varepsilon_1 = -3\,\Delta y,\ \varepsilon_2 = 4\,\Delta y$

3. $\varepsilon_1 = 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2,\ \varepsilon_2 = 3y\,\Delta y + (\Delta y)^2$

5. $dw = (3x^2 - 2xy)\,dx + (6y - x^2)\,dy$

7. $dw = 2x \operatorname{sen} y\,dx + (x^2 \cos y + 3y^{1/2})\,dy$

9. $dw = 2x \ln(y^2 + z^2)\,dx + [2x^2y/(y^2 + z^2)]\,dy + [2x^2z/(y^2 + z^2)]\,dz$

11. $dw = \dfrac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2}\,dx + \dfrac{xz(x+z)}{(x+y+z)^2}\,dy + \dfrac{xy(x+y)}{(x+y+z)^2}\,dz$

13. 7.38 **15.** (a) $\frac{1}{4}$ pie^2 (b) $\frac{47}{192}$ pie^3

17. $57\pi(0.015)/4 \approx 0.67$ pulg^3 **19.** 0.0185

21. 7% **23.** 2.96

25. (b) El error máximo en z no debe ser mayor que 3.0 pie.

EJERCICIOS 16.5, PÁGINA 825

1. $\partial w/\partial x = 2x \operatorname{sen}(xy) + y(x^2 + y^2)\cos(xy)$;
$\partial w/\partial y = 2y \operatorname{sen}(xy) + x(x^2 + y^2)\cos(xy)$

3. $\partial w/\partial r = 2r(\ln s)^2 + 8r \ln s + 2s \ln s$;
$\partial w/\partial s = (2r^2 \ln s)/s + (4r^2/s) + 2r + 2r \ln s$

5. $\partial z/\partial x = 3x^2e^{3y} + ye^x + 4x^3y^2$;
$\partial z/\partial y = 3x^3e^{3y} + e^x + 2x^4y$

7. $\partial r/\partial u = 3 \ln(uvt) + 3 + (vt/u)$;
$\partial r/\partial v = t \ln(uvt) + (3u/v) + t$;
$\partial r/\partial t = v \ln(uvt) + (3u/t) + v$

9. $-34y + 6r - 24s$ **11.** $-3(t^2 + 1)/(t + 1)^4$

13. $4\operatorname{sen}^3 t \cos t + \operatorname{sen} t \tan 4t - 4 \cos t \sec^2 4t$

15. $-(6x^2 + 2xy)/(x^2 + 3y^2)$

17. $-\left(6 + \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right)\Big/\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - 3\right) = \dfrac{12\sqrt{xy} + y}{6\sqrt{xy} - x}$

19. $\partial z/\partial x = -(2z^3 + 2xy^2)/(6xz^2 - 6yz + 4)$;
$\partial z/\partial y = -(2x^2y - 3z^2)/(6xz^2 - 6yz + 4)$

21. $\partial z/\partial x = -(e^{yz} - 2yze^{xz} + 3yze^{xy})/(xye^{yz} - 2xye^{xz} + 3e^{xy})$;
$\partial z/\partial y = -(xze^{yz} - 2e^{xz} + 3xze^{xy})/(xye^{yz} - 2xye^{xz} + 3e^{xy})$

23. $0.88\pi \approx 2.76$ pulg^3/min; $0.46\pi \approx 1.44$ pulg^2/min

25. $dT/dt = (v/c)(dp/dt) + (p/c)(dv/dt)$

27. -6.4 pulg^3/min **29.** 762.6 cm^2/año

33. 3 **35.** 1

EJERCICIOS 16.6, PÁGINA 836

1. $-\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$ **3.** $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **5.** $-8\mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

7. $-10/\sqrt{2}$ **9.** $-1/(8\sqrt{13})$ **11.** $67/(8\sqrt{26})$

13. $1/(2\sqrt{26})$ **15.** $16\sqrt{14}$ **17.** $15e^{-2}/\sqrt{35}$

19. $-12/\sqrt{10}$

21. (a) $-28/\sqrt{26}$ (b) $(1/\sqrt{5})(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$, $\sqrt{80}$
(c) $(1/\sqrt{5})(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, $-\sqrt{80}$

23. (a) $-25/(\sqrt{14}\sqrt{77})$
(b) $(1/\sqrt{14})(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$, 1
(c) $(1/\sqrt{14})(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$, -1

25. $-28/\sqrt{2}$; $-12\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$; $12\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$; $c(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$ para cualquier $c \neq 0$

27. $-178/\sqrt{14}$; $4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 54\mathbf{k}$; $\sqrt{2996} \approx 54.8$

29. (b) $\partial T/\partial r$ es la tasa de variación de la temperatura en la dirección normal a la frontera circular.

37. (b) $5 + \sqrt{3}$

EJERCICIOS 16.7, PÁGINA 843

1. $16(x - 2) + 6(y + 3) + 6(z - 1) = 0$;
$x = 2 + 16t,\ y = -3 + 6t,\ z = 1 + 6t$

3. $16(x + 2) + 18(y + 1) + (z - 25) = 0$;
$x = -2 + 16t,\ y = -1 + 18t,\ z = 25 + t$

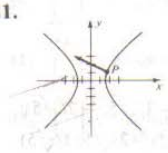
5. $4(x + 5) - 3(y - 5) + 20(z - 1) = 0$;
$x = -5 + 4t,\ y = 5 - 3t,\ z = 1 + 20t$

7. $x + \sqrt{3}(y - \pi/3) + (z - 1) = 0$;
$x = t,\ y = (\pi/3) + \sqrt{3}t,\ z = 1 + t$

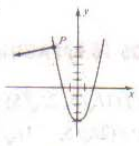
9. $-x + \frac{1}{2}(y - 2) - (z - 1) = 0$;
$x = -t,\ y = 2 + \frac{1}{2}t,\ z = 1 - t$

15. $(8\sqrt{2}/\sqrt{5}, 2\sqrt{2}/\sqrt{5}, -2\sqrt{2}/\sqrt{5})$,
$(-8\sqrt{2}/\sqrt{5}, -2\sqrt{2}/\sqrt{5}, 2\sqrt{2}/\sqrt{5})$

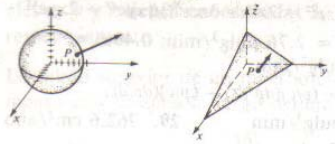
21.



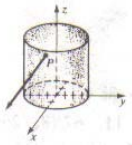
23.



25. **27.**



29.



EJERCICIOS 16.8, PÁGINA 849

Ejercicios 1-13: Las respuestas se refieren a los máximos y mínimos locales.

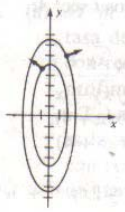
1. MÍN: $f(0, 0) = 0$ **3.** MÍN: $f(1, -1) = -1$
5. MÍN: $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$
7. MÍN: $f(-2, \sqrt{3}) = -48 - 6\sqrt{3}$
9. No hay máximos ni mínimos.
11. MÍN: $f(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}) = 12/\sqrt[3]{2}$
13. MÁX: $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$;
MÍN: $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$
15. $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$; MÍN: $f(0, 0) = 0$,
MÁX: $f(0, \pm 1) = 3/e$
17. MÁX: $f(4, 3) = 67$; MÍN: $f(0, 0) = 0$
19. MÁX: $f(-1, -2) = 13$;
MÍN: $f(1, -1) = -1 = f(1, 2)$
21. MÁX: $f(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/4) = 1 + \sqrt{2}$;
MÍN: $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$
23. $1/\sqrt{26}$ **25.** $(\pm 2/\sqrt[4]{12}, \pm\sqrt[4]{12}, \pm 2\sqrt{2}/\sqrt[4]{12})$
27. Base cuadrada; altura $\frac{1}{2}$ de la longitud del lado de la base.
29. $6/\sqrt{3}, 12/\sqrt{3}, 8/\sqrt{3}$ **31.** $1, \frac{4}{3}, 4$
33. Base cuadrada de lado $\sqrt[3]{4}$ pie, altura $2\sqrt[3]{4}$ pie.
35. (18 pulg) × (18 pulg) × (36 pulg)
39. $y = \frac{1}{2}x + \frac{8}{3}$
41. $y = mx + b$, donde $m \approx 1.23$, $b \approx -18.13$; calificación 68.
43. $(\frac{14}{3}, \frac{11}{3})$ **45.** $4x - y - 2z + 1 = 0$

EJERCICIOS 16.9, PÁGINA 859

1. MÍN: $f(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 0 = f(-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$;
MÁX: $f(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) = 5 = f(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$
3. MÍN: $f(-5/\sqrt{3}, -5/\sqrt{3}, -5/\sqrt{3}) = -5/\sqrt{3}$;
MÁX: $f(5/\sqrt{3}, 5/\sqrt{3}, 5/\sqrt{3}) = 5/\sqrt{3}$
5. MÍN: $f(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$
7. MÍNS: $f(0, -1, 0) = 1$ y $f(2, 1, 0) = 5$
9. MÍN: $f(1, 2/\sqrt{3}, -1, \frac{8}{3}) = -16/(3\sqrt{3})$;
MÁX: $f(1, -2/\sqrt{3}, -1, \frac{8}{3}) = 16/(3\sqrt{3})$
11. $(6/\sqrt{29}, 9/\sqrt{29}, 12/\sqrt{29})$
13. Base cuadrada de $2/\sqrt[3]{7}$ por $2/\sqrt[3]{7}$, altura $7/(2\sqrt[3]{7})$
15. Altura = doble del radio
29. Anchura = $8\sqrt{3}$ pulg, espesor = $\frac{16}{3}\sqrt{6}$ pulg

EJERCICIOS 16.10, PÁGINA 860

1. $\{(x, y): 4x^2 - 9y^2 \leq 36\}$
3. $\{(x, y): z^2 > x^2 + y^2\}$
5. $\frac{5}{4}$ **7.** No existe
9. $f_x(x, y) = 3x^2 \cos y + 4$; $f_y(x, y) = -x^3 \operatorname{sen} y - 2y$
11. $f_x(x, y, z) = 2x/(y^2 + z^2)$;
$f_y(x, y, z) = 2y(z^2 - x^2)/(y^2 + z^2)^2$;
$f_z(x, y, z) = -(x^2 + y^2)2z/(y^2 + z^2)^2$
13. $f_x(x, y, z, t) = 2xz\sqrt{2y + t}$;
$f_y(x, y, z, t) = x^2z/\sqrt{2y + t}$;
$f_z(x, y, z, t) = x^2\sqrt{2y + t}$;
$f_t(x, y, z, t) = x^2z/(2\sqrt{2y + t})$
15. $f_{xx}(x, y) = 6xy^2 + 12x^2$, $f_{yy}(x, y) = 2x^3 - 18xy$,
$f_{xy}(x, y) = 6x^2y - 9y^2$
19. $\Delta w = (2x + 3y)\,\Delta x + (3x - 2y)\,\Delta y + (\Delta x)^2 + 3\,\Delta x\,\Delta y - (\Delta y)^2$;
$dw = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$; $\Delta w = -1.13$, $dw = -1.1$
21. $\partial s/\partial x = 12x + 18y$; $\partial s/\partial y = 18x - 22y$
23. $3e^{-t}(9t^2 \cos 3t^3 - \operatorname{sen} 3t^3)$ **25.** $-14\sqrt{41}$
27. $-16(x + 2) + 4(y + 1) - 7(z - 2) = 0$;
$x = -2 - 16t$, $y = -1 + 4t$, $z = 2 - 7t$
29. $(3x^2 - 4y^3 + 1)/(12xy^2 + 3)$
31. $\partial z/\partial x = (z^3 - 2xy)/(\cos y - 3xz^2)$;
$\partial z/\partial y = (z \operatorname{sen} y - x^2)/(\cos y - 3xz^2)$
33. MÍN: $f(0, -1) = -2$
35.



37. MÍN: $f(-\sqrt{8/3}, -\sqrt{2/3}, -\sqrt{4/3})$
$= f(-\sqrt{8/3}, \sqrt{2/3}, \sqrt{4/3})$
$= f(\sqrt{8/3}, -\sqrt{2/3}, \sqrt{4/3})$
$= f(\sqrt{8/3}, \sqrt{2/3}, -\sqrt{4/3}) = -8/(3\sqrt{3})$
MÁX: $f(\sqrt{8/3}, \sqrt{2/3}, \sqrt{4/3})$
$= f(-\sqrt{8/3}, -\sqrt{2/3}, \sqrt{4/3})$
$= f(-\sqrt{8/3}, \sqrt{2/3}, -\sqrt{4/3})$
$= f(\sqrt{8/3}, -\sqrt{2/3}, -\sqrt{4/3}) = 8/(3\sqrt{3})$

39. Si $a = 1 + 2^{2/3} + 3^{2/3}$, el punto es $(a, 2^{1/3}a, 3^{1/3}a)$.

CAPÍTULO 17

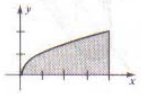
EJERCICIOS 17.1, PÁGINA 867

1. I **3.** II **5.** Ninguno **7.** I y II
9. Ninguno **11.** (a) 39 (b) 81 (c) 60
13. 1769.13

EJERCICIOS 17.2, PÁGINA 875

1. Ambas son -36 **3.** $\frac{163}{120}$ **5.** $\frac{36}{5}$
7. $(4e - e^4)/2$ **9.** $(e^2 + 1)/4$
11. $(\pi/24) + \ln[3/(2+\sqrt{2})] + (1/\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \approx 0.2087$
13. (a) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$ (b) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x, y)\, dx\, dy$
15. (a) $\int_0^2 \int_{x^3}^8 f(x, y)\, dy\, dx$ (b) $\int_0^8 \int_0^{y^{1/3}} f(x, y)\, dx\, dy$
17 (a) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^{1/2}} f(x, y)\, dy\, dx$
(b) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x, y)\, dx\, dy$

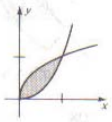
13.



15.



17.

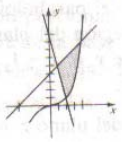


19. $\int_{-1}^4 \int_{-1}^2 (y + 2x)\, dx\, dy$
$= \int_{-1}^2 \int_{-1}^4 (y + 2x)\, dy\, dx = \frac{75}{2}$

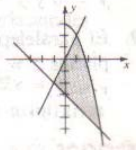
21. $\int_0^1 \int_{-2y}^{3y} xy^2\, dx\, dy = \frac{1}{2}$

23. $\int_0^2 \int_0^{x^2} x^3 \cos xy\, dy\, dx = (1 - \cos 8)/3 \approx 0.38$

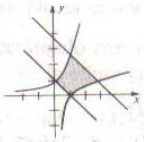
25. (a) $\int_1^2 \int_{9-4x}^{4+x} f(x, y)\, dy\, dx + \int_2^4 \int_{x^3/8}^{4+x} f(x, y)\, dy\, dx$
(b) $\int_1^5 \int_{(9-y)/4}^{2y^{1/3}} f(x, y)\, dx\, dy + \int_5^8 \int_{y-4}^{2y^{1/3}} f(x, y)\, dx\, dy$



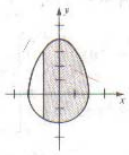
27. (a) $\int_{-1}^1 \int_{-x-3}^{2x} f(x, y)\, dy\, dx + \int_1^3 \int_{-x-3}^{3-x^2} f(x, y)\, dy\, dx$
(b) $\int_{-6}^{-2} \int_{-y-3}^{\sqrt{3-y}} f(x, y)\, dx\, dy + \int_{-2}^2 \int_{y/2}^{\sqrt{3-y}} f(x, y)\, dx\, dy$



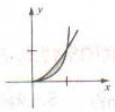
29. (a) $\int_0^1 \int_{1-x}^{e^x} f(x, y)\, dy\, dx + \int_1^e \int_{\ln x}^{1+e-x} f(x, y)\, dy\, dx$
(b) $\int_0^1 \int_{1-y}^{e^y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^e \int_{\ln y}^{1+e-y} f(x, y)\, dx\, dy$



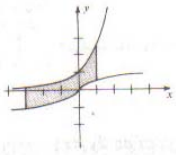
31.



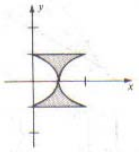
33.



35.



37.



39. $\int_0^2 \int_0^{y/2} e^{y^2}\, dx\, dy = (e^4 - 1)/4$

41. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y \cos x^2\, dy\, dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 16$

43. $\int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{y}{\sqrt{16 + x^7}}\, dy\, dx = \frac{8}{7}$

EJERCICIOS 17.3, PÁGINA 881

1. $\frac{17}{6}$ **3.** $\frac{33}{2}$ **5.** 2 **7.** $e^{\pi} - e^{-\pi}$
9. $2(\tan^{-1} a^{1/2} - \frac{1}{3}a^{3/2})$ donde $a = (-1 + \sqrt{5})/2$
11. $\frac{34}{3}$ **13.** 18 **15.** $\frac{16}{3}$ **17.** $\frac{7488}{315} \approx 23.77$
19. $\frac{128}{9} \approx 14.2$ **21.** $\frac{423}{20}$ **23.** $16a^3/3$

25. El sólido se encuentra abajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba de la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = x - 1$, $y = 1 - x^2$, $x = -2$ y $x = 1$.

27. El sólido se encuentra abajo del plano $z = x + y$ y arriba de la región del plano xy acotada por las gráficas de $x = y/4$, $x = \sqrt{y}$, $y = 0$ y $y = 4$.

29. El paralelepípedo rectangular acotado por los planos $z = 0$, $z = 3$, $x = 0$, $x = 4$, $y = -1$, $y = 2$.

EJERCICIOS 17.4, PÁGINA 887

1. $\frac{4}{3}\pi$ **3.** $\frac{9}{2}\sqrt{3} - \pi$ **5.** $\frac{9}{2}$ **7.** $\frac{64}{5}\pi$
9. $\frac{1}{2}\pi(b^2 - a^2)$ **11.** π **13.** $\frac{1}{2}\pi(1 - e^{-a^2})$
15. $\ln(\sqrt{2} + 1)$ **17.** $\frac{1}{4}\pi \operatorname{sen} 4$ **19.** $\frac{256}{3}\pi$ **21.** $\frac{64}{9}$
23. $\frac{128}{9}(3\pi - 4)$ **25.** π

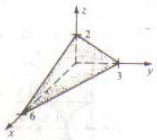
EJERCICIOS 17.5, PÁGINA 890

1. $\frac{1}{2}[\sqrt{3} + 2\ln(1 + \sqrt{3}) - \ln 2]$
3. $\pi cd^2\sqrt{(1/a^2) + (1/b^2) + (1/c^2)}$ **5.** $2a^2(\pi - 2)$
7. $\frac{1}{6}\pi(5^{3/2} - 1)$ **9.** $\frac{2}{3}\pi(5^{3/2} - 1)$

EJERCICIOS 17.6, PÁGINA 899

3. $-\frac{1}{12}$ **5.** $\frac{513}{8}$

7.



$\int_0^6 \int_0^{(6-x)/2} \int_0^{(6-x-2y)/3} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx;$

$\int_0^3 \int_0^{6-2y} \int_0^{(6-x-2y)/3} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy;$

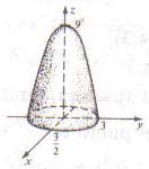
$\int_0^6 \int_0^{(6-x)/3} \int_0^{(6-x-3z)/2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx;$

$\int_0^2 \int_0^{6-3z} \int_0^{(6-x-3z)/2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz;$

$\int_0^2 \int_0^{(6-3z)/2} \int_0^{6-2y-3z} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$

$\int_0^3 \int_0^{(6-2y)/3} \int_0^{6-2y-3z} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

9.



$\int_{-3/2}^{3/2} \int_{-\sqrt{9-4x^2}}^{\sqrt{9-4x^2}} \int_0^{9-4x^2-y^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx;$

$\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-y^2}/2}^{\sqrt{9-y^2}/2} \int_0^{9-4x^2-y^2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy;$

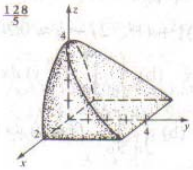
$\int_{-3/2}^{3/2} \int_0^{9-4x^2} \int_{-\sqrt{9-z-4x^2}}^{\sqrt{9-z-4x^2}} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx;$

$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-z}/2}^{\sqrt{9-z}/2} \int_{-\sqrt{9-z-4x^2}}^{\sqrt{9-z-4x^2}} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz;$

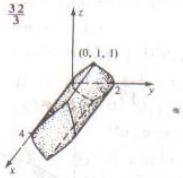
$\int_{-3}^{3} \int_0^{9-y^2} \int_{-\sqrt{9-z-y^2}/2}^{\sqrt{9-z-y^2}/2} f(x, y, z)\, dx, dz, dy;$

$\int_0^9 \int_{-\sqrt{9-z}}^{\sqrt{9-z}} \int_{-\sqrt{9-z-y^2}/2}^{\sqrt{9-z-y^2}/2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

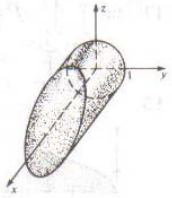
11. $\frac{128}{5}$



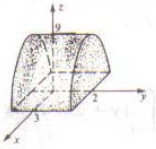
13. $\frac{32}{3}$



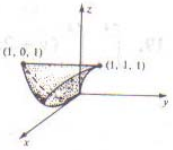
15. 2π



17. 108



19. $\frac{1}{70}$



21. La región a la derecha del rectángulo con vértices (2, 0, 0), (2, 0, 1), (3, 0, 0), (3, 0, 1) y entre las gráficas de $y = \sqrt{1 - z}$ y $y = \sqrt{4 - z}$.

23. La región abajo del plano $z = x + y$ y arriba de la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 2x$, $x = 0$ y $x = 2$.

25. La región acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 1$ y $z = 2$.

27. $m = \int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_0^{4-x-2y} (x^2 + y^2)\, dz\, dx\, dy$

29. $\frac{1}{9}(1 - e^{-3}) \approx 0.106$

EJERCICIOS 17.7, PÁGINA 906

1. $m = \frac{2349}{20}$; $\bar{x} = \frac{1290}{203}$; $\bar{y} = \frac{38}{29}$

3. $m = 8k$ (k es una constante de proporcionalidad); $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = \frac{8}{3}$

5. $m = \frac{1}{4}(1 - e^{-2})$; $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = \frac{4}{8}(1 - e^{-3})/(1 - e^{-2}) \approx 0.46$

7. $m = 4 \ln(\sqrt{2} + 1) - 4 \ln(\sqrt{2} - 1) - \pi \approx 3.9$; $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = (16 - \pi)/(4m) \approx 0.8$

9. $I_x = 3^5(\frac{31}{28})$, $I_y = 3^7(\frac{19}{8})$, $I_O = 3^5(\frac{12259}{56})$

11. $I_x = 64k$, $I_y = \frac{32}{5}k$, $I_O = \frac{224}{3}k$

13. (δ = densidad) (a) $\frac{1}{3}a^4\delta$ (b) $\frac{1}{12}a^4\delta$ (c) $\frac{1}{6}a^4\delta$

15. $a/\sqrt{3}$

17. $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{7}{12}a$ (con una esquina fija en O)

19. $m = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}/2}^{\sqrt{x}/2} \int_{-\sqrt{x-4z^2}}^{\sqrt{x-4z^2}} (x^2 + z^2)\, dy\, dz\, dx$,

$\bar{x} = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}/2}^{\sqrt{x}/2} \int_{-\sqrt{x-4z^2}}^{\sqrt{x-4z^2}} x(x^2 + z^2)\, dy\, dz\, dx/m$.

Las integrales para $\bar{y}$ y $\bar{z}$ tienen los mismos límites pero los integrandos son $y(x^2 + z^2)$ y $z(x^2 + z^2)$, respectivamente.

21. $V = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$;

$M_{xy} = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\, dz\, dy\, dx$

23. Sea $I = \int_0^3 \int_0^{6-2x} \int_0^{9-x^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$.

Para calcular m, M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}, sea $f(x, y, z)$ igual a 1, z, y y x, respectivamente; $\bar{x} = \frac{21}{25}$, $\bar{y} = \frac{54}{25}$, $\bar{z} = \frac{99}{25}$

25. $I_z =$

$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$

27. $I_z = \int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} \int_0^{c(1-x/a-y/b)} (x^2 + y^2)\delta\, dz\, dy\, dx$

29. (a) 576π (b) 288π

31. $\bar{x} = \bar{y} = (4a)/(3\pi)$ **33.** $\frac{512}{3}\pi$

EJERCICIOS 17.8, PÁGINA 912

1. 8π; $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{4}{3}$

3. (k = densidad) (a) $\frac{1}{2}h\pi a^4 k$ (b) $h\pi a^2 k(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}h^2)$

5. $\frac{1}{4}k\pi^2 a^4$ **7.** $\frac{1}{8}k\pi^2 a^6$

9. $9\pi k$; $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{9}{4}$

11. $\frac{1}{2}ka^4\pi$ (k es una constante de proporcionalidad); el centro de masa está a $\frac{2}{5}a$ de la base a lo largo del eje de simetría.

13. $\frac{2}{6}\pi a^6 k$ **15.** 8π **17.** $\frac{124}{5}\pi k$

19. $\frac{7}{16}\pi \approx 1.374$ **21.** $(\frac{1}{3})2^8\pi(\sqrt{2} - 1) \approx 66.63$

EJERCICIOS 17.9, PÁGINA 920

1. (a) Rectas verticales; rectas horizontales
(b) $x = \frac{1}{3}u$, $y = \frac{1}{3}v$

3. (a) Rectas $x - y = c$ y $3y + 2x = d$, donde c y d son constantes arbitrarias
(b) $x = \frac{3}{5}u + \frac{1}{5}v$, $y = -\frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v$

5. (a) Rectas $2x + y = c$ e hipérbolas $xy = d$
(b) No es uno a uno

7. (a) Elipses $x^2 + 4y^2 = c$ e hipérbolas $4x^2 - y^2 = d$
(b) No es uno a uno

9. Rectángulo con vértices (0, 0), (6, 0), (6, 5), (0, 5); la elipse $(u^2/9) + (v^2/25) = 1$

11. $4u^2 + 4v^2$ **13.** $2u(vu - 1)e^{-(2u+v)}$ **15.** -6

17. $\int_0^2 \int_0^{2-u} (v - u)2\, dv\, du$

19. $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}} (u^2 + v^2)6\, du\, dv$

21. $\int_{-1}^{1} \int_1^3 \frac{1}{2}u^2 \cos^2 v\, dv\, du = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6 - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 2$

23. $\int_1^2 \int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{2u}} (u^2 v^{-3} + 2v)\, dv\, dy = 15/8$

25. $\int_2^4 \int_{-u/2}^{2u} (v/u)\frac{1}{5}\, dv\, du = 9/4$

EJERCICIOS 17.10, PÁGINA 922

1. $-\frac{5}{84}$ **3.** $\frac{63}{4}$ **5.** $-\frac{107}{210}$

7. $\int_2^4 \int_{-\sqrt{x^2-4}}^{\sqrt{x^2-4}} f(x, y)\, dy\, dx$

9. $\int_{-2}^{2} \int_{x^2-4}^{-y^2+4} f(x, y)\, dx\, dy$

11. R está acotada por las gráficas de $x = e^y$, $x = y^3$, $y = -1$ y $y = 1$.

13. $\int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} ye^{-x^2}\,dy\,dx = (1 - e^{-81})/4$

15. $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$ **17.** 13

19. $9k$ (k es una constante de proporcionalidad); $\bar{x} = \frac{9}{4}$, $\bar{y} = \frac{27}{8}$

21. $2\pi k$ **23.** $\frac{1}{20}kab^4$ (k es una constante)

25. $\frac{256}{15}$; $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{8}{7}$, $\bar{z} = \frac{12}{7}$

27. $\int_0^4 \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} \int_{-\sqrt{1+y^2-x^2}}^{\sqrt{1+y^2-x^2}} k(x^2 + z^2)^{3/2}\,dz\,dx\,dy$

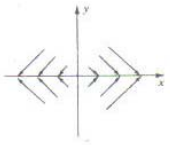
29. $k\pi a^4$

31. (a) Las rectas $2x + 5y = c$
(b) Las rectas $3x - 4y = d$
(c) $x = \frac{4}{23}u + \frac{5}{23}v$, $y = \frac{3}{23}u - \frac{2}{23}v$ (d) $-\frac{1}{23}$
(e) $(4a + 3b)u + (5a - 2b)v + 23c = 0$
(f) $25u^2 + 28uv + 29v^2 = 529a^2$

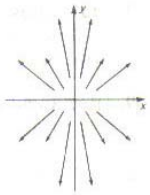
CAPÍTULO 18

EJERCICIOS 18.1, PÁGINA 933

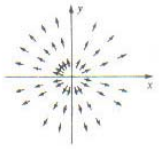
1.



3.



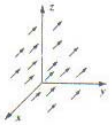
5.



7.



9.



11. $\nabla f(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 6y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$

13. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + x^2y^2)^{-1}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

15. $\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$; $2xz + 2yx + 2$

17. $-y^2 \cos z\mathbf{i} + (6xyz - e^{2z})\mathbf{j} - 3xz^2\mathbf{k}$; $3yz^2 + 2y \operatorname{sen} z + 2xe^{2z}$

EJERCICIOS 18.2, PÁGINA 943

1. $14(2\sqrt{2} - 1)$; 21; 14 **3.** $\frac{34}{7}$ **5.** $-\frac{16}{5}$

7. (a) $\frac{15}{2}$ (b) 6 (c) 7 (d) $\frac{29}{4}$

9. $\frac{1}{12}(3e^4 + 6e^{-2} - 12e + 8e^3 - 5)$

11. (a) 19 (b) 35 (c) 27 **13.** $\frac{3}{2}\sqrt{14}$

15. $\frac{9}{2}$ (para todas las trayectorias)

17. 0 **19.** $\frac{412}{15}$ **23.** $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{1}{4}\pi a$

27. $I_x = \frac{4}{3}a^3k$; $I_y = \frac{2}{3}a^3k$

29. Si la densidad en (x, y, z) es $f(x, y, z)$, entonces
$I_x = \int_C (y^2 + z^2)f(x, y, z)\,ds$,
$I_y = \int_C (x^2 + z^2)f(x, y, z)\,ds$,
$I_z = \int_C (x^2 + y^2)f(x, y, z)\,ds$.

EJERCICIOS 18.3, PÁGINA 952

1. $f(x, y) = x^3y + 2x + y^4 + c$

3. No es independiente de la trayectoria.

5. No es independiente de la trayectoria.

5. $f(x, y, z) = y \tan x - ze^x + c$

9. $f(x, y, z) = 4x^2z + y - 3y^2z^3 + c$

11. 14 **13.** -31

15. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = (-c/\|\mathbf{r}\|^2)\mathbf{r}$, donde $c > 0$, entonces $f(x, y, z) = -c \ln r + d = -(c/2) \ln (x^2 + y^2 + z^2) + d$

25. $W = c(d_2 - d_1)/(d_1d_2)$

EJERCICIOS 18.4, PÁGINA 960

1. $-\frac{7}{60}$ **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** π **7.** 3 **9.** 0 **11.** 0

13. -3π **15.** $\frac{3}{8}\pi a^2$ **17.** $\frac{128}{3}$

25. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = (4a)/(3\pi)$

EJERCICIOS 18.5, PÁGINA 968

1. $\frac{2}{3}\pi a^4$ **3.** 5

5. (a) $\int_0^4 \int_0^{3-3y/4} (6 - \frac{3}{2}y - 2z)y^2z^3(\frac{1}{2}\sqrt{29})\,dz\,dy$

(b) $\int_0^3 \int_0^{6-2z} x(4 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}z)^2(\frac{1}{3}\sqrt{29})z^3\,dx\,dz$

7. (a) $\int_0^8 \int_0^6 (4 - 3y + \frac{1}{16}y^2 + z)(\frac{1}{4}\sqrt{17})\,dz\,dy$

(b) $\int_0^2 \int_0^6 (x^2 + 8x - 16 + z)\sqrt{17}\,dz\,dx$

9. El valor de la integral es igual al volumen de un cilindro de altura c con generatrices paralelas al eje z, cuya base es la proyección de S sobre el plano xy.

11. $2\pi a^3$ **13.** 3π **15.** 18 **17.** 8

21. $\frac{255}{2}\sqrt{2}\pi$; $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{1364}{425} \approx 3.21$; $1365\sqrt{2}\pi$

EJERCICIOS 18.6, PÁGINA 974

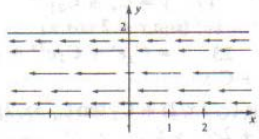
1. 24 **3.** 20π **5.** 0 **7.** $136\pi/3$ **9.** 24

11. Ambas integrales son iguales a $4\pi a^3$

13. Ambas integrales son iguales a 4π.

EJERCICIOS 18.7, PÁGINA 982

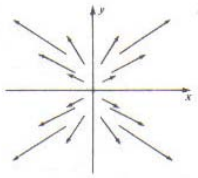
1. Ambas integrales son iguales a -1.
3. Ambas integrales son iguales a πa^2.
5. 0 **7.** -8π
9. El sentido de rotación del medidor de rotacional es contrario al del reloj para $0 < y < 1$ e igual al del reloj para $1 < y < 2$. No hay rotación si $y = 1$; rot $\mathbf{F} = 2(y-1)\mathbf{k}$; $|(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}| = |2(y-1)|$ tiene un máximo 2 en $y = 0$ y $y = 2$ y un mínimo 0 en $y = 1$.



11. En la Figura 18.5 se muestran algunos vectores típicos del campo. Un medidor de rotacional gira en contra del reloj para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. rot $\mathbf{F} = 2\mathbf{k}$; (rot $\mathbf{F}$) $\cdot$ $\mathbf{k} = 2$ para todo (x, y).

EJERCICIOS 18.8, PÁGINA 983

1.



3.



5. $\mathbf{F}(x, y) = y^2 \sec^2 x\mathbf{i} + 2y \tan x\mathbf{j}$ **7.** -8
9. $-\frac{56}{5}$ **11.** $(1025\sqrt{1025} - 17\sqrt{17})/144$
13. 70 **15.** 0 **17.** $\frac{25}{2}$
19. $f(x, y, z) = x^2e^{2y} + y^2 \cot z + c$ **21.** $\frac{1}{6}$
23. $3x^2z^4 + xz^2$; $(2x^2y - 2xyz)\mathbf{i} + (4x^3z^3 - 2xy^2)\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$
25. $\sqrt{3}/5$ **27.** $\frac{5}{2}\pi$
29. Ambas integrales son iguales a 8π.

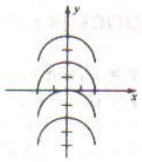
CAPÍTULO 19

EJERCICIOS 19.1, PÁGINA 991

1. (a) $y = x^3 + c$ (b) $y = x^3 + 2$



3. (a) $y = \sqrt{4 - x^2} + c$ (b) $y = \sqrt{4 - x^2}$



11. $y = Ce^{2 \operatorname{sen} x}$ **13.** $y = Cx$
15. $x^3y^5e^y = C$, $C \neq 0$ y $y = 0$
17. $y = -1 + Ce^{x^2/2 - x}$
19. $y = -\frac{1}{3} \ln (3C + 3e^{-x})$
21. $y^2 = C(1 + x^3)^{-2/3} - 1$
23. $\cos x + x \operatorname{sen} x - \ln |\operatorname{sen} y| = C$
25. $\sec x + e^{-y} = C$ **27.** $y^2 + \ln y = 3x - 8$
29. $y = \ln (2x + \ln x + e^2 - 2)$
31. $y = 2e^{2 - \sqrt{4 + x^2}} - 1)$
33. $\tan^{-1} y - \ln |\sec x| = \pi/4$
35. $xy = k$; hipérbolas
37. $2x^2 + y^2 = k$; elipses
39. $2x^2 + 3y^2 = k$; elipses

EJERCICIOS 19.2, PÁGINA 997

1. $y = \frac{1}{4}e^{2x} + Ce^{-2x}$ **3.** $y = \frac{1}{2}x^5 + Cx^3$
5. $y = (1/x)e^x - \frac{1}{2}x + (C/x)$ **7.** $y = (e^x + C)/x^2$
9. $y = \frac{4}{3}x^3 \csc x + C \csc x$
11. $y = 2 \operatorname{sen} x + C \cos x$
13. $y = x \operatorname{sen} x + Cx$ **15.** $y = [\frac{1}{3}x + (C/x^2)]e^{-3x}$
17. $y = \frac{3}{2} + Ce^{-x^2}$ **19.** $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + (C/\operatorname{sen} x)$
21. $y = \frac{1}{3} + (x + C)e^{-x^3}$ **23.** $y = x(x + \ln x + 1)$
25. $y = e^{-x}(1 - x^{-1})$ **27.** $Q = CE(1 - e^{-t/RC})$
29. $f(t) = \frac{80}{3}(1 - e^{-0.075t}) + Ke^{-0.075}$ lb
31. (a) $f(t) = M + (A - M)e^{k(1-t)}$ (k es una constante) (b) 28
33. $y = y_L(1 - ce^{-kt})$, $k > 0$
35. (b) $y = (I/k)(1 - e^{-kt})$ (c) 0.58 mg/min

EJERCICIOS 19.3, PÁGINA 1005

1. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ **3.** $y = C_1 + C_2e^{3x}$
5. $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$
7. $y = C_1e^{(2+\sqrt{3})x} + C_2e^{(2-\sqrt{3})x}$
9. $y = C_1e^{-\sqrt{2}x} + C_2xe^{-\sqrt{2}x}$
11. $y = C_1e^{5x/4} + C_2e^{-3x/2}$
13. $y = C_1e^{4x/3} + C_2xe^{4x/3}$
15. $y = C_1e^{(2+\sqrt{2})x/2} + C_2e^{(2-\sqrt{2})x/2}$
17. $y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \operatorname{sen} x$

19. $y = C_1e^{2x}\operatorname{sen} 3x + C_2e^{2x}\cos 3x$
21. $y = C_1e^{(-3+\sqrt{7})x} + C_2e^{(-3-\sqrt{7})x}$
23. $y = 2e^{2x} - 2e^{x}$
25. $y = \cos x + 2\operatorname{sen} x$
27. $y = (2 + 9x)e^{-4x}$
29. $y = \frac{1}{2}e^{x}\operatorname{sen} 2x$

EJERCICIOS 19.4, PÁGINA 1011

1. $y = C_1\operatorname{sen} x + C_2\cos x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$
3. $y = (C_1 + C_2x + \frac{1}{12}x^4)e^{3x}$
5. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + \frac{2}{5}e^{x}\operatorname{sen} x - \frac{1}{5}e^{x}\cos x$
7. $y = (C_1 + \frac{1}{6}x)e^{3x} + C_2e^{-3x}$
9. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}$
11. $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x}$
13. $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\cos 2x$
15. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{9}(3x - 4)e^{2x}$
17. $y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{65}(7\cos x - 4\operatorname{sen} x)e^{x}$

EJERCICIOS 19.5, PÁGINA 1016

1. $y = -\frac{1}{3}\cos 8t$
3. $y = (\sqrt{2}/8)e^{-8t}(e^{4\sqrt{2}t} - e^{-4\sqrt{2}t})$
5. $y = \frac{1}{3}e^{-8t}(\operatorname{sen} 8t + \cos 8t)$
7. Si m es la masa del cuerpo, entonces la constante del resorte es $24m$ y la fuerza de amortiguamiento es $-4m(dy/dt)$. El movimiento comienza al soltar el cuerpo desde 2 pie por encima de la posición de equilibrio con una velocidad inicial de 1 pie/ en la dirección vertical hacia arriba.
9. $-6\sqrt{2}(dy/dt)$

EJERCICIOS 19.6, PÁGINA 1017

1. $\operatorname{sen} x - x\cos x + e^{-y} = C$
3. $y = \tan(\sqrt{1 - x^2} + C)$
5. $y = (2x - \cos x + C)/(\sec x + \tan x)$
7. $y = 2\operatorname{sen} x + C\cos x$
9. $\sqrt{1 - y^2} + \operatorname{sen}^{-1} x = C$
11. $\csc y = e^{-x} + C$
13. $y = Ce^{-2\operatorname{sen} x} + \frac{1}{2}$
15. $y = (C_1 + C_2x)e^{4x}$
17. $y = C_1 + C_2e^{2x}$
19. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{5}e^{x}(\operatorname{sen} x + 2\cos x)$
21. $y = Ce^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}$
23. $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{12}e$
25. $y = (x - 2)^3/(3x) + C/x$
27. $y = e^{-(5/2)x}[C_1\cos(\sqrt{3}x/2) + C_2\operatorname{sen}(\sqrt{3}x/2)]$
29. $e^{x}(\operatorname{sen} x - \cos x) + 2e^{-y} = C$
31. $y = \frac{1}{2}\cos x + C\sec x$
33. $y = (\ln|\sec x + \tan x| - x + C)/(\csc x - \cot x)$
35. $y = \frac{3500}{3}e^{-3/(2\pi)}\cos 2\pi t - \frac{2000}{3}$; 1214
37. $f(t) = ab[e^{k(b-a)t} - 1]/[be^{k(b-a)t} - a]$
39. $y\,dy + x\,dx = 0$; una circunferencia con centro en el origen.

ÍNDICE

Abscisa, 12
Aceleración, 113, 754, 756
 centrípeta, 756
 componente normal de la, 773
 componente tangencial de la, 772
Acumulación de capital, 339
Alisada
 función, 305
 parte por parte, 308
Ángulo, 396
 central, 398
 entre vectores, 698
 negativo, 396
 positivo, 396
Antiderivada, 218
Aproximación
 por diferenciales, 123
 por Fórmula de Taylor, 523, 524
Área
 como un límite, 234, 878
 de una superficie de revolución, 311
 de un polígono rectangular circunscrito, 234
 de un polígono rectangular inscrito, 232
 de una región bajo una gráfica, 234
 de una superficie, 888
 en coordenadas polares, 664
Asíntota
 de una hipérbola, 622
 horizontal, 206
 vertical, 211

Biunívoca, función, 33

Cambio de variables, 262, 913
Campo (*véase también* Campo vectorial)
Campo (*continuación*)
 de fuerza (o de fuerzas), 926
 de variación inversa al cuadrado de la distancia, 927
 de velocidad (o de velocidades), 926
 vectorial, 926-927
Campo vectorial, 926
 conservativo, 929
 de fuerza, 926
 de variación inversa al cuadrado de la distancia, 927
 de velocidad, 926
 divergencia en un, 931, 973
 estacionario, 926
 flujo en un, 966
 irrotacional, 979
 rotacional en un, 930
 rotacionalidad de un, 978
Cardioide, 655
Catenaria, 446
Centro
 de curvatura, 767
 de gravedad, 325-326
Centro de masa
 de un sistema de partículas, 325-326
 de un sólido, 903
 de una lámina, 328
Centroide
 de un sólido, 903
 de una región plana, 329
Cero, vector, 680, 691
Ceros de una función, 34
Cicloide, 641
Cilindro, 723
 circular recto, 723
 elíptico, 723
 parabólico, 724
Cinética, energía, 902
Circulación en un campo vectorial, 978
Circunferencia
 de curvatura, 767
 ecuación de una, 18
 unitaria, 18
Coeficiente(s)
 principal, 44
 indeterminados, 1009
Combinación lineal, 685
Componente tangencial
 de un vector, 941
 de una aceleración, 772
Componentes de un vector, 680, 685, 691, 701-702
Concavidad
 hacia abajo, 184
 hacia arriba, 184
Condición
 adicional, 853
 inicial, 221, 986
Cónica(s), 602
 degradadas, 602
 directriz de una, 669
 ecuación polar de una, 671
 excentricidad de una, 669
Conjunto, 5
Cono, 727
 truncado, 310
Conservación de la energía, 951
Constante, 5
 de fuerza, 315
 de integración, 260
Continuidad
 de una función, 82, 799
 de una función vectorial, 746
 en un intervalo, 84
 por la derecha, 84
 por la izquierda, 84
Contradominio de una función, 30
Convergencia
 absoluta, 570
 condicional, 571
 de una integral impropia, 508, 515
 de una serie infinita, 545
 intervalo, 578
 radio de, 578
Coordenada
 x, 12, 690
 y, 12, 690
 z, 690
Coordenadas, 2
 cilíndricas, 732
 esféricas, 733
 polares, 653-654
 rectangulares, 11, 689-690
 transformación de, 913
Correspondencia, 29-30
 biunívoca, 2
Costo medio, 117
Cota superior, 541
 mínima, 541
Creciente, función, 162
Crecimiento, ley de, 383
Criterio(s)
 de comparación, 558-559
 de la primera derivada, 178
 de la raíz, 565
 de la razón, 563, 571
 de la segunda derivada, 186
Cruzan, rectas que se, 720
Cuadrantes, 11
Cuadrática, función, 44
Cuádrica, 724
Cúbica alabeada, 742
Curva(s)
 alisada o regular parte por parte, 641, 741, 953-954
 cerrada, 636
 cerrada simple, 636

Curva(s), (*continuación*)
de crecimiento de Gompertz, 386
de descenso en tiempo mínimo, 642
de nivel, 788
ecuaciones paramétricas de una, 636, 711
en el espacio, 741
extremos de una, 636
gráfica de una, 636
longitud de una, 649, 741
mutuamente ortogonales, 990
orientación de una, 934
parametrizada, 636, 741
plana, 636
regular o alisada, 641, 741
sentido (o dirección) positivo(a) de una, 916, 934
Curvatura, 764, 769
centro, circunferencia y radio de, 767

Del (∇), 831
Densidad
de un sólido, 897
lineal, 937
superficial, 328
(o masa específica), 897
Derecha
derivada por la, 95
límite por la, 62
Derecho, sistema coordenado, 689
Derivación (o diferenciación) (*véase también* Derivada)
implícita, 137
logarítmica, 372
Derivada
como tasa de variación (o razón de cambio), 111-112, 116
de orden superior, 144
de un cociente, 106
de un producto, 105
de una constante, 101
de una función compuesta, 131, 819
de una función constante, 101
de una función implícita, 137-138
de una función inversa, 389-390
de una función trigonométrica, 414
de una función vectorial, 746
de una integral, 257, 260
de una potencia, 102-103
de una serie de potencias, 582
de una suma, 104
definición de, 94
direccional, 829, 833
en relación con la continuidad, 99
notaciones para la, 99, 144
orden de la, 144
parcial, 802-803
por la derecha, 95
por la izquierda, 95
segunda, 143
tercera, 144
Derivadas parciales mixtas (o cruzadas), 806
Descartes, René, 11
Desigualdad(es), 2, 3
de Cauchy-Schwarz, 700
del triángulo, 4, 700
equivalentes, 7
Desplazamiento(s), 678-679
horizontales, 41
Determinante, 706
Diferencial
como una aproximación, 123-124
de longitud de arco, 651
definición de, 123, 813, 816
Dina, 313
Directriz
de un cilindro, 723
de una parábola, 602
de una sección cónica, 669
Discontinuidad, 82-83
de salto, 83
evitable, 83
infinita, 83
Discriminante, 631
Distancia sobre una recta coordenada, 4
Divergencia
de un campo vectorial, 931, 973
de una integral impropia, 508, 515
de una serie infinita, 545
Dominio
de una función, 30
de una variable, 5

e, el número, 360-361, 380
Ecuación
auxiliar, 1000
complementaria, 1006
de continuidad, 973
de un plano, 715
Ecuación diferencial
condición inicial de una, 221, 986
definición de, 221, 986
factor de integración (o integrativo), 993
lineal, 992, 999
no homogénea, 999
orden de una, 986
ordinaria, 986
separable, 383, 988
solución de una, 221, 986
solución particular de una, 986
solución singular de una, 987
Ecuación polar, 654
de una sección cónica, 671
Ecuaciones equivalentes, 15
Eje
coordenado, 2
de revolución, 289
de una parábola, 603
mayor de una elipse, 613
polar, 653
transverso de una hipérbola, 621
x, 11
y, 11
z, 689
Ejes
conjugados (de una hipérbola), 622
coordenados, 11
rotación de, 628
traslación de, 604
Elementos de un conjunto, 5
Elipse, 611
centro de una, 612
ecuación polar de una, 671
eje mayor de una, 613
eje menor de una, 613
excentricidad de una, 617
focos de una, 611
vértices, 613
Elipsoide, 724
Energía
cinética, 902, 951
potencial, 951
Enteros positivos, 2
Envolventes (o cortezas) cilíndricas, 297
Ergio, 313
Error
en la Regla de Simpson, 272
en la Regla del Trapecio, 269
medio, 127
porcentual, 127
Escalar, 678
función, 740
Esfera, 695
Esféricas, coordenadas, 733
Espacio, curva en el, 741
Espiral de Arquímedes, 657
Excentricidad, 617, 669
Exponentes, leyes de los, 375
Expresión cuadrática irreducible, 477
Extremo(s)
de un intervalo, 6
de una curva, 636
de una gráfica, 305

Factor de integración (o integrativo), 993
Figura de Lissajous, 640
Flujo, 966
neto de inversión, 339
Foco(s)
de una elipse, 611
de una hipérbola, 620
de una parábola, 602
Forma
de pendiente e intercepción, 24
indeterminada, 496
simétrica de la ecuación de una recta, 718
Fórmula(s)
de Cauchy, 496
de Euler, 1004
de la Distancia, 12, 691
de Maclaurin, 526
de reducción, 464
de Taylor, 523
del Punto Medio, 14, 694
Fracciones parciales, 477
Frontera, 872
Fuente, 967
Fuerza, 313
campo de, 926
constante de, 313
Fuerza, (*continuación*)
ejercida por un líquido, 319
resultante, 679
vector, 678
Función(es), 30
aceleración, 113
acotada, 243
algebraica, 45
alisada, 305
parte por parte, 307-308
biunívoca (o uno a uno), 33
ceros de una, 34
circulares, 400
cociente de dos, 43
composición (o compuesta), 45
con valores reales, 740
constante, 33, 162
continua, 82, 799
contradominio de una, 30
creciente, 162
cuadrática, 44
de costo, 117
de costo marginal, 118
de costo medio, 117
de demanda, 120
de demanda marginal, 120
de dos variables, 786
de ingreso, 117
de ingreso marginal, 118
de posición, 56
de potencial, 929
de tres variables, 387
de utilidad, 117
de utilidad marginal, 118
decreciente, 162
definida parte por parte, 36
derivable (o diferenciable), 95, 814
derivada de una, 94
discontinua, 82
dominio de una, 30
escalar, 740
exponencial, 360-361, 375
natural, 360
gradiente de una, 831, 833
gráfica de una, 34, 787
hiperbólica, 445
inversa, 451
identidad, 33
iguales, 31
impar, 33
implícita, 136
integrable, 241, 866
inversa, 346
límite de una, 59-60, 68, 206, 794-795, 798-799
lineal, 44
logarítmica (o logaritmo), 351, 378
natural, 351
longitud de arco, 308
máximo (o valor máximo) de una, 163, 844-845
mayor entero, 37
mínimo (o valor mínimo) de una, 163, 844-845
no definida, 31
número crítico de una, 166
par, 33
periódica, 402
polinomio (o polinomial), 44, 795

Función(es), (*continuación*)
potencia, 379
producto de dos, 43
punto crítico de una, 845
racional, 44, 795
representación en serie de potencias de una, 581
tabla de, 1041
trascendentales (o trascendentes), 45
trigonométricas, 400, 405-406
inversa, 432-435
valor de una, 30
valor medio (o promedio) de una, 250
valores extremos de una, 163, 845
locales de una, 165, 845
vectorial, 740
velocidad, 113

Gauss, Carl Friedrich, 969
Generatriz de un cilindro, 723
Gradiente de una función, 831, 833
Grado de un polinomio, 44
Gráfica
de un conjunto de números reales, 6
de un conjunto de pares ordenados, 14
de una ecuación, 15, 695
de una función, 34, 787
longitud de una, 305
Gravedad, fuerza de, 222

Hélice circular, 743
Hipérbola, 620
asíntotas de una, 622
centro de una, 621
eje conjugado de una, 622
eje transverso de una, 621
focos de una, 620
ramas de una, 622
vértices de una, 621
Hiperbólica(s), función(es), 455
inversa(s), 451
Hiperboloide, 725-726
Hipótesis de inducción, 1023

Identidad, función, 33
Identidades
fundamentales, 403
trigonométricas, 403, 406, 407
Impar, función, 33
Implícita,
derivación (o diferenciación), 137
función, 136
Incremento, 121-122, 810
Independencia de la trayectoria, 944
Independiente, variable, 32
Índice de sumatoria, 230
Inducción matemática, 1022
Ingreso, función de, 117
Integrable, función, 241, 866
Integración (*véase también* Integral(es))
cambio de variables para la, 262, 913
con respecto a x o a y, 285
constante de, 260
de expresión(es) cuadrática(s), 483-484
de funciones trigonométricas, 426
de función(es) racional(es), 476-477
fórmulas de, 1042-1046
indefinida, 260
inversión del orden de, 874
límites (o extremos) de, 241
método de sustitución en la, 262
numérica, 267-268
para series de potencias, 582
parcial, 869
por fracciones parciales, 477
por partes, 460
Regla de la Potencia para la, 262-263
uso de tablas de, 490
variable de, 260
y fórmulas de reducción, 464
y sustituciones trigonométricas, 471
Integral(es) (*véase también* Integración)
cambio de variables en las, 262, 913
criterio para series de, 555
de flujo, 965
de línea, 935
de superficie, 962
de una función vectorial, 750
definida, 241
derivada de una, 257, 260
doble(s), 866
cambio de variables en las, 916
en coordenadas polares, 882-883
invertir el orden de integración de, 874
iterativas, 869-871
teorema de evaluación de, 872
en coordenadas polares, 663
estimación de, por métodos numéricos, 267-268
impropias, 508, 515
indefinida, 260
iterativa
doble, 869-870
triple, 892
múltiples, 864
símbolo ($\int$) para las, 241
tablas de, 1042-1046
Teorema del Valor Medio para la, 248
triple, 891
Integrando, 241, 260
Intercepción(es), 15
x, 15
y, 15
Intersección de conjuntos, 5
Intervalo(s)
abierto, 6
cerrado, 6
Intervalo(s), (*continuación*)
de convergencia, 578
infinitos, 7
semiabiertos, 6
Inversa, función, 346
Isobaras, 789
Isotermas, 789
Izquierda
derivada por la, 95
límite por la, 62

Jacobiano, 916, 918
Joule (unidad de trabajo), 313

Kepler, Johannes, 777

Lado
final de un ángulo, 396
inicial de un ángulo, 396
Lagrange, Joseph-Louis, 853
Lámina, 327
homogénea, 327
masa de una, 328, 898, 900
momento de una, 328, 900
Leibniz, Gottfried Wilhelm, x
Ley(es)
de Coulomb, 928
de crecimiento, 383
de Hooke, 315
de la gravitación universal de Newton, 928
de Kepler, 777
de los logaritmos, 353
Limazón o caracol, 655
Límite(s)
al infinito e infinitos, 205, 215
de integración, 241
de sumas, 240
de una función, 59-60, 68, 206, 794-795, 799
vectorial, 745
de una sucesión, 534
métodos para calcular, 73-79
por la derecha, 62
por la izquierda, 62
unilaterales, 62
Lineal,
ecuación, 24, 716
diferencial, 992, 999
función, 44
Locales, valores extremos, 165, 845
Logarítmica, derivación (o diferenciación),372
Logaritmo(s)
comunes, 378
en base a, 378
función, 351, 378
leyes de los, 353
natural, 351
tabla de, 1041
Longitud
de arco, 305, 306, 649, 711
de un segmento, 5
de una curva, 305-306, 649, 741
de una gráfica, 306
L'Hôpital, G.L., 497

Maclaurin,
fórmula de, 526
serie de, 588, 591-592
Magnitud de un vector, 678, 681, 691
Mapas orográficos (o planos de configuración), 789
Marginal,
costo, 118
medio, 118
demanda, 120
ingreso, 118
utilidad, 118
Masa(s),
centro de, 328, 900, 903
de un sólido, 897, 903
de una lámina, 328, 898, 900
específica o densidad, 897
por unidad de área, 328
puntuales, 324
Máximo (o valor máximo), 163, 844-845
y mínimo absolutos, 164, 845
Máximos y mínimos
en la frontera, 845
sujetos a restricción, 853
Mayor entero, función, 37
Mayor que, 2
Media aritmética, 250
Medida (o valor) en radianes, 397
Menor que, 2
Método
de Newton, 154
de sustitución, 262
Mínimo (o valor mínimo), 163, 844-845
Möbius, A.F., 965
Momento
de inercia, 902, 904
de un sistema de partículas, 325-326
de un sólido, 903-904
de un vector, 712
de una lámina, 900
de una partícula, 325
polar de inercia, 902
primer, 325
Movimiento
armónico simple, 419
rectilíneo, 55
Múltiples, integrales, 864
cambio de variables en las, 913
Multiplicador de Lagrange, 854
Múltiplo escalar de un vector, 679
Mutuamente ortogonales, curvas, 990

Natural
función exponencial, 360-361
función logaritmo, 351
logaritmo, 351
Newton (unidad de fuerza), 313
Newton, Isaac, x
Norma de una partición, 238, 865, 890
Normal exterior, 965
Notación
con delta (Δ), 121-122
de sumatoria, 230
Numérica, integración, 267-268

Número(s)
 complejo, 1002
 crítico, 166
 irracional(es), 2
 racional, 2
 real(es) negativo(s), 2
 real(es) positivo(s), 2

Octantes, 690
Operador(es)
 diferencial lineal, 1006
 diferencial(es), 99, 1006
Orden
 de integración, inversión del, 874
 de una derivada, 144
 de una ecuación diferencial, 986
Ordenada, 12
Ordinaria, ecuación diferencial, 986
Orientación de una curva, 934
Origen, 2, 11, 689
Ortogonales (o perpendiculares)
 planos, 717
 rectas, 715
 vectores, 698

p, serie, 557
Par ordenado, 11
Parábola, 16, 602
Paraboloide, 722
 hiperbólico, 728
Paralelas(os)
 planos, 717
 rectas, 25, 715
 vectores, 684, 692
Paramétricas, ecuaciones, 636, 741
Parametrización, 637, 741
Parametrizada, curva, 637, 741
Parámetro, 636
 longitud de arco, 763
Parcial, integración, 869
Parciales, derivadas, 802
Parte por parte, función definida, 36
Partición, 238, 864, 890
 interna, 865, 892
 norma de una, 238, 865, 890
 polar, 882
 uniforme, 242
Pendiente, de una recta tangente, 54
 en coordenadas polares, 660
Periódica, función, 402
Periodo, 402
Perpendiculares, rectas, 26
Peso específico de un fluido, 319
Plana, curva, 636
Plano(s)
 coordenado, 11
 de configuración, 789
 ortogonales, 717
 paralelos, 717
 tangente, 838
 xy, 11, 689
 xz, 689
 yz, 689
Polares, coordenadas, 653
 integrales dobles en, 882
Polar, eje, 653
Polígono
 rectangular circunscrito, 234
 rectangular inscrito, 232
Polinomial (polinomio), función, 44, 795
Polinomio(s), 44, 795
 cero, 44
 de Taylor, 524
 constantes, 44
Polo, 653
Porcentual, error, 127
Posición
 función de, 56
 normal (o estándar) de un ángulo, 396
 vector de, 679
Positivo(a), sentido (u orientación), 934
Positivos, series de términos, 554
Potencial, 929
 energía, 951
 función de, 929
Potencia(s),
 derivación de, 582
 función, 379
 integración de, 582
 intervalo de convergencia, 578
 radio de convergencia, 578
 representación de una función por, 581
 serie de, 575, 579
Presión de un fluido, 319
Primer
 octante, 690
 orden, ecuación diferencial de, 992
Principal, vector unitario normal, 761-769
Principio
 de inducción matemática, 1022
 de Pascal, 321
Producto
 (de) punto, 697
 escalar, 697, 701
 interior, 697
 vectorial, 706
Propiedad de completitud, 541
Proyección regular, 961
Punto
 crítico, 845
 de inflexión, 185
 en la frontera, 798
 interior, 798
 silla, 846

Racional, función, 44, 795
Radio
 de convergencia, 578
 de curvatura, 767
 medio, 297
Ramas de una hipérbola, 622
Rapideces de variación relacionadas, 147
Rapidez, 113, 754, 756
 angular, 755
Recta(s)
 ecuación de una, 23, 713
 ecuaciones paramétricas de una, 713
 en el espacio, 713
 forma simétrica de una, 718
 horizontal, 21
Recta(s), (*continuación*)
 normal, 133, 840
 numérica real, 2
 ortogonales, 715
 paralela a un vector, 713
 paralelas, 25, 715
 pendiente de una, 20-21
 perpendiculares, 26
 que se cruzan, 720
 secante, 53
 tangente, 54, 95
 vertical, 21
Rectangular (o cartesiano), sistema coordenado, 11
Rectangular, región, 844
Región
 abierta, 798
 acotada, 844
 bajo una gráfica, 232
 cerrada, 798, 844
 conexa, 945
 del Tipo I o del Tipo II, 864
 rectangular, 844
 simplemente conexa, 948, 981
Regla
 de la Cadena, 131, 819
 de la Potencia, 102, 141
 para las antiderivadas, 220
 para las integrales definidas, 255
 para las integrales indefinidas, 260
 de las Dos Trayectorias, 797
 de Simpson, 270
 error en la, 272
 del Cociente, 106
 del Producto, 105
 del Punto Medio, 272
 del Trapecio, 268
 error en la, 269
Regular o alisada, curva, 641, 741
 parte por parte, curva, 641, 741, 953
Residuo
 de Taylor, 524
 en la Fórmula de Taylor, 523
Resultante, 679
Retráctil (o telescópica), serie, 546
Revolución
 eje de, 289
 sólido de, 289
 superficie de, 309
Rosa de cuatro pétalos, 656
Rotación de ejes, 628
Rotacionalidad de un campo vectorial, 978

Sección transversal, 301
Segmentos dirigidos, 678
Segunda
 derivada, 143
 ley de Newton, 757
Sentido negativo, 2, 916
Separable, ecuación diferencial, 383, 988
Serie(s) infinita(s), 544-545
 agrupamiento de términos de una, 561
 alternante, 566
 armónica, 547
Serie(s) infinita(s), (*continuación*)
 condicionalmente convergente, 571
 convergente, 545
 absolutamente, 570
 condicionalmente, 571
 criterio(s)
 de comparación para, 558-559
 de la integral para, 555
 de la raíz para, 565
 de la razón para, 563, 571
 para la divergencia, 549
 de Maclaurin, 588, 591-592
 de potencias, 575, 579
 de Taylor, 587
 de términos positivos, 554
 del Binomio, 595-596
 divergente, 545
 dominante, 558
 geométrica, 547
 guías para analizar, 573-574
 hiperarmónica, 557
 n-ésimo término de una, 545
 p, 557
 reordenamiento de términos de una, 561
 retráctil (o telescópica), 546
 suma de una, 545
 sumas parciales de una, 545
 supresión de términos de una, 550
 término de una, 545
Simetría, 16
 criterios de, 16, 658
Simplemente conexa, región, 948, 981
Sistema
 coordenado, 2, 654, 689
 de coordenadas rectangulares, 690
 derecho, 689
 izquierdo, 689
 rectangular (o cartesiano), 11
Sólido
 de revolución, 289
 homogéneo, 897
 no homogéneo, 897
Solución(es)
 de una desigualdad, 7
 de una ecuación, 15
 diferencial, 221, 986
 particular, 986
 singulares, 987
Subconjunto, 5
Subintervalo, 6
Sucesión
 acotada, 540-541
 infinita, 532
 de sumas parciales, 545
 límite de, 534-535
 monótona, 540
 términos de una, 532
Suma
 de ordenadas, 445
 de Riemann, 239, 865, 892
 de una serie infinita, 545
 doble, 877
 parcial de una serie, 545
Sumidero, 967
Superficie(s), 695

Superficie(s), (*continuación*)
área de una, 311, 887-888
cerrada, 969
de nivel, 789
de revolución, 309
equipotenciales, 790
integral de, 962
Sustitución
método de, 262
trigonométrica, 471

Tabla
de funciones
exponenciales, 1041
logarítmicas, 1041
trigonométricas, 1040
de integrales, 1042-1046
Tangente,
recta
a una curva, 647
pendiente de una,54, 95
vertical, 21
vector, 749
Tasa de variación (o razón de cambio)
instantánea, 112
la derivada como una, 111, 116
media, 112, 116
Taylor, serie de, 587
Teorema
de Green, 954
de la divergencia, 969
de la intercalación, 79, 539
de Lagrange, 853
de Pappus, 906
de Rolle, 170
de Stokes, 976
del binomio, 102
del valor intermedio, 87
del valor medio, 172
fundamental del cálculo, 252-253
para la integral definida, 248
Tercera derivada, 144
Término
constante, 44
de un polinomio, 44
de una serie, 545
de una sucesión, 532
Terna ordenada, 689
Toroide (o toro), 906
Torque (o vector momento), 712
Trabajo, 313, 702, 940-941
Transformación de coordenadas, 913
Transición suave (o alisada), 108
Transcedentales (o trascendentes), funciones, 45
Traslación de ejes, 604
Trayectoria(s), 797, 944
ortogonal, 990
Traza
xy, 722
xz, 722
yz, 722
Trazo de puntos, 12
Triángulo rectángulo, 405
Trigonométricas
funciones, 400, 405-407
inversas, 432-435
Triple producto
escalar, 711
vectorial, 711
Triple(s), integral(es), 891
cambio de variables en, 918
en coordenadas cilíndricas, 908
en coordenadas esféricas, 911
iterativa, 892
Teorema del Valor Medio para, 972

Unidad astronómica (UA), 617
Uniforme, partición, 242
Unilaterales, límites, 62
Unión de conjuntos, 5
Unitaria, circunferencia, 18
Unitario, vector, 686, 693
normal, 761
tangente, 761
Utilidad, función de, 117

Valor
absoluto, 3
de prueba, 89
de una función, 30
medio (o promedio), 250
Valores extremos
absolutos, 845
criterios para, 178, 186-187, 847
Valores extremos, (*continuación*)
de una función, 164-165, 844-845
en la frontera, 166, 845
locales, 165, 844-845
Variable(s), 5
cambio de, 262, 913
de integración, 260
de sumatoria, 230
dependiente, 32, 787
dominio de una, 5
ficticia (o muda), 241
independiente, 32, 787
linealmente relacionadas, 27
Variación de parámetros, 1007
Vector(es)
adición de, 680
ángulo entre, 698
bidimensional, espacio, 680
campo de, 926
cero, 680, 691
combinación lineal de, 685
componente
horizontal, 685
tangencial, 941
vertical, 685
componentes de, 680, 685, 691, 701
de posición, 679, 753
de tres dimensiones, espacio, 691
diferencia de, 683, 691
dirección opuesta entre, 683, 692
equivalentes, 678
fuerza, 678
i, 685, 693
iguales, 678
j, 685, 693
k, 685, 693
magnitud de un, 678, 681, 691
misma dirección entre, 683, 692
momento de fuerza, 712
multiplicación por escalares, 679-680
múltiplo escalar de un, 679
negativo de un, 680, 691
normal, 715
ortogonales, 698
producto
cruz (o de cruz) de, 706
Vector(es), (*continuación*)
escalar de, 697
exterior de, 706
interior de, 697
punto (o de punto) de, 697, 701
vectorial de, 706
punto final de un, 678
punto inicial de un, 678
resultante, 679
suma de, 679
sustracción de, 683, 691
tangente, 749
torque, 712
triple producto escalar, 711
triple producto vectorial, 711
unitario, 686, 693
normal, principal, 761
tangente, 761
velocidad, 678, 754
Vectores equivalentes, 678
Velocidad, 57, 113, 678, 754, 756
angular, 757
instantánea, 56
media, 55
Vertical, recta tangente, 215
Vértice(s)
de una elipse, 613
de una hipérbola, 621
de una parábola, 603
Vibración(es), 1012
amortiguada, 1014
con amortiguamiento crítico, 1015
sobreamortiguada, 1015
subamortiguada, 1015
Volumen, 290, 298, 866, 877
de un sólido de revolución, 290
determinación mediante envolventes cilíndricas (o cortezas), 297
mediante discos (o rodajas), 290
mediante el teorema de Pappus, 906
mediante integrales dobles, 866
por cortes transversales, 301
por medio de arandelas, 293
por medio de integrales triples, 894

Impresión terminada en:
Acuario Editores, S.A. de C.V
Av. Río Consulado No. 590-D
Col. Atlampa
06450 México, D.F.

Mayo, 1991.

5,000 ejemplares mas sobrantes

89 90 6 1
07 11 24 5